F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

1

TOMUL 21

1969

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAŞ — secretar de redacție.

La revue „STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE" paraît 10 fois par an. Le prix d'un abonnement annuel est de $ 10 —; £ 4.3.0; F. F. 49. —; D. M. 40.—.
Toute commande de l'étranger sera adressée a CARTIMEX. Boîte postale 134—135, Bucarest, Roumanie, ou à ses représentants à l'étranger.
En Roumanie, vous pourrez vous abonner par les bureaux de poste ou chez votre facteur.
În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondenţă, se trimit la Comitetul de redacţie al revistei pe adresa: Str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

TOM. 21, NR. 1
1969

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

ORSZÁGOS [illegible] KÖNYVTÁR

SUMAR

Pag.

ȘTEFAN N. BERȚI, Aplicații ale teoriei relațiilor în logica matematică 3
NICOLAE BOTH, Asupra completitudinii unui sistem de axiome 13
ANDREI DUMA, Observații asupra conexiunii spectrului prim 17
SILVIU GUIAȘU, Construirea probabilității pe baza informației 23
GHEORGHE LUSZTIG, Coomologia complexelor eliptice . . . 33
I. MARUȘCIAC și GH. NADIU, O mașină turing universală pentru algoritmii normali 85
I. MATEI, Asupra grupului de stabilitate al unui spațiu A_3 omogen 97
I. MATEI, Asupra spațiilor A_3 omogene cu grup G_r ($r \leqslant 7$) 101
MARIA MIHOC, Nomograme de genul doi cu scară rectilinie regulată sau proiectivă 111
SIMONA PANTAZI, Asupra curbelor de grad minim neolonome 119
CONSTANTIN T. RAISCHI, Contexte caracteristice în ligvistica algebrică 123
ALEXANDRU GH. RADU, Toposul prefasciculelor aditive de grupuri abeliene peste o categorie preaditivă mică (I) . . . 141
ALEXANDRU GH. RADU, Proprietăți de finitudine în categorii abeliene (II) 151
DAN SOCOLESCU, Asupra jeturilor incompresibile mărginite de jeturi auxiliare infinit subțiri 161
ION GH. ȘABAC, Asupra aproximării mișcării subsonice a unui fluid compresibil în jurul unui obstacol 177
PETRU ȘANDRU, Asupra schemelor π cu contacte și elemente de execuție 195

M. 21, NR. 1, P. 1–202, BUCUREȘTI, 1969.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR

APLICAŢII ALE TEORIEI RELAŢIILOR ÎN LOGICA MATEMATICĂ

DE

ŞTEFAN N. BERŢI

(Cluj)

Operaţiile logice binare pun în corespondenţă la două propoziţii o a treia propoziţie, corespondenţa fiind un invariant pentru valorile logice 0 şi 1.

În lucrare vom interpreta operaţiile logice ca relaţii binare şi vom studia proprietăţile acestor relaţii.

§ 1. OPERAŢII LOGICE

Fie P şi A două mulţimi nevide şi λ o aplicaţie $\lambda : P \to A$. Două sisteme finite de elemente din P :

$$a_1, \ldots, a_n \text{ şi } a'_1, \ldots, a'_n$$

se numesc λ, *n-echivalente* dacă

$$\lambda(a_j) = \lambda(a'_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Dacă $a_1, \ldots, a_n$ şi $a'_1, \ldots, a'_n$ sînt λ, n-echivalente, vom nota

$$(a_1, \ldots, a_n) \overset{\lambda, n}{\simeq} (a'_1, \ldots, a'_n).$$

Vom spune că o corespondenţă

$$\mu : P^n \to P$$

este o *operaţie prelogică* în sistemul (P, A, λ, n) dacă pentru

$$(a_1, \ldots, a_n) \overset{\lambda, n}{\simeq} (a'_1, \ldots, a'_n)$$

avem

$$\lambda(\mu(a_1, \ldots, a_n)) = \lambda(\mu(a'_1, \ldots, a'_n)).$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 1, P. 3—11, BUCUREŞTI, 1969

Sistemul (P, A, λ, n) se numeşte *sistem logic*, elementele lui P se numesc *propoziţii*, iar elementele lui A *valori logice*.

Vom nota cu $R(P, A, \lambda, n)$ mulţimea corespondenţelor prelogice în sistemul (P, A, λ, n). Două corespondenţe

$$\mu, \mu_1 \in R(P, A, \lambda, n)$$

sînt *echivalente* dacă pentru orice $a_1, \ldots, a_n \in P^n$ avem

$$\lambda(\mu(a_1, \ldots, a_n)) = \lambda(\mu'(a_1, \ldots, a_n)).$$

în care caz notăm $\mu \sim \mu_1$.

Clasele de echivalenţă corespunzătoare sînt *operaţii logice* din (P, A, λ, n).

Teorema 1. *Dacă mulţimea A are a elemente, atunci există în total*

$$a^{a^n}$$

operaţii logice în (P, A, λ, n).

Demonstraţie. Numărul claselor de echivalenţă determinate de echivalenţa $\overset{\lambda, n}{\sim}$ este a^n. Pentru fiecare asemenea clasă putem pune în corespondenţă unul din elementele lui A, deci există a^{a^n} operaţii logice în (P, A, λ, n).

În continuare ne vom ocupa de operaţiile logice binare în care A are două elemente : 0 (valoarea logică *fals*) şi 1 (valoarea logică *adevăr*), iar $n = 1$ sau $n = 2$. Pentru $n = 1$ avem logica unitară, iar pentru $n = 2$ avem logica binară.

Din teorema de mai sus rezultă că există $2^{2^1} = 4$ operaţii logice unitare şi $2^{2^2} = 16$ operaţii logice binare.

Vom studia cele 16 operaţii logice binare, pe care le vom nota prin

$$L_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, 15).$$

Dacă numărul k scris în baza 2 este

$$s(k, 3)\, 2^3 + s(k, 2)\, 2^2 + s(k, 1)\, 2 + s(k, 0),$$

atunci operaţia L_k se va defini prin tabelul

$\lambda(p)$	$\lambda(q)$	$\lambda(p L_k q)$
0	0	$s(k, 3)$
0	1	$s(k, 2)$
1	0	$s(k, 1)$
1	1	$s(k, 0)$

Se verifică uşor că operaţiile logice uzuale $\wedge$, $\vee$, $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, sînt L_1, L_7, L_9, L_{13}.

TEOREMA 2. *Dacă k este un număr real nenegativ, atunci avem reprezentarea*

$$k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1-(-1)^{\left[\frac{k}{2^n}\right]}}{2} \cdot 2^n.$$

Demonstraţie. Orice număr real k se poate reprezenta sub forma

$$k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(k,\ n)\, 2^n$$

unde $s(k,\ n) \in \{0,\ 1\}$; această reprezentare fiind unică, deoarece nu avem un şir de forma

$$s(k,\ -t),\ s(k,\ -t-1),\ s(k,\ -t-2),\ \ldots$$

$(t > 0)$ format numai din termenii 1. Dacă am avea un astfel de şir, atunci

$$\sum_{n=-\infty}^{t} s(k,\ n)\, 2^n = \sum_{n=-\infty}^{-t} 2^n = 2^{t-1}.$$

k fiind un număr real, el este superior mărginit şi avem o reprezentare de forma

$$k = \sum_{n=-\infty}^{m} s(k,\ n)\, 2^n$$

de unde obţinem

$$s(k,\ n) = \frac{k}{2^n} - 2M - \frac{t}{2},$$

unde

$$M = \sum_{j=n+1}^{m} s(k,\ j)\, 2^{j-n-1}$$

este un număr întreg şi

$$t = \sum_{j=-\infty}^{n-1} \frac{s(k,\ j)}{2^{n-j-1}}$$

este un număr subunitar.

Deci $s(k,\ n)$ este de aceeaşi paritate ca şi $\left[\frac{k}{2^n}\right]$. Astfel

$$s(k,\ n) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } \left[\frac{k}{2^n}\right] \text{ este un număr impar,} \\ 0 \text{ dacă } \left[\frac{k}{2^n}\right] \text{ este un număr par,} \end{cases}$$

deci

$$s(k, n) = \frac{1 - (-1)^{\frac{k}{2^n}}}{2}.$$

Din această teoremă obţinem imediat

TEOREMA 3. *Dacă k este un număr întreg nenegativ, atunci*

$$k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^{\left[\frac{k}{2^n}\right]}}{2} \cdot 2^n.$$

§ 2. OPERAŢIILE LOGICE BINARE INTERPRETATE CA RELAŢII BINARE

Operaţia logică binară L_k se poate interpreta ca o relaţie binară definită în $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$. Astfel

$$L_k = \{(a, b) : \lambda(aL_kb) = 1\}.$$

TEOREMA 4. *Pentru complementară avem formula*

$$\complement L_k = L_{15-k}.$$

Demonstraţie. Avem

$$\complement L_k = \{(a, b) : \lambda(aL_k b) = 0\} = \{(a, b) : \lambda(a L_{15-k} b) = 1\} = L_{15-k}.$$

TEOREMA 5. *Pentru intersecţie avem formula*

$$L_k \cap L_l = L_u,$$

unde

$$u = \frac{15}{4} + \sum_{n=0}^{3} t\left(\left[\frac{k}{2^n}\right], \left[\frac{l}{2^n}\right]\right) 2^{n-2}$$

şi

$$t(a, b) = \begin{cases} 3 \text{ dacă } a, b \text{ sînt impare} \\ -1 \text{ dacă nu sînt ambele impare.} \end{cases}$$

Demonstrație. Avem

$$u = \sum_{n=0}^{3} s(k, n) . s(l, n) . 2^n = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} \left(1 - (-1)^{\left[\frac{k}{2^n}\right]}\right) \left(1 - (-1)^{\left[\frac{l}{2^n}\right]}\right) 2^n =$$

$$= \frac{15}{4} + \sum_{n=0}^{3} t\left(\left[\frac{k}{2^n}\right], \left[\frac{l}{2^n}\right]\right) 2^{n-2}.$$

TEOREMA 6. *Pentru reuniune avem formula*

$$L_k \cup L_l = L_v$$

unde

$$v = \frac{45}{4} - \sum_{k=0}^{3} t\left(\left[\frac{15-k}{2^n}\right], \left[\frac{15-l}{2^n}\right]\right) 2^{n-2}.$$

Demonstrație. Folosind relația lui de Morgan avem

$$L_k \cup L_l = \complement(\complement(L_k \cup L_l)) = \complement(\complement L_k \cap C L_l) = 15 - (L_{15-k} \cap L_{15-l}) =$$

$$= 15 - \frac{15}{4} - \sum_{n=0}^{3} t\left(\left[\frac{15-k}{2^n}\right], \left[\frac{15-l}{2^n}\right]\right) 2^{n-2} =$$

$$= \frac{45}{4} - \sum_{n=0}^{3} t\left(\left[\frac{15-k}{2^n}\right], \left[\frac{15-l}{2^n}\right]\right) 2^{n-2}.$$

Exemplu. Avem

$$L_5 \cap L_{12} = L_4.$$

Într-adevăr,

$$u = \frac{15}{4} + t(5,12)\frac{1}{4} + t(2,6)\frac{1}{2} + t(1,3) + t(0,1)\,2 =$$

$$= \frac{15}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3 - 2 = 4.$$

Pe de altă parte,

$$L_5 = \{(0,1),\ (1,1)\},\ L_{12} = \{(0,0),\ (0,1)\},$$

deci

$$L_5 = L_{12} = \{(0,1)\} = L_4.$$

Tabelul 1

∪	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	3	3	5	5	7	7	9	9	11	11	13	13	15	15
2	2	3	2	3	6	7	6	7	10	11	10	11	14	15	14	15
3	3	3	3	3	7	7	7	7	11	11	11	11	15	15	15	15
4	4	5	6	7	4	5	6	7	12	13	14	15	12	13	14	15
5	5	5	7	7	5	5	7	7	13	13	15	15	13	13	15	15
6	6	7	6	7	6	7	6	7	14	15	14	15	14	15	14	15
7	7	7	7	7	7	7	7	7	15	15	15	15	15	15	15	15
8	8	9	10	11	12	13	14	15	8	9	10	11	12	13	14	15
9	9	9	11	11	13	13	15	15	9	9	11	11	13	13	15	15
10	10	11	10	11	14	15	14	15	10	11	10	11	14	15	14	15
11	11	11	11	11	15	15	15	15	11	11	11	11	15	15	15	15
12	12	13	14	15	12	13	14	15	12	13	14	15	12	13	14	15
13	13	13	15	15	13	13	15	15	13	13	15	15	13	13	15	15
14	14	15	14	15	14	15	14	15	14	15	14	15	14	15	14	15
15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15

Tabelul 2

∩	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
4	0	0	0	0	4	4	4	4	0	0	0	0	4	4	4	4
5	0	1	0	1	4	5	4	5	0	1	0	1	4	5	4	5
6	0	0	2	2	4	4	6	6	0	0	2	2	4	4	6	6
7	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7
8	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	8	8	8	8	8	8
9	0	1	0	1	0	1	0	1	8	9	8	9	8	9	8	9
10	0	0	2	2	0	0	2	2	8	8	10	10	8	8	10	10
11	0	1	2	3	0	1	2	3	8	9	10	11	8	9	10	11
12	0	0	0	0	4	4	4	4	8	8	8	8	12	12	12	12
13	0	1	0	1	4	5	4	5	8	9	8	9	12	13	12	13
14	0	0	2	2	4	4	6	6	8	8	10	10	12	12	14	14
15	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Pentru reuniunea şi intersecţia relaţiilor logice binare avem tabelele 1 şi 2 în care, pentru simplificare, am notat cu k relaţia L_k.

Vom trece la studiul produsului de relaţii logice binare. Se ştie că $B,\ B_1 \subset M^2$ fiind două relaţii binare în M, avem prin definiţie

$$BB_1 = \{(a,\ b) \mid \exists\, c : aBc \wedge cB_1 b\}.$$

TEOREMA 7. *Produsul relaţiilor se defineşte prin formula*

$$L_k L_l = L_x$$

unde

$$s\,(x,\ j) =$$

$$= \begin{cases} 1 \text{ dacă } s\left(k,\ 2\left[\frac{j}{2}\right]+1\right) s\left(l,\ j+2-2\left[\frac{j}{2}\right]\right) + s\left(k,\ 2\left[\frac{j}{2}\right]\right) s\left(l,\ j-2\left[\frac{j}{2}\right]\right) > 0 \\ 0 \text{ dacă } s\left(k,\ 2\left[\frac{j}{2}\right]+1\right) s\left(l,\ j+2-2\left[\frac{j}{2}\right]\right) + s\left(k,\ 2\left[\frac{j}{2}\right]\right) s\left(l,\ j-2\left[\frac{j}{2}\right]\right) = 0. \end{cases}$$

Demonstraţie. Vom nota

$$L_k = \begin{pmatrix} s\,(k,\ 3) & s\,(k,\ 2) & s\,(k,\ 1) & s\,(k,\ 0) \\ (0,\ 0) & (0,\ 1) & (1,\ 0) & (1,\ 1) \end{pmatrix}$$

unde $\overset{0}{(i,\ j)} = \emptyset$, $\overset{1}{(i,\ j)} = (i,\ j)$. În acest caz, folosind definiţia produsului de relaţii, avem:

$$s\,(x,\ 3) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } s\,(k,\ 3)\, s\,(l,\ 3) + s\,(k,\ 2)\, s\,(l,\ 1) > 0 \\ 0 \text{ dacă } s\,(k,\ 3)\, s\,(l,\ 3) + s\,(k,\ 2)\, s\,(l,\ 1) = 0 \end{cases}$$

$$s\,(x,\ 2) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } s\,(k,\ 3)\, s\,(l,\ 2) + s\,(k,\ 2)\, s\,(l,\ 0) > 0 \\ 0 \text{ dacă } s\,(k,\ 3)\, s\,(l,\ 2) + s\,(k,\ 2)\, s\,(l,\ 0) = 0 \end{cases}$$

$$s\,(x,\ 1) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } s\,(k,\ 1)\, s\,(l,\ 3) + s\,(k,\ 0)\, s\,(l,\ 1) > 0 \\ 0 \text{ dacă } s\,(k,\ 1)\, s\,(l,\ 3) + s\,(k,\ 0)\, s\,(l,\ 1) = 0 \end{cases}$$

$$s\,(x,\ 0) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } s\,(k,\ 1)\, s\,(l,\ 2) + s\,(k,\ 0)\, s\,(l,\ 0) > 0 \\ 0 \text{ dacă } s\,(k,\ 1)\, s\,(l,\ 2) + s\,(k,\ 0)\, s\,(l,\ 0) = 0. \end{cases}$$

Aceste formule se pot scrie sub forma unită din enunţ şi astfel teorema 7 este demonstrată.

În tabelul 3 avem produsele relaţiilor binare cu aceleaşi simplificări ca şi în celelalte tabele (L_k notat cu k).

Tabelul 3

↗.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
2	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
3	0	1	2	3	1	1	3	3	2	3	2	3	3	3	3	3
4	0	4	8	12	0	4	8	12	0	4	8	12	0	4	8	12
5	0	5	10	15	0	5	10	15	0	5	10	15	0	5	10	15
6	0	4	8	12	1	5	9	13	2	6	10	14	3	7	11	15
7	0	5	10	15	1	5	11	15	2	7	10	15	3	7	11	15
8	0	0	0	0	4	4	4	4	8	8	8	8	12	12	12	12
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
10	0	0	0	0	5	5	5	5	10	10	10	10	15	15	15	15
11	0	1	2	3	5	5	7	7	10	11	10	11	15	15	15	15
12	0	4	8	12	4	4	12	12	8	12	8	12	12	12	12	12
13	0	5	10	15	4	5	14	15	8	13	10	15	12	13	14	15
14	0	4	8	12	5	5	13	13	10	14	14	10	15	15	15	15
15	0	5	10	15	5	5	15	15	10	15	10	15	15	15	15	15

TEOREMA 8. *Are loc egalitatea*

$$L_9 \, L_l = L_l \, L_9 = L_l ,$$

deci relaţia logică binară L_9, *adică echivalenţa, are rolul unităţii.*

Demonstraţie. Avem :

$$s\left(9,2\left[\frac{j}{2}\right]+1\right)s\left(l,j+2-2\left[\frac{j}{2}\right]\right)=\begin{cases} s\,(9,3)\,s\,(l,\,j) & \text{pentru } j=3,\ 2 \\ s\,(9,1)\,s\,(l,\,j+2) & \text{pentru } j=1,\ 0 \end{cases}$$

$$s\left(9,2\left[\frac{j}{2}\right]\right)s\left(l,j-2\left[\frac{j}{2}\right]\right)=\begin{cases} s\,(9,2)\,s\,(l,\,j-2) & \text{pentru } j=3,\ 2 \\ s\,(9,0)\,s\,(l,\,j) & \text{pentru } j=1,\ 0 \end{cases}$$

$$s\,(9,3)=s\,(9,0)=1, \quad s\,(9,2)=s\,(9,1)=0,$$

$$s\left(9,2\left[\frac{j}{2}\right]+1\right)s\left(l,j+2-2\left[\frac{j}{2}\right]\right)=\begin{cases} s\,(l,\,j) & \text{pentru } j=3,2 \\ 0\,.\,s(l,\,j+1)=0 & \text{pentru } j=1,0 \end{cases}$$

$$s\left(9,2\left[\frac{j}{2}\right]\right)s\left(l,j-2\left[\frac{j}{2}\right]\right)=\begin{cases} 0\,.\,s\,(l,j-2)=0 & \text{pentru } j=3,2 \\ s\,(l,\,j) & \text{pentru } j=1,0 \end{cases}$$

deci

$$s\left(9,2\left[\frac{j}{2}\right]+1\right)s\left(l,j+2-2\left[\frac{j}{2}\right]\right)+s\left(9,2\left[\frac{j}{2}\right]\right)s\left(l,j-2\left[\frac{j}{2}\right]\right)=$$

$$=\begin{cases} s\,(l,j\,)+0=s\,(\,l,j) & \text{pentru } j=3{,}2 \\ 0+s\,(l,j)=s\,(l,\ j) & \text{pentru } j=1{,}0 \end{cases}$$

adică

$$s\,(x,\ j)=s\,(l,\ j)$$

şi astfel s-a stabilit egalitatea $L_9L_l=L_l$. Asemănător se arată că $L_l\,L_9=L_l$. De asemenea se arată uşor că are loc

TEOREMA 9. *Are loc egalitatea*

$$L_6L_k=L_{4k}\ (\text{mod } 15).$$

Observaţie. Calculul produsului se simplifică folosind tabelul de mai jos

↗.	1	2	4	8
1	1	2	0	0
2	0	0	1	2
4	4	8	0	0
8	0	0	4	8

şi tabelul 1 al reuniunii precum şi legea de distributivitate a reuniunii faţă de înmulţire [1].

Primită la redacţie la 28 februarie 1967

Academia Republicii Socialiste România — Filiala Cluj
Institutul de calcul

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES RELATIONS DANS LA LOGIQUE MATHÉMATIQUE

RÉSUMÉ

Les opérations logiques binaires mettent en correspondance à deux propositions une troisième proposition, cette correspondance étant un invariant pour les valeurs logiques 0 et 1.

On interprétera les opérations logiques comme relations binaires et on étudiera les propriétés de ces relations.

BIBLIOGRAFIE

1. А. Г. КУРОВ, *Лекции по общей алгебре*. Москва, 1962.
2. GR. C. MOISIL, *Încercări vechi şi noi de logică neclasică*. Bucureşti, 1965.
3. А. И. ПЛЕСНЕР, *Спектральная теория линейных операторов*. Москва, 1965.

ASUPRA COMPLETITUDINII UNUI SISTEM DE AXIOME

DE

NICOLAE BOTH

Plecînd de la completitudinea clasică şi urmărind o cale relativ simplă, autorul demonstrează uşor completitudinea semantică, problemă mult mai grea.

1° Printre chestiunile de bază ale logicii matematice se află completitudinea sistemelor de axiome. În calculul propoziţiilor aceasta se tratează din trei puncte de vedere şi anume : semantic, clasic şi sintactic. Ea este în legătură cu necontradicţia.

Notînd cu τ mulţimea tautologiilor şi cu ε mulţimea $\{H\}$ a tuturor expresiilor logice, necontradicţia unui sistem $\{X\}$ de axiome o putem exprima

(a) semantic : ded $\{X\} \subseteq \tau$

(b) clasic : $\overline{H} \in$ ded $\{X\} \Rightarrow H \notin$ ded $\{X\}$

(c) sintactic : ded $\{X \cup H\} = \varepsilon \Rightarrow H \notin$ ded $\{X\}$.

Pentru toate trei categoriile, definiţia reciprocă reprezintă completitudinea

(a′) semantică : $\tau \subseteq$ ded $\{X\}$

(b′) clasică : $H \notin$ ded $\{X\} \Rightarrow \overline{H} \in$ ded $\{X\}$

(c′) sintactică : $H \notin$ ded $\{X\} \Rightarrow$ ded $\{X \cup H\} = \varepsilon$.

Cea mai restrictivă este necontradicţia semantică şi avem :

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \qquad ([1], \text{pag. } 107)$$

Observaţia 1. Mulţimea τ este deductiv închisă, adică

$$\text{ded } \tau = \tau \qquad ([1], \text{pag. } 76)$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 1, P. 13-16, BUCUREŞTI, 1969

Evident că :

$$\tau \subseteq \varepsilon \tag{1.1}$$

dar pe de altă parte :

$$\tau \neq \varepsilon \tag{1.2}$$

deoarece nu orice expresie este tautologie (de exemplu $p \notin \tau$ și $p \in \varepsilon$).

Completitudinea clasică se stabilește cu destulă ușurință, ea fiind în general „mai slabă”, în timp ce demonstrarea completitudinii semantice este mult mai laborioasă.

De aceea, în lucrarea de față ne propunem să demonstrăm pe o cale comodă și relativ simplă completitudinea semantică a unui sistem dat $\{X_0\}$ după ce în prealabil vom demonstra completitudinea sa clasică.

2° Fie $\{X_0\}$ sistemul dat prin axiomele ([2], pag. 68) :

$\mathrm{I}_1.\ A \rightarrow (B \rightarrow A)$ $\mathrm{I}_2.\ (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

$\mathrm{II}_1.\ A \,\&\, B \rightarrow A$ $\mathrm{II}_2.\ A \,\&\, B \rightarrow B$ $\mathrm{II}_3.\ (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \,\&\, C))$

$\mathrm{III}_1.\ A \rightarrow A \vee B$ $\mathrm{III}_2.\ B \rightarrow A \vee B$ $\mathrm{III}_3.\ (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$

$\mathrm{IV}_1.\ (A \rightarrow B) \rightarrow (\overline{B} \rightarrow \overline{A})$ $\mathrm{IV}_2.\ A \rightarrow \overline{\overline{A}}$ $\mathrm{IV}_3.\ \overline{\overline{A}} \rightarrow A$

n care „$\rightarrow$”, „&”, „$\vee$” sînt implicația logică, respectiv conjuncția și disjuncția.

Faptul că H se deduce din $\{X_0\}$ îl notăm prin $H \in \operatorname{ded} \{X_0\}$ sau $\vdash H$, iar dacă din H_1 și $\{X_0\}$ se deduce H_2, scriem respectiv $H_2 \in \operatorname{ded} \{X_0 \cup H_1\}$ sau $H_1 \vdash H_2$.

Echivalența $A \equiv B$ o definim $(A \rightarrow B) \,\&\, (B \rightarrow A)$ ([2] pag. 86).

Observația 2. Identitatea este un caz particular al echivalenței, adică orice expresie este echivalentă cu ea însăși. Într-adevăr, din IV_2 și IV_3 prin silogism rezultă $\vdash A \rightarrow A$ care considerată de două ori ne conduce la $\vdash A \equiv A$.

Completitudinea o putem demonstra în cadrul sistemului însuși după ce în prealabil am demonstrat necontradicția sa.

3° *Sistemul* $\{X_0\}$ *este semantic necontradictoriu.*

De acest lucru ne putem convinge verificînd că toate cele 11 axiome, interpretate ca formule ale algebrei propoziționale, sînt tautologii, din care, pe baza observației 1 precum și a proprietății de monotonie a operatorului ded avem : $\{X_0\} \subseteq \tau \rightarrow \operatorname{ded} \{X_0\} \subseteq \operatorname{ded} \tau = \tau$ adică

$$\operatorname{ded} \{X_0\} \subseteq \tau. \tag{3.1}$$

CONSECINȚA 1. *Pe baza observației că* (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c), *rezultă că* $\{X_0\}$ *este necontradictoriu atît clasic cît și sintactic.*

Notăm prin $\mathfrak{R}$ o formulă deductibilă din $\{X_0\}$ iar prin $\mathfrak{F}$ negația sa.

CONSECINŢA 2. *Formula $\mathfrak{F}$ nu este deductibilă din $\{X_0\}$.*

Aceasta rezultă din necontradicţia clasică a sistemului $\{X_0\}$ (consecinţa 1). Aşadar $\mathfrak{F}$ reprezintă o formulă nedeductibilă din $\{X_0\}$.

Observaţia 3. Faptul că $H \in \operatorname{ded}\{X_0\}$ îl notăm prin „$H \equiv \mathfrak{R}$" iar $H \notin \operatorname{ded}\{X_0\}$ cu „$H \equiv \mathfrak{F}$", notaţie justificată de semnificaţia lui $\mathfrak{R}$ şi $\mathfrak{F}$, precum şi de consecinţa 2 şi observaţia 2.

În cele ce urmează vom utiliza şi formulele:

(1) $\vdash p \rightarrow (\bar{\bar{p}} \rightarrow q)$ ([1], pag. 98, formula 65);

(2) $\vdash \bar{\bar{p}} \equiv p$ (din IV_2 şi IV_3);

(3) $\vdash (\mathfrak{B}_1 \equiv \mathfrak{B}_2) \rightarrow (\mathfrak{U}(\mathfrak{B}_1) \equiv \mathfrak{U}(\mathfrak{B}_2))$ ([2], pag. 88);

(4) $\vdash (H_1 \equiv H_2) \rightarrow (\bar{H}_1 \equiv \bar{H}_2)$ care rezultă din (3) prin substituţia: $\mathfrak{B}_i/H_i$; $\mathfrak{U}(\mathfrak{B}_i)/\bar{H}_i$, $i = 1, 2$.

(5) $\vdash (H \equiv \mathfrak{F}) \rightarrow (\bar{H} \equiv \mathfrak{R})$.

Demonstraţie. În (3) facem substituţia: $\mathfrak{B}_1/H$; $\mathfrak{B}_2/\mathfrak{F}$; $\mathfrak{U}(\mathfrak{B}_i)/\bar{\mathfrak{B}}_i$, $i = 1, 2$ şi obţinem

(α) $\vdash (H \equiv \mathfrak{F}) \rightarrow (\bar{H} \equiv \bar{\mathfrak{F}})$, dar după definiţie;

(β) $\vdash \mathfrak{F} \equiv \bar{\mathfrak{R}}$, iar (4) cu substituţia $H_1/\mathfrak{F}$; $H_2/\bar{\mathfrak{R}}$ devine $\vdash (\mathfrak{F} \equiv \bar{\mathfrak{R}}) \rightarrow (\bar{\mathfrak{F}} \equiv \bar{\bar{\mathfrak{R}}})$ care prin separaţie cu (β) ne dă $\vdash \bar{\mathfrak{F}} \equiv \bar{\bar{\mathfrak{R}}}$. Cum însă $\vdash \bar{\bar{\mathfrak{R}}} \equiv \mathfrak{R}$ (din (2) cu substituţia $p/\mathfrak{R}$) obţinem prin tranzitivitate că $\vdash \bar{\mathfrak{F}} \equiv \mathfrak{R}$ şi astfel (α) devine (5).

4° *Sistemul $\{X_0\}$ este clasic complet.*

Fie $H \notin \operatorname{ded}\{X_0\}$ adică

(4.1) $\vdash H \equiv \mathfrak{F}$ (observaţia 3).

Separînd cu (4.1) în (5), obţinem

4.2) $\vdash \bar{H} \equiv \mathfrak{R}$

sau $H \equiv \mathfrak{F} \vdash \bar{H} \equiv \mathfrak{R}$, adică: Dacă $H \notin \operatorname{ded}\{X_0\}$, atunci $\bar{H} \in \operatorname{ded}\{X_0\}$ care afirmă completitudinea clasică a sistemului $\{X_0\}$.

TEOREMĂ. *Dacă $H \in \tau$, atunci $\bar{H} \notin \tau$.*

Demonstraţie. Presupunem că şi $\bar{H} \in \tau$. Atunci $H \cup \bar{H} \subseteq t$, deci (4.3) $\operatorname{ded}(H \cup \bar{H}) \subseteq \operatorname{ded} \tau = \tau$ (monotonia operatorului ded şi observaţia 1). Cu substituţia p/H, (1) devine $\vdash H \rightarrow (\bar{H} \rightarrow q)$ adică $H, \bar{H} \vdash q$, unde q este orice expresie $\vdash$. Deci $\varepsilon \subseteq \subseteq \operatorname{ded}(H \cup \bar{H}) \subseteq \tau$ (conform cu (4.3)) sau $\varepsilon \subseteq \tau$ care cu (1.1) dă $\tau = \varepsilon$ ceea ce contrazice pe (1.2) şi demonstrează teorema.

Sistemul $\{X_0\}$ este semantic complet.

Fie

(4.4) $H \in \tau$

și presupunem că $H \notin \text{ded}\,\{X_0\}$. Din completitudinea clasică rezultă $\overline{H} \in \text{ded}\,\{X_0\}$, ceea ce cu (3.1) ne conduce la $\overline{H} \in \tau$, care împreună cu (4.4) contrazice teorema precedentă și demonstrează completitudinea semantică.

Primită la redacție la 17 aprilie 1967

SUR LA COMPLÉTITUDE D'UN SYSTÉME D'AXIOMES

RÉSUMÉ

En partant de la complétitude classique et en suivant une voie relativement simple, on démontre facilement la complétitude sémantique, problème qui est d'ailleure bien plus difficile.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Asser, *Einführung in die mathematische Logik*, 1.
2. P. S. Novikov, *Elemente de logică matematică*, București, 1961.

OBSERVAŢII ASUPRA CONEXIUNII SPECTRULUI PRIM

DE

ANDREI DUMA

În această lucrare se studiază corelaţia dintre elementele idempotente ale unui inel şi componentele conexe ale spectrului prim al inelului considerat.

§1. CARACTERIZAREA MULŢIMILOR SIMULTAN ÎNCHISE ŞI DESCHISE DIN SPECTRUL PRIM

Fie A un inel unitar şi comutativ. Vom nota cu $\mathfrak{r}$ nilradicalul ei. Se ştie [1] că pentru o mulţime $Y \subset \operatorname{Spec} A$, închiderea ei este

$$\overline{Y} = V(\mathcal{J}(Y)) = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A, \mathfrak{p} \supset \bigcap_{\mathfrak{q} \in Y} \mathfrak{q}\}.$$

Vom căuta să descriem închiderea unei mulţimi deschise ; fie $D(\mathfrak{a}) \subset \subset \operatorname{Spec} A$ un deschis din Spec A.

PROPOZIŢIA 1. *Avem*

$$\overline{D(\mathfrak{a})} = V(\mathfrak{r} : \mathfrak{a}).$$

Demonstraţie : Fie $\mathfrak{p} \notin \overline{D(\mathfrak{a})}$; atunci există o vecinătate a sa $D(g)$ cu $\mathfrak{p} \notin D(g)$ (adică $g \notin \mathfrak{p}$) şi $D(\mathfrak{a}) \cap D(g) = D(\mathfrak{a} \cdot g) = \emptyset$ (adică $\mathfrak{a} g \subseteq r$ deci $g \notin \mathfrak{r} : \mathfrak{a}$). Deci : $\mathfrak{p} \in D(g) \subset D(\mathfrak{r}) : \mathfrak{a})$, adică $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{r} : \mathfrak{a})$ — prin urmare am stabilit relaţia : $\overline{D(\mathfrak{a})} \supset V(\mathfrak{r} : \mathfrak{a})$. Reciproc, fie $\mathfrak{p} \in \overline{D(\mathfrak{a})}$ (deci : $\mathfrak{p} \supset \bigcap_{\underline{q} \not\ni \underline{a}} \mathfrak{q}$) şi fie că $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{r} : \mathfrak{a})$, deci $\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{r} : \mathfrak{a}$, deci există $f \in A$ cu $f \cdot \mathfrak{a} \subset \mathfrak{r}$ şi $f \notin \mathfrak{p}$. Cum, în particular, $f \cdot \mathfrak{a} \subset \underline{q}$ oricare ar fi $q \in D(\mathfrak{a})$ şi $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{q}$, rezultă $f \in \mathfrak{q}$ oricare ar fi $\mathfrak{q} \in D(\mathfrak{a})$, deci $f \in \bigcap_{\underline{q} \not\ni \underline{a}} \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$.

Absurd, deci : $\mathfrak{p} \in \overline{D(\mathfrak{a})} \Rightarrow \mathfrak{p} \in V(\mathfrak{r} : \mathfrak{a})$ şi astfel $\overline{D(\mathfrak{a})} \subset V(\mathfrak{r} : \mathfrak{a})$.

COROLARUL 1. *Mulţimea* $D(\mathfrak{a})$ *este simultan închisă şi q.e.d. deschisă, dacă şi numai dacă* : $\underline{P}$ *prim şi* $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{r} : \mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$.

COROLARUL 2. *Mulţimea* $D(\mathfrak{a})$ *este simultan închisă şi deschisă, dacă şi numai dacă* :

$$(\mathfrak{r} : \mathfrak{a}) + \mathfrak{a} = A.$$

COROLARUL 3. *În orice mulţime deschisă* $D(\mathfrak{a})$ *care este şi închisă există o mulţime deschisă principală* $D(f)$ (*cu* $f \in \mathfrak{a}$) *care este şi închisă.*

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 1, P. 17—22, BUCUREŞTI, 1969

Într-adevăr, este suficient de ales $f \in \mathfrak{a}$ astfel ca $g + f = 1$ unde $g \in \mathfrak{r} : \mathfrak{a}$ convenabil.

COROLARUL 4. *O mulțime simultan închisă și deschisă minimală într-un spectru prim este neapărat un deschis principal.*

COROLARUL 5. *Spectrul prim al unui inel redus este conex dacă și numai dacă nu are elemente idempotente veritabile* (*diferite de* 0 *și* 1).

Într-adevăr, observăm că un inel este redus dacă și numai singurul element inversabil și idempotent este 1.

REMARCĂ. *Fie A un inel redus. În general* $\sqrt{\mathfrak{a}} \subset 0 : (0 : \mathfrak{a})$. *Dacă* $D(\mathfrak{a})$ *este simultan deschisă și închisă, atunci* $\sqrt{\mathfrak{a}} = 0 : (0 : \mathfrak{a})$. *Reciproca nu este adevărată, căci pentru orice ideal maximal* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} = 0 : (0 : \mathfrak{m})$.

§2. ELEMENTE IDEMPOTENTE ȘI COMPONENTE CONEXE

DEFINIȚIA 1. Un element idempotent nenul $f \in A$ se numește neconex, dacă și numai dacă există $f', f'' \in A$ nenule, astfel ca:

$$\text{(i) } f' + f'' = f$$

$$\text{(ii) } f'f'' = 0.$$

Observăm că putem alege pe f' și f'' chiar idempotente; într-adevăr: $f'^2 + f''^2 = f^2 = f = f' + f''$, de unde: $f'^3 = f'^2$ și $f''^3 = f''^2$. Luînd $f_1 = f'^2$ și $f_2 = f''^2$, rezultă:

$$\text{(i) } f_1 + f_2 = f$$

$$\text{(ii) } f_1 \cdot f_2 = 0$$

$$\text{(iii) } f_1 = f_1^2,\ f_2 = f_2^2.$$

În caz contrar, vom spune că f este conex.

DEFINIȚIA 2. Vom spune că familia de idempotente $f_1, f_2, \ldots, f_n$ $(n \geqslant 2)$ realizează o descompunere a unității, dacă:

$$\text{i) } f_1 + \ldots + f_n = 1$$

$$\text{ii) } f_i f_j = 0 \ (\forall)\ i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ și } i \neq j.$$

Dacă în plus:

$$\text{(iii) } f_i \text{ este conex } (\forall)\ i \in \{1, \ldots, n\},$$

atunci se spune că descompunerea este conexă.

Cu aceste denumiri, corolarul 5 se exprimă astfel: „spectrul prim al unui inel redus este neconex, atunci și numai atunci cînd există o descompunere a unității”.

Observație. Fiind date: o descompunere a unității $(f_1, \ldots, f_n)$ inelului A și pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$ cîte o descompunere (conexă) a unității $(f_{i1}, f_{i2}, \ldots, f_{in(i)})$ inelului $A \cdot f_i$, rezultă o descompunere (respectiv conexă) a unității $(f_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n(i)}}$ lui A.

În demonstrația teoremei de mai jos sînt necesare următoarele remarci: a) Componentele conexe ale unui spațiu topologic sînt închise dar nu sînt în general deschise (dacă spaţiul este local conex, atunci ele sînt şi deschise).

Pentru un spaţiu noetherian, există o partiţie a sa cu mulţimi simultan deschise şi închise minimale cu această proprietate şi ele sînt chiar componentele conexe ale spaţiului.

Cum spectrul oricărui inel este cvasicompact, atunci pentru un inel noetherian există numai un număr finit de componente conexe (mulţimile simultan deschise şi închise minimale cu această proprietate).

b) Pentru un inel A redus (noetherian sau nu) şi un element idempotent nenul f al său sînt echivalente afirmaţiile :

1. Elementul f este conex.
2. Spectrul prim al inelului Af este conex.

TEOREMĂ. *Orice inel noetherian redus este compunerea directă a* n *subinele ale sale, care au spectrul prim conex. Mai precis : există o singură descompunere conexă a unităţii* — $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ *lui* A, *unde* n *este numărul componentelor conexe, iar* $\{D(f_i)\}\ i \in \{1, \ldots, n\}$ *sînt componentele conexe ale lui* Spec A.

Demonstraţie. Conform corolarului 4 şi observaţiei anterioare a), fie $D(g_1), \ldots, D(g_n)$ componentele conexe ale lui Spec A : deci $D(g_i) \cap D(g_j) = \emptyset$ — echivalent : $g_i g_j = 0\ (\forall)\ i \neq j$ şi Spec $A = \bigcup_{i=1}^{n} D(g_i) = D\left(\sum_{i=1}^{n} Ag_i\right)$ — deci $A = \sum_{i=1}^{n} Ag_i$ — altfel spus, există $h_1, \ldots, h_n \in A$ cu $1 = h_1 g_1 + \ldots + h_n g_n$.

Notăm : $f_i = h_i g_i$ şi observăm că :

$$\text{(i) } f_1 + \ldots + f_n = 1,$$

$$\text{(ii) } f_i f_j = 0 \quad \text{şi deci } f_i^2 = f_i\ (\forall)\ i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Cum : $D(g_i) \subset D(f_i)$ şi $D(f_i) \cap D(f_j) = \emptyset$ rezultă $D(g_i) = D(f_i)$ — deci (din b) :

$$\text{(iii) } f_i \text{ conex } (\forall)\ i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Rămîne de demonstrat unicitatea descompunerii conexe a unităţii. Fie $f_1' + \ldots + f_m' = 1$ o altă descompunere a unităţii. Cum $D(f_i')$ sînt conexe, rezultă $D(f_i') \subset D(f_{\varphi(i)})$ cu $\varphi(i)$ unic definit. Cum $D(f_i')$ sînt disjuncte, rezultă : $D(f_i') = D(f_{\varphi(i)})$ şi tot din disjuncţie rezultă că : $\{1, \ldots, n\} = \{\varphi(1), \ldots, \varphi(m)\}$. Cum φ este biunivocă, rezultă $m = n$ şi deci modulo o schimbare de numerotare putem presupune : $D(f_i) = D(f_i')$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Cum $D(f_i') = \complement\,[D(1 - f_i')]$, rezultă :

$D(f_i) \cap D(1 - f_i') = \emptyset$, adică $f_i(1 - f_i') = 0$ — şi deci $f_i = f_i f_i'$. Analog : $f_i' = f_i f_i'$ deci $f_i = f_i'$. *q.e.d.*

COROLARUL 1. *Orice familie de idempotente, ortogonale două cîte două, dintr-un inel noetherian redus, se poate completa şi rafina la o descompunere conexă, în mod unic.*

Într-adevăr, fiind date $e_1, \ldots, e_k$, avem :

$(1 - e_1 - e_2 \ldots - e_k, e_1, e_2, \ldots, e_k)$ o descompunere a unităţii etc.

COROLARUL 2. *Fiind dat un inel noetherian redus A și $(f_1, \ldots, f_n)$ descompunerea sa conexă, atunci orice idempotent veritabil din A este o sumă de forma* : $f_{\tau(1)} + \ldots + f_{\tau(k)}$, unde : $1 \leqslant \tau(1) < \tau(2) < \ldots < \tau(k) \leqslant n$.

COROLARUL 3. *Într-un inel noetherian redus cu n componente conexe, există $2^n - 2$ elemente idempotente veritabile.*

Într-adevăr :

$$C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} = 2^n - 2.$$

Studiul conexiunii este deci interesant pentru inele noetheriene reduse care nu sînt integre (de exemplu Z_6, Z_{15} etc.). Dăm un procedeu de obținere a astfel de inele : fie I un inel noetherian integru și fie $x_1, \ldots, x_n (n \geqslant 2)$ elemente ireductibile neasociate (idealele (x_i) sînt prime și distincte). Atunci $I/(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)$ este redus, dar cu divizori ai lui zero.

Mai remarcăm că există inele noetheriene reduse, cu spectrul conex, care nu sînt integre și anume dăm un mod de construcție a unei clase de astfel de inele : fie I un inel noetherian integru ; considerăm inelul de polinoame $I[X_1, \ldots, X_n]$ în n nedeterminate $(n \geqslant 2)$ și fie $A = \dfrac{I[X_1, \ldots, X_n]}{\mathrm{i}}$, unde i este idealul generat de toate monoamele de forma : $X_i X_j$ cu $1 \leqslant i \overset{<}{\neq} j \leqslant n$. Evident, A are divizori ai lui zero, dar nu are nici nilpotente, nici idempotente, deoarece un element oarecare $a \in A$ se scrie unic :

$$a = i_0 + \sum_{i=1}^{n} P_i(X_i),$$

unde $i_0 \in I$, $P_i \in I[X_i]$ și $P_i(0) = 0$, iar :

$$a^n = i_0^n + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k i_0^k P_i^{n-k}(X_i),$$

acum totul fiind evident.

Observație. O teoremă de descompunere pentru inele noetheriene comutative, dar nu neapărat reduse, se poate demonstra și folosind dualitatea dintre categoria schemelor afine și categoria inelelor comutative, cu element unitate. Mai precis, orice inel noetherian A se poate reprezenta ca o compunere a n subinele ale sale (n = numărul componentelor conexe) și fiecare din ele să aibă spectrul conex.

§3. OBSERVAȚII PRIVIND SPECTRUL MAXIMAL

Fie A un inel noetherian (fără a restrînge generalitatea îl putem presupune redus), Sp max A este subspațiu în Spec A și anume este format din toate punctele închise ale lui Spec A.

În general, cunoscînd un spațiu topologic din punctul de vedere al conexiunii, nu putem afirma nimic despre conexiunea subspațiilor sale.

LEMĂ. *Orice componentă conexă a lui* Spec A *intersectează* Sp max A ; *în particular, numărul componentelor conexe ale lui* Sp max A *este cel puțin egal cu numărul componentelor conexe ale lui* Spec A.

Într-adevăr, putem presupune A redus (conform observației finale din § 2 nu este esențial acest lucru) și fie f unul dintre idempotentele conexe.

Cum în $A.f_i$ există ideale maximale, rezultă că în $A = Af_1 \oplus \dots$ $\dots \oplus Af_n$ există ideale maximale care nu conțin pe f_i

q.e.d.

Mai facem încă o remarcă : există inele pentru care numărul componentelor conexe ale spectrului maximal este strict mai mare decît acela al componentelor conexe din spectrul prim.

Vom da exemplu chiar de un inel A pentru care Spec A este conex, iar Sp max A este neconex.

Într-adevăr, fie I noetherian integru și nelocal; fie $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ două ideale maximale distincte și $S = I / (\mathfrak{m}_1 \cup \mathfrak{m}_2)$.

Atunci : $A = S^{-1} I$ este chiar integru, dar spectrul său maximal conține două componente conexe — cele două puncte ale sale : $\mathfrak{m}_1 \cdot A$ și $\mathfrak{m}_2 \cdot A$.

Observații. 1) Spectrul maximal și spectrul prim pot avea același număr de componente conexe (și anume urmele componentelor conexe din spectrul prim coincid cu componentele conexe ale spectrului maximal), de exemplu cînd radicalul Jacobson coincide cu nilradicalul (ceea ce are loc de exemplu pentru inele Jacobson).

2) Dacă radicalul Jacobson al unui inel noetherian este prim, atunci neapărat spectrul prim este conex.

3) Analog cu propoziția 1), se poate demonstra că închiderea mulțimii $D(\mathfrak{a})$ în Sp. max A este submulțimea închisă $V(R : \mathfrak{a})$ din Sp max A, unde R este radicalul Jacobson al lui A.

Primită la redacție la 18 mai 1968

Institutul de matematică al Academiei Republicii
Socialiste România, Str. M. Eminescu nr. 47, București.

QUELQUES REMARQUES SUR LA CONNEXION DU PREMIER SPECTRE

RÉSUMÉ

Dans cette note on étudie la liaison entre les composantes connexes du premier spectre d'un anneau et les éléments indempotents.

D'abord, on démontre la relation

$$D(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{r} : \mathfrak{a}),$$

où $\mathfrak{a}$ est un idéal d'un anneau A et $\mathfrak{r}$ est son nilradical.

Le principal résultat est le suivant :

Théorème. *Il existe une seule décomposition connexe d'unité* $(f_1, \ldots, f_n)$ *d'un anneau noethérien réduit, tel que* $D(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *soient les composantes connexes du Spec A.*

Finalement, on donne aussi quelques remarques sur le spectre maximal.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Eléments de géométrie algébrique.* I.
2. N. Bourbaki, *Algèbre commutative.*
3. G. Galbură, *Corpuri de funcţii algebrice şi varietăţi algebrice.*
4. C. Bănică, O. Stănăşilă, *Spectrul unei latici.* St. cerc. mat., **19**, *1* (1967).

CONSTRUIREA PROBABILITĂȚII PE BAZA INFORMAȚIEI

DE

SILVIU GUIAȘU

În această lucrare se examinează problema definirii informației fără utilizarea probabilității, în sensul lui J. Kampé de Fériet și B. Forte. Axiomele care definesc informația sînt prezentate însă într-o formă mai restrictivă, dar în același timp mai ușoară. În particular se examinează problema construcției efective a probabilității pe baza informației.

1. Fie un cîmp de evenimente finit $\{\Omega, \mathcal{P}\}$, unde Ω este mulțimea evenimentelor elementare

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$$

iar $\mathcal{P}$ este mulțimea evenimentelor, mulțimea tuturor părților mulțimii Ω. Cunoscînd probabilitățile evenimentelor elementare

$$p_k = p(\omega_k), \ (k = 1, \ldots, n) ; \ \sum_{k=1}^{n} p_k = 1, \tag{1}$$

cunoaștem și probabilitatea oricărui eveniment $A \in \mathcal{P}$ și avem

$$p(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega).$$

Fiind dat cîmpul finit de evenimente $\{\Omega, \mathcal{P}\}$ de mai sus și probabilitățile (1), cantitatea de informație sau gradul de nedeterminare pe care îl conține acest cîmp finit de probabilitate este dată de formula lui C. E. Shannon

$$H = H(p_1, \ldots, p_n) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \lg p_k. \tag{2}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 1, P. 23–31, BUCUREȘTI, 1969

Toate considerațiile și aplicațiile teoriei informației s-au bazat pe această formulă a entropiei dată de egalitatea (2). Cantitatea H definită de egalitatea (2) se interpretează ca măsură a nedeterminării sau ca măsură a informației. Ambele interpretări sînt la fel de justificate. Într-adevăr, diferența dintre aceste două interpretări constă numai în aceea că ne putem plasa fie *înaintea* realizării unui expriment care pune în evidență evenimentele cîmpului $\{\Omega, \mathcal{P}\}$ de probabilități date de egalitățile (1), în care caz H măsoară nedeterminarea pe care o avem cu privire la rezultatul experimentului respectiv, fie *după* ce experimentul a avut loc, în care caz H măsoară cantitatea de informație pe care a furnizat-o experimentul. Expresia (2) ne dă cantitatea de informație utilizînd probabilitatea drept concept primar. Se ridică însă în mod natural problema inversă și anume determinarea probabilității pe baza informației. Această problemă este justificată în special dacă ținem seamă de faptul că noțiunea de informație este o noțiune de o generalitate mai mare decît aceea de probabilitate.

Prima încercare de a da o axiomatică a informației și de a construi probabilitatea pe baza acestei informații a fost efectuată de către R. S. Ingarden și K. Urbanik în anul 1962, în lucrarea [1]. Ei au formulat un sistem de axiome asupra informației și pe baza lor au dedus existența unei probabilități în așa fel încît legătura dintre probabilitatea dedusă și informația utilizată drept concept primar să fie dată tot de către formula entropiei a lui C. E. Shannon (2). Din păcate, axiomele formulate de către R. S. Ingarden și K. Urbanik sînt foarte complicate. Deși ulterior R. S. Ingarden [2] a dat o axiomatizare simplificată, totuși și aceste axiome sînt greu de acceptat din punct de vedere intuitiv drept propoziții de plecare în construirea teoriei informației și a teoriei probabilităților construită pe baza informației. De altfel este foarte dificil să analizăm intuiția noastră asupra noțiunii de informație, direct asupra *informației globale* pe care o conține un cîmp de evenimente.

În anul 1967, într-un ciclu de trei comunicări [3], J. Kampé de Fériet și Bruno Forte au revenit asupra problemei determinării probabilității pe baza informației, însă pe o cale considerabil mai simplă, cel puțin ca idee de lucru. Mai exact, în loc să lucreze și să formuleze axiome asupra informației globale a unui întreg cîmp de evenimente, cum făcuseră R. S. Ingarden și K. Urbanik, ei au luat drept noțiune primară informația pe care o conține un singur eveniment, adică informația pe care o furnizează realizarea unui singur eveniment. Această teorie *locală* a informației și a probabilității este foarte ușoară și verificabilă din punct de vedere intuitiv. Vom urma în cele ce urmează această cale, propusă de J. Kampé și Fériet și Bruno Forte dar vom formula axiomele într-o formă diferită și vom înlătura cîteva axiome inutile după părerea noastră, precum și unele complicații care, de asemenea, ni se par evitabile. În continuare ne vom ocupa de problema evaluării efective a probabilității pe baza informației.

2. Să considerăm din nou cîmpul de evenimente finit $\{\Omega, \mathcal{P}\}$. Să notăm cu $I(A)$ informaţia pe care o furnizează evenimentul oarecare $A \in \mathcal{P}$. Vom cere ca informaţia aceasta să verifice următoarele axiome:

Axioma 1. (Axioma valorilor extreme). *Evenimentul sigur nu conţine nici o informaţie, iar evenimentul imposibil conţine o informaţie infinită, adică*

$$I(\Omega) = 0, \; I(\emptyset) = +\infty.$$

Axioma 2. (Axioma de monotonie). *Oricare ar fi evenimentele* $A \in \mathcal{P}$ *şi* $B \in \mathcal{P}$ *astfel încît* $B \subset A$ *avem*

$$I(A) < I(B).$$

Înainte de a formula următoarea axiomă, să facem cîteva observaţii pe marginea celor două axiome de mai sus. În primul rînd să observăm că din axioma 1 şi din axioma 2 rezultă că pentru orice eveniment $A \in \mathcal{P}$ avem

$$I(A) \geqslant 0. \tag{3}$$

În al doilea rînd să considerăm două evenimente oarecare $A \in \mathcal{P}$ şi $B \in \mathcal{P}$. Deoarece

$$A \subset A \cup B, \; B \subset A \cup B,$$

din axioma 2 rezultă imediat

$$I(A \cup B) < I(A)$$

$$I(A \cup B) < I(B)$$

adică

$$I(A \cup B) < \frac{1}{2}(I(A) + I(B)). \tag{4}$$

Ne-ar interesa însă să vedem ce am putea să spunem mai exact despre informaţia pe care o furnizează reuniunea a două evenimente. Pentru a formula următoarea axiomă asupra informaţiei reuniunii a două evenimente, vom ţine seama pe de o parte de faptul că $I(A \cup B)$ trebuie să fie o funcţie simetrică de $I(A)$ şi de $I(B)$, iar pe de altă parte această funcţie trebuie să fie în aşa fel încît să avem satisfăcută inegalitatea (4), care a rezultat din axioma 2, inegalitate care are de altfel un solid suport intuitiv.

Axioma 3. (Axioma reuniunii). *Fie* f *o funcţie convexă oarecare, strict descrescătoare. Oricare ar fi evenimentele* $A \in \mathcal{P}$ *şi* $B \in \mathcal{P}$ *astfel încît* $A \cap B = \emptyset$, *Avem*

$$I(A \cup B) = f(f^{-1}(I(A)) + f^{-1}(I(B))). \tag{5}$$

Să ne oprim puțin asupra axiomei reuniunii. Mai exact, să arătăm că această axiomă, așa cum a fost formulată mai sus, implică inegalitatea (4). Ținînd cont de inegalitatea clasică a lui Jensen pentru funcțiile convexe și de faptul că funcția f a fost presupusă strict descrescătoare, putem scrie

$$I(A \cup B) = f(f^{-1}(I(A)) + f^{-1}(I(B))) < f\left(\frac{1}{2}f^{-1}(I(A)) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}f^{-1}(I(B))\right) \leqslant \frac{1}{2}ff^{-1}(I(A)) + \frac{1}{2}ff^{-1}(I(B)) = \frac{1}{2}(I(A) + I(B)).$$

Cu alte cuvinte, egalitatea (5) constituie o condiție suficient de largă pentru ca inegalitatea (4) să aibă loc.

Să observăm că informația unui eveniment, în teoria informației bazată pe noțiunea de probabilitate, și care este dată de egalitatea

$$I(A) = -\lg P(A), \tag{6}$$

satisface axiomele de mai sus, în axioma 3, funcția convexă f fiind

$$f(x) = -\lg x.$$

Cu aceste precizări, să demonstrăm următoarea teoremă :

TEOREMA 1. *Fie cîmpul de evenimente finit* $\{\Omega, \mathcal{P}\}$ *și funcția* $I(A)$ *satisfăcînd axiomele 1, 2 și 3. Dacă funcția f din enunțul axiomei 3 este continuă și satisface condițiile*

$$f^{-1} : R^{+} \to [0, 1],$$

$$f^{-1}(0) = 1, \; f^{-1}(+\infty) = 0 \tag{7}$$

unde am notat cu R^{+} *mulțimea numerelor reale nenegative, atunci funcția de mulțime* μ_f *definită de egalitatea*

$$\mu_f(A) = f^{-1}(I(A)) \tag{8}$$

pentru orice eveniment $A \in \mathcal{P}$, *este o probabilitate definită pe mulțimea evenimentelor* $\mathcal{P}$.

Demonstrație. Evident

$$0 \leqslant \mu_f(A) \leqslant 1, \quad \mu_f(\emptyset) = 0, \quad \mu_f(\Omega) = 1,$$

pentru orice $A \in \mathcal{P}$. Să mai observăm că din egalitatea (5), pe baza relației (8), rezultă că

$$\mu_f(A \cup B) = \mu_f(A) + \mu_f(B),$$

oricare ar fi evenimentele $A \in \mathcal{P}$ și $B \in \mathcal{P}$ astfel încît $A \cap B = \emptyset$ q.e.d.

Vom spune că două evenimente oarecare A și B din mulțimea $\mathcal{P}$ sînt *independente din punct de vedere informațional* dacă avem satisfăcută egalitatea

$$I(A \cap B) = I(A) + I(B).$$

Vom spune că două evenimente oarecare A şi B din mulţimea $\mathcal{P}$ sînt *independente din punct de vedere probabilist*, în raport cu o probabilitate P definită pe mulţimea evenimentelor $\mathcal{P}$, dacă avem satisfăcută egalitatea

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B).$$

Analog pentru un număr finit arbitrar de evenimente din $\mathcal{P}$. Cu aceste definiţii, să demonstrăm următoarea teoremă :

TEOREMA 2. *Fie un cîmp finit de evenimente* $\{\Omega, \mathcal{P}\}$ *şi fie funcţia de mulţime* $I(A)$ *satisfăcînd axiomele 1, 2 şi 3. Presupunem funcţia* f *din enunţul axiomei 3 continuă şi satisfăcînd condiţiile* (7). *Fie* μ_f *probabilitatea care corespunde lui* $I(A)$, *a cărei existenţă este asigurată de teorema 1. În aceste condiţii, dacă independenţa informaţională a evenimentelor din mulţimea* $\mathcal{P}$, *în raport cu informaţia* $I(A)$, *coincide cu independenţa probabilistă, în raport cu probabilitatea* μ_f, *atunci*

$$f(x) = c \lg \frac{1}{x} \quad (c > 0),$$

şi deci probabilitatea μ_f *este dată de egalitatea*

$$\mu_f(A) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{c} I(A)}, \quad (c > 0),$$

echivalentă cu egalitatea

$$I(A) = -\, c \lg \mu_f(A)\,, \quad (c > 0).$$

Demonstraţie. Conform ipotezei, oricare ar fi evenimentele B_1 şi B_2 din mulţimea $\mathcal{P}$, independente, avem

$$\mu_f(B_1 \cap B_2) = \mu_f(B_1) \cdot \mu_f(B_2),$$

dacă şi numai dacă

$$I(B_1 \cap B_2) = I(B_1) + I(B_2).$$

Să notăm

$$x_1 = I(B_1),\ x_2 = I(B_2),$$

în care caz rezultă

$$\begin{aligned} f^{-1}(x_1 + x_2) &= f^{-1}(I(B_1) + I(B_2)) = f^{-1}(I(B_1 \cap B_2)) = \\ &= \mu_f(B_1 \cap B_2) = \mu_f(B_1)\, \mu_f(B_2) = f^{-1}(I(B_1))\, f^{-1}(I(B_2)) = \\ &= f^{-1}(x_1)\, f^{-1}(x_2). \end{aligned}$$

Ecuaţia funcţională pe care am obţinut-o

$$f^{-1}(x_1 + x_2) = f^{-1}(x_1)\, f^{-1}(x_2)$$

este echivalentă pentru

$$\varphi = \lg f^{-1} \tag{9}$$

cu ecuaţia funcţională a lui Cauchy

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2),$$

a cărei unică soluţie continuă este

$$\varphi(x) = cx,$$

unde c este o constantă. Ţinînd cont de egalitatea (9), avem

$$f^{-1}(x) = e^{-\frac{1}{c}x}, \quad (c > 0),$$

şi deci

$$f(x) = c \lg \frac{1}{x}, \quad (c > 0),$$

iar măsura corespunzătoare μ_f este o probabilitate într-adevăr, deoarece

$$f^{-1}(0) = 1, \; f^{-1}(+\infty) = 0.$$

În ceea ce priveşte constanta c care apare, aceasta depinde de alegerea bazei logaritmului q.e.d.

Se vede deci că formula (6) a lui C. E. Shannon pentru informaţia unui eveniment, care pleacă de la noţiunea primară de probabilitate a evenimentului respectiv, este numai una dintre dependenţele posibile între informaţie şi probabilitate, ea obţinîndu-se din axiomele 1, 2 şi 3, în cazul în care admitem că independenţa informaţională a evenimentelor coincide cu independenţa probabilistă.

Fie din nou cîmpul de evenimente finit $\{\Omega, \mathcal{P}\}$. Pornind de la funcţia de mulţime $I(A)$, definită pe $\mathcal{P}$ şi satisfăcînd axiomele 1, 2 şi 3, am introdus o probabilitate μ_f definită pe mulţimea evenimentelor $\mathcal{P}$. Rezultă că evenimentul $\omega_k \in \Omega$ avînd informaţia $I(\omega_k)$, are probabilitatea $\mu_f(\omega_k)$. Rezultă deci că informaţia cîmpului finit de evenimente $\{\Omega, \mathcal{P}\}$ va fi valoarea medie a informaţiilor evenimentelor elementare care compun cîmpul, adică

$$H = \sum_{k=1}^{n} I(\omega_k)\, \mu_f(\omega_k).$$

3. Am văzut deci că atît informaţia cît şi probabilitatea, pot juca pe rînd rolul de concept primar şi respectiv de concept derivat din conceptul primar. Din punct de vedere practic însă, informaţia poate servi pentru *construirea* efectivă a probabilităţii, prin utilizarea principiului informaţiei maxime. Dacă nu dispunem de un material de masă pentru evaluarea probabilităţilor care intervin într-o anumită problemă şi dacă avem anumite date globale asupra repartiţiei pe care vrem să o determinăm, de exemplu dacă cunoaştem valori medii sau dispersii, sau orice alt moment asociat repartiţiei aleatoare respective, vom construi acea repartiţie aleatoare care face maximă informaţia, deci care face maximă nedeterminarea, compatibilă cu datele respective. O asemenea repartiţie aleatoare are proprietatea că este cea mai largă repartiţie, deci repartiţia care conţine cea mai mare nedeterminare şi deci cea mai mare informaţie, compatibilă cu datele pe care le avem la dispoziţie.

Să presupunem că avem o repartiție aleatoare $p_1, \ldots, p_n$ pe care vrem să o determinăm în așa fel încît informația

$$H = -\sum_{k=1}^{n} p_k \lg p_k$$

să fie maximă, compatibilă cu cunoașterea momentelor $\langle g_k(x_j) \rangle$, $(k = 1, \ldots, m)$ ale unui număr de r variabile aleatoare $x_j = x_j(\omega)$, $(j = 1, \ldots, r)$, corespunzătoare repartiției $p_1, \ldots, p_n$. Momentul $\langle g_k(x_j) \rangle$ al variabilei aleatoare $x_j = x_j(\omega)$ relativ la repartiția $p_1, \ldots, p_n$ este dat de egalitatea

$$\langle g_k(x_j) \rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i g_k(x_j^i).$$

Pentru

$$g(x) = x^q$$

obținem în particular momentul de ordinul q al variabilei aleatoare $x = x(\omega)$. Vrem deci să determinăm acea repartiție aleatoare $p_1, \ldots, p_n$ care face maximă informația H atașată acestei repartiții, dacă cunoaștem momentele

$$\langle g_k(x_j) \rangle, \ (j = 1, \ldots, r;\ k = 1, \ldots, m).$$

Răspunsul la această problemă efectivă de construcție a probabilității pe baza informației îl dă următoarea teoremă :

TEOREMA 3. *Repartiția aleatoare*

$$p_i \geqslant 0,\ (i = 1, \ldots, n);\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

care face maximă informația

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \lg p_i,$$

compatibilă cu momentele

$$\langle g_k(x_j) \rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i g_k(x_j^i),\ (k = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, r),$$

ale variabilelor aleatoare

$$x_j = x_j(\omega) = \begin{pmatrix} x_j^1, & \ldots, & x_j^n \\ p_1, & \ldots, & p_n \end{pmatrix},\ (j = 1, \ldots, r),$$

unde x_j^i *reprezintă valoarea pe care o ia variabila aleatoare* $x_j = x_j(\omega)$ *cu probabilitatea* p_i, *este dată de egalitățile*

$$p_i = \frac{1}{\Phi(\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{mr})} e^{-\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{r} \lambda_{k_j} g_k(x_j^i)},\ (i = 1, \ldots, n),$$

unde $\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{mr}$ *se determină din egalităţile*

$$\langle g_k(x_j)\rangle = -\frac{\partial \lg \Phi(\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{mr})}{\partial \lambda_{k_j}}, \ (k = 1, \ldots, m;\ j=1, \ldots, r),$$

în care am notat cu

$$\Phi(\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{mr}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-\sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_{k_j} g_k(x_j^i)}$$

Demonstraţie. Ţinînd cont de faptul că

$$\lg x < x - 1$$

dacă $x \neq 1$ şi

$$\lg x = x - 1$$

dacă şi numai dacă

$$x = 1$$

utilizînd metoda multiplicatorilor lui Lagrange, obţinem

$$H - \alpha - \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{r} \lambda_{k_j} \langle g_k(x_j)\rangle =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} p_i \left[\lg p_i + \alpha + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{r} \lambda_{k_j} g_k(x_j^i)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i [\lg p_i^{-1} + \lg \mathrm{e}^{-\alpha - \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_{k_j} g_k(x_j^i)}] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \lg (p_i^{-1} \mathrm{e}^{-\alpha - \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_{k_j} g_k(x_j^i)}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i [p_i^{-1} \mathrm{e}^{-\alpha - \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_{k_j} g_k(x_j^i)} - 1],$$

egalitatea avînd loc dacă şi numai dacă

$$p_i = \mathrm{e}^{-\alpha - \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_{k_j} g_k(x_j^i)}, \ (i = 1, \ldots, n).$$

Deci

$$H - \alpha - \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{r} \lambda_{k_j} \langle g_k(x_j)\rangle \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha}\, \Phi(\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{mr}) - 1$$

şi dacă parametrul α verifică

$$\alpha = \lg \Phi(\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{mr})$$

rezultă

$$H - \alpha - \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{k_j} \langle g_k(x_j) \rangle \leqslant 0.$$

Deci avem

$$H \leqslant \lg \Phi(\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{mr}) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{r} \lambda_{k_j} \langle g_k(x_j) \rangle$$

egalitatea avînd loc dacă şi numai dacă

$$p_i = \frac{1}{\Phi(\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{mr})} e^{-\sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_{k_j} g_k(x_j^i)}, \quad (i = 1, \ldots, n),$$

unde am notat

$$\Phi(\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{mr}) = \sum_{i=1}^{n} e^{-\sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_{k_j} g_k(x_j^i)},$$

$\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{mr}$ determinîndu-se din condiţiile

$$\langle g_k(x_j) \rangle = - \frac{\partial \lg \Phi(\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{mr})}{\partial \lambda_{k_j}}, \quad (k = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, r).$$

q.e.d.

Primită la redacţie la 3 mai 1968

CONSTRUCTION OF PROBABILITY BY MEANS OF INFORMATION

ABSTRACT

The aim of this paper is the presentation of some questions about information without probability in the sense of J. Kampé de Fériet and B. Forte. The axioms for information in a more restrictive but in the same time easier form are given. Particularly, the effective construction of the probability on the basis of the information is emphasized.

BIBLIOGRAFIE

1. Ingarden R. S., Urbanik K., *Information without probability*. Coll. Math., **9**, 281–304 (1962).
2. Ingarden R. S., *Simplified axioms for information without probability*. Prace Matematyczne **9**, 273–282 (1965).
3. Kampé De Fériet J., Forte B., *Information et probabilité*. C.R. Acad. Sci. Paris, **265**, séries A et B, 110–114, 142–146, 350–353 (1967)
4. Jaynes E. T., *Information theory and statistical mechanics*. Phys. Rev., **106**, 620–630 (1957).
5. Guiaşu S., *Sur les systèmes physiques avec les conditions initiales aléatoires*. Rev. Roumaine de Math. Pures et Appl., **12**, 1271–1281 (1967).

COOMOLOGIA COMPLEXELOR ELIPTICE

DE

GHEORGHE LUSZTIG

Scopul acestei lucrări este de a dezvolta teoria complexelor eliptice peste varietăţi compacte şi de a da demonstraţii pentru rezultatele anunţate în [8] şi [9].

INTRODUCERE

În această lucrare ne propunem să dezvoltăm teoria complexelor eliptice peste varietăţi compacte. Această teorie a cunoscut în ultimii ani (de la 1963 încoace) o dezvoltare foarte rapidă datorită lucrărilor lui Atiyah, Bott şi Singer (vezi [2], [12]).

Lucrarea de faţă poate fi privită ca o introducere la această teorie. Conţinutul ei este următorul: În capitolul 1 tratăm teoria generală a operatorilor eliptici în fibrări vectoriale (teorema de finitudine, de hipoelipticitate etc.). Am încercat să evităm folosirea operatorilor pseudodiferenţiali, instrumentul principal în demonstraţie constituindu-l inegalitatea lui Friedrichs pentru a cărei demonstraţie ne-am folosit de [11]; am folosit de asemenea lucrările [3], [13]. În capitolul 2 arătăm că vectorii proprii ai unui operator eliptic autoadjunct furnizează o teorie a seriilor Fourier care o generalizează pe cea clasică. Această teorie este utilizată în capitolul 3 în care tratăm teoria familiilor de operatori eliptici, punctul de vedere fiind asemănător cu cel din [7] (noi enunţăm însă rezultatele pentru operatori nu neapărat autoadjuncţi şi nu folosim tare elipticitatea). Capitolul conţine teoreme despre invarianţa indexului la perturbaţii şi despre condiţiile în care operatorul Green (C^∞) depinde faţă de parametrii.

În capitolul 4 dezvoltăm teoria secţiunilor armonice în complexe eliptice, adoptînd unele demonstraţii din [13] (unde ele sînt date pentru complexul lui de Rham sau Dolbeault).

Punctul central al lucrării îl constituie capitolul 5. Aici definim noţiunea de complex eliptic fibrat şi demonstrăm o teoremă despre existenţa unui şir spectral pentru astfel de complexe enunţată fără demon-

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 1, P. 33 — 83, BUCUREŞTI, 1969

strație în [9]. Aici am folosit unele idei din [6]. Ca aplicație acestei teoreme obținem o teoremă de multiplicativitate pentru index, din care rezultă ameliorări ale unor rezultate din [5], [6]. Spre deosebire de [9], aici am evitat folosirea teoremei lui Atiyah-Singer, înlocuind-o cu teorema de periodicitate a lui Bott care este cu mult mai elementară. Tot ca aplicație (nu imediată) dăm o formulă de tip Lefschetz pentru acțiuni libere ale grupurilor finite, anunțată în [8], care are aplicații în studiul involuțiilor. Menționez că, spre deosebire de [8], aici am evitat folosirea teoremei de punct fix a lui Atiyah-Bott [2].

Deoarece în lucrare am folosit teoria geometrică a claselor caracteristice, am considerat util să expun această teorie sub forma unei anexe. Pentru o tratare mai completă, vezi [4].

I. OPERATORI ELIPTICI

1.1. Fie $T^n = R^n/2\pi Z^n$ torul n-dimensional iar V un spațiu vectorial (complex) de dimensiune finită cu o bază specificată $(e_1, \ldots, e_n)$ și cu produsul hermitian $(\sum a_\alpha e_\alpha, \sum b_\alpha e_\alpha) = \sum a_\alpha b_\alpha$.

Notăm $C^\infty = C^\infty(T^n, V)$ spațiul Fréchet al funcțiilor $T^n \to V$ infinit derivabile, $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(T^n, V)$ spațiul vectorial topologic al funcționalelor antiliniare continue pe C^∞ (cu topologia tare), adică spațiul distribuțiilor de la T^n în V. Avem injecția continuă $C^\infty \to \mathcal{D}'$ dată de

$$f \to \{g \to \int f(f, g)\}.$$

Pentru orice distribuție $u \in \mathcal{D}'$ putem defini coeficienții Fourier $\hat{u}(\nu) = (u(e^{i\nu x} e_1), \ldots, u(e^{i\nu x} e_n)) \in V$, unde $\nu \in Z^n$, $\nu x = \sum \nu_\alpha x_\alpha$. Distribuțiile u, v care au coeficient Fourier egali sînt egale între ele. În adevăr, u, v coincid pe orice polinom trigonometric $\sum\limits_{|\nu| \leqslant N} a_\nu e^{i\nu x}$, $a_\nu \in V$. Cum spațiul PT al polinoamelor trigonometrice este dens în C^∞ (pentru orice $f \in C^\infty$ seria sa Fourier converge către f în topologia C^∞), rezultă $u = v$.

Dacă $f \in C^\infty$, avem $\hat{f}(\nu) = \int f(x)\, e^{-i\nu x}\, \mathrm{d}x$.

Definim $H^s = H^s(T^n, V) = \{u \in \mathcal{D}'\,;\ |u|_s^2 = (2\pi)^{-n} \sum\limits_\nu |\hat{f}(\nu)^2 (1 + \| \nu \|^2)^s < \infty\}$ pentru s întreg. Aici $\|\nu\| = (\sum \nu_\alpha^2)^{1/2}$ trebuie distins de $|\nu| = \sum |\nu_\alpha|$.

În H^s avem produsul scalar $(u, v)_s = (2\pi)^{-n} \sum\limits_\nu (\hat{f}(\nu), \hat{g}(\nu)) \times \times (1 + \|\nu\|^2)^s$.

1.2. H^s este complet (deci Hilbert): fie (u_n) un șir Cauchy în H^s. Atunci $(1 + \|\nu\|^2)^{s/2} \hat{u}_n(\nu) \in l^2 = l^2(Z^n, V)$ (spațiul aplicațiilor $\nu \to a_\nu$ ale lui Z^n în V cu $\sum\limits_\nu |a_\nu|^2 < \infty$) este Cauchy în l^2, deci converge către $(f(\nu)) \in l^2$. Fie $(g(\nu)) = ((1 + \|v\|^2)^{-s/2} f(\nu))$ și $u : PT \to C$ dată de $u(\sum \lambda_\nu e^{i\nu x}) = \sum\limits_\nu (g(\nu), \lambda_\nu)$. Avem $|u(\sum \lambda_\nu e^{i\nu x})|^2 = |\sum (g(\nu), \lambda_\nu)|^2 \leqslant$

$$\leqslant (\sum |g(\nu)|^2 (1 + \|\nu\|^2)^s)(\sum |\lambda_\nu|^2 (1 + \|\nu\|^2)^{-s}) \leqslant \text{const.} \sum |\lambda_\nu|^2 (1 + \|\nu\|^2)^{|s|} =$$

$$= \text{const.} \int \left| \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)^{|s|} \cdot (\sum \lambda_\nu e^{i\nu x}) \right|^2 \leqslant \text{const.}\ |\sum \lambda_\nu e^{i\nu x}|^2_{C^{2|s|}}$$

Rezultă că $u \in \mathcal{D}'$ şi cum $|u|_s^2 = \sum |f(\nu)^2) < \infty$, avem $u \in H^s$ şi evident $u_n \to u$ în H^s; astfel completitudinea lui H^s este demonstrată.

1.3. Din incluziunile $C^\infty \subset L^2 \subset D'$, unde prima e continuă, cu imagine densă, iar a doua e duala primei, rezultă că şi a doua e continuă cu imagine densă. În particular, PT e densă şi în $\mathcal{D}'$. Este evident că dacă $u \in H^s$, atunci $u_N = (2\pi)^{-n} \sum\limits_{|\nu| \leqslant N} \hat{u}(\nu) e^{i\nu x} \in PT$ converge către u în H^s. Deci H^s e completatul lui PT faţă de norma $|u|_s$. Pentru $s \geqslant 0$, norma $|u|_s$ pe PT e echivalentă cu norma $\left(\sum\limits_{|\alpha| \leqslant S} |D^\alpha u|\right)^{1/2}$, de exemplu $|u|_0 = \left(\int |u|^2\right)^{1/2}$. Rezultă $H^\circ = L^2$, iar $C^s \to H^s$ sînt injecţii continue $(s \geqslant 0)$. Este uşor de văzut că dacă $s \geqslant t$, avem $|u|_s \geqslant |u|_t$, deci $H^s \to H^t$ e o injecţie continuă. Rezultă că pentru orice s avem injecţia continuă $C^\infty \to H^s$ (aceasta e compunerea $C^\infty \to C^{|s|} \to H^{|s|} \to H^s$).

1.4. Dacă $s \geqslant t$, incluziunea $H^s \to H^t$ este compactă (lema lui Rellich).

Fie f^j un şir în H^s cu $|f^j|_s \leqslant M$; folosind procedeul diagonal, putem presupune că $\hat{f}^j(\nu)$ converge pentru orice ν. Pentru $N > 0$, punem $f^j = f_N^j + g_N^j$, unde $f_N^j = \begin{cases} f^j, & |\nu| \geqslant N \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$ Atunci $|g_N^j - g_N^k|_t^2 \leqslant 2 M^2 (1+N)^{t-s}$. Fie $\varepsilon > 0$; există N_0 astfel ca $|g_{N_0}^j - g_{N_0}^k|_t \leqslant \varepsilon$ pentru orice j, k. Pentru acest N_0, există n_0 astfel ca $|f_{N_0}^j - f_{N_0}^k|_t \leqslant \varepsilon$ pentru $j, k \geqslant n_0$. Deci $|f^j - f^k|_t \leqslant |f_{N_0}^j + f_{N_0}^k|_t + |g_{N_0}^j - g_{N_0}^k|_t \leqslant 2\varepsilon$ pentru $j, k \geqslant n_0$ şi afirmaţia e demonstrată.

1.5. Avem $D^\alpha(\sum a_\nu e^{i\nu x}) = \sum i^{|\alpha|} \nu^\alpha a_\nu e^{i\nu x}$ (aici $\nu^\alpha = \nu_1^{\alpha_1} \ldots \nu_n^{\alpha_n}$), deci dacă punem $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^n}{\partial x_1^n}$, avem

$$(1 - \Delta)^s (\sum a_\nu e^{i\nu x}) = \sum (1 + \|\nu\|^2)^s (\sum a_\nu e^{i\nu x}),$$
$$s \geqslant 0.$$

Această relaţie poate servi la definirea lui $(1 - \Delta)^s$ pentru $s < 0$. În particular, $|(1 - \Delta)^s u|_t = |u|_{s+2t}$.

1.6. Avem inegalitatea lui Schwarz $|(u, v)_s| \leqslant |u|_{s+t} |v|_{s-t}$. Mai mult, $|u|_{s+t} = \sup\limits_{\substack{v \in PT \\ v \neq 0}} \dfrac{(u, v)_s}{|v|_{s-t}}$. În adevăr, inegalitatea este evidentă.

Fie $v' = (1 - \Delta)^t u$; avem $\dfrac{(u, v')_s}{|v'|_{s-t}} = \dfrac{(u, (1 - \Delta)^t u)_s}{|(1 - \Delta)^t u|_s} = \dfrac{(u, u)_{s+t}}{|u|_{s+t}} = |u|_{s+t}$ deci avem egalitatea dorită.

Rezultă că $|u|_{-t} = \sup\limits_{|v|_t = 1} |(u, v)_0|$, deci H^{-t} este antidualul lui H^t; adică orice funcţională antiliniară, continuă pe H^t, se scrie unic sub forma $v \to (u, v)_0$, $u \in H^{-t}$.

1.7. Dacă $t > \dfrac{n}{2} + s$, atunci $\sup\limits_x |D^\alpha f(x)| \leqslant \text{const.}\ |f|_t$ pentru $|\alpha| \leqslant s$ iar t, s întregi $\geqslant 0$, $f \in PT$ (inegalitatea lui Sobolev).

În adevăr, presupunem întîi $s = 0$. Fie $f(x) = \sum a_\nu e^{i\nu x} \in PT$: atunci $|f(x)|^2 \leqslant \sum |a_\nu|^2 \leqslant \sum (1 + \|\nu\|^2)^t |a_\nu|^2 (1 + \|\nu\|^2)^{-t} = (2\pi)^{-n} |f|_t^2 \times \times \sum\limits_\nu \frac{1}{(1 + \|\nu\|^2)^{\frac{n}{2} + \varepsilon}} = c|f|_t^2$, $(\varepsilon > 0)$. Am folosit aici că

$$\sum_\nu \frac{1}{(1 + \|\nu\|^2)^{\frac{n}{2} + \varepsilon}} \leqslant \int_{R^n} \frac{dx}{(1 + |x|^2)^{\frac{n}{2} + \varepsilon}} =$$

$$= \text{const.} \int_0^\infty \frac{\rho^{n-1}\, d\rho}{(1 + \rho^2)^{\frac{n}{2} + \varepsilon}} = c_1 + c_2 \int_1^\infty \frac{\rho^{n-1}\, d\rho}{(1 + \rho^2)^{\frac{n}{2} + \varepsilon}} = c_1 + c_2' \int_1^\infty \frac{\rho^{n-1}\, d\rho}{\rho^{n+2\varepsilon}} =$$

$$= c_1 + c_2' \int_1^\infty \frac{d\rho}{\rho^{1+2\varepsilon}} = \text{const.} < \infty.$$

Dacă $s > 0$, avem $|(D^\alpha f)(x)| \leqslant c|D^\alpha f|_{t-s} \leqslant c|f|_{t-s+|\alpha|} \leqslant c|f|_t$. Din inegalitatea lui Sobolev rezultă :

1.8. $H^t \to C^s$ *e injecție continuă pentru* $t > \frac{n}{2} + s$. *În particular,* $\bigcap\limits_t H^t = H^\infty = C^\infty$ (*și topologic*). Folosind 1.3 și 1.7 avem $H^\infty = C^\infty$ algebric și $C^\infty \to H^\infty$ continuu; (aici H^∞ are topologia de limită proiectivă al spațiilor H^t, deci este Fréchet). Cum C^∞ este Fréchet, $C^\infty \to H^\infty$ este izomorfism.

1.9. Deoarece $C^\infty \to H^{-t}$, este injecție continuă, cu imagine densă ; aceleași proprietăți le va avea duala ei $H^t \to \mathcal{D}'$.

Notînd $H^{-\infty} = \bigcup H^t$ cu topologia de limită inductivă, obținem injecția continuă $H^{-\infty} \to \mathcal{D}'$. Folosind 1.8 vedem că de fapt $H^{-\infty} = \mathcal{D}'$ (algebric). Rezultă :

(a) Seriile Fourier corespunzătoare elementelor lui C^∞ sînt exact cele pentru care $\sum\limits_\nu |\hat{u}(\nu)|^2 (1 + \|\nu\|^2)^s < \infty$ pentru orice $s \in Z$.

(b) Seriile Fourier corespunzătoare elementelor lui $\mathcal{D}'$ sînt exact cele pentru care $\sum\limits_\nu |\hat{u}(\nu)|^2 (1 + \|\nu\|^2)^s < \infty$ pentru cel puțin un $s_0 \in Z$ (și deci pentru orice $s \leqslant s_0$).

Rezultă de asemenea că pentru $u \in \mathcal{D}'$, seria sa Fourier $(2\pi)^{-n} \sum\limits_\nu \hat{u}(\nu) e^{i\nu x}$ converge la u topologia lui $\mathcal{D}'$ (deoarece aceasta e adevărat în H^{s_0}).

1.10. $|f|_s \leqslant |f|_{t_2} + C(\varepsilon)|f|_{t_1}$, pentru $t_1 < s < t_2$, $\varepsilon > 0$.

În adevăr, folosim $(1 + \|\nu\|^2)^s \leqslant \varepsilon(1 + \|\nu\|^2)^{t_2} + \varepsilon^{-\frac{s - t_1}{t_2 - s}} (1 + \|\nu\|^2)^{t_1}$.

1.11. Fie V și W spații vectoriale ca în 1.1 de dimensiune m, respectiv m'. Un operator diferențial de ordin $\leqslant k$ este o aplicație $L = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha(x) D^\alpha : C^\infty(T^n, V) \to C^\infty(T^n, W)$, unde $a_\alpha(x) \in C^\infty(T^n, \mathcal{L}(V, W))$.

1.12. Dacă L are ordin $\leqslant k$, avem $|Lu|_s \leqslant cM'|u|_{s+k} + cM''|u|_{s+k-1}$, unde $c = c(k, n)$, $M' = \sup\limits_{\substack{x \in T^n \\ |\alpha| = k}} |a_\alpha(x)|$, $M'' = \sup\limits_{\substack{x \in T^n \\ |\beta| \leqslant |s|+1}} |D^\beta a_\alpha(x)|$.

În adevăr, dacă $L = a_\alpha D^\alpha$ cu a_α independent de x, este evident că $|a_\alpha D^\alpha u|_s \leqslant |a_\alpha|\,|u|_{s+|\alpha|}$, deci e suficient să arătăm că pentru orice $a(x) \in C^\infty(T^n, \mathcal{L}(V, W))$, avem $|a\,u_s| \leqslant cM'|u|_s + cM''|u|_{s-1}$, cu $M' = \sup\limits_x |a(x)|$, $M'' = \sup\limits_{\substack{x \\ |\alpha| \leqslant |s|+1}} |D^\alpha a(x)|$.

Presupunem $s < 0$; fie $\varphi = (1-\Delta)^s u$, $\psi = (1-\Delta)^s(au)$. Avem $|au|_s^2 = |\psi|_{-s}^2 = (au, \psi)_0 = (a(1-\Delta)^{-s}\varphi, \psi)_0 \leqslant$ (integrînd prin părţi) $\leqslant cM'|\varphi|_{-s}|\psi|_{-s} + cM''|\psi|_{-s}|\varphi|_{-s-1}$.

Împărţind cu $|\psi|_{-s}$ avem

$$|\psi|_{-s} = |au|_s \leqslant cM'|\varphi|_{-s} + cM''|\varphi|_{-s-1} = cM'|u|_s + cM''|u|_{s-1}.$$

Presupunem $s \geqslant 0$; avem

$$|au|_s^2 = (au, (1-\Delta)^s(au)) \leqslant \text{(integrînd prin părţi)} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 M'^2 |u|_s^2 + c_2 M'M''|u|_s|u|_{s-1} + c_3|u|_{s-1}^2 \leqslant (cM'|u|_s + cM''|u|_{s-1})^2,$$

unde c a fost ales astfel ca $c^2 \geqslant \max\left(c_1, c_3, \dfrac{c_2}{2}\right)$.

Rezultă că $|Lu|_s \leqslant$ const. $|u|_{s+k}$, deci $L: H^s \to H^{s-k}$ e *continuu*.

1.13. Fie $\omega \in C^\infty(T^n, C)$. Pentru $u, v \in C^\infty(T^n, V)$ avem:

$$(\omega u, v)_t = (u, \bar{\omega} v)_t + 0(|u|_t|v|_{t-1} + |u|_{t-1}|v|_t).$$

În adevăr, presupunem $t \leqslant 0$; fie $\varphi = (1-\Delta)^t u$, $\psi = (1-\Delta)^t v$; avem $(\omega u, v)_t = (\omega(1-\Delta)^{-t}\varphi, \psi)_0 = ((1-\Delta)^{-t}\varphi, \bar{\omega}\psi_0) = (\varphi, (1-\Delta)^{-t}(\bar{\omega}\psi))_0 =$ $=$(integrînd prin părţi)$= (\varphi, \bar{\omega}(1-\Delta)^{-t}\psi)_0 + 0(|\varphi|_{-t}|\psi|_{-t-1} + |\varphi|_{-t-1}|\psi|_{-t}) =$ $= (u, \omega v)_t + 0|u|_t|v|_{t-1} + |u|_{t-1}|v|_t)$.

Presupunem $t \geqslant 0$; avem

$$(\omega u, v)_t = ((1-\Delta)^t \omega u, v)_0 = \text{(integrînd prin părţi)} =$$

$$= (\omega(1-\Delta)^t u, v)_0 + 0(|u|_t|v|_{t-1} + |u|_{t-1}|v|_t).$$

1.14. Fie $\omega \in C^\infty(T^n, C)$, reală, $L: C^\infty(T^n, V) \to C^\infty(T^n, W)$ un operator diferenţial de ordin $\leqslant k$. Avem $(L(\omega^2 u), Lu)_s = |L(\omega u)|_s^2 + 0(|u|_{s+k}|u|_{s+k-1})$.

În adevăr,

$$(L(\omega^2 u), Lu)_s = \text{(conform 1.12)} = (\omega L(\omega u), Lu)_s + 0(|u|_{s+k}|u|_{s+k-1}) =$$

$$= \text{(conform 1.13)} = (L(\omega u), \omega Lu)_s + 0(|u|_{s+k}|u|_{s+k-1}) =$$

$$= \text{(conform 1.12)} = (L(\omega u), L(\omega u))_s + 0(|u|_{s+k}|u|_{s+k-1}).$$

1.15. Operatorul diferenţial $L = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha(x) D^\alpha : C^\infty(T^n, V) \to$ $\to C^\infty(T^n, W)$ se numeşte *k-eliptic* în punctul $x \in T^n$ dacă pentru orice $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$, cu $|\xi| \neq 0$, avem $\sum\limits_{|\alpha| = k} a_\alpha(x)\,\xi^{\alpha_1}, \ldots, \xi_n^{\alpha_n} =$ izomorfism $V \approx W$. L este k-eliptic pe o mulţime $K \subset T^n$ dacă această condiţie e satisfăcută pentru orice $x \in K$. L este k-eliptic dacă această condiţie e satisfăcută pentru orice $x \in T^n$.

Condiţia ca L să fie k-eliptic pe un compact $K \subset T^n$ se poate exprima de asemenea prin inegalitatea $\left|\left(\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\xi^\alpha\right) v\right| \geqslant$ const. $|\xi|^k |v|$, $x \in K$, $v \in V$, $\xi \in R^n$ combinată cu relaţia $\dim V = \dim W$. Mulţimea punctelor $x \in T^n$ în care L este eliptic este întotdeauna deschisă. Un exemplu de operator eliptic este $\Delta = \sum \partial^2/\partial x_{i_n}^2 : C^\infty(T^n, V) \to C^\infty(T^n, V)$, deoarece $\det((\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2) I) = (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^m$.

1.16. Dacă L este k-eliptic, atunci $|u|_{s+k} \leqslant$ const. $(|Lu|_s + |u|_{s_0})$ *pentru oricare* s, s_0; $u \in C^\infty(T^n, V)$, *constanta depinzînd de* s, s_0 (*inegalitatea lui Friedrichs*).

Putem presupune $s + k > s_0$, altfel inegalitatea e evidentă şi $V = W$.

Cazul (*a*). L este redus la termeni de grad maxim k şi are coeficienţi constanţi.

Avem

$$|Lu|_s^2 = (2\pi)^{-n} \sum_\nu |(a_\alpha \nu^\alpha)\hat{u}(\nu)|^2 (1 + \|\nu\|^2)^s \geqslant$$

$$\geqslant \text{const.} \sum_\nu |\hat{u}(\nu)|^2 \|\nu\|^{2k} (1 + \|\nu\|^2)^s, \quad \text{după } 1.15$$

$$|u|_{s_0}^2 = (2\pi)^{-n} \sum_\nu |\hat{u}(\nu)|^2 (1 + \|\nu\|^2)^s \quad \text{deci}$$

$$|Lu|_s^2 + |u|_{s_0}^2 \geqslant \text{const.} \sum |\hat{u}(\nu)|^2 (1 + \|\nu\|^2)^s (\|\nu\|^{2k} + (1 + \|\nu\|^2)^{s_0 - s}) \geqslant$$

$$\geqslant \text{const.} \sum |\hat{u}(\nu)|^2 (1 + \|\nu\|^2)^s (1 + \|\nu\|^2)^k = \text{const.} |u|_{s+k}^2 .$$

Cazul (*b*). L are coeficienţi variabili. Arătăm că există $\varepsilon = \varepsilon(L) > 0$ astfel că dacă $U_\varepsilon \subset T^n$ e un deschis de diametru $\leqslant \varepsilon$, atunci pentru orice u cu supp $u \subset U_\varepsilon$ e satisfăcută inegalitatea din enunţ.

În adevăr, fie $L' = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x_0) D^\alpha$, $x_0 \in U_\varepsilon$ şi $u \in C^\infty(T^n, V)$ cu supp $u \subset U_\varepsilon$. După cazul (*a*) avem $|u|_{s+k} \leqslant$ const. $(|L'u|_s + |u|_{s_0}) \leqslant$ $\leqslant$ const. $(|Lu|_s + |(L - L')u|_s)$ + const. $|u|_{s_0} \leqslant$ (conform 1.12) $\leqslant$ $\leqslant$ const. $|Lu|_s$ + const. $\varepsilon |u|_{s+k}$ + const. $|u|_{s+k-1} \leqslant$ (conform 1.10) $\leqslant$ $\leqslant$ const. $|Lu|_s$ + const. $\varepsilon |u|_{s+k} + \frac{1}{2}|u|_{s+k}$ + const. $|u|_{s_0}$. Alegînd ε destul de mic, vom avea $1 >$ const. $\varepsilon + \frac{1}{2}$ şi afirmaţia e demonstrată.

Cazul (*c*). (general). Fie $1 = \sum \omega_j^2$ o partiţie a unităţii pe T^n astfel ca ω_j să aibă suporturile suficient de mici pentru a aplica cazul (b).

Avem, pentru $u \in C^\infty(T^n, V)$:

$$|u|_{s+k}^2 = (u, u)_{s+k} = (\sum \omega_j^2 u, u)_{s+k} = (\text{conform } 1.13) =$$

$$= \sum (\omega_j u, \omega_j u)_{s+k} + 0(|u|_{s+k} |u|_{s+k-1}) \leqslant (\text{conform cazului (b)}) \leqslant$$

$$\leqslant \text{const.} \sum (L\omega_j u, L\omega_j u)_s + \text{const.} \sum |\omega_j u|_s^2 + 0(|u|_{s+k} |u|_{s+k-1}) \leqslant$$

$$\leqslant (\text{conform } 1.14) \leqslant \text{const.} (L(\sum \omega_j^2 u), Lu)_s + 0(|u|_{s+k} |u|_{s+k-1}) \leqslant$$

$$\leqslant \text{const.}\, | Lu |_s^2 + \frac{1}{2} | u |_{s+k}^2 + \text{const.}\, | u |_{s+k-1}^2 \leqslant (\text{conform } 1.10) \leqslant$$

$$\leqslant \text{const.}\, | Lu |_s^2 + \frac{3}{4} | u |_{s+k}^2 + c \, | u |_{s_0}^2 .$$

De aici $| u |_{s+k}^2 \leqslant 4 \text{ const.}\, | Lu |_s^2 + 4 \text{ const.}\, | u |_{s_0}^2$ și inegalitatea lui Friedrichs e demonstrată.

1.17. Putem enunța mai general rezultatul de la 1.16, demonstrația fiind complet analoagă : Dacă L e k-eliptic pe $K \subset T^n$ și $u \in C^\infty (T^n, V)$, supp $u \subset K$, atunci

$$| u |_{s+k} \leqslant \text{const.}_k \, (| Lu |_s + | u |_{s_0}).$$

Prin continuitate, această relație e adevărată și pentru $u \in H^{s+k} (T^n, V)$, supp $u \subset K$.

1.18. Să notăm pentru orice $u \in \mathcal{D}' (T^n, V)$ și $h \in R^n - \{0\}$, $u^h (x) = \frac{1}{|h|} (u (x + h) - u (x))$.

Dacă $u \in H^s$, *atunci* $u \in H^{s+1}$ *dacă și numai dacă* $M = \sup\limits_h | u^h |_s < \infty$. *Mai mult,* $M \leqslant | u |_{s+1}^2 - | u |_s^3 \leqslant nM$. Să presupunem că

$$u = (2\pi)^{-n} \sum_\nu \hat{u} (\nu) \, e^{i\nu x} \quad \text{și} \quad | u |_s^2 = (2\pi)^{-n} \sum_\nu (1 + \| \nu \|^2) \, | \hat{u} (\nu) |^2 < \infty.$$

$$\hat{u}^h (\nu) = \frac{e^{i\nu h} - 1}{|h|} \hat{u} (\nu) = e^{i\nu h/2} \frac{i \sin \frac{\nu h}{2}}{\left| \frac{h}{2} \right|} .$$

Rezultă $| u^h |_s^2 = (2\pi)^{-n} \sum\limits_\nu (1 + \| \nu \|^2)^s \dfrac{\sin^2 \frac{\nu h}{2}}{\left| \frac{h}{2} \right|^2} | \hat{u} (\nu) |^2 \leqslant \dfrac{4 \, |u|_s^2}{| h |^2}$ deci $u^h \in H^s$. Să presupunem că $u \in H^{s+1}$; atunci

$$| u^h |_s^2 \leqslant (2\pi)^{-n} \sum \| \nu \|^2 (1 + \| \nu \|^2)^s \, | \hat{u} (\nu) |^2 = | u |_{s+1}^2 - | u |_s^2$$

deci $M \leqslant | u |_{s+1}^2 - | u |_s^2$. Invers, să presupunem că $M < \infty$. Fie $\varepsilon > 0$, $N > 0$; dacă $|\nu| \leqslant N$ și $| h | \leqslant \delta (\varepsilon, N)$ avem $\dfrac{\sin^2 \frac{\nu h}{2}}{\left(\frac{\nu h}{2} \right)^2} \geqslant 1 - \varepsilon$. Rezultă că pentru $|h| \leqslant \delta$,

$$M \geqslant \sum_{|\nu| \leqslant N} \frac{\sin^2 \frac{\nu h}{2}}{\left|\frac{h}{2}\right|^2} (1 + \|\nu\|^2)^s |\hat{u}(\nu)|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{|\nu| \leqslant N} (1 - \varepsilon) \frac{(\nu h)^2}{|h|^2} \cdot (1 + \|\nu\|^2)^s |\hat{u}(\nu)|^2.$$

Luînd h de forma $(0, \ldots, h_i, \ldots, 0)$ în inegalitatea precedentă și adunînd pentru $1 \leqslant i \leqslant n$, obținem

$$nM \geqslant \sum_{|\nu| \leqslant N} (1 - \varepsilon) \|\nu\|^2 (1 + \|\nu\|^2)^s |\hat{u}(\nu)|^2.$$

Deoarece ε este arbitrar, rezultă $nM \geqslant \sum_{|\nu| \leqslant N} \|\nu\|^2 (1 + \|\nu\|^2)^s |\hat{u}(\nu)|^2$ sau $nM + |u|_s^2 \geqslant \sum_{|\nu| \leqslant N} (1 + \|\nu\|^2)^{s+1} |\hat{u}(\nu)|^2$. Rezultă că $u \in H^{s+1}$ și $nM + |u|_s^2 \geqslant |u|_{s+1}^2$.

1.19. Fie $u \in H^{s_0}$ și $L = \sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha(x) D^\alpha$ un operator k-eliptic pe suportul lui u. *Dacă $Lu \in H^s$, atunci $u \in H^{s+k}$.*

În adevăr, să presupunem mai întîi că $u \in H^{s+k-1}$. Să notăm $L^h = \sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha^h(x) D^\alpha$; avem $L(u^h) = (Lu)^h - L^h(u(x + h))$. Există K astfel ca $\operatorname{supp} u^h \subset K$ pentru $|h| < \delta$ și L e eliptic pe K : folosind 1.17 și 1.18 avem :

$$|u^h|_{s+k-1}^2 \leqslant \text{const.}\ (|L u^h)|_{s-1}^2 + |u^h|_{s+k-2}^2) \leqslant \text{const.}\ (|Lu)^h|_{s-1}^2 +$$

$$+ |L^h u(x + h)|_{s-1}^2 + |u|_{s+k-1}^2) \leqslant \text{const.}\ (|Lu|_s^2 + |u|_{s+k-1}^2) \leqslant M < \infty,$$

deci $u \in H^{s+k}$. Fie acum $u \in H^{s_0}$ astfel că $Lu \in H^s$. Dacă $s_0 \geqslant s + k - 1$, atunci $u \in H^{s+k-1}$ și deci $u \in H^{s+k}$.

Dacă $s_0 < s + k - 1$, atunci $Lu \in H^{s_0-k+1}$, deci $u \in H^{s_0+1}$ și continuînd prin inducție, rezultă afirmația.

1.20. În această lucrare vom înțelege prin ,,varietate'' o varietate de clasă C^∞ fără bord, iar prin ,,fibrare vectorială'', o fibrare vectorială complexă de clasă C^∞ peste o varietate, dimensiunea fibrelor fiind constantă. O excepție o vor forma fibrarea tangentă TX, cotangentă T^*X și puterile sale exterioare $\Lambda^i T^*X$ care vor fi fibrări reale. O metrică pe o varietate X va fi prin definiție o metrică riemanniană de clasă C^∞ pe X iar o metrică pe o fibrare vectorială E va fi o metrică hermitiană de clasă C^∞ pe E. În cazul cînd X e riemannian, pe $\Lambda^i T^*X$ se va considera întotdeauna metrica indusă de cea a lui X. Varietatea X va fi presupusă compactă în capitolele 1—3. Vom face acum o globalizare a noțiunilor introduse anterior.

Fie E o fibrare vectorială peste varietatea X. Alegem o acoperire finită cu mulțimi deschise $(U_\iota)_{i \in I}$ a lui X astfel că E/U e trivial. Alegem pentru orice i izomorfismele

$$\begin{tikzcd}
\Phi_i : E \mid U_i \arrow[r, "\approx"] \arrow[d] & D_i \times C^m \arrow[d] \\
\varphi_i : U_i \arrow[r, "\approx"] & D_i
\end{tikzcd}$$

unde D_i e un deschis în T^n.

Fie (λ_i) o partiție C^∞ a unității pe X astfel că $\sum \lambda_i = 1$, $\operatorname{supp} \lambda_i \subset U_i$ și fie (μ_i) funcții C^∞ reale pe X astfel că $\operatorname{supp} \mu_i \subset U_i$, $\mu_i \mid \operatorname{supp} \lambda_i = 1$.

Definim aplicațiile $P : \bigoplus_{i \in I} C^\infty (T^n, C^m) \rightleftarrows C^\infty (E) : Q$ prin $P(g_1, \ldots, g_r) = \sum_{i \in I} \mu_i \Phi_i^{-1} g \varphi_i$, $Q(f) = (\Phi_i \lambda_i f \varphi_i^{-1})_{i \in I}$ (convenim ca o funcție definită pe un subspațiu al unui spațiu topologic să fie prelungită cu valoarea 0 acolo unde ea nu e definită).

Atunci $PQ = 1$ iar QP e un proiector continuu. Deci $C^\infty (E)$ se identifică cu un subspațiu închis în $\bigoplus_{i \in I} C^\infty (T^n, C^m)$ și primește topologia indusă. Această topologie nu depinde de alegerile făcute. În adevăr, dacă facem alte alegeri, obținem analog $P' : \bigoplus_{j \in J} C^\infty (T^n, C^m) \rightleftarrows C^\infty (E) : Q'$ și se poate verifica că $QP' : \bigoplus_{j \in J} C^\infty (T^n, C^m) \rightleftarrows \bigoplus_{i \in I} C^\infty (T^n, C^m) : Q'P$ sînt continue de unde rezultă egalitatea celor două topologii.

1.21. Definim fibrarea Ω_x a măsurilor pe X ca fiind fibrarea vectorială obținută din T^*X prin reprezentarea $GL(n, R) \to C^*$ dată de $A \to |\det A|$. Secțiunile lui Ω_x sînt funcții date în fiecare hartă a căror formulă de transformare este $\omega(y_1, \ldots, y_n) = \omega(x_1, \cdots, x_n) \left| \det \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) \right|$.

Cu ajutorul unei secțiuni a lui Ω_x se poate defini integrala unei funcții continue pe X prin relația

$$\int_X f \cdot \omega = \sum \int_{T^n} \lambda_i f \varphi_i^{-1} \omega (x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

Orice metrică riemanniană pe X determină o secțiune peste tot nenulă a lui Ω_x (elementul de volum) și deci determină o identificare a lui Ω_x cu fibrarea trivială 1. Orice orientare a lui X definește o identificare a lui Ω_x cu fibrarea $\Lambda^n \, T^*(X) \otimes C$ a formelor exterioare de ordin n, cu coeficienți complecși. Definim spațiul $\mathcal{D}'(E)$ al distribuțiilor pe X cu valori în E ca fiind spațiul formelor liniare continue pe $C^\infty (E^* \otimes \Omega_x)$, cu topologia tare, E^* fiind fibrarea duală a lui E.

În cazul torului, Ω_x are o secțiune canonică $\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$ iar formele liniare pe $C^\infty (T^n, V^*)$ se identifică cu formele antiliniare pe $C^\infty (T^n, V)$ și astfel definiția lui $\mathcal{D}'(E)$ revine în acest caz la definiția cunoscută (conform 1.1).

Avem injecția continuă $C^\infty (E) \to \mathcal{D}'(E)$ dată de $f \to (g \oplus \omega \to \int fg\,\omega)$. Astfel, putem să ne gîndim la elementele lui $\mathcal{D}'(E)$ ca la niște secțiuni discontinue în E.

Definim $H^s(E) = \{u \in \mathcal{D}'(E) : \|u\|_s^2 = \sum\limits_i |\Phi_i \lambda_i u \varphi_i^{-1}|_s^2 < \infty\}$

$$((u, v))_s = \sum_i (\Phi_i \lambda_t u \varphi_i^{-1}, \ \Phi_i \lambda_i v \varphi_i^{-1})_s.$$

Ca şi în cazul lui $C^\infty(E)$, $H^s(E)$ se poate identifica ca un subspaţiu închis al lui $\bigoplus\limits_{i \in I} H^s(T^n, C^m)$ şi $\|u\|_s$ este norma indusă de norma acestei sume hilbertiene. De asemenea, se arată la fel că topologia lui $H^s(E)$ nu depinde de alegerile făcute.

Pentru u astfel că supp $u \subset U_i$, să notăm $|\Phi_i u \varphi_i^{-1}|_s = |u|_{s,i}$; avem $\|u\|_s^2 = \sum |\lambda_i u|_{s,i}^2$. Se poate verifica că pentru u astfel că supp $u \subset K$, unde K e compact fix din U_i, avem echivalenţa de norme $\|u\|_s \sim |u|_{s,i}$.

Cu ajutorul funcţiilor P şi Q (vezi 1.20) putem de asemenea identifica $C^s(E)$ cu un subspaţiu închis în $\bigoplus\limits_{i \in I} C^s(T^n, C^m)$, iar $\mathcal{D}'(E)$ cu un subspaţiu închis în $\bigoplus\limits_{i \in I} \mathcal{D}'(T^n, C^m)$. Pe $C^s(E)$ obţinem norma

$$\|u\|_{C^s}^2 = \sum |\Phi_i \lambda_i u \varphi_i^{-1}|_{C^s}^2.$$

1.22. $C^\infty(E)$ e dens în $C^s(E)$; în adevăr, fie $f \in C^s(E)$ şi $Qf = (g_1, \ldots, g_r)$. Alegem şirurile $g_i^{(n)} \to g_i$, $g_i^{(n)} \leftarrow C^\infty(T^n, C^m)$, convergente în $C^s(T^n, C^m)$. Fie $f^{(n)} = P(g_1^{(n)}, \ldots, g_r^{(n)})$; atunci $f^{(n)} \to f$ în $C^s(E)$ şi $f^{(n)} \in C^\infty(E)$ şi afirmaţia e demonstrată.

În mod analog putem arăta că $C^\infty(E)$ dens în $H^s(E)$ şi în $\mathcal{D}'(E)$.

1.23. Avem, evident, $|u|_s \leqslant |u|_t$, $u \in C^\infty(E)$ pentru $s \leqslant t$ de unde rezultă incluziunea continuă $H^t \to H^s$. Această incluziune e compactă (lema lui Rellich). Aceasta rezultă din diagrama

$$\begin{tikzcd}
H^t(E) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus H^t(T^n, C^m) \arrow[d] \\
H^s(E) \arrow[r] & \bigoplus H^s(T^n, C^m)
\end{tikzcd}$$

şi din 1.4.

Dacă $t > \dfrac{n}{2} + s$, avem incluziunea continuă $H^t(E) \to C^s(E)$ (Sobolev). În adevăr, după 1.7: $\|u\|_{C^s}^2 = \sum |\Phi_i \lambda_i u \varphi_i^{-1}|_{C^s}^2 \leqslant \text{const.} \sum |\lambda_i u|_{t,i}^2 = \text{const.} \|u\|_t^2$. De aici rezultă $\bigcap H^t(E) = H^\infty(E) = C^\infty(E)$ (topologic) ca şi în 1.8.

Dacă $s \geqslant 0$, avem echivalenţa de norme pe $C^\infty(E)$:

$$\|u\|_s \sim \left(\sum_i \sum_{|\alpha| \leqslant s} \int |D^\alpha(\Phi_i \lambda_i u \varphi_i^{-1})|^2\right)^{1/2}$$

de unde rezultă $\|u\|_s \leqslant \text{const.} \|u\|_{C^s}$, adică $C^s(E) \to H^s(E)$ e continuă.

1.24. Arătăm că $H^{-s}E$ este antidualul lui H^sE faţă de antidualitatea $((u, v))_0$.

În adevăr, să observăm mai întîi că avem antidualitatea

$$(\oplus H^s(T^n, C^m)) \times (\oplus H^{-s}(T^n, C^m)) \to C \text{ dată de } ((u_i), (v_i)) = \sum (u_i, v_i)_0.$$

E uşor de verificat relaţia $(QP(u_i), (v_i)) = ((u_i), QP(v_i))$. Fie φ o formă antiliniară continuă pe $H^s(E)$. Atunci φP e o formă antiliniară continuă pe $\oplus H^s(T^n, C^m)$, deci există $f \in \oplus H^{-s}(T^n, C^m)$ cu $(\varphi P)(g) = (f, g)$, $g \in \oplus H^{+s}(T^n, C^m)$. Atunci $Pf \in H^{-s} E$ şi pentru orice $v \in H^s(E)$ avem

$$((Pf, v))_0 = (QPf, \ Qv) = (f, \ QPQv) = (f, \ Qv) = \varphi PQv = \varphi v.$$

Rezultă că $(H^s)' \subset H^{-s}$; pe de altă parte, din $|((u, v))_0| \leqslant \| u \|_s . \| v \|_{-s}$ rezultă $H^{-s} \subset (H^s)'$ şi afirmaţia e demonstrată.

Rezultă $\mathcal{D}'(E) = \bigcup H^s(E) = H^{-\infty}(E)$ (algebric).

1.25. Un operator diferenţial de ordin $\leqslant k$ este o aplicaţie liniară $L : C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ între secţiunile C^∞ ale fibrărilor vectoriale E, F peste X care transportată prin hărţi locale (pe tor) are expresia $L = \sum_{(\alpha)\leqslant k} a_\alpha(X) D^\alpha$ (presupunem date trivializări pentru E şi F). L rezultă continuu. Se poate da o definiţie invariantă : un operator diferenţial de ordin $\leqslant k$ este o aplicaţie liniară L : $C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ astfel că dacă $s \in C^\infty(E)$ are k-jetul în $x \in X$ nul, atunci $(Lu)(x) = 0$. Vom presupune întotdeauna $k > 0$. Adjunctul formal al lui L este prin definiţie un operator L^* : $C^\infty(F^* \otimes \Omega_X) \to C^\infty(E^* \otimes \Omega_X)$ definit de formula $\int_X Lf \cdot g = \int_X f \cdot L^* g$, unde $f \in C^\infty E$, $g \in C^\infty(F^* \otimes \Omega_X)$.

În coordonate locale $L^* g = \sum_{(\alpha)\leqslant k} (-1)^{(\alpha)} D^\alpha({}^t a_\alpha(x)\, g)$, unde am identificat pe tor Ω_X cu fibrarea trivială.

În adevăr, pe tor avem : $\int a_\alpha(x) D^\alpha f . g \, \mathrm{d}x = \int D^\alpha f \cdot {}^t a_\alpha(x)\, g \, \mathrm{d}x = \int (-1)^{|\alpha|} f . D^\alpha({}^t a_\alpha(x)\, g) \, \mathrm{d}x$ pentru $g \in C^\infty(T^n, V^*)$, $f \in C^\infty(T^n, V)$. Aceasta demonstrează existenţa lui L^* şi faptul că L^* e operator diferenţial de ordin $\leqslant k$; unicitatea lui L^* e evidentă. Avem $L^{**} = L$ (unde identificăm $\Omega_X^* \otimes \Omega_X = 1$).

Operatorul diferenţial L admite o prelungire naturală (continuă) L : $\mathcal{D}'(E) \to \mathcal{D}'(F)$ (care uneori va fi notată cu $\widetilde{L}$) definită de $(Lf)(g) = f(L^* g)$ pentru $f \in \mathcal{D}'E$, $g \in C^\infty(F^* \otimes \Omega_X)$.

1.26. Să arătăm că dacă L este de ordin $\leqslant k$, avem $L : H^{s+k}(E) \to H^s(F)$ continuu. Presupunem că am demonstrat că pentru orice L' de ordin $\leqslant k - 1$ avem $\| L'u \|_s \leqslant$ const. $\| u \|_{s+k-1}$. Fie $L'_i u = L \lambda_i u - \lambda_i Lu$; atunci L'_i este de ordin $\leqslant k - 1$.

Avem :

$$\| Lu \|_s^2 = \sum | \lambda_i Lu |_{s,\, i}^2 \leqslant 2 \left(\sum | L \lambda_i u |_{s,\, i}^2 + \sum | L'_i u |_{s,\, i}^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant \text{const.} \left(\sum | \lambda_i u |_{s+k,\, 1}^2 + \sum \| L'_i u \|_s^2\right) \leqslant \text{const.} \left(\| u \|_{s+k}^2 + \right.$$

$$\left. \leqslant \| u \|_{s+k-1}^2 \right) \leqslant \text{const.} \ \| u \|_{s+k}^2$$

(aici λ_i e o partiţie a unităţii subordonată acoperirii finite U_i a lui X; se presupun date trivializări ale lui E şi F peste U_i, normale $| u |_{s, i}$ au semnificaţia cunoscută, dar trebuie interpretate relativ la E sau la F, după context).

Cum orice operator diferenţial de ordin -1 este nul, afirmaţia noastră e demonstrată prin inducţie. Se vede de asemenea că norma lui L: $H^{s+k}(E) \to H^s(F)$ este majorată de supremurile derivatelor de ordin $\leqslant |s| + 1$ ale coeficienţilor lui L (conform 1.12).

1.27. Definim pentru orice operator diferenţial $L: C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ de ordin $\leqslant k$, k-simbolul $\sigma(L, \xi)$. Acesta va fi o aplicaţie liniară. $\sigma(L, \xi): E_x \to F_x$ definită pentru orice $x \in X$, $\xi \in T_x^*(X)$ astfel:

$$\sigma(t, \xi)\, e = L\left(\frac{1}{k!}(g - g(x))^k f\right)(x),$$

unde

$$g \in C^\infty(X, R),\ \mathrm{d}g_x = \xi,\quad f \in C^\infty(E),\quad f(x) = e \in E_x.$$

În coordonate locale, dacă

$$L = \sum_{(\alpha) \leqslant k} a_\alpha(x) D^\alpha \text{ avem } \sigma(L, \xi) = \sum_{(\alpha) = k} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha;$$

în adevăr,

$$D^\alpha\left(\frac{1}{k!}(g - g(x))^k f\right)(x) = \begin{cases} 0 \quad , & |\alpha| < k \\ \xi^\alpha e & |\alpha| = k \end{cases}$$

$\sigma(L, \xi)$ poate fi interpretat ca o familie de secţiuni C^∞ în fibrarea Hom (E, F) care depinde C^∞ de parametrul ξ.

$\sigma(L^*, \xi) \in C^\infty$ Hom $(F^* \otimes \Omega_X, E^* \otimes \Omega_X)$ e definit în coordonate locale de $\sigma(L^*, \xi) = (-1)^k \sum_{(\alpha)=k} {}^t a_\alpha(x)\, \xi^\alpha = (-1)^{kt}_\sigma (L. \xi) \otimes 1$. Se verifică uşor că $\sigma(L_2. L_1, \xi) = \sigma(L_2, \xi) \cdot \sigma(L_1, \xi)$.

L se numeşte *k-eliptic* dacă $\sigma(L, \xi)$ este izomorfism $E_x \xrightarrow{\approx} F_x$ pentru orice vector cotangent real $\xi \neq 0$. Această condiţie e echivalentă cu inegalitatea $|\sigma(L, \xi)\, e| \geqslant \text{const.}\ |\xi|^k\ |e|$, $\forall x \in X$, $\forall \xi \in T_x^*(X)$, $\xi \neq 0$, $\forall e \in E_x$ (normele se calculează faţă de metrici pe E, F, X), combinată cu relaţia $\dim E = \dim F$.

Dacă X este 0-dimensional (mulţime finită), un operator diferenţial este o aplicaţie liniară $L: \bigoplus_{x \in X} C^m \to \bigoplus_{x \in X} C^m$ care păstrează graduarea. El este atunci de ordin $\leqslant k$ pentru orice $k > 0$. Condiţia de k-elipticitate pentru L e automat satisfăcută deoarece nu există vectori cotangenţi nenuli (nu trebuie să presupunem nici că $m = m'$).

Trecînd din nou la cazul general, observăm că adjunctul formal al unui operator k-eliptic e k-eliptic; dacă $L_1: C^\infty \to (E) \to C^\infty(F)$ e k_1-eliptic iar $L_2: C^\infty(F) \to C^\infty(G)$ este k_2-eliptic, atunci $L_2 L_1$ e $(k_1 + k_2)$-eliptic.

1.28. Pentru operatori k-eliptici are loc inegalitatea lui Friedrichs: $\| u \|_{s+k} \leqslant \text{const.}\ (\| Lu \|_s + \| u \|_{s_0})$ pentru orice s, s_0, $u \in C^\infty(E)$ (constanta depinde de s, s_0).

Putem presupune $s_0 < s + k$. Avem, folosind 1.17, 1.26 şi 1.10:

$$\| u \|^2_{s+k} = \sum | \lambda_i u |_{s+k,\, i} \leqslant \text{const.}\ (\sum | L\lambda_i u |^2_{s,i} +$$

$$+ \sum | \lambda_i u |^2_{s_0,\, i}) = \text{const.}\ (\sum | \lambda_i Lu |^2_{s,\, i} + \sum | L\lambda_i u - \lambda_i Lu |^2_{s,\, i} +$$

$$+ \| u \|^2_{s_0}) \leqslant \text{const.}\ (\| Lu \|^2_s + \| u \|^2_{s+k-1} + \| u \|^2_{s_0}) =$$

$$= \text{const.}\ (\| Lu \|^2_s + \sum | \lambda_i u |^2_{s+k-1,\, i} + \| u \|^2_{s_0}) \leqslant$$

$$\leqslant \text{const.}\ (\| Lu \|^2_s + \varepsilon \sum | \lambda_i u |^2_{s+k,\, i} + C(\varepsilon) \sum | \lambda_i u |^2_{s_0,\, i} + \| u \|^2_{s_0}) =$$

$$= \text{const.}\ (\varepsilon \| u \|^2_{s+k} + \| Lu \|^2_s + (1 + C(\varepsilon)) \| u \|^2_{s_0}).$$

Rezultă

$$(1 - \varepsilon\, \text{const.}) \| u \|^2_{s+k} \leqslant \text{const.}\ (\| Lu \|^2_s + (1 + C(\varepsilon)) \| u \|^2_{s_0})$$

Luînd $\varepsilon = \dfrac{1}{2\ \text{const.},}$, afirmaţia e demonstrată.

1.29. Demonstrăm următoarea teoremă a lui L. Schwartz: *Fie H, H' spaţii Hilbert, $T : H \to H'$ o injecţie continuă cu imagine închisă, $K : H \to H'$ un operator compact. Atunci $T + K : H \to H'$ are nucleu finit dimensional şi imagine închisă.*

În adevăr, fie $N = \operatorname{Ker}(T + K)$. Presupunem prin absurd că există o familie $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ infinită ortonormală în N. Atunci $Te_i + Ke_i = 0$. Deoarece K e compact, putem presupune că $Ke_i \to f$. Deci $Te_i \to -f$. Rezultă că (e_i) e Cauchy, absurd. Rezultă că $\dim N < \infty$. Arătăm că $\operatorname{Im}(T + K)$ e închisă. Presupunem prin absurd că există şirul $f_n \in N^\perp$ cu $|f_n| \geqslant a > 0$, dar $(T + K) f_n \to 0$. Putem presupune $Kfn \to g$. Atunci $Tf_n \to -g$, deci în $f_n \to h \in N$. Rezultă $(T + K) h = 0$ deci $h \in N \cap N^\perp = 0$. Aceasta contrazice $|f_n| \geqslant a > 0$.

1.30. Rezultatul principal al acestui capitol este

TEOREMĂ. *Fie E, F fibrări vectoriale peste X compact şi $L : C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ un operator k-eliptic. Atunci*

(a) *e satisfăcută inegalitatea lui Friedrichs:*

$$\| u \|^2_{s+k} \leqslant \text{const.}\ (\| Lu \|^2_s + \| u \|^2_{s_0}).$$

(b) *L este hipoeliptic: adică $u \in \mathcal{D}'(E)$, $Lu \in H^s(F) \Rightarrow u \in H^{s+k}(E)$. Dacă $u \in \mathcal{D}'(E)$, $Lu \in C^\infty(F)$, atunci $u \in C^\infty(E)$. în particular* $\operatorname{Ker}(\tilde{L} : \mathcal{D}'(E) \to \mathcal{D}'(F)) = \operatorname{Ker}(L : C^\infty(E) \to C^\infty(F))$

(c) *$L : C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ este un operator Fredholm, adică* dim Ker $L < \infty$, dim Coker $L < \infty$ *şi* Im L *e închisă.*

Demonstraţie. (a) a fost deja demonstrată.

(b) Deoarece condiţia ca $u \in \mathcal{D}'(E)$ să aparţină lui $H^{s+k}(E)$ este locală, hipoelipticitatea lui L rezultă din 1.19 (aici folosim $\mathcal{D}'E = \bigcup_s H^s E$).

A doua afirmaţie rezultă din $C^\infty(E) = \bigcap_s H^s(E)$

(c) Fie $L \oplus i : H^{s+k}(E) \to H^s(F) \oplus H^{s+k-1}(E)$ dat de $(L \oplus i) = (Lu, u)$. Este evident că $L \oplus i$ este o injecţie continuă. Inegalitatea lui Friedrichs pentru $s_0 = s + k - 1$ arată că $L \oplus i$ este un izomorfism topologic al lui $H^{s+k}(E)$ pe imaginea sa.

Avem $L \oplus 0 = (L \oplus i) + (0 \oplus (-i))$, unde $L \oplus i$ este o injecție continuă cu imagine închisă iar $0 \oplus (-i)$ este compactă, după 1.23. După 1.29 rezultă că $L \oplus 0$ și deci $L: H^{s+k}(E) \to H^s(F)$ are imagine închisă și nucleu de dimensiune finită (acest nucleu coincide cu nucleul lui $L: C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ după (b)).

Să arătăm că $L(C^\infty(E)) = \bigcap_s L(H^s(E))$. Incluziunea $\subset$ e evidentă. Fie $f \in \bigcap_s L(H^s(E))$, $f = L(u_{s_0})$, $u_{s_0} \in H^{s_0}(E)$. Cum $f \in \bigcap_s H^{s-k}(E)$, avem $f \in C^\infty(E)$. După (b) rezultă $u_{s_0} \in C^\infty(E)$ deci $f \in L(C^\infty(E))$ și astfel rezultă incluziunea $\supset$ și deci egalitatea dorită.

Rezultă că $L(C^\infty(E)) = \bigcap_s (L H^s(E) \cap C^\infty(E))$ este o intersecție de închiși în $C^\infty(E)$, deci e închis în $C^\infty(E)$.

În capitolul următor vom vedea că Coker $L \approx$ Ker L^*, de unde dim (Coker L) = dim (Ker L^*) $< \infty$. Astfel teorema e demonstrată.

2. VALORI ȘI VECTORI PROPRII ALE UNUI OPERATOR ELIPTIC AUTOADJUNCT

2.1. Fie E o fibrare hermitiană peste varietatea riemanniană compactă X cu elementul de volum ω_X și $L: C^\infty(E) \to C^\infty(E)$ un operator eliptic. Adjunctul formal al lui L se identifică cu operatorul $L^*: C^\infty(E) \to C^\infty(E)$ astfel că $\int (Ls, t)\,\omega_X = \int (s, L^*t)\,\omega_X$ pentru $s, t \in C^\infty(E)$. Presupunem că $L = L^*$, adică L este autoadjunct.

Să arătăm că

$$C^\infty(E) = \operatorname{Ker} L \oplus \operatorname{Im} L \text{ (topologic).} \tag{1}$$

În adevăr, e evident că Ker L și Im L sînt ortogonale în sensul produsului scalar $\int st\,\omega_X$ (din $L^2(E)$). Fie $u \in \mathcal{D}'(E)$ ortogonală pe Ker $L \oplus$ Im L; atunci $(u, Ls) = (Lu, s) = 0$ pentru orice $s \in C^\infty(E)$, adică $Lu = 0$; cum L e hipoeliptic, $u \in C^\infty(E)$; din egalitatea $0 = (u, u) = \int |u|^2\,\omega_X$, rezultă $u = 0$ și deci Ker $L \oplus$ Im L este densă în $C^\infty(E)$ (conform teoremei Hahn-Banach). Cum Ker L e finit dimensional iar Im L e închisă, suma lor directă e topologică și închisă și relația (1) e demonstrată.

Dacă avem un operator eliptic $L: C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ cu E, F hermitice, putem demonstra în mod similar că $C^\infty(E) =$ Ker $L \oplus$ Im L^* și $C^\infty(F) =$ Ker $L^* \oplus$ Im L și deci Coker $L \approx$ Ker L^*. De altfel această relație este o formă a dualității Poincaré, vezi 4.5 (f).

2.2. Este ușor de verificat că $L:$ Im $L \to$ Im L este o bijecție continuă și deci după o teoremă a lui Banach un izomorfism topologic.

Definim operatorul Green $\mathcal{G}: C^\infty(E) \to$ Im L prin

$$\mathcal{G}: C^\infty(E) \xrightarrow{\mathrm{pr}\,\operatorname{Im} L} \operatorname{Im} L \xrightarrow{L^{-1}} \operatorname{Im} L.$$

Definim de asemenea $\mathcal{H} : C^\infty(E) \to \operatorname{Ker} L$ ca fiind proiecţia ortogonală $\mathrm{pr}_{\operatorname{Ker} L}$. Avem atunci $u = L\mathcal{G}u + \mathcal{H}u$, $u \in C^\infty(E)$. Evident, $\mathcal{G}L = L\mathcal{G}$, $\mathcal{H}L = L\mathcal{H}$, $\mathcal{H}\mathcal{G} = \mathcal{G}\mathcal{H} = 0$. Operatorul Green este autoadjunct:

$$\begin{aligned}(\mathcal{G}u, v) - (u, \mathcal{G}v) &= (\mathcal{G}u, L\mathcal{G}v + \mathcal{H}v) - \\ - (L\mathcal{G}u + \mathcal{H}u, \mathcal{G}v) &= (L\mathcal{G}u, \mathcal{G}v) - \\ &- (L\mathcal{G}u, \mathcal{G}v) = 0\end{aligned}$$

deci punînd $(\widetilde{\mathcal{G}u})(\varphi) = u(\mathcal{G}\varphi)$, $u \in \mathcal{D}'(E)$, $\varphi \in C^\infty(E)$ obţinem o prelungire continuă $\widetilde{\mathcal{G}} : \mathcal{D}'(E) \to \mathcal{D}'(E)$ a lui $\mathcal{G}$.

Fie $\widetilde{\mathcal{H}} : \mathcal{D}'(E) \to \operatorname{Ker} L$ definit de $\widetilde{\mathcal{H}}(u)\,\varphi = u(\mathcal{H}\varphi)$. Avem, evident, $u = \widetilde{L}\widetilde{\mathcal{G}}u + \widetilde{\mathcal{H}}u$ pentru $u \in \mathcal{D}'(E)$ şi $\widetilde{L}\widetilde{\mathcal{G}}u = \widetilde{\mathcal{H}}v \Rightarrow \widetilde{\mathcal{H}}v = 0$, de unde rezultă uşor $\mathcal{D}'(E) = \operatorname{Im}\widetilde{L} \oplus \operatorname{Ker} L$ (această demonstraţie va fi reluată într-un cadru mai general în demonstraţia teoremei 4.5 (b)).

2.3. Arătăm că $\widetilde{\mathcal{G}} : H^s(E) \to H^{s+k}(E)$ este continuu; în adevăr, fie $u = \widetilde{L}\widetilde{\mathcal{G}}u + \widetilde{\mathcal{H}}u \in H^s(E)$; cum $\widetilde{\mathcal{H}}u \in H^\infty(E)$, rezultă $\widetilde{L}\widetilde{\mathcal{G}}u \in H^s(E)$ şi cum L e eliptic, $\widetilde{\mathcal{G}}u \in H^{s+k}(E)$ (vezi 1.30) şi deci $\widetilde{\mathcal{G}}(H^s(E)) \subset H^{s+k}(E)$.

Să presupunem că $x_n \to 0$ în $H^s(E)$ şi $\widetilde{\mathcal{G}}(x_n) \to y$ în $H^{s+k}(E)$. Deoarece $\widetilde{\mathcal{G}} : H^s(E) \to \mathcal{D}'(E)$ e continuu, rezultă $\widetilde{\mathcal{G}}(x_n) \to 0$ în $\mathcal{D}'(E)$, deci $y = 0$. După teorema graficului închis $\widetilde{\mathcal{G}} : H^s(E) \to H^{s+k}(E)$ e continuu. Rezultă (conform teoremei lui Rellich) că $\widetilde{\mathcal{G}} : L^2(E) \to L^2(E)$ este compact. Dar valorile proprii nenule ale lui $L : C^\infty(E) \to C^\infty(E)$ sînt în corespondenţă biunivocă cu inversele valorilor proprii nenule ale lui $\widetilde{\mathcal{G}} : L^2(E) \to L^2(E)$. În adevăr, dacă $Lf = \lambda f$, $\lambda \neq 0$, $f \in C^\infty(E)$, rezultă $\mathcal{H}f = 0$, $f = \mathcal{G}Lf = \lambda\mathcal{G}f$, $\mathcal{G}f = \lambda^{-1}f$; invers, dacă $\widetilde{\mathcal{G}}f = \mu f$, $\mu \neq 0$, $f \in L^2(E)$, atunci $\widetilde{\mathcal{H}}f = 0$, $f = \widetilde{L}\widetilde{\mathcal{G}}f = \mu\widetilde{L}f$, $\widetilde{L}f = \mu^{-1}f$; cum $L - \mu^{-1}I$ este eliptic, avem $f \in C^\infty(E)$.

2.4. Aplicînd teoria lui Riesz operatorului $\widetilde{\mathcal{G}} : L^2(E) \to L^2(E)$ obţinem

TEOREMA SPECTRALĂ *Fie* $L : C^\infty(E) \to C^\infty(E)$ *un operator eliptic autoadjunct,* X *compactă. Valorile proprii ale lui* L *formează o mulţime discretă de numere reale (infinită, dacă* $\dim X > 0$*). Avem* $\dim \operatorname{Ker}(L - \lambda I) < \infty$ *pentru orice* $\lambda \in C$. *Aceste spaţii* $\operatorname{Ker}(L - \lambda I) \subset C^\infty(E)$ *dau o descompunere în sumă hilbertiană a lui* $L^2(E)$.

2.5. Fie $e_1, e_2, e_3, \ldots$ un şir de vectori proprii ai lui L, $e_h \in C^\infty(E)$, care formează o bază ortonormală a lui $L^2(E)$ ($Le_i = \lambda_i e_i$). Putem presupune $0 \leqslant |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \cdots$

Vom arăta acum că baza e_i de vectori proprii asociată operatorului eliptic autoadjunct L determină o „teorie a seriilor Fourier" care devine teoria obişnuită dacă X este un tor, iar L este operatorul $\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Fie $u \in \mathcal{D}'(E)$. Definim „coeficienţii săi Fourier'' prin $a_i = u(e_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ Avem $(\tilde{L}u)(e_i) = u(Le_i) = \lambda_i u(e_i) = \lambda_i a_i$

$$(\widetilde{\mathcal{G}} u)(e_i) = u(\mathcal{G} e_i) = \begin{cases} \dfrac{a_i}{\lambda_i}, & \text{dacă } \lambda_i \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } \lambda_i = 0 \end{cases}$$

$$(\widetilde{\mathcal{H}} u)(e_i) = u(\mathcal{H} e_i) = \begin{cases} a_i, & \text{dacă } \lambda_i = 0 \\ 0, & \text{dacă } \lambda_i \neq 0. \end{cases}$$

Dar

$$u \in H^{sk}(E),\ s \geqslant 0 \Leftrightarrow L^s u \in L^2(E)$$
$$u \in H^{sk}(E),\ s \leqslant 0 \Leftrightarrow G^{-s} u \in L^2(E).$$

Se ştie că $v \in L^2 \Leftrightarrow b_i = (v, e_i)$ satisfac $\sum |b_i|^2 < \infty$. De aici rezultă

$$u \in H^{sk} \Leftrightarrow \sum_{\lambda_i \neq 0} |\lambda_i|^{2s} |a_i|^2 < \infty$$

deci $u \in C^\infty(E) \Leftrightarrow \sum\limits_{\lambda_i \neq 0} |\lambda_i|^{2s} |a_i|^2 < \infty$ pentru orice s întreg. Conform inegalităţii lui Friedrichs, avem pentru $s > 0$:

$$\|u\|_{sk}^2 \sim \|L^s u\|_0^2 + \|u\|_0^2 = \sum_1^\infty (1 + |\lambda_i|^{2s}) |a_i|^2 \sim$$
$$\sim \sum_1^\infty (1 + |\lambda_i|^{2s} |a_i|^2.$$

Prin dualitate, această expresie echivalentă a normei în $H^{sk}(E)$ este valabilă şi pentru $s \leqslant 0$.

De aici rezultă că dacă $u \in H^{sk}(E)$, atunci seria Fourier $\sum\limits_1^\infty a_i e_i$ converge către u în topologia lui $H^{sk}(E)$. De asemenea rezultă că dacă $u \in C^\infty(E)$, atunci seria sa Fourier converge către u în topologia lui $C^\infty(E)$, iar dacă $u \in \mathcal{D}'(E)$, seria sa Fourier converge în topologia lui $\mathcal{D}'(E)$ către u. În particular, seriile Fourier finite sînt dense în toate aceste spaţii.

3. FAMILII DE OPERATORI ELIPTICI

3.1. Fie E, F fibrări vectoriale peste X. Spunem că familia $P_t : C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ de operatori liniari (unde t parcurge un deschis $U \subset R^\sigma$) depinde C^∞ faţă de t dacă pentru orice familie de secţiuni $s_t \in C^\infty(E)$, $t \in U$, care depinde C^∞ faţă de ansamblul coordonatelor din X şi de t, aceeaşi proprietate o va avea familia de secţiuni $P_t s_t$, $t \in U$.

Se vede uşor că dacă P_t, $t \in U$, e o familie de operatori diferenţiali, această condiţie e echivalentă cu condiţia ca coeficienţii lui P_t (în coordonate locale) să depindă C^∞ de ansamblul coordonatelor din X şi de t.

3.2. Demonstrăm următoarea proprietate relativă la spaţii Hilbert :

Fie $A_t : H_1 \to H_2, t \in K$, *o familie compactă (în topologia normei) de injecţii continue închise ale spaţiului Hilbert* H_1 *în spaţiul Hilbert* H_2. *Atunci există* $c > 0$, *independent de* t, *astfel ca* $|A_t e| \geqslant c|e|$ *pentru orice* $e \in H_1$.

Este evident că pentru orice $t \in K$, $A_t^* A_t : H_1 \to H_1$ este un izomorfism. Deoarece operaţia de trecere la adjunct este un homeomorfism $\mathcal{L}(H_1, H_2) \to \mathcal{L}(H_2, H_1)$ iar operaţia de trecere la invers e un homeomorfism Aut $(H_1) \to$ Aut (H_1), rezultă că familia de operatori $(A_t^* A_t)^{-1} A_t^*$ este compactă în topologia normei din $\mathcal{L}(H_2, H_1)$. Rezultă că

$$(c' = \sup_t |(A_t^* A_t)^{-1} A_t^*| < \infty.$$

Avem

$$|e| = |(A_t^* A_t)^{-1} A_t^* A_t e)| \leqslant c' |A_t e|$$

deci

$$|A_t e| \geqslant (c')^{-1} |e|$$

şi afirmaţia e demonstrată.

3.3. Vom aplica 3.2 în următoarea situaţie : fie L_t o familie de operatori eliptici $C^\infty(E) \to C^\infty(E)$ peste X, depinzînd C^∞ de parametrul $t \in U \subset R^\sigma$.

Fie $A_t = L_t \oplus i : H^{s+k}(E) \to H^s(F) \oplus H^{s_0}(E)$, unde $s_0 \leqslant s + k$, iar i este incluziunea canonică. Inegalitatea lui Friedrichs arată că A_t sînt injecţii continue, închise, iar dacă t parcurge un compact în U, este evident că familia A_t este compactă în topologia normei. Rezultă că avem pentru $u \in C^\infty(E)$:

$$\| u \|_{s+k} \leqslant \text{const.} \ (\| L_t u \|_s + \| u \|_{s_0}),$$

unde constanta e independentă de t, atît timp cît t parcurge un compact din U. Cum pentru $s_0 > s + k$ această inegalitate e evidentă, nu trebuie să punem nici o restricţie asupra lui s_0.

3.4. Fie $L_t : C^\infty(E) \to C^\infty(E)$ o familie de operatori eliptici, depinzînd C^∞ faţă de $t \in U$. Presupunem că L_t surjectiv pentru orice t şi că $\exists\, c > 0$ independent de t astfel ca $\| L_t \psi \|_0 \geqslant c \| \psi \|_0$ pentru $\psi \in C^\infty(E)$. *Atunci există* L_t^{-1} *şi* L_t^{-1} *depinde* C^∞ *faţă de* t.

Este evident că L_t^{-1} există şi e continuă. Arătăm că L_t^{-1} sînt echicontinue pentru $t \in V \subset \overline{V} \subset U$, ($\overline{V}$ compact). În adevăr, inegalităţile lui Sobolev (1.23), Friedrichs (3.3) şi ipoteza noastră arată că dacă $l = l(m)$ este destul de mare, avem

$$(*) \qquad \| \psi \|_{C^m} \leqslant \text{const.} \ \| L_t \psi \|_{C^l}, \ t \in V$$

(constanta independentă de t)

Fie ψ_t o familie de secţiuni în $C^\infty(E)$ astfel că $\beta_t = L_t \psi_t$ depinde C^∞ faţă de t. Trebuie să arătăm că ψ_t depinde C^∞ faţă de t.

I. Dacă β_t depinde C° față de $t \in V$, atunci ψ_t depinde C° față de $t \in V$. În adevăr, după (*) avem

$$\| \psi_t - \psi_s \|_{C^m} \leqslant \text{const.} \| L_s \psi_t - L_s \psi_s \|_{C^l} \leqslant$$

$$\leqslant \text{const.} (\| L_t \psi_t - L_s \psi_s \|_{C^l} + \| (L_s - L_t) \psi_t \|_{C^l}) \to 0 \text{ pentru } s \to t.$$

II. Dacă β_t depinde C^1 față de $t \in V$, atunci ψ_t depinde C^1 față de $t \in V$ și $L_t \dfrac{\partial \psi_t}{\partial t_q} = - \dfrac{\partial L_t}{\partial t_q} \psi_t + \dfrac{\partial \beta_t}{\partial t_q}$, unde $\dfrac{\partial L_t}{\partial t_q}$ se obține din L_t derivînd parțial coeficienții.

În adevăr, fie $\varphi_t = L_t^{-1} \left(- \dfrac{\partial L_t}{\partial t_q} \psi_t + \dfrac{\partial \beta_t}{\partial t_q} \right)$, $t + h = (t_1, \ldots, t_{q-1}, t_q + h, \ldots, t_\sigma)$, $\chi_t = \dfrac{1}{h} (\psi_{t+h} - \psi_t) - \varphi_t$.

$$\text{Avem } L_t \chi_t = \frac{1}{h} (L_t \psi_{t+h} - L_t \psi_t) + \frac{\partial L_t}{\partial t_q} \psi_t - \frac{\partial \beta_t}{\partial t_q} =$$

$$= \frac{1}{h} (\beta_{t+h} - \beta_t) - \frac{\partial \beta_t}{\partial t_q} + \frac{\partial L_t}{\partial t_q} \psi_t - \frac{1}{h} (L_{t+h} - L_t) \psi_{t+h}.$$

După I, $\psi_{t+h} \to \psi_t$ în $C^\infty(E)$ cînd $h \to 0$ deci $\lim\limits_{h \to 0} (L_t \chi_t) = 0$ în $C^\infty(E)$.

Folosind (*) rezultă $\lim\limits_{h \to 0} \chi_t = 0$ în $C^\infty(E)$, deci există $\dfrac{\partial}{\partial t^q} \psi_t = \varphi_t$ (în $C^\infty(E)$). Deoarece φ_t este C° față de t(după I), rezultă că ψ_t este C^1 față de t.

III. Dacă β_t depinde C^s față de $t \in V$, atunci ψ_t depinde C^s față de $t \in V$. Presupunem afirmația adevărată pentru $s \leqslant \tau - 1$, $\tau \geqslant 2$ și fie $\beta \in C^\tau$ față de t. Atunci $\psi_t \in C^{\tau-1}$ față de t. Vom nota prin $D^s_{(t)}$ o derivare parțială în raport cu t de ordinul s. Avem $L_t D^{\tau-1}_{(t)} \psi_t = D^{\tau-1}_{(t)} \beta_t + \sum\limits_i L_t'^i D^{k_i}_{(t)} \psi_t$, unde în sumă $k_i \leqslant \tau - 2$ iar $L_t'^i$ sînt operatori diferențiali $C^\infty(E) \to C^\infty(E)$ depinzînd C^∞ față de t. Prin ipoteză membrul drept depinde C^1 față de t, deci și membrul stîng depinde C^1 față de t. După etapa II rezultă că $D^{\tau-1}_{(t)} \psi_t$ depinde C^1 față de t și deci ψ_t depinde C^τ față de t.

Afirmația este astfel demonstrată.

3.5. Fie $L_t : C^\infty(E) \to C^\infty(E)$, $t \in U$, (conex) o familie de operatori k-eliptici (X compact) autoadjuncți față de o metrică fixată pe X și pe E. Fie $\| \psi \|_{L^2}$ norma în $L^2(E)$; avem $\| \psi \|_{L^2} \sim \| \psi \|_0$.

Pentru $t \in U$ fie $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots$ șirul valorilor proprii ale lui L_t (vezi 2.4) ordonate în ordinea crescătoare a modulelor și $e_1(t), e_2(t), \ldots$ un șir (fixat) de vectori proprii corespunzători care formează o bază ortonormală în $L^2(E)$. Avem deci

$$L_t e_i(t) = \lambda_i(t) e_i(t) \quad ; \quad e_i(t) \in C^\infty(E), \| e_i(t) \|_{L^2} = 1.$$

Fie $(t_0, \zeta_0) \in U \times C$ astfel că $\zeta_0 \neq \lambda_i(t_0)$, $i = 1, 2, \ldots$; să notăm $c = \inf\limits_i | \lambda_i(t_0) - \zeta_0 | > 0$. Atunci, dacă $\psi = \sum\limits_1^\infty a_i e_i(t_0)$ (serie convergentă în $C^\infty E$, conform 2.5), rezultă

$$\| (L_{t_0} - \zeta_0)\, \psi \|_{L^2}^2 = \| \Sigma (\lambda_i (t_0) - \zeta_0)\, a_i\, e_i (t_0) \|_{L^2}^2 = \Sigma (\lambda_i (t_0) - \zeta_0)^2 a_i^2 \geqslant$$

$$\geqslant c^2 \Sigma\, a_i^2 = c^2 \| \psi \|_{L^2}^2 \text{ și deci } \| (L_{t_0} - \zeta_0)\, \psi \|_{L^2} \geqslant c \| \psi \|_{L^2}.$$

De aici rezultă $\| (L_{t_0} - \zeta_0)\ \psi \|_0 \geqslant c' \| \psi \|_0$. Arătăm că de aici rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel că $\| (L_t - \zeta)\ \psi \|_0 \geqslant (c' - \varepsilon) \| \psi \|_0$ pentru $| t - t_0 | < \delta$, $| \zeta - \zeta_0 | < \delta$.

În adevăr, în caz contrar există un șir $(t_j,\ \varphi_j) \rightarrow (t_0,\ \varphi_0)$ și un șir $\psi_j \in C^\infty (E)$ astfel că $\| \psi_j \|_0 = 1$ și $\| (L_{t_j} - \varphi_j)\ \psi_j \|_0 < (c' - \varepsilon) \| \psi_j \|_0 = c' - \varepsilon$.

După 3.3 avem că $\| \psi_j \|_k \leqslant$ const. (independentă de j).

Din 1.26 rezultă $\| ((L_{t_0} - \zeta_0) - (L_{t_j} - \zeta_j))\ \ \psi_j \|_0 \rightarrow 0$. Pe de altă parte, $\| ((L_{t_0} - \zeta_0) - (L_{t_j} - \zeta_j))\ \psi_j \|_0 \geqslant \| (L_{t_0} - \zeta_0)\ \psi_j \|_0 - \| (L_{t_j} - \zeta_j)\ \psi_j \|_0 \geqslant$ $\geqslant c' - (c' - \varepsilon) = \varepsilon$, absurd. Astfel afirmația noastră e demonstrată.

De aici rezultă în plus că $\zeta \neq \lambda_i (t)$ pentru $| \zeta - \zeta_0 | < \delta\, | t - t_0 | < \delta$, $i = 1, 2, \ldots$ și deci $(L_t - \overline{\zeta})$ e injecție. Cum acesta e eliptic, avem Coker $(L_t - \zeta) =$ Ker $(L_t - \zeta)^* =$ Ker $(L_t - \overline{\zeta}) = 0$ și deci $(L_t - \zeta)$ e surjecție (de altfel e izomorfism). Putem aplica 3.4 și obținem

Dacă $\zeta_0 \neq \lambda_i (t_0)$, $i = 1, 2, \ldots$, *atunci există* $\delta > 0$ *astfel că* $(L_t - \zeta)^{-1}$ *există și depinde* C^∞ *față de* t, ζ, *unde* $| t - t_0 | < \delta$, $| \zeta - \zeta_0 | < \delta$.

3.6. Fie $t_0 \in U$ și $a \geqslant 0$ astfel că $\lambda_i (t_0) \neq 0 \Rightarrow | \lambda_i (t_0) | > a$. Fie $d_t (a)$ numărul vectorilor proprii din șirul $e_1 (t)$, $e_2 (t)$, ... pentru care valoarea proprie corespunzătoare satisface $| \lambda_i (t) | \leqslant a$. Atunci $d_t (0) =$ $=$ dim Ker L_t. Arătăm că *există* $\varepsilon > 0$ *astfel că pentru* $| t - t_0 | < \varepsilon$ *să avem* $d_t (a) \leqslant d_{t_0} (a)$.

În adevăr, fie $l = \overline{\lim\limits_{t \to t_0}}\, d_t (a)$. E suficient să arătăm că $l \leqslant d_{t_0} (a)$. Fie t_1, t_2, ... un șir din U tinzînd către t_0 astfel că $d_{t_1} (a) = d_{t_2} (a) =$ $= \ldots = l$. Fie $e_1 (t_j), \ldots, e_l (t_j)$ vectorii proprii corespunzători lui L_{t_j} (ei formează o mulțime ortonormală și satisfac $L_{t_j} e_\alpha (t_j) = \lambda_\alpha (t_j)$, $| \lambda_\alpha (t_j) | \leqslant a$).

După inegalitatea lui Friedrichs cu parametru (vezi 3.3) aplicată de două ori (o dată pentru $s = 0$, $s_0 = 0$, o dată pentru $s = k$, $s_0 = 0$) avem :

$$\begin{aligned} \| e_\alpha (t_j) \|_k &\leqslant \text{const. } (\| L_{t_j} e_\alpha (t_j) \|_0 + \| e_\alpha (t_j) \|_0) = \\ &= \text{const. } (| \lambda_\alpha (t_j) |\, \| e_\alpha t_j \|_0 + \| e_\alpha (t_j) \|_0) \leqslant \\ &\leqslant \text{const. } (a + 1) \| e_\alpha t_j \|_{L^2} = \text{const.} \\ \| e_\alpha (t_j) \|_{2k} &\leqslant \text{const. } (\| L_{t_j} e_\alpha (t_j) \|_k + \| e_\alpha (t_j) \|_0) = \\ &= \text{const. } (| \lambda_\alpha (t_j) |\, \| e_\alpha (t_j) \|_k + \| e_\alpha (t_j)_0 \|) \leqslant \\ &\leqslant \text{const., deoarece } \| e_\alpha (t_j) \|_k \text{ sînt mărginiți.} \end{aligned}$$

Rezultă că mulțimea $e_\alpha (t_j)$ e mărginită în H^{2k} deci e precompactă în H^k (conf. 1.23). Extrăgînd eventual un subșir din $\{t_j\}$ putem deci presupune că șirurile $(e_\alpha (t_j))_{j \geqslant 1}$ converg pentru $\alpha = 1, \ldots, l$ în H^k. Fie $e_\alpha \in H^k$ astfel că $\lim\limits_{j \to \infty} \| e_\alpha (t_j) - e_\alpha \|_k = 0$. Putem presupune că $\lambda_\alpha (t_j) \rightarrow \lambda_\alpha$, unde $|\lambda_\alpha| \leqslant a$. Avem :

$$\begin{aligned}&\| L_{t_0} e_\alpha - \lambda_\alpha e_\alpha \|_0 \leqslant \| L_{t_0} e_\alpha - L_{t_j} e_\alpha(t_j) \|_0 + \\ &+ \| \lambda_\alpha(t_j)\, e_\alpha(t_j) - \lambda_\alpha e_\alpha \|_0 \leqslant \| (L_{t_j} - L_{t_0})\, e_\alpha(t_j) \|_0 + \\ &+ \| L_{t_0}(e_\alpha(t_j) - e_\alpha) \|_0 + \| (\lambda_\alpha(t_j) - \lambda_\alpha)\, e_\alpha(t_j) \|_0 + \\ &+ \| \lambda_\alpha(e_\alpha(t_j) - e_\alpha) \|_0 \leqslant c_j \| e_\alpha(t_j) \|_k + c_1 \| e_\alpha(t_j) - \\ &- e_\alpha \|_k + c_j',\end{aligned}$$

unde c_j, $c_j' \to 0$, $\| e_\alpha(t_j) - e_\alpha \|_k \to 0$ şi $\| e_\alpha(t_j) \|_k$ e mărginit (am folosit 1.26). Rezultă că $L_{t_0} e_\alpha = \lambda_\alpha e_\alpha$. Pe de altă parte, trecînd la limită în relaţia $(e_\alpha(t_j), e_\beta(t_j))_{L^2} = \delta_{\alpha\beta}$, rezultă $(e_\alpha, e_\beta)_{L^2} = \delta_{\alpha\beta}$. Deci $e_1, \ldots, e_l$ sînt l vectori liniari independenţi ce satisfac $L_{t_0}(e_\alpha) = \lambda_\alpha e_\alpha$, $|\lambda_\alpha| \leqslant a$. Aceasta demonstrează relaţia $l \leqslant d_{t_0}(a)$.

În particular, luînd $a = 0$, obţinem că $d_t(0) = \dim \operatorname{Ker} L_t$ este o funcţie superior semicontinuă de t.

3.7. *Dacă operatorul Green* $\mathcal{G}_t$ *al lui* L_t *depinde continuu de* $t \in U$, *atunci* $d_t(0)$ *este continuă* (*deci constantă*).

În adevăr, în acest caz $\mathcal{H}_t$ depinde de asemenea continuu de $t \in U$. Fie $e_1, \ldots, e_d$ o bază ortonormală în $\operatorname{Ker} L_{t_0}$. Avem $\| \mathcal{H}_t e_i - e_i \|_0 = \| \mathcal{H}_t e_i - \mathcal{H}_{t_0} e_i \|_0 \to 0$ cînd $t \to t_0$, deci pentru t suficient de aproape de t_0, $\{\mathcal{H}_t(e_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant d}$ este o mulţime liniar independentă în $\operatorname{Ker} L_t$; astfel într-o vecinătate a lui t_0 avem $d_t \geqslant d_{t_0}$. Combinînd cu 3.6 rezultă d_t constantă (căci U e conex).

3.8. *Dacă* $d_t(0)$ *e constantă, atunci* $\mathcal{G}_t$ *şi* $\mathcal{H}_t$ *depind* C^∞ *faţă de* $t \in U$.

Fie β_t o familie de secţiuni în $C^\infty(E)$ depinzînd C^∞ de t. Trebuie să arătăm că $\mathcal{G}_t \beta_t$, $\mathcal{H}_t \beta_t$ depind C^∞ de t. În adevăr, fie γ un cerc în planul complex, cu centrul în origine, de rază $a > 0$ astfel că toţi $\lambda_i(t_0) \neq 0$ să satisfacă $|\lambda_i(t_0)| > a$ (t_0 este fixat). Avem $d_t(a) \geqslant d_t(0) = d_{t_0}(0) = d_{t_0}(a)$, pe de altă parte, după 3.6, pentru $|t - t_0| < \varepsilon$, avem $d_t(a) \leqslant d_{t_0}(a)$, deci $d_t(a) = d_{t_0}(a) = d_t(0)$ pentru $|t - t_0| < \varepsilon$. Aceasta arată că pentru $|t - t_0| < \varepsilon$, avem $\lambda_i(t) \neq 0 \Rightarrow |\lambda_i(t)| > a$.

Fie $V = \{\zeta \in C \mid a - \delta < |\zeta| < a + \delta\}$, unde δ este ales astfel ca $\lambda_i(t) \notin V$ pentru $|t - t_0| < \delta < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots$.

După 3.5, $(L_t - \zeta)^{-1} \beta_t$ depinde C^∞ de t, ζ pentru $|t - t_0| < \delta$, $\zeta \in V$. Rezultă că

$$\int_\gamma (L_t - \zeta)^{-1} \beta_t \, d\zeta, \quad \int_\gamma (L_t - \zeta)^{-1} \beta_t \frac{d\zeta}{\zeta}$$

depind C^∞ de t, pentru $|t - t_0| < \delta$.

Dar după formula lui Cauchy avem :

$$\int_\gamma \frac{dz}{\lambda - z} = \begin{cases} -2\pi i, & |\lambda| < a \\ 0, & |\lambda| > a \end{cases}, \quad \int_\gamma \frac{dz}{z(\lambda - z)} = \begin{cases} 0, & |\lambda| < a \\ \dfrac{2\pi i}{\lambda}, & |\lambda| > a \end{cases}$$

deci dacă $\beta_t = \Sigma\, b_i(t)\, e_i(t)$ în $C^\infty(E)$, atunci

$$\int_\gamma (L_t - \zeta)^{-1}\, \beta_t\, \mathrm{d}\zeta = \sum_1^\infty \int_\gamma \frac{b_i(t)\, \mathrm{d}\zeta}{\lambda_i(t) - \zeta}\, e_i(t) =$$

$$= -\, 2\pi i \sum_{\lambda_i(t)=0} b_i(t)\, e_i(t) = -\, 2\pi i\, \mathcal{H}_t\, \beta_t$$

$$\int_\gamma (L_t - \varphi)^{-1}\, \beta_t\, \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = \sum_1^\infty \int_\gamma \frac{b_i(t)\, \mathrm{d}\zeta}{\zeta(\lambda_i(t) - \zeta)}\, e_i(t) =$$

$$= 2\pi i \sum_{\lambda_i(t)\neq 0} \frac{b_i(t)\, e_i(t)}{\lambda_i(t)} = 2\pi i\, \mathcal{G}_t\, \beta_t$$

și afirmația noastră e demonstrată.

3.9. Reamintim că dacă B_1, B_2 sînt două spații Banach, un operator Fredholm este un operator liniar, continuu $T \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ astfel că dim Ker $L < \infty$, dim Coker $L < \infty$; de aici rezultă Im L închis în B_2. Fie $\mathcal{F}(B_1, B_2)$ mulțimea operatorilor Fredholm $B_1 \to B_2$ cu topologia normei indusă de $\mathcal{L}(B_1, B_2)$. Fie $i : \mathcal{F}(B_1, B_2) \to Z$ definită de $i(T) =$ $=$ dim Ker T $-$ dim Coker T. Arătăm că

$\mathcal{F}(B_1, B_2)$ *e deschisă în* $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ *iar* i *este local constantă.*

Arătăm mai întîi că pentru T', $T'' \in \mathcal{F}(B_1, B_1)$ avem $T'\, T'' \in \mathcal{F}(B_1, B_1)$ și $i(T'T'') = i(T') + i(T'')$. Aceasta rezultă din diagrama comutativă cu linii exacte :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "1+T''"] \arrow[d, "T''"] & B_1 \oplus B_1 \arrow[r, "T''+(-1)"] \arrow[d, "T'T''\ 1"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "T'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "T'+1"] & B_1 \oplus B_1 \arrow[r, "1+(-T')"] & B_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

care arată că $i(T') + i(T'') = i(T'T'' \oplus 1) = i(T'T'')$.

Arătăm acum că dacă T', $T'' \in \mathcal{L}(B_1, B_1)$ sînt astfel că T' e inversabil, iar T'' are rang finit, atunci $T' + T'' \in \mathcal{F}(B_1, B_1)$ și $i(T' +$ $+ T'') = 0$. Mai întîi $T' + T'' = T'(1 + (T')^{-1}\, T'')$ și putem deci presupune $T' = 1$. Considerăm diagrama comutativă cu linii exacte;

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}\, T'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "1+T''"] & B_1/\mathrm{Im}\, T'' \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}\, T'' \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & B_1/\mathrm{Im}\, T'' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

unde α, β sînt induși de $1 + T''$. Este evident că β e izomorfism și deci Ker $(1 + T'')$ = Ker α, Coker $(1 + T'')$ = Coker α $i(1 + T'') = i(\alpha) =$ $= 0$ (deoarece într-un spațiu finit dimensional $i = 0$).

Fie $T : B_1 \to B_2$ Fredholm; arătăm că există $\varepsilon > 0$ astfel că pentru $S : B_1 \to B_2$, $|S| < \varepsilon$, $T + S$ este încă Fredholm și $i(T + S) = i(T)$. (Aceasta va demonstra afirmația noastră).

Există $U \subset B_1$, $V \subset B_2$ subspații închise astfel că $B_1 = \operatorname{Ker} T \oplus U$, $B_2 = V \oplus T(U)$ și $V \approx \operatorname{Coker} \overline{T}$. Fie $\overline{T} : B_2 \to B_1$ definit de $\overline{T} = T^{-1}.\ \mathrm{pr}_{T(U)}$, $\varepsilon = |\overline{T}| > 0$. Dacă $|S| < \varepsilon$, atunci $1 + \overline{T}S$, $1 + S\overline{T}$, sînt inversabili, deci

$$(T + S)\,\overline{T} = 1 - \mathrm{pr}_V + S\overline{T} \text{ și } \overline{T}(T + S) = 1 - \mathrm{pr}_{\operatorname{Ker} T} + \overline{T}S$$

sînt Fredholm și i se anulează pe ei (deoarece pr_V, $\mathrm{pr}_{\operatorname{Ker} T}$ au rang finit)

Deoarece

$$\operatorname{Ker}(T + S) \subset \operatorname{Ker} \overline{T}\,(T + S)$$

$$\operatorname{Im}(T + S) \supset \operatorname{Im}(T + S)\,\overline{T},$$

rezultă că $T + S$ e Fredholm; avem $0 = i\,((T + S)\,\overline{T}) = i\,(T + S) + i(\overline{T}) = i(T + S) - i(T)$ și afirmația noastră e demonstrată.

3.10. Demonstrăm teorema principală a acestui capitol:

Teoremă. *Fie E, F două fibrări vectoriale peste varietatea compactă X, $U \subset R^\sigma$ un deschis conex. Pentru fiecare $t \in U$ se dă un operator eliptic $L_t : C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ depinzînd C^∞ față de t. Atunci*

(a) *Avem* $\|u\|_{s+k} \leqslant \text{const.}\,(\|L_t\,u\|_s + \|u\|_{s_0})$ *pentru orice* $u \in C^\infty(E)$, *unde t parcurge un compact din U.*

(b) dim Ker L_t *este o funcție superior semicontinuă față de t*; *adică pentru orice $t_0 \in U$, există $\varepsilon > 0$ astfel ca* $|t - t_0| < \varepsilon \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} L_{t_0} \geqslant \dim \operatorname{Ker} L_t$.

(c) dim Ler L_t — dim Coker L_t *este constant pentru $t \in U$.*

(d) (*Kodaira — Spencer*). *Fie $\mathcal{G}_t$ operatorul Green al lui $L_t^* L_t$ (față de metrici fixate pe X, E, F). Următoarele condiții sînt echivalente*:

1) dim Ker L_t *este constant pentru $t \in U$*;

2) $\mathcal{G}_t$ *depinde continuu de $t \in U$*;

3) $\mathcal{G}_t$ *și $\mathcal{H}_t$ depind C^∞ de $t \in U$.*

În adevăr, (a) a fost demonstrată la 3.3; (b) și (d) rezultă din 3.6, respectiv din 3.7 și 3.8 aplicate lui $L_t^* L_t$ și folosind relația evidentă $\operatorname{Ker} L_t = \operatorname{Ker} L_t^* L_t$; (c) rezultă din 3.9 aplicat lui $\widetilde{L}_t : H^{s+k}(E) \to H^s(F)$, observînd că

$$\operatorname{Ker} \widetilde{L}_t = \operatorname{Ker} L_t,\ \operatorname{Coker} \widetilde{L}_t = H^s(F)/\operatorname{Im} \widetilde{L}_t = \operatorname{Ker} L_t^* = \operatorname{Coker} L_t.$$

3.11. Vom da acum un exemplu simplu de familie de operatori eliptici pentru care nucleele nu au dimensiune constantă.

Definim $L_t : C^\infty(T^1, C) \to C^\infty(T^1, C)$ prin $L_t(u) = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + tu$, $t \in C$.

Atunci

$$\operatorname{Ker} L_t = 0, \text{ pentru } t \notin iZ \text{ și}$$

$$\dim \operatorname{Ker} L_t = 1 \text{ pentru } t \in iZ.$$

4. COMPLEXE ELIPTICE

4.1. Mai întîi să observăm că definiția de la 1.25 a unui operator diferențial de ordin $\leqslant k$ în cazul cînd varietatea de bază este compactă, se extinde cu ușurință la cazul varietăților nu neapărat compacte.

4.2. Un complex de operatori diferențiali constă dintr-un șir de fibrări vectoriale $(E_i)_{i \in Z}$ peste aceeași varietate X și dintr-un șir de operatori diferențiali $D_i : C^\infty (E_i) \to C^\infty (E_{i+1})$ astfel că $E_i = 0$ pentru $i < 0$ și $i > i_0$ și $D_{i+1} D_i = 0$ (i_0 este lungimea complexului). Spațiile de coomologie ale complexului de operatori diferențiali $\mathbf{E} = (E_{i,} D_i)$ sînt $H^i (\mathbf{E}) = \operatorname{Ker} D_i / \operatorname{Im} D_{i-1}$ (acestea sînt nule pentru $i < 0$ și $i > i_0$).

Un *complex eliptic* este un complex de operatori diferențiali $\mathbf{E} = (E_{i,} D_i)$ astfel că toți D_i sînt de ordin $\leqslant k > 0$ iar șirul simbolurilor de ordin k:

$$0 \to E_{0,x} \xrightarrow{\sigma (D_0, \xi)} E_{1,x} \xrightarrow{\sigma (D_1, \xi)} \dots \xrightarrow{\sigma(D_{i_0} - 1, \xi)} E_{i_0,x} \to 0$$

este exact pentru orice vector cotangent ξ nenul într-un punct arbitrar $x \in X$. (Observăm că noțiunea de elipticitate depinde de k : un complex poate fi k eliptic, fără a fi $(k + 1)$ eliptic). Orice operator eliptic $L : C^\infty (E) \to C^\infty (F)$ definește un complex eliptic, dacă punem $E_0 = E$, $E_1 = F$, $E_i = 0$, $i \neq 0, 1$; $D_0 = L$; avem $H^0 (\mathbf{E}) = \operatorname{Ker} L$, $H^1 (\mathbf{E}) = \operatorname{Coker} L$. Pe de altă parte, dacă X e un punct, un complex de operatori diferențiali peste X este pur și simplu un complex de spații vectoriale de dimensiune finită și e automat k-eliptic pentru orice $k > 0$. Astfel teoria complexelor eliptice poate fi considerată ca o generalizare a teoriei complexelor de spații vectoriale de dimensiune finită.

4.3. Operații cu complexe eliptice. Fie $\mathbf{E} = (E_{i,} D_{E,i})$, $\mathbf{F} = (F_i, D_{F,i})$ două complexe k-eliptice peste aceeași varietate X; definim un nou complex peste X prin $\mathbf{E} \oplus \mathbf{F} = (G_{i,} D_{G,i})$, unde $G_i = E_i \oplus F_{i,}$ $D_{G,i} = D_{E,i} \oplus \oplus D_{F,i} : C^\infty (E_i \oplus F_i) \to C^\infty (E_{i+1} \oplus F_{i+1})$ e dat de $D_{G,i} (s \oplus t) = D_{E,i} (s) \oplus \oplus D_{F,i} (t)$ pentru $s \in C^\infty (E_i)$, $t \in C^\infty (F_i)$.

Este evident că $E \oplus F$ este încă un complex k-eliptic peste X (numit *sumă directă*).

Fie acum $\mathbf{E} = (E_{i,} D_{E,i})$, $\mathbf{F} = (F_{i,} D_{F,i})$ două complexe k-eliptice primul peste X, al doilea peste Y.

Definim *produsul tensorial* al celor două complexe prin $\mathbf{E} \otimes \mathbf{F} = (G_{i,} D_{G,i})$, unde $G_i = \sum_{j+k=i} E_j \otimes F_k$ (această sumă e evident finită) iar $D_{G,i} = D_{E,j} \otimes 1 + \varepsilon \otimes D_{F,k} : \sum_{j+k=i} C^\infty (E_j \otimes F_k) \to \sum_{j+k=i+1} C^\infty (E_j \otimes F_k)$ este dat de $D_{G,i} (s \otimes t) = D_{E,j} (s) \otimes t + (-1)^j s \otimes D_{F,k} (t)$ pentru $s \in C^\infty (E_j)$, $t \in C^\infty (F_k)$ (secțiunile de forma $s \otimes t$ formează o mulțime totală în $C^\infty (E_j \otimes F_k)$). Este ușor de văzut că $\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}$ e un complex; să arătăm că acest complex e k-eliptic. În adevăr, fie (ζ, η) un vector nenul cotangent la $X \times Y$, unde $\zeta \in T^* (X)$, $\eta \in T^* (Y)$. Atunci cel puțin unul din vectorii ζ, η (să presupunem că ζ) este nenul.

Este evident că șirul format de simbolii lui $\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}$ în (ζ, η) este un complex de spații vectoriale care este produs tensorial al două complexe : unul este șirul format de simbolii lui $\mathbf{E}$ în ζ (acesta e un complex aciclic, căci $\mathbf{E}$ e eliptic iar $\zeta \neq 0$) iar celălalt e șirul format de simbolii lui $\mathbf{F}$ în η.

Formula lui Künneth pentru complexe de spații vectoriale (de dimensiune finită) (vezi demonstrația teoremei 4.5 (e)) arată că produsul tensorial a două complexe este aciclic, dacă cel puțin unul din cele două complexe e aciclic. Aceasta demonstrează că $\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}$ este un complex k-eliptic.

În restul acestui capitol, X va fi o varietate compactă.

Să definim acum *dualul* unui complex k-eliptic $\mathbf{E} = (E_i, D_{E,i})$ peste X. Acesta va fi un complex $\mathbf{E}^* = (G_i, D_{G,i})$ peste X definit de $G_i = E^*_{i_0-i} \otimes \Omega_X$ iar $D_{G,i} : C^\infty (E^*_{i_0-i} \otimes \Omega_X) \to C^\infty (E^*_{i_0-i-1} \otimes \Omega_X)$ e dat de $D_{G,i} = D^*_{E, i_0-i-1}$. Este evident că șirul simbolurilor lui $\mathbf{E}^*$ deasupra lui $\zeta \in T^* X$ este dualul șirului simbolurilor lui $\mathbf{E}$ (deasupra lui ζ) înmulțiți cu $(-1)^k$ și deci $\mathbf{E}^*$ este un complex k-eliptic.

4.4. O *structură metrică* pentru un complex de operatori diferențiali constă dintr-o metrică riemanniană pe varietatea-bază X și din metrici hermitiene pentru fiecare fibrare E_i a complexului.

Dacă complexul eliptic $\mathbf{E}$ e înzestrat cu o structură metrică, dualul său se identifică cu $\mathbf{E}^* = C^\infty(E_{i_0}) \xrightarrow{D^*_{i_0-1}} \ldots \to C^\infty (E_1) \xrightarrow{D^*_9} C^\infty (E_0)$.

În acest caz definim pentru orice întreg i Laplacianul : $\square_i : C^\infty (E_i) \to C^\infty (E_i)$ prin $\square_i = D^*_i D_i + D_{i-1} D^*_{i-1}$ sau prescurtat $\square = D^* D + DD^*$. Evident, $\square_i$ sînt operatori diferențiali de ordin $\leqslant 2k$, autoadjuncți.

Avem pentru orice i și orice vector cotangent $\xi \in T^*_x X$: $\sigma (\square, \xi) = (-1)^k (\sigma (D, \xi) \sigma (D, \xi)^* + \sigma (D, \xi)^* \sigma (D, \xi)) : E_{i,x} \to E_{i,x}$; deci dacă $v \in E_{i,x}$, avem $(-1)^k (\sigma (\square, \xi), v, v) = (\sigma (D, \xi) \sigma (D, \xi)^* v, v) + (\sigma (D, \xi)^* \sigma (D, \xi) v, v) = |\sigma (D, \xi)^* v|^2 + |\sigma (D, \xi) v|^2 \geqslant 0$ și egalitatea cu zero implică $\sigma (D, \xi)^* v = 0$, $\sigma (D, \xi) v = 0$. Să presupunem că $\xi \neq 0$; atunci avem $v = \sigma (D, \xi) w$, deci $0 = (\sigma (D, \xi)^* \sigma (D, \xi) w, w) = |\sigma (D, \xi) w|^2 = |v|^2$, deci $v = 0$. Rezultă că $\sigma (\square, \xi)$ e injecție și deci izomorfism $E_{ix} \xrightarrow{\approx} E_{ix}$ pentru $\xi \neq 0$. Aceasta arată că $\square_i$ sînt operatori $2k$-eliptici.

4.5. Enunțăm acum teorema principală a acestui capitol.

TEOREMĂ. (a) *Fie* $\mathbf{E} = (E_i, D_i)$ *un complex k-eliptic peste varietatea compactă X înzestrat cu o structură metrică. Laplacianul* $\square_i : C^\infty (E_i) \to C^\infty (E_i)$ *este un operator 2k-eliptic autoadjunct, pozitiv, care comută cu D și cu D*; avem* $\square_i u = 0$ *dacă și numai dacă* $D_i u = 0$ *și* $D^*_{i-1} u = 0$ *(în acest caz zicem că u este o secțiune armonică).*

(b) *Avem descompunerea lui Kodaira* : $C^\infty (E_i) = \mathrm{Ker}\, \square_i \oplus \mathrm{Im}\, D_{i-1} \oplus \mathrm{Im}\, D^*_i$ *(sumă directă topologică, ortogonală). În particular, spațiul D-cofrontierelor* ($\mathrm{Im}\, D_{i-1}$) *și spațiul D*-cofrontierelor* ($\mathrm{Im}\, D^*_i$) *sînt închise în* $C^\infty (E_i)$. *De asemenea* $\mathcal{D}' (E_i) = \mathrm{Ker}\, \square_i \oplus \mathrm{Im}\, \widetilde{D}_{i-1} \oplus \mathrm{Im}\, \widetilde{D}^*_i$ *(sumă directă topologică). În particular,* $\mathrm{Im}\, D_{i-1}$ *și* $\mathrm{Im}\, \mathrm{D}^*_i$ *sînt închise în* $\mathcal{D}' (E_i)$.

(c) $H^i (\mathbf{E})$ *sînt de dimensiune finită și avem izomorfismul lui Hodge* : $\mathrm{Ker}\, \square_i \xrightarrow{\approx} H^i (\mathbf{E})$ *adică în orice clasă de coomologie există exact un reprezentant armonic. Avem de asemenea* $H^i (\mathbf{E}) \approx \mathrm{Ker}\, \widetilde{D}_i / \mathrm{Ker}\, \widetilde{D}_{i-1}$.

(d) *Dacă* **E**, **F** *sînt complexe k-eliptice peste* X, *atunci* **E** $\oplus$ **F** *e k-eliptic peste* X *și* $H^i(\mathbf{E}) \oplus H^i(\mathbf{F}) \xrightarrow{\approx} H^i(\mathbf{E} \oplus \mathbf{F})$.

(e) *Dacă* **E**, **F** *sînt complexe k-eliptice peste* X, *respectiv* Y (*compacte*), *atunci* **E** $\otimes$ **F** *este k-eliptic peste* $X \times Y$ *și avem formula lui Künneth* :

$$\sum_{j+k=i} H^j(\mathbf{E}) \otimes H^k(\mathbf{F}) \xrightarrow{\approx} H^i(\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}).$$

(f) *Dacă* **E** *e un complex k-eliptic peste* X *compact, atunci* **E*** *e k-eliptic și avem dualitatea Poincaré* : $H^{n-i}(\mathbf{E}^*) \xrightarrow{\approx} H^i(\mathbf{E})^*$.

Demonstrație. (a) Dacă $\square_u = 0$, atunci $0 = (\square u, u) = \| Du \|^2_{L^2} + \| D^* u \|^2_{L^2}$, deci $Du = 0$ și $D^* u = 0$. Restul acestui punct a fost deja demonstrat sau e evident.

(b) Fie $\mathscr{H}_i$, $\mathscr{G}_i$ operatorii asociați lui $\square_i$ la 2.2.

Avem

$$1 = \mathscr{H}_i + \square_i \mathscr{G}_i$$

deci

$$1 = \mathscr{H}_i + D_{i-1} D^*_{i-1} \mathscr{G}_i + D^*_i D_i \mathscr{G}_i \tag{1}$$

și deci

$$\operatorname{Ker} \square_i + \operatorname{Im} D_{i-1} + \operatorname{Im} D^*_i = C^\infty(E_i).$$

Pe de altă parte, aceste trei spații sînt evident ortogonale, deci suma lor e directă (algebric) și $\mathscr{H}_i$, $D_{i-1} D^*_{i-1} \mathscr{G}_i$, $D^*_i D_i \mathscr{G}_i$ sînt proiectori ortogonali. Cum ei sînt continui, suma directă e topologică. Din faptul că $\square$ comută cu D și D^*, rezultă ușor că și $\mathscr{G}$ comută cu D și D^*, deci avem

$$1 = \mathscr{H}_i + \mathscr{G}_i D_{i-1} D^*_{i-1} + \mathscr{G}_i D^*_i D_i.$$

Să luăm transpusa acestei relații (aceasta va fi o egalitate între operatori $\mathscr{D}'(E_i) \longrightarrow \mathscr{D}'(E_i)$). Avem

$$1 = \mathscr{H}'_i + (D^*_{i-1})' (D_{i-1})' \mathscr{G}'_i + D'_i (D^*_i)' \mathscr{G}'_i.$$

Dar $(D^*)' = \widetilde{D}$, $D' = \widetilde{D}^*$, deci

$$1 = \mathscr{H}'_i + \widetilde{D}_{i-1} \widetilde{D}^*_{i-1} \mathscr{G}'_i + \widetilde{D}^*_i \widetilde{D}_i \mathscr{G}'_i. \tag{2}$$

Cum termenii sumei (1) sînt proiectori continui care se anulează reciproc, aceeași proprietate o vor avea și termenii sumei (2). Rezultă

$$\mathscr{D}'(E_i) = \operatorname{Im}(\mathscr{H}'_i) \oplus \operatorname{Im}(\widetilde{D}_{i-1} \widetilde{D}^*_{i-1} \mathscr{G}'_i) \oplus \operatorname{Im}(\widetilde{D}^*_i \widetilde{D}_i \mathscr{G}'_i) =$$

$$= \operatorname{Im} \mathscr{H}'_i + \operatorname{Im} \widetilde{D}_{i-1} + \operatorname{Im} \widetilde{D}^*_i. \tag{3}$$

Avem $\operatorname{Im} \mathscr{H}_i = \operatorname{Ker} \square_i$; arătăm că și

$$\operatorname{Im} \mathscr{H}'_i = \operatorname{Ker} \square_i. \tag{4}$$

În adevăr, cum $\mathscr{G}$ este autoadjunct, rezultă că $\mathscr{G}'_i |_{C^\infty E_i} = \mathscr{G}_i$ și deci $\mathscr{H}'_i |_{C^\infty (E_i)} = \mathscr{H}_i$. Rezultă $\operatorname{Im} \mathscr{H}'_i \supset \operatorname{Im} \mathscr{H}_i = \operatorname{Ker} \square_i$; pe de altă parte, dacă $u \in \mathscr{D}'(E_i)$ iar $f \in C^\infty(E_i)$, avem $(\square_i \mathscr{H}'_i u, f) = (u, \mathscr{H}_i \square_i f) = (u, \square_i \mathscr{H}_i f) = 0$, deci $\mathscr{H}'_i u \in \operatorname{Ker} \square_i$ și (4) rezultă.

Să presupunem acum că $u + \widetilde{D}_{i-1} v + \widetilde{D}_i^* w = 0$, unde $u \in \operatorname{Ker} \square_i$ iar v, w sînt secțiuni distribuții. Aplicînd ambii membri lui u, rezultă $\| u \|_{L^2}^2 = 0$, de unde $u = 0$ și deci $\widetilde{D}_{i-1} v + \widetilde{D}_1^* w = 0$.

Avem

$$(\widetilde{D}_{i-1} v,\ D_i^* f) = (v, D_{i-1}^* D_i^* f) = 0, \quad f \in C^\infty (E_{i+1}), \quad (\widetilde{D}_{i-1}\ v,\ D_{i-1} f) =$$

$$= -(\widetilde{D}_i^* w,\ D_{i-1} f) = -(w, D_i D_{i-1} f) = 0, \quad f \in C^\infty\ (E_{i-1}),$$

$$(\widetilde{D}_{i-1}\ v,\ u) = (v, D_{i-1}^* u) = 0, \ \text{dacă}\ u \in \operatorname{Ker}\ \square_i .$$

Ultimele 3 relații arată că $\widetilde{D}_{i-1}\ v$ se anulează pe $\operatorname{Ker} \square_i + \operatorname{Im} D_{i-1} + \operatorname{Im} D_1^*$ deci pe tot $C^\infty\ (E_i)$. Rezultă că $\widetilde{D}_{i-1}\ v = 0$, $\widetilde{D}_i^* w = 0$. Acest rezultat combinat cu (3) și (4) arată că

$$\mathcal{D}' (E_i) = \operatorname{Ker}\ \square_i \oplus \operatorname{Im} \widetilde{D}_{i-1} \oplus \operatorname{Im}\ \widetilde{D}_i^* \ \text{(topologic)}.$$

(c) Avem evident $\operatorname{Ker} D_i \supset \operatorname{Ker} \square_i \oplus \operatorname{Im} D_{i-1}$ și $\operatorname{Ker} D_i \cap \operatorname{Im} \widetilde{D}_i^* = 0$, de unde $\operatorname{Ker} D_i = \operatorname{Ker} \square_i \oplus \operatorname{Im} D_{i-1}$ folosind (b) și deci $\operatorname{Ker} \square_i \xrightarrow{\approx} \operatorname{Ker} D_i / \operatorname{Im} D_{i-1}$.

Analog se arată că $\operatorname{Ker}\ \square_i \xrightarrow{\approx} \operatorname{Ker}\ \widetilde{D}_i / \operatorname{Im}\ \widetilde{D}_{i-1}$.

Deoarece $\square_i$ este eliptic, avem $\dim\ H^i(\mathbf{E}) = \dim\ \operatorname{Ker} \square_i < \infty$.

Relația $\operatorname{Ker}\ D_i / \operatorname{Im}\ D_{i-1} \approx \operatorname{Ker}\ \widetilde{D}_i / \operatorname{Im} \widetilde{D}_{i-1}$ poate fi privită ca o teoremă de hipoelipticitate.

(d) Este evidentă.

(e) Alegem pe **E**, **F** structuri metrice iar pe $\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}$ structura metrică „produs”.

Fie $\square_E$, $\square_F$ laplacienii lui E respectiv F iar $\square_{E \otimes F}$ laplacianul lui $\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}$.

Avem

$$\square_{E\otimes F} = \square_E \otimes 1 + 1 \otimes \square_F : C^\infty\ (E^j \otimes F^k) \to C^\infty\ (E^j \otimes F^k).$$

În adevăr, cum $\varepsilon / C^\infty\ (E^j) = (-1)^j$,

$$\square_{E\otimes F} = (D_E \otimes 1 + \varepsilon \otimes D_F)\ (D_E^* \otimes 1 + \varepsilon \otimes D_F^*) +$$

$$+ (D_E^* \otimes 1 + \varepsilon \otimes D_F^*)\ (D_E \otimes 1 + \varepsilon \otimes D_F) =$$

$$= (D_E D_E^* + D_E^* D_E) \otimes 1 + 1 \otimes (D_F D_F^* + D_F^* D_F) =$$

$$= \square_E \otimes 1 + 1 \otimes \square_F .$$

Fie $e_1, e_2, \ldots$ o bază ortonormală a lui $L^2\ (E_j)$ formată din vectori proprii ai laplacianului astfel că $e_1, \ldots, e_a \in \operatorname{Ker}\ \square_E$ iar $e_{a+1}, e_{a+2}, \ldots \ldots \perp \operatorname{Ker} \square_E$. Fie de asemenea $f_1, f_2, \ldots$ o bază ortonormală a lui $L^2(F_k)$ formată din vectori proprii ai lui $\square_F$ astfel că $f_1, \ldots, f_b \in \operatorname{Ker}\ \square_F$, iar $f_{b+1}, f_{b+2}, \ldots \perp \operatorname{Ker} \square_F$.

Este ușor de văzut că $\{e_\alpha \otimes f_\beta\}_{\alpha,\beta \geqslant 1}$ formează o bază ortonormală a lui $L^2\ (E_j \otimes F_k)$. Dacă $\alpha \leqslant a$ și dacă $\beta \leqslant b$, atunci $e_\alpha \otimes f_\beta \in \operatorname{Ker}\ \square_{E\oplus F}$; în adevăr, în acest caz $\square_{E\otimes F}(e_\alpha \otimes f_\beta) = \square_E(e_\alpha) \otimes f_\beta + e_\alpha \otimes \square_F(f_\beta) = 0 + 0 = 0$.

Să presupunem că există $g \neq 0$ în Ker $\square_{E\otimes F}$ ortogonal pe toți $e_\alpha \otimes f_\beta$ cu $\alpha \leqslant a$ și $\beta \leqslant b$. Atunci $g = \sum\limits_{\substack{\alpha > a \\ \text{sau} \\ \beta > b}} a_{\alpha\beta} e_\beta \otimes f_\beta$.

Aplicînd $\square_{E\otimes F}$ rezultă

$$0 = \sum_{\substack{\alpha > a \\ \text{sau} \\ \beta > b}} (\lambda_\alpha + \mu_\beta)\, a_{\alpha\beta} e_\alpha \otimes f_\beta$$

(λ_α, μ_β sînt valori proprii ale lui $\square_E$ respectiv $\square_F$)

De aici rezultă $0 = (\lambda_\alpha + \mu_\beta)\, a_{\alpha\beta}$ dacă $\alpha > a$ sau $\beta > b$.

Dacă $\alpha > a$, avem $e_\alpha \notin$ Ker $\square_E$, deci $\lambda_\alpha > 0$ și cum $\mu_\beta \geqslant 0$, avem $\lambda_\alpha + \mu_\beta > 0$ și deci $a_{\alpha\beta} = 0$; la fel dacă $\beta > b$. Rezultă $g = 0$ ceea ce e absurd.

Rezultă că $\{e_\alpha \otimes f_\beta\}_{\alpha \leqslant a,\, \beta \leqslant b}$ este o bază ortonormală a lui Ker $\square_{E\otimes F}$ și de aici afirmația din enunț rezultă imediat.

Să observăm că pentru X redus la un punct, obținem o demonstrație a formulei lui Künneth pentru complexe de spații vectoriale de dimensiune finită.

(f) E suficient să arătăm că aplicația

$$H^i(\mathbf{E}) \otimes H^{i_0-i}(\mathbf{E}^*) \xrightarrow{\int_x^{(,)}} C \text{ este o dualitate.}$$

Alegînd o structură metrică pe $\mathbf{E}$, proprietatea (c) permite să identificăm această aplicație cu produsul scalar Ker $\square_i \otimes$ Ker $\square_i \to \mathbf{C}$ indus de pe $L^2(E_i)$, ceea ce termină demonstrația teoremei.

4.6. Definim *indicele* unui complex eliptic $\mathbf{E}$ peste varietatea compactă X prin formula

$$\text{index } E = \Sigma\, (-1)^i \dim H^i(\mathbf{E}).$$

Să presupunem că pe E am ales o structură metrică

Definim operatorul diferențial $L_E : C^\infty(\oplus E_i) \to C^\infty(\oplus E_i)$ prin :

$$L_E(s_0, s_1, s_2, \ldots) = (D^* s_1, D s_0 + D^* s_2, D s_1 + D^* s_3, \ldots).$$

Atunci putem considera restricțiile lui L_E :

$$L'_{\mathbf{E}} : C^\infty(\oplus E_{2i}) \to C^\infty(\oplus E_{2i+1}),$$

$$L''_{\mathbf{E}} : C^\infty(\oplus E_{2i+1}) \to C^\infty(\oplus E_{2i}).$$

Este evident că $L'_{\mathbf{E}} L''_{\mathbf{E}}$ și $L''_{\mathbf{E}} L'_{\mathbf{E}}$ sînt sume directe de laplacieni (conform formulei $(D + D^*)(D + D^*) = (DD^* + D^*D)$. Rezultă că pentru $\xi \neq 0$, $\sigma(L'_E, \xi)\sigma(L''_{\mathbf{E}}, \xi)$ și $\sigma(L''_{\mathbf{E}}, \xi)\,\sigma(L'_E, \xi)$ sînt izomorfisme și deci L'_E, L''_E sînt k-eliptici ; în plus $L'_{\mathbf{E}}$, $L''_{\mathbf{E}}$ sînt unul adjunctul celuilalt. Dar se vede ușor, folosind izomorfismul $H^i(\mathbf{E}) = \text{Ker } \square_i$, că

$$\text{Ker } L'_{\mathbf{E}} = \bigoplus_i H^{2i}(\mathbf{E})$$

$$\text{Coker } L'_{\mathbf{E}} \approx \text{Ker } L''_{\mathbf{E}} = \bigoplus_i H^{2i+1}(\mathbf{E})$$

deci index **E** = dim Ker $L'_{\mathbf{E}}$ — dim Coker $L'_{\mathbf{E}}$. Din această formulă și din teorema 3.10 (c) rezultă că dacă operatorii diferențiali ai lui **E** depind C^∞ de un parametru $t \in U$, unde U e un deschis conex în R astfel că pentru fiecare t să avem un complex eliptic $\mathbf{E}_t$ atunci index $(\mathbf{E}_t)$ este independent de $t \in U$. De asemenea :

Dacă complexele eliptice

$$C^\infty(E_0) \xrightarrow{d} C^\infty(E_1) \xrightarrow{d} \dots (\mathbf{E})$$

$$C^\infty(E_0) \xrightarrow{\bar{d}} C^\infty(E_1) \xrightarrow{\bar{d}} \dots (\bar{\mathbf{E}})$$

au același șir de simboluri pentru orice ξ, *atunci ele au același indice.*

În adevăr, punînd $d_t = td + (1+t)\,\bar{d}$, $t \in R$, obținem o familie de complexe eliptice (cu același simbol) și $d_0 = d$, $d_1 = \bar{d}$. Rezultă index **E** = = index $(\bar{\mathbf{E}})$. În paragrafele următoare vom da trei exemple de complexe eliptice furnizate de geometrie și le vom studia indexul (determinarea indexului unui complex eliptic arbitrar în termeni de clase caracteristice constituie obiectul celebrei teoreme a lui Atiyah — Singer, vezi [12]).

4.7. Complexul lui de Rham. Fie X o varietate compactă de dimensiune n, $\Lambda^i = \Lambda^i(T^*(X) \otimes C)$ fibrările date de puterile exterioare complexificate ale fibrării cotangente a lui X și

$$\Lambda: \qquad C^\infty(\Lambda^0) \xrightarrow{d} C^\infty(\Lambda^1) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} C^\infty(\Lambda^n)$$

complexul definit de operatori de diferențiere exterioară d (se știe că $dd = 0$). În coordonate locale avem pentru

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_k},$$

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{j,\, i_1 < \dots < i_k} \frac{\partial a_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_j}\, \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_k},$$

deci d sînt operatori diferențiali de ordinul 1 și dacă $\xi = \sum \xi_k\, \mathrm{d}x_k \in$ $\in T^*_{x_0}(X)$ avem

$\sigma(\mathrm{d}, \xi)\, \omega(x_0) = \sum_{j,\, i_1 < \dots < i_k} \xi_j\, a_{i_1 \dots i_k}(x_0)\, \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} =$ $= (\xi \wedge \omega)(x_0)$.

Deci șirul simbolurilor este $\Lambda^0_{x_0} \xrightarrow{\xi \wedge \cdot} \Lambda^1_{x_0} \xrightarrow{\xi \wedge \cdot} \dots$, care pentru $\xi \neq 0$ este evident exact, ceea ce arată că Λ e un complex eliptic.

Spațiile de coomologie ale lui Λ se numesc spațiile de coomologie de Rham ale varietății X și notăm $H^i(X) = H^i(\Lambda)$ și $\beta_i = \dim H^i(X)$ „numerele Betti". Să presupunem că X este orientată. În acest caz putem da o formă specială dualității Poincaré (4.5 (f)).

În adevăr, avem aplicația de dualitate

$$\Lambda^i \otimes (\Lambda^{n-i} \otimes (\Lambda^n)^*) \to 1$$

dată de $(\omega_1 \otimes (\omega_2 \otimes \omega_3)) \to ((\omega_1 \Lambda\, \omega_2),\ \omega_3)$, ceea ce permite să identificăm $(\Lambda^i)^* = \Lambda^{n-i} \otimes (\Lambda^n)^*$ și deci $(\Lambda^i)^* \otimes \Omega_x = (\Lambda^i)^* \otimes \Lambda^n = \Lambda^{n-i}$. Deci complexul dual lui Λ (vezi 4.3) se poate identifica cu

$$\Lambda^* : C^\infty(\Lambda^\circ) \xrightarrow{d'} C^\infty(\Lambda^1) \xrightarrow{d'} \ldots ,$$

unde d' satisface $\int \mathrm{d}'s \wedge t = \int s \wedge \mathrm{d}t$ pentru $s \in C^\infty(\Lambda^\alpha)$, $t \in C^\infty(\Lambda^{n-\alpha-1})$.

Dar formula lui Stokes arată că $\int \mathrm{d}s \wedge t + (-1)^\alpha\, s \wedge \mathrm{d}t =$

$= \int \mathrm{d}\,(s \wedge t) = 0$ sau $d' = (-1)^{\alpha+1} d$, pe $C^\infty(\Lambda^\alpha)$, și deci Λ^* este același ca și Λ (abstracție făcînd de semnele operatorilor diferențiali), adică Λ este „autodual". Rezultă, conform 4.5 (f), că $H^i(X) \otimes H^{n-i}(X) \longrightarrow C$ indus de aplicația $s, t \to \int_X s \wedge t$ este o dualitate. Rezultă că $\beta_i = \beta_{n-i}$. Dacă X este conex, avem $\beta_0 = 1$; în adevăr, pentru $f \in C^\infty(\Lambda^\circ)$ avem $\mathrm{d}f = 0 \Leftrightarrow f = \text{const.}$ (în general β_0 este egal cu numărul componentelor conexe ale lui X). Deci pentru X orientabil, avem $\beta_n = 1$. În capitolul următor (punctul 5.7) vom vedea că invers, dacă $\beta_n = 1$ și X e conex, atunci X e orientabil.

Notăm $\chi(X) = \text{index}\,(\Lambda) = \sum (-1)^i\, \beta_i$ (caracteristica Euler-Poincaré a lui X). Dacă X are dimensiune impară și e orientabil, avem $\chi(X) = \sum(-1)^i\, \beta_{n-i} = -\chi(X)$, deci $\chi(X) = 0$. În capitolul următor (punctul 5.7) vom vedea că acest rezultat e adevărat și fără ipoteza de orientabilitate.

4.8. Complexul lui Dolbeault. Fie X o varietate compactă, complexă de dimensiune complexă n. Pentru orice $0 \leqslant p \leqslant n$ considerăm complexul

$$\Lambda^{p,\cdot} : C^\infty(\Lambda^{p,0}) \xrightarrow{\bar\partial} C^\infty(\Lambda^{p,1}) \xrightarrow{\bar\partial} \ldots \xrightarrow{\bar\partial} C^\infty(\Lambda^{p,n})$$

unde $\Lambda^{p,q}$ este fibrarea formelor de tip (p, q) pe X. În coordonate locale avem pentru

$$\omega = \sum_{i,} a_{i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_q}\, \mathrm{d}z_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_{i_p} \wedge \mathrm{d}\overline{z_{j_1}} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\overline{z_{j_q}}$$

$$\bar\partial\omega = \sum_{k,i,j} \frac{a_{i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_q}}{\bar z_k} \mathrm{d}\bar z_k \wedge \mathrm{d}z_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_{i_p} \wedge \mathrm{d}\overline{z_{j_1}} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\overline{z_{j_q}}.$$

Notînd $\xi = \xi' + \xi'' \in T^*(X)$, $\xi' = \Sigma\, \xi_\alpha \mathrm{d}z_\alpha$, $\xi'' = \Sigma \xi \mathrm{d}\overline{z_\alpha}$ avem:

$$\sigma(\bar\partial,\ \xi)\, \omega\,(x_0) =$$

$$= \Sigma\, \bar\xi_k\, a_{i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_q}\ \mathrm{d}\overline{z_k} \wedge \mathrm{d}z_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_{i_p} \wedge \mathrm{d}\overline{z_{j_1}} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\overline{z_{j_q}} =$$

$$= (\xi'' \wedge \omega)\,(x_0).$$

Dar dacă $\xi \neq 0$, atunci $\xi'' \neq 0$ şi deci complexul $\Lambda^{p,0}$ este eliptic pentru orice p. Mai general, putem presupune că pe X se dă o fibrare olomorfă W şi că $\Lambda^{p,\cdot}_W$ este complexul

$$C^\infty (\Lambda^{p,0} \otimes W) \xrightarrow{\bar\partial \otimes 1} C^\infty (\Lambda^{p,1} \otimes W) \xrightarrow{\bar\partial \otimes 1} \ldots,$$

unde $\bar\partial_W = \bar\partial \otimes 1$ se defineşte în mod natural, folosind structura olomorfă a lui W. Obţinem un complex eliptic (aceeaşi demonstraţie ca pentru cazul $W = 1$). Să notăm $H^{p,q}(X, W) = H^q(\Lambda^{p,\cdot}_W)$ spaţiile de ,,coomologie Dolbeault'' ale lui X cu coeficienţi în W.

Să interpretăm dualitatea Poincaré pentru complexele Dolbeault. Mai întîi să observăm că orice varietate complexă e canonic orientată şi deci $\Omega_X \approx \Lambda^{2n} T^*(X) \underset{R}{\otimes} C \approx \Lambda^{n,n}$; pe de altă parte, avem aplicaţia de dualitate evidentă

$$(\Lambda^{p,q} \otimes W) \otimes (\Lambda^{n-p,\, n-q} \otimes W^* \otimes (\Lambda^{n,n})^*) \to 1.$$

Rezultă că dualul complexului $\Lambda^{p,\cdot}$ se identifică cu

$$C^\infty (\Lambda^{n-p,0} \otimes W^*) \xrightarrow{\bar\partial'} C^\infty (\Lambda^{n-p,1} \otimes W^*) \xrightarrow{\bar\partial'} \ldots,$$

unde

$$\int \bar\partial' s \wedge t = \int s \wedge \bar\partial_W t \text{ pentru } s \in C^\infty (\Lambda^{n-p,q} \otimes W^*),\ t \in C^\infty(\Lambda^{p,n-q-1} \otimes W).$$

Dar formula lui Stokes dă

$$\int (\bar\partial_{W*} s \wedge t + (-1)^{n-p+q} s \wedge \bar\partial_W t) = \int \bar\partial (s \wedge t) = \int \mathrm{d}\, (s \wedge t) = 0$$

deci

$$\bar\partial' = (-1)^{n-p+q+1}\, \bar\partial_{W*} \text{ pe } C^\infty (\Lambda^{n-p,q} \otimes W^*).$$

Deci dualul complexului $\Lambda^{p,\cdot}_W$ este $\Lambda^{n-p,\cdot}_{W*}$ (cu operatorii diferenţiali avînd semne schimbate). Rezultă că

$$H^{p,q}(X, W) \otimes H^{n-p,\, n-q}(X, W^*) \to C$$

indusă de produsul exterior este o dualitate (teorema de dualitate a lui Serre, vezi [13]).

Să notăm $\chi^p(X, W) = \text{index}\,(\wedge^{p,\cdot}_W) = \Sigma(-1)^q \dim H^{p,q}(X, W)$. Atunci rezultatul precedent arată că $\chi^p(X, W) = (-1)^n \chi^{n-p}(X, W^*)$.

Fie y o variabilă; punem $\chi_y(X, W) = \Sigma \chi^p (X, W)^{yp}$ (aceasta este χ_y-caracteristica fibrării olomorfe W; ea este un polinom în y cu coeficienţi întregi, de grad $\leqslant n$). Avem:

$$\chi_y(X, W) = \Sigma (-1)^n \chi^{n-p}(X, W^*)\, y^{p-n}\, y^n = (-1)^n y^n \chi_{\frac{1}{y}}(X, W^*).$$

4.9. Complexul lui Hirzebruch. Fie X o varietate riemanniană, compactă, orientată; $\omega_X \in C^\infty(\Lambda^n\ T^*X)$ fiind elementul său de volum. Definim izometria $* : \Lambda^k \to \Lambda^{n-k}$ prin $s \wedge *\bar{t} = (s, t)\,\omega_X$ pentru $s,\ t \in \Lambda^k_x$; avem deci $\omega = *1$. E uşor de verificat că $*^2 = (-1)^{k(n-k)} : \Lambda^k \to \Lambda^k$.

Dacă $d^* : C^\infty(\Lambda^k) \to C^\infty(\Lambda^{k-1})$ este adjunctul diferenţialei exterioare $d : C^\infty(\Lambda^{k-1}) \to C^\infty(\Lambda^k)$, avem

$$d^* = (-1)^{n(k-1)+1} * \mathrm{d} * \text{ pe } C^\infty(\Lambda^k)$$

(conform formulei lui Stokes). Punem

$$\alpha \mid \Lambda^k = \begin{cases} i^{k(k+1)-\frac{n}{2}} *, & n \text{ par} \\ i^{k(k+1)-\frac{n-3}{2}} *, & n \text{ impar} \end{cases}$$

şi obţinem o izometrie $\alpha : \Lambda^k \to \Lambda^{n-k}$ astfel că $\alpha * = \alpha$, $\alpha^2 = 1$, $\alpha d = d^*\alpha$, $\alpha d^* = d\alpha$, deci $\alpha(d - d^*) = -(d - d^*)\,\alpha$.

Fie

$$\Lambda^+ = \{\omega \in \bigoplus_i \Lambda^i\ ,\ \alpha\omega = \omega\},$$

$$\Lambda^- = \{\omega \in \bigoplus_i \Lambda^i\ ,\ \alpha\omega = -\omega\}.$$

Avem $\Lambda^+ \oplus \Lambda^- = \bigoplus_i \Lambda^i$

Fie $D_0 = i(d - d^*) : C^\infty(\Lambda^+) \to C^\infty(\Lambda^-)$.

Deoarece $i^2(d - d^*)^2$ este laplacianul complexului de Rham (4.7) care e eliptic, rezultă că D_0 are simbol injectiv; cum $\dim \Lambda_x^+ = \dim \Lambda_x^-$, rezultă că D_0 este eliptic.

Complexul eliptic $D_0 : C^\infty(\Lambda^+) \to C^\infty(\Lambda^-)$ se numeşte complexul lui Hirzebruch asociat varietăţii riemanniene orientate X.

Să determinăm indicele lui D_0. Notăm $H^i = H^i(X)$ (vezi 4.7).

(a) $n = 2k + 1$. Avem

$$\text{index}(D_0) = [\dim(H^0 \oplus H^n)_+ - \dim(H^0 \oplus H^n)_-] + \ldots +$$

$$[\dim(H^k \oplus H^{k+1})_+ - \dim(H^k \oplus H^{k+1})_-].$$

Dar $(H^k \oplus H^{k+1})_+ = \{x + \alpha x \mid x \in H^k\}$ deci $\dim(H^k \oplus H^{k+1})_+ = \dim H^k$ şi la fel $\dim(H^k \oplus H^{k+1})_- = \dim H^k$ şi analog pentru celelalte perechi de indici. Deci toate parantezele sînt nule şi index $(D_0) = 0$.

(b) $n = 4k + 2$. Raţionamentul de la (a) se poate aplica numai parţial şi dă:

$$\text{index}(D_0) = \dim(H_+^{2k+1}) - \dim(H_-^{2k+1}).$$

Dar $\alpha|_{H^{2k+1}} = i*$; dacă $x \in H_+^{2k+1}$, $(i*)x = x$, deci $(i*)\bar{x} = i\overline{*x} = -\overline{(i*)x} = -\bar{x}$ deci $\overline{H}_+^{2k+1} = H_-^{2k+1}$ şi deci şi în acest caz index $(D_0) = 0$.

(c) $n = 4k$. În acest caz index $(D_0) = \dim H^{2k}_{+}(X) - \dim H^{2k}_{-}(X)$. Avem $H^{2k} = H^{2k}_{+} \oplus H^{2k}_{-}$. Fie $e_1, \ldots, e_n$ o bază ortonormală în H^{2k}_{+}; considerăm e_i ca forme armonice după 4.5 (c) şi $f_1, \ldots, f_m$ o bază ortonormală în H^{2k}_{-}. Avem :

$$\int e_i \wedge \bar{e}_j = \int (e_i, * e_j)\, \omega_X = \int (e_i, e_j)\, \omega_X = \delta_{ij}$$

$$\int f_i \wedge \bar{f}_j = \int (f_i, * f_j)\, \omega_X = \int (f_i, -f_j)\, \omega_X = -\delta_{ij}$$

$$\int e_i \wedge \bar{f}_j = \int (e_i, * f_j)\, \omega_X = \int (e_i, -f_j)\, \omega_X = 0.$$

Rezultă că indicele lui D_0, în cazul $n = 4k$, este egal cu signatura formei hermitiene $H^{2k}(X) \times H^{2k}(X) \to C$ dată de $\hat{f}, \hat{g} \to \int f \wedge \bar{g}$, unde f, g sînt reprezentanţi ai lui f, g (această formă e nedegenerată conform dualităţii Poincaré 4.7).

În oricare din cazurile (a), (b), (c) vom nota index $(D_0) = \tau(X)$ şi vom spune că $\tau(X)$ este signatura varietăţii orientate X (din calculele de mai sus rezultă că $\tau(X)$ nu depinde de structura riemanniană a lui X). Avem

$$\tau(X) \neq 0 \text{ numai dacă } \dim X \equiv 0 \pmod{4}.$$

Să considerăm de exemplu spaţiul proiectiv complex de dimensiune (complexă) $2k$, $X = P^{2k}(C)$. Se ştie că $\dim H^{2k}(P^{2k}(C)) = 1$. Deci $\tau(P^{2k}(C)) = \pm 1$ după cum orientăm $P^{2k}(c)$.

5. COMPLEXE ELIPTICE FIBRATE

5.1. În cele ce urmează vom generaliza noţiunea de produs tensorial de complexe eliptice (4.3) în felul următor :

Fie $F \to E \xrightarrow{p} B$ o fibrare local trivială de varietăţi

$$A_F = \{C^\infty(A^0_F) \xrightarrow{D_F} \ldots \xrightarrow{D_F} C^\infty(A^m_F)\}$$

$$A_E = \{C^\infty(A^0_E) \xrightarrow{D_E} \ldots \xrightarrow{D_E} C^\infty(A^{m+n}_E)\}$$

$$A_B = \{C^\infty(A^0_B) \xrightarrow{D_B} \ldots \xrightarrow{D_B} C^\infty(A^n_B)\}$$

complexe de operatori diferenţiali pe F, E, B operînd pe secţiunile C^∞ ale fibrărilor vectoriale $A^0_F, \ldots, A^{n-1}_B$.

Fie $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ o acoperire deschisă a lui B şi

$$\begin{tikzcd} E \mid U_\alpha \arrow[rr] \arrow[dr, "p"'] & & U_\alpha \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

trivializări.

Presupunem date izomorfismele Φ_α astfel ca diagramele

$$\begin{tikzcd}
A_E^k \mid p^{-1}(U_\alpha) \arrow[r] \arrow[d] & \sum\limits_i A_B^i \mid U_\alpha \otimes A_F^{k-1} \arrow[d] \\
p^{-1}(U_\alpha) \arrow[r] & U_\alpha \times F
\end{tikzcd}$$

să fie comutative. Se presupune de asemenea că

(a) Φ_α transportă operatorii D_E în operatorii $D_B \otimes 1 + \varepsilon \otimes D_F$, unde $\varepsilon \mid C^\infty(A_B^i) = (-1)^i$.

(b) Dacă $\sigma^i \in A_B^i|_{U_\alpha \cap U_\beta}$, $\tau^j \in A_F^j$, atunci $\Phi_\alpha \Phi_\beta^{-1}(\sigma^i \otimes \tau^j) - \sigma^i \otimes \otimes \psi^j_{\alpha\beta,x,y}(\tau^j) \in A_B^{i+1} \otimes A_F^{j-1} + A_B^{i+2} \otimes A_F^{j-2} + \ldots$. unde $\psi^j_{\alpha\beta,x,y} : A^j_{F,y} \to \to A^j_{F,(\varphi_\alpha \varphi_\beta)_x^{-1} y}$ este un izomorfism care depinde diferențiabil de $y \in F$ proiecția lui τ^j pe F) și de parametrul $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ (proiecția lui σ^i pe B).

(c) $\psi^j_{\alpha\beta,x,y}$ nu depinde de indicele i.

Un sistem $\mathscr{C} = (F \longrightarrow E \longrightarrow B,\ A_F,\ A_E,\ A_B)$ înzestrat cu o familie maximală de „trivializări" φ_α, Φ_α, $\alpha \in A$, satisfăcînd (a), (b), (c) se numește *complex diferențial fibrat.*

Dacă A_B și A_F sînt k-eliptici, atunci raționamentul de la 4.3 arată că A_E este de asemenea k-eliptic și se spune că e un complex eliptic fibrat.

5.2. Să presupunem F compact și A_F k-eliptic. În acest caz definim pentru orice q, $0 \leqslant q \leqslant m$, o fibrare vectorială $\mathbf{H}^q(A_p)$ pe B, asociată lui A_F.

Izomorfismele $\psi^q_{\alpha\beta.x.y} : A^q_{F.y} \longrightarrow A^q_{F.(\varphi_\alpha\varphi_\beta)_x^{-1} y}$ induc automorfismele $\psi'^q_{\alpha\beta.x} : C^\infty(A_F^q) \longrightarrow C^\infty(A_F^q)$ care sînt compatibile cu D_F dacă $A_B \neq 0$, ceea ce vom prespune întotdeauna) și deci induc $\psi''^q_{\alpha\beta.x} : H^q(A_F) \to H^q(A_F)$ care depind diferențiabil de $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ și definesc fibrarea căutată $\mathbf{H}^q(A_F)$.

Să presupunem în plus că toate funcțiile $\psi''^q_{\alpha\beta.x}$ sînt local constante în raport cu $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ (rezultă că fibrarea $\mathbf{H}^q(A_F)$ este *plată* peste B). Atunci se pot defini operatorii diferențiabili $\widetilde{D} : C^\infty(A_B^p \underset{B}{\otimes} \mathbf{H}^q(A_F)) \to \to C^\infty(A_B^{p+1} \underset{B}{\otimes} \mathbf{H}^q(A_F))$ care pe U_α sînt caracterizați de relația

$$D(u(x) \otimes v) = D_B u(x) \otimes v,$$

unde $v \in H^q(A_F)$ este independent de x. Se obține astfel pentru orice q, $0 \leqslant q \leqslant m$, un complex diferențial $A_B \otimes \mathbf{H}^q(A_F) = \{C^\infty(A_B^0 \underset{B}{\otimes} \mathbf{H}^q(A_F)) \xrightarrow{\widetilde{D}} \xrightarrow{\widetilde{D}} C^\infty(A_B^1 \underset{B}{\otimes} \mathbf{H}^q(A_F)) - \to \ldots\}$ peste B.

5.3. **Teoremă.** *Fie $\mathcal{C}$ un complex diferențial fibrat astfel că F este compact, A_F este eliptic și funcțiile $\psi''^{q}_{\alpha\beta,x}$ sînt local constante. Există atunci un șir spectral $E^{p,q}$ care converge către $H^{p+q}(A_E)$ și astfel că $E_2^{p,q} = H^p(A_B \underset{B}{\otimes} \mathbf{H}^q(A_F))$.*

Demonstrație. Notăm prin $\mathcal{A}_B^i$, $\mathcal{A}_F^j$, $\mathcal{A}_E^k$, $\mathcal{H}^q$ fasciculele de germeni de secțiuni C^∞ corespunzătoare fibrărilor A_B^i, A_F^j, A_E^k, $\mathbf{H}^q(A_F)$.

Putem filtra în mod natural pe A_E^k printr-un șir de subfibrări vectoriale L_s^k astfel că

$$A_E^k = L_0^k \supset L_1^k \supset L_2^k \supset \ldots \supset 0$$

În adevăr, punem

$$L_s^k = \{v \in A_E^k \mid \text{local, } v \text{ este în } A_B^s \otimes A_F^{k-s} + A_B^{s+1} \otimes A_F^{k-(s+1)} + \ldots$$

Avem $L_s^k = 0$, pentru $s > m$.

Definim fibrările vectoriale $A_E^{i,j}$ peste E prin

$$A_E^{i,j} = \text{Coker}\ (L_{i+1}^{i+j} \to L_i^{i+j}),\ 0 \leqslant i \leqslant n,\ 0 \leqslant j \leqslant m.$$

Filtrarea lui A_E^k definește filtrarea lui $C^\infty(A_E^k)$ prin:

$$C^\infty(A_E^k) = C^\infty(L_0^k) \supset C^\infty(L_1^k) \supset \ldots \supset 0.$$

Este evident că $D_E(C^\infty(L_s^k)) \subset C^\infty(L_s^{k+1})$ deci $C^\infty(A_E^*)$ devine un spațiu vectorial graduat, filtrat, diferențial. Fie $(E_r^{p,q}, d_r)$ $(r \geqslant 0)$ șirul spectral asociat. Rămîne să demonstrăm termenul E_2. Avem $E_0^{p,q} = C^\infty(L_p^{p+q})/C^\infty L_{p+1}^{p+q} = C^\infty(L_p^{p+q}/L_{p+1}^{p+q}) = C^\infty(A_E^{p,q})$.

Observăm că

$$A_E^{p,q}/U_\alpha \times F \underset{\approx}{\xrightarrow{\widetilde{\Phi}_\alpha}} A_B^p \mid U_\alpha \otimes A_F^q,$$

unde $\widetilde{\Phi}_\alpha$ e indus de Φ_α și

$\widetilde{\Phi}_\alpha \widetilde{\Phi}_\beta^{-1}: A_B^p \otimes A_F^q \to A_B^p \otimes A_F^q$ e dat de $1 \otimes \psi^j_{\alpha\beta,x,y}$ (vezi 5.1)

Cu aceste identificări operatorul $d_0: E_0^{p,q} \to E_0^{p,q}$ e dat local de $d_0(\alpha \otimes \beta) = (-1)^p\, \alpha \otimes D_F\, \beta$.

Arătăm că

$$E_1^{p,q} = C^\infty(A_B^p \underset{\beta}{\otimes} \mathbf{H}^q(A_F)).$$

În adevăr, notăm T_q fibrarea vectorială (de fibră spații Fréchet $C^\infty(A_F^q)$) peste B definită de $T_q = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \times C^\infty(A_F^q)/\sim$ unde

$$(x, s)_\beta \sim (x, \psi'^{q}_{\alpha\beta,x}(s))_\alpha$$

și prin $\mathcal{T}_q$ fasciculul germenilor de secțiuni în T_q care reprezintă familii de secțiuni în $C^\infty(A_F^q)$ depinzînd C^∞ de $x \in U_\alpha$.

Fie $\partial_q: \mathcal{T}_q \to \mathcal{T}_{q+1}$ homomorfismul de fascicule indus de D_F. Avem atunci șirul exact de fascicule peste B:

$$(*) \qquad 0 \to \text{Im}\ \partial_{q-1} \to \text{Ker}\ \partial_q \to \mathcal{H}^q \to 0.$$

În adevăr, e suficient să arătăm că dacă S_x este o familie de secțiuni C^∞ în A_F^q, depinzînd C^∞ de $x \in U \subset R^\sigma$ astfel că $S_x = D_F\, t_x$, $t_x \in C^\infty (A_F^{q-1})$ pentru orice $x \in U$, atunci putem alege t_x depinzînd C^∞ față de $x \in U$.

Pentru aceasta alegem o structură metrică în A_F şi fie $\mathcal{G}$ operatorul Green asociat lui $\Box_{q-1}$. Punem $t'_x = \mathcal{G}\, D_F^*\, S_x$. Atunci $\Box_{q-1}\, t'_x = D_F^*\, S_x$ deci $\Box_q\, D_F\, t'_x = D_F\, D_F^*\, S_x = \Box_q\, S_x$. Cum $D_F\, t'_x - S_x$ este în $(\mathrm{Ker}\ \Box_q)^\perp$pe care $\Box_q$ e injecție, rezultă $D_F\, t'_x = S_x$. Faptul că t'_x depinde C^∞ față de x rezultă din 3.8 aplicată operatorului $\Box_{q-1} : C^\infty (A_F^{q-1}) \to C^\infty (A_F^{q-1})$ (independent de x). Astfel exactitatea şirului (*) este demonstrată.

Să înmulțim tensorial şirul exact (1) cu fasciculul local liber A_B^p. Obținem şirul exact :

$$0 \to \mathrm{Im}\ \partial_{q-1} \otimes \mathcal{A}_B^p \to \mathrm{Ker}\ \partial_q \otimes \mathcal{A}_B^p \to \mathcal{H}^q \otimes A_B^p \to 0.$$

Cum aceste fascicule sînt fine, şirul rămîne exact dacă vom considera secțiunile lor globale (peste B) :

$$0 \to \Gamma_B (\mathrm{Im}\ \partial_{q-1} \otimes \boldsymbol{\mathcal{A}}_B^p) \to \Gamma_B (\mathrm{Ker}\ \partial_q) \otimes \mathcal{A}_B^p) \to \Gamma_B (\mathcal{H}^q \otimes \mathcal{A}_B^p) \to 0.$$

Dar

$$\Gamma_B (\mathrm{Ker}\ \partial_{q-1} \otimes \boldsymbol{\mathcal{A}}_B^p) = \mathrm{Ker}\, (C^\infty (A_E^{p,q}) \xrightarrow{d_0} C^\infty (A_E^{p,q+1}))$$

$$\Gamma_B (\mathrm{Im}\ \partial_{q-1} \otimes \mathcal{A}_B^p) = \mathrm{Im}\, (C^\infty (A_E^{p,q-1}) \xrightarrow{d_0} C^\infty (A_E^{p,q}))$$

$$\Gamma_B (\mathcal{H}^q \otimes \boldsymbol{\mathcal{A}}_B^p) = C^\infty (\mathbf{H}^q (A_F) \underset{B}{\otimes} A_B^p).$$

Obținem astfel izomorfismul

$$E_1^{p,q} = C^\infty (A_B^p \underset{B}{\otimes} \mathbf{H}^q\, A_F).$$

E uşor de văzut că $d_1 : E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}$ e dat de operatorul D considerat la 5.2. Astfel $E_2^{p,q} = H^p\, (A_B \underset{B}{\otimes} \mathbf{H}^q\, (A_F)$ şi teorema este demonstrată.

5.4. Vom da acum cîteva exemple de complexe eliptice fibrate :

(a) Fie $F \to E \to B$ o fibrare local trivială de varietăți cu F compactă. E uşor de văzut că complexele de Rham ale lui F, E, B formează un complex eliptic fibrat.

Condiția de local constantă a funcțiilor $\psi''^{q}_{\alpha\beta,x}$ rezultă din ,,axioma de omotopie'' : două aplicații omotope $f, g : X \to Y$ induc acelaşi homomorfism în coomologia singulară şi din teorema lui de Rham, vezi [15].

În acest caz, şirul spectral de la 5.3 e analogul în coomologia de Rham al şirului spectral Leray-Serre.

(b) Fie $F \to E \xrightarrow{p} B$ o fibrare local trivială de varietăți complexe cu F compactă. Fie W o fibrare olomorfă peste B şi p^*W fibrarea indusă de W pe E.

Fie V un spațiu vectorial complex de dimensiune n și $V^{(p)} = V \otimes V \otimes \ldots \otimes V$ (de p ori). Să considerăm pe F, E, B complexele eliptice:

$$A_F = (A_F^i, \bar\partial \otimes 1),\ A_F^i = A_F^{0,i} \oplus (\Lambda_F^{1,i-1} \otimes V^{(1)}) \oplus \ldots \oplus (\Lambda_F^{i,0} \otimes V^{(i)}),$$

$$A_E = (A_E^j, \bar\partial \otimes 1),\ A_E^j = (\Lambda_E^{0,j} \otimes p^*W) \oplus (\Lambda_E^{1,j-1} \otimes p^*W \otimes V^{(1)}) \oplus \ldots$$

$$\ldots \oplus (\Lambda_E^{j,0} \otimes p^*W \otimes V^{(j)}),$$

$$A_B = (A_B^K, \bar\partial \otimes 1),\ A_B^k = (\Lambda_B^{0,k} \otimes W) \oplus (\Lambda_B^{1,k-1} \otimes W \otimes V^{(1)}) \oplus \ldots$$

$$\ldots \oplus (\Lambda_B^{k,0} \otimes W \otimes V^{(k)}).$$

Se verifică ușor că obținem un complex eliptic fibrat.

Condiția de local constanță a funcțiilor $\psi''^{q}_{\alpha\beta,x}$ se îndeplinește în următoarele două cazuri:

(i) $E = F \times B$ (în acest caz $\psi''^{q}_{\alpha\beta,x} \equiv 1$).

(ii) F este Kählerian (în acest caz coomologia Dolbeault se identifică cu cea de Rham și are loc axioma omotopiei de la (a)).

Aplicînd 5.3 acestui complex eliptic în ipoteza de local constanță a funcțiilor $\psi''^{q}_{\alpha\beta,x}$ găsim un șir spectral $E_r^{p,q} \Rightarrow \bigoplus_i (H^{i,p+q-i}(E, p^*W) \otimes V^{(i)})$ astfel că

$$E_2^{p,q} = \bigoplus_{i,j} H^{i,p-i}(B, W \otimes H^{j,q-j}(F)) \otimes V^{(i+j)}.$$

Pentru $V = C$, acesta este șirul spectral al lui Borel, vezi [6].

(c) Fie X^m o varietate riemanniană orientată compactă. După 4.9 sînt definiți operatorii $* : \Lambda^p \to \Lambda^{m-p}$ și

$\alpha : \Lambda^p \to \Lambda^{m-p}$ astfel că:

$$\alpha = \begin{cases} i^{p(p+1)-\frac{m}{2}} * , & m \text{ par} \\ i^{p(p+1)-\frac{m-3}{2}} *, & m \text{ impar} \end{cases}$$

$*$ și α se extind natural la aplicații $* : C^\infty(\Lambda^p) \to C^\infty(\Lambda^{m-p})$, $\alpha : C^\infty(\Lambda^p) \to C^\infty(\Lambda^{m-p})$. Avem: $\alpha^2 = 1$, $\alpha d = d^*\alpha$, $\alpha d^* = d\alpha$, $\alpha^* = \alpha$. Avem $\Lambda = \oplus \Lambda^i = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$, unde

$$\alpha | \Lambda^+ = 1,\ \alpha | \Lambda^- = -1 \text{ și } i(d - d^*) = D_0 : C^\infty(\Lambda^+) \to C^\infty(\Lambda^-).$$

Să observăm că putem defini o variantă a complexului Hirzebruch astfel: punem

$$\alpha' = \begin{cases} i^{p(p-1)-\frac{m}{2}} *, & m \text{ par} \\ i^{p(p-1)-\frac{m-1}{2}} *, & m \text{ impar.} \end{cases}$$

$\alpha' : \Lambda^p \to \Lambda^{m-p}$ și $\alpha' : C^\infty(\Lambda^p) \to C^\infty(\Lambda^{m-p})$. Atunci avem:

$$\alpha'^2 = 1,\ \alpha' d = -d^*\alpha',\ \alpha' d^* = -d\alpha',\ \alpha'^* = \alpha' \text{ deci } \alpha'(d + d^*) = -(d + d^*)\alpha'.$$ Dacă punem $\Lambda = \otimes \Lambda^i = \Lambda^{+\prime} \otimes \Lambda^{-1}$, unde

$$\alpha' | \Lambda^{+\prime} = 1,\ \alpha' | \Lambda^{-1} = -1 \text{ avem } D_0' = d + d^* : C^\infty(\Lambda^{+\prime}) \to C^\infty(\Lambda^{-1}).$$

Dacă refacem calculele de la 4.9 găsim că şi index $(D'_0) = \tau\,(X)$.

Fie Y^m o a doua varietate riemanniană orientată compactă. Pe Y sînt de asemenea definiţi operatorii α, α', D_0, D'_0. Să considerăm acum produsul direct $X \times Y$ cu structura riemanniană şi orientarea produs. E uşor de verificat că pe $X \times Y$ avem:

$$\ast\,(s \otimes t) = (-1)^{(m-p)q}\,(\ast\, s) \otimes (\ast\, t) \text{ pentru } s \in \Lambda^p\,(X),\ t \in \Lambda^q\,(Y).$$

De aici rezultă uşor că

$$\alpha\,(s \otimes t) = \begin{cases} \alpha\,(s) \otimes \alpha\,(t), \text{ dacă dim } X \text{ este par.} \\ \alpha\,(s) \otimes \alpha'(t), \text{ dacă dim } X \text{ este impar.} \end{cases}$$

Rezultă

$$\Lambda^+\,(X \times Y) = \begin{cases} \Lambda^+\,(X) \otimes \Lambda^+\,(Y) \oplus \Lambda^-\,(X) \otimes \Lambda^-\,(Y), \text{ dim } X = \text{par} \\ \Lambda^+(X) \otimes \Lambda^{+\prime}\,(Y) \oplus \Lambda^-\,(X) \otimes \Lambda^{-\prime}(Y), \text{ dim } X = \text{impar} \end{cases}$$

$$\Lambda^-\,(X + Y) = \begin{cases} \Lambda^+\,(X) \otimes \Lambda^-\,(Y) \oplus \Lambda^-\,(X) \otimes \Lambda^+\,(Y), \text{ dim } X = \text{par} \\ \Lambda^+\,(X) \otimes \Lambda^{-\prime}\,(Y) \oplus \Lambda^-\,(X) \otimes \Lambda^{+\prime}\,(Y), \text{ dim } X = \text{impar.} \end{cases}$$

Să considerăm următorul complex eliptic pe $X \times Y$

$$C^\infty\,(\Lambda^+\,(X) \otimes \Lambda^+\,(Y)) \xrightarrow{D_0 \otimes 1 + 1 \otimes D_0} C^\infty\,(\Lambda^-\,(X) \otimes \Lambda^+\,(Y) \oplus$$

$$\oplus\, \Lambda^+\,(X) \otimes \Lambda^-\,(Y)) \xrightarrow{D_0 \otimes 1 - 1 \otimes D_0} C^\infty\,(\Lambda^-\,(X) \otimes \Lambda^-\,(Y)), \text{ dim } X = \text{par}\ (^*)$$

$$C^\infty\,(\Lambda^+\,(X) \otimes \Lambda^{+\prime}\,(Y)) \xrightarrow{D_0 \otimes 1 + 1 \otimes D'_0} C^\infty\,(\Lambda^-\,(X) \otimes \Lambda^{+\prime}(Y) \oplus$$

$$\oplus\, \Lambda^+\,(X) \otimes \Lambda^{-\prime}\,(Y)) \xrightarrow{D_0 \otimes 1 - 1 \otimes D'_0} C^\infty\,(\Lambda^-\,(X) \otimes \Lambda^{-\prime}\,(Y)), \text{ dim } X \text{ impar}$$

(acesta e produsul tensorial al complexelor $D_0\,(X)$ şi $D_0\,(Y)$, dacă dim X e par respectiv $D_0\,(X)$ şi $D'_0\,(Y)$ dacă dim X e impar).

Pe de altă parte, pe $X \times Y$ avem operatorul D_0 asociat lui α şi care satisface evident

$$D_0\,(s \otimes t) = D_0\, s \otimes t + \omega\, s \otimes D_0\, t,$$

unde

$$\omega : C^\infty\, \Lambda^p\,(X) \to C^\infty\, \Lambda^p\, X$$

este dat de $(-1)^p$. Cu D_0 se poate construi complexul eliptic (**) care are aceleaşi fibrări ca şi (*) iar operatorii diferenţiali sînt D_0 (al lui $X \times Y$).

Este uşor de văzut că complexele (*) şi (**) au aceeaşi coomologie (e suficient să exprimăm coomologia în termeni de forme armonice). Pe de altă parte, index (**) $= \tau\,(X \times Y)$ după 4.9.

Acum vom face o globalizare a situaţiei descrise.

Fie $G \to E \to B$ o fibrare principală de grup discret G peste B riemannian, orientat, compact. Presupunem că se dă o acţiune izometrică *orientată a lui G pe varietatea riemanniană, orientată compactă F.* Construim $E \underset{G}{\times} F = E \times F/\sim$, unde $(e, f) \sim (eg, g^{-1} f)$, acesta este înzestrat cu structura riemanniană și orientarea local produs între B și F. Pe $E \underset{G}{\times} F$ se poate considera în mod natural un complex eliptic care local este (*) pentru $X = B$ și $Y = F$; *acesta va fi complex eliptic fibrat* între complexul (D_0) al lui X și complexul (D_0) sau (D_0') al lui F și are același index ca și complexul (D_0) al lui $E \underset{G}{\times} F$.

(d) Fie A_E un complex eliptic peste E compact: presupunem că grupul finit G operează fără puncte fixe pe A_E și pe E în mod compatibil cu operatorii diferențiali și cu proiecțiile. Atunci pe $B = E/G$ obținem un complex eliptic factor: $(A_E)/G$ obținut din A_E identificînd fibrele care se corespund prin acțiunea lui G.

Invers, dacă pe B se dă o acoperire regulată $E \to B$ de grup finit G și un complex eliptic A_B, atunci putem ridica acest complex pe E și obținem un complex eliptic A_E pe care acționează fără puncte fixe grupul G. Aceste două operații sînt una inversa celeilalte.

Unei asemenea situații îi asociem complexul eliptic fibrat:

$$(G \to E \to B,\ A_G = \{C^\infty(1) \to 0 \to 0 \to \dots\},\ A_E,\ A_{E/G} = (A_E)/G\}.$$

Observăm că A_G e eliptic datorită convenției 4.2 (G este O-dimensional). Avem $H^0(A_G) = \mathbf{C}^G$, $H^i(A_G) = 0$, $i > 0$. Șirul spectral de la 5.3 arată că

$$E_2^{p,q} = 0, \text{ pentru } q > 0,\ E_2^{p,0} = H^p(A_B \underset{B}{\otimes} \mathbf{H}^0(A_G)).$$

Rezultă că

$$H^p(A_E) = E_\infty^{p,0} = E_2^{p,0} = H^p(A_B \underset{B}{\otimes} \mathbf{H}^0(A_G)).$$

(e) Dacă se dă A_F peste F, A_B peste B, putem pune $A_E = A_F \otimes A_B$ peste $E = F \times B$. Dacă A_F, A_B sînt eliptice, A_E e de asemenea eliptic și avem un complex eliptic fibrat de forma cea mai simplă (produs tensorial). În acest caz funcțiile $\psi''^{q}_{\alpha\beta,x}$ de la 5.2 sînt identitatea; aplicînd 5.3 regăsim formula lui Künneth 4.5(e) pentru B nu neapărat compact.

5.5. Reamintim că fibrarea vectorială $H \to B$ este *plată* dacă există un sistem de trivializări pentru H cu funcții de trecere local constante. Vom presupune întotdeauna că se dă un astfel de sistem de trivializări maximal. În acest caz, pentru orice operator diferențial $L: C^\infty(H_1) \to C^\infty(H_2)$, H_1, H_2 fiind fibrări peste B, putem construi un operator $L \underset{B}{\otimes} 1: C^\infty(H_1 \underset{B}{\otimes} H) \to C^\infty(H_2 \underset{B}{\otimes} H)$ definit de $(L \otimes 1)(S \otimes t) = LS \otimes t$, dacă $t \in C^\infty(H)$ este o secțiune „local constantă" (această noțiune are sens deoarece H e plată). De exemplu operatorul $\widetilde{D}$ de la 5.2 este construit în acest mod. Este clar că simbolul lui $L \otimes 1$ este $\sigma(L, \xi) \otimes 1$.

Dacă H e plată peste B iar A_B e un complex eliptic peste B, atunci

$$A_B \otimes H:\ C^\infty(A_B^0 \otimes H) \xrightarrow{D\otimes 1} C^\infty(A_B^1 \otimes H) \xrightarrow{D\otimes 1} \dots$$

este evident eliptic. *Arătăm că index* $(A_B \underset{B}{\otimes} H) =$ *index* $A_B \cdot$ *dim* H.

În adevăr, în anexă se arată că clasele Chern complexe ale lui H sînt nule. După teorema de periodicitate a lui Bott (vezi [1]) rezultă că H este un element de torsiune în grupul Grothendieck al lui B. Rezultă că există m, n naturale astfel că

$$mH \oplus n\,1 = (m \dim H + n)\,1$$

(1 desemnînd fibrarea cu linii trivială peste B).

Considerăm complexele eliptice :

$$(A_B \underset{B}{\otimes} H) \oplus (A_B \underset{B}{\otimes} H) \oplus \ldots \oplus (A_B \underset{B}{\otimes} H) \oplus (A_B \otimes n\,1)$$

$$A_B \underset{B}{\otimes} ((m \dim H + n)\,1).$$

Ele sînt formate din aceleași fibrări, operatorii lor diferențiali nu coincid neapărat deoarece structura plată a lui $mH \oplus n\,1$ nu coincide neapărat cu structura plată (canonică) a lui $(m \dim H + n)\,1$. Este însă evident că șirul simbolurilor este același pentru cele 2 complexe. Acum afirmația noastră rezultă din 4.6.

5.6. TEOREMĂ. *Fie $\mathcal{C}$ un complex eliptic fibrat satisfăcînd condițiile de la 5.3 și astfel că E este compact.*

Atunci index $A_E =$ index $A_B \cdot$ index A_F.

Demonstrație. Aplicăm teorema 5.3. Un raționament obișnuit de șir spectral arată că

$$\text{index } A_E = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \dim E_\infty^{p,q} = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \dim E_2^{p,q} =$$

$$= \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \dim H^p (A_B \underset{B}{\otimes} \mathbf{H}^q (A_F)) = \sum_q (-1)^q \text{ index } (A_B \underset{B}{\otimes} \mathbf{H}^q (A_F)).$$

Folosind 5.5. și faptul că $\mathbf{H}^q(A_F)$ sînt plate, rezultă

$$\text{index } A_E = \sum_q (-1)^q \text{ index } A_B \cdot \dim \mathbf{H}^q (A_F) =$$

$$= \text{index } A_B \cdot \Big(\sum_q (-1)^q \dim H^q (A_F)\Big) = \text{index } A_B \cdot \text{index } A_F.$$

5.7. Vom aplica 5.6 la complexele eliptice fibrate de la 5.4. În notațiile de la 5.4 (a) și 4.7 rezultă $\chi(E) = \chi(B) \cdot \chi(F)$ (B compact). Această relație se datorește lui Serre vezi [14].

În notațiile de la 5.4 (b) și 4.8 rezultă (punînd $\dim V = n$) :

$$\sum_{p,q} (-1)^{p+q} \dim H^{p,q} (E, p^* W) \cdot n^p =$$

$$= \sum_{p',q'} (-1)^{p'+q'} \dim H^{p',q'} (B, W)\, n^{p'} \cdot$$

$$\cdot \sum_{p'',q''} (-1)^{p''+q''} \dim H^{p'',q''} (F)\, n^{p''}$$

sau

$$\chi_{-n}(E, p^* W) = \chi_{-n}(B, W)\, \chi_{-n}(F).$$

Cum această relație e adevărată pentru o infinitate de valori ale lui n și cum χ_y sînt polinoame cu coeficienți întregi, rezultă formula :

$$\chi_y(E, p^* W) = \chi_y(B, W)\, \chi_y(F).$$

În ipotezele suplimentare : F conex, $\mathbf{H}^{p,q}(F)$ fibrări triviale, această formulă este dată de A. Borel în [6].

În notațiile de la 5.5 (b) și 4.9 rezultă

$$\tau(E \underset{G}{\times} F) = \tau(B)\, \tau(F) \quad (\tau = \text{signatura Hirzebruch}).$$

În cazul cînd G este finit, sau $\mathbf{H}^q(F)$ sînt fibrări triviale, această formulă rezultă din [5].

În notațiile de la 5.4 (d) rezultă : index A_E = ord $G \cdot$ index $A_{E/G}$.

De asemenea se vede ușor că $H^i(A_{E/G}) \to H^i(A_{E/G} \otimes \mathbf{H}^0(A_G)) = H^i(A_E)$ indusă de $f : C \to C^G$, $f(v) = (v, v, \ldots, v)$ este injecție.

Imaginea lui $H^i(A_{E/G})$ se identifică cu mulțimea elementelor din $H^i(A_{E/G} \otimes \mathbf{H}^0(A_G))$ invariante la acțiunea G.

Acum putem completa afirmațiile de la 4.7 care au rămas nedemonstrate :

— Dacă varietatea compactă conexă de dimensiune n are $\beta_n = 1$, atunci X e orientabilă. În adevăr, să presupunem contrariul și fie $\tilde{X}$ acoperirea orientată a lui X (acesta va fi conex, deci $\beta_n(X) = 1$).

Cum $H^n(X) \to H^n(\tilde{X})$ e injecție și cum aceste spații au dimensiune 1, rezultă că $H^n(X) \xrightarrow{\sim} H^n(\tilde{X})$. Fie γ involuția canonică a lui $\tilde{X}$, astfel că $X = \tilde{X}/\gamma$ și să considerăm pe $\tilde{X}$ o metrică invariantă la γ. Fie $\omega_{\tilde{X}} \in C^\infty(\Lambda^n T^* X)$ elementul de volum al lui $\tilde{X}$. E ușor de verificat că $\Box\, \omega_{\tilde{X}} = 0$. Deoarece $H^n(X) \xrightarrow{\sim} H^n(\tilde{X})$ avem $\gamma^*(\omega_{\tilde{X}}) = \omega_{\tilde{X}}$ (elementele din imaginea lui $H^n(X)$ sînt invariante la γ^*). Rezultă că $\omega_{\tilde{X}}$ induce o formă de grad n peste tot nenulă pe X ; deci X e orientabil.

— Dacă X e compact și de dimensiune impară, atunci $\chi(X) = 0$. În adevăr, dacă X e orientabil, aceasta a fost demonstrată la 4.7. Dacă X nu e orientabil, avem $0 = \chi(\tilde{X}) = 2\,\chi(X)$, deci din nou $\chi(X) = 0$.

5.8. În notațiile de la 5.4 (d), arătam că dacă $g \in G$ este diferit de elementul neutru $e \in G$, atunci automorfismul $T_g : A_E \to A_E$ dat de $v \to v \cdot g$ induce $T_g^i : H^i(A_E) \to H^i(A_E)$ astfel ca

$$\sum (-1)^i \operatorname{tr} T_g^i = 0.$$

Restrîngîndu-ne la subgrupul lui G generat de g putem presupune că G este ciclic de ordinul n și g este un generator al său.

După 5.4. (d), T_g^i se identifică cu

$$T_g^i : H^i(A_B \underset{B}{\otimes} \mathbf{H}^0(A_G)) \to H^i(A_B \underset{B}{\otimes} \mathbf{H}^0(A_G)),$$

indusă de translația $(v_h)_{h \in G} \cdot g = (v_{hg})_{h \in G}$ în C^G.

Dar $C^G = C \cdot e_0 \oplus C \cdot e_1 \oplus \dots \oplus C \cdot e_{n-1}$,

unde $e_0 = (1, 1, \dots, 1)$; $e_1 = (1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1})$,

$$e_2 = (1, \zeta^2, \zeta^4, \dots, \zeta^{2(n-1)}), \dots, e_{n-1} = (1, \zeta^{n-1}, \zeta^{2(n-1)}, \dots, \zeta^{(n-1)(n-1)})$$

$\zeta = \exp(2\pi i/n)$. În adevăr, determinantul componentelor lui $e_1, \dots, e_n$ este un determinant Vandermonde egal cu

$$\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n-1} (\zeta^i - \zeta^j) \neq 0.$$

Este evident că

$$e_0 \cdot g = e_0,\ e_1 \cdot g = \zeta e_1, \dots, e_{n-1} \cdot g = \zeta^{n-1} e_{n-1}.$$

Deci subspațiile $Ce_0, \dots, Ce_{n-1}$ sînt proprii pentru $\cdot\, g$.

Deoarece $\mathbf{H}^0(A_G)$ este fibrarea asociată fibrării principale $E \to E/G$ și reprezentării regulate a lui G în C^G, rezultă că $\mathbf{H}^0(A_G)$ se descompune în sumă directă de fibrări de dimensiune 1 (de asemenea plate): $H^0_0 \oplus \dots \oplus H^0_{n-1} = \mathbf{H}^0(A_G)$. Alegem metrici pe B, A_B, $\mathbf{H}^0 A_G$, astfel ca $H^0_0, \dots, H^0_{n-1}$ să fie ortogonale 2 cîte 2. Este ușor de văzut că (identificînd clasele de coomologie cu secțiuni armonice) avem

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} T^i_g = \dim H^i(A_B \otimes H^0_0) + \dim H^i(A_B \otimes H^0_1)\, \zeta + \dots + \\ + \dim H^i(A_B \otimes H^0_{n-1})\, \zeta^{n-1}. \end{aligned}$$

De aici rezultă (folosind 5.7)

$$\begin{aligned} \sum (-1)^i \operatorname{tr} T^i_p = \operatorname{index}(A_B \otimes H^0_0) + \operatorname{index}(A_B \otimes H^0_1)\, \zeta + \dots \\ \dots + \operatorname{index}(A_B \otimes H^0_{n-1})\, \zeta^{n-1} = \operatorname{index} A_B (1 + \zeta + \dots + \zeta^{n-1}) = 0 \end{aligned}$$

și afirmația noastră e demonstrată. O teoremă mai generală dar cu o demonstrație mult mai complicată a fost dată de Atiyah — Bott, vezi [2].

5.9. În notațiile de la 5.4 (d) fie R_i reprezentarea lui G indusă în $H^i(A_E)$ și δ reprezentarea regulată a lui G (în C^G). *Avem relația:*

$$\sum (-1)^i R_i = \frac{\operatorname{index}(A_E)}{\operatorname{ordin} G} \cdot \delta$$

(în inelul reprezentărilor $R(G)$ al lui G).

În adevăr, e suficient să verificăm egalitatea caracterelor celor doi membri; pentru $g \neq e$, aceasta rezultă din 5.8, iar pentru $g = e$, aceasta e evidentă.

5.10. Vom da două aplicații ale rezultatului de la 5.9.

(a) *Orice varietate compactă neorientabilă X de dimensiune* 3 *are grupul fundamental infinit.*

În adevăr, în caz contrar acoperirea universală $\overline{X}$ a lui X ar fi compactă, deci ar fi o sferă omotopică. Fie $G = \pi_1(X)$; dacă R_0, R_3 sînt reprezentările lui G în $H^0(\overline{X})$, $H^3(\overline{X})$ (coomologie de Rham) avem $H^1(\overline{X}) = H^2(\overline{X}) = 0$. După 5.9 avem $R_0 - R_3 = \frac{\chi(\overline{X})}{\text{ordin } G} \cdot \delta = 0$. Cum $R_0 = 1$, avem și $R_3 = 1$, deci reprezentarea lui G în $H^3(\overline{X})$ e trivială și deci acțiunea lui G pe $\overline{X}$ păstrează orientarea lui $\overline{X}$. Rezultă că $X = \overline{X}/G$ e orientabil, contrar presupunerii.

(b) *Există o varietate de dimensiune 4k care e bord neorientat dar nu admite nici o involuție fără puncte fixe.*

Fie $V^{4k} = P^{2k}(C) \# P^{2k}(C)$ suma conexă a două exemplare de spații proiective complexe, orientate astfel ca $\tau(P^{2k}(C)) = 1$.

Se poate arăta că signatura e aditică față de suma conexă, deci $\tau(V^{4k}) = 2$. V^{4k} este evident un bord neorientat. Să presupunem că V^{4k} ar admite o involuție σ fără puncte fixe.

Dacă σ schimbă orientarea lui V^{4k}, ar rezulta că în inelul de cobordism orientat am avea $V^{4k} = - V^{4k}$ sau $4P^{2k}(C) = 0$; dar se știe că $P^{2k}(C)$ este de ordin infinit.

Dacă σ păstrează orientarea lui V^{4k}, alegem o metrică riemanniană pe V^{4k} invariantă la σ și aplicăm 5.9 complexelor Hirzebruch și de Rham asociate.

Fie R_+, R_- reprezentările lui Z_2 în $H^{2k}_+(V^{4k}) = H^{2k}(V^{4k})$, respectiv în $H^{2k}(V^{4k}) = 0$ și R_i reprezentările lui Z_2 în $H^i(V^{4k})$.

Avem $R_+ = R_{2k}$, $R_- = 0$. Din dualitatea Poincaré rezultă ușor $R_i = R_{4k-i}$. Avem:

$$R_{2k} = R_+ = \frac{\tau(V^{4k})}{2}\delta = \delta,\ 1 + 2R_2 + \ldots + 2R_{2k-2} + R_{2k} + 1 =$$

$$= \frac{\chi(V^{4k})}{2}\delta = 2k\delta.$$

Rezultă $2(1 + R_2 + \ldots + R_{2k-2}) = (2k - 1)\delta$. Dar reprezentarea regulată δ nu se poate divide cu 2 și astfel afirmația noastră e demonstrată.

Să observăm că dacă X admite o involuție fără puncte fixe σ, atunci X este un bord neorientat. În adevăr, putem pune $Y = X \times [0, 1]/\sim$, unde $(x, t) \sim (\sigma x, 1 - t)$ și avem $\partial Y = X$.

ANEXĂ

TEORIA LUI CHERN-WEIL A CLASELOR CARACTERISTICE

Fie $E \to X$ o fibrare vectorială (complexă) peste o varietate (nu neapărat compactă) X. Să notăm $H^i(X)$ spațiul de coomologie de Rham (cu coeficienți complecși) al lui X.

Vom asocia lui E nişte clase de coomologie (numite clase Chern):
(a) $c_i(E) \in H^{2i}(X)$, $c_0(E) = 1$, $c_i(E) = 0$ pentru $i > n$, astfel că:
(b) dacă $f: Y \to X$ este diferenţiabilă, atunci $c_i(f^* E) = f^* c_i(E)$;
(c) dacă E, F sînt fibrări peste X, avem $c_i(E \oplus F) = \sum\limits_{j+k=i} c_j(E)\, c_k(F)$;

(d) dacă E_1^* este fibrarea cu linii duală fibrării canonice peste $P^1 C$, avem $c_1(E_1^*) =$ generatorul canonic al lui $H^2 P^1(C)$.

Înainte de a arăta existenţa acestor clase vom face cîteva:

Preliminarii. Vom studia determinanţi ai unor matrici care au ca elemente forme exterioare: aceşti determinanţi nu vor avea proprietăţile uzuale ale determinanţilor din cauza caracterului necomutativ al algebrei formelor exterioare.

Fie $A = A^+ \oplus A^-$ o algebră Z_2-graduată, (adică $A^+ A^+ \subset A^+$, $A^- A^- \subset A^+, A^+ A^- \subset A^-, A^- A^+ \subset A^-$) complexă, anticomutativă şi $M_n(A)$ inelul matricilor $n \times n$ peste A cu înmulţirea $(a_{ij}) \cdot (a'_{ij}) = (a''_{ij})$, $a''_{ij} = \sum a_{ih} a'_{hj}$.

Definim $\det : M_n(A) \to A$ prin

$$\det(a_{ij}) = \sum_{\sigma \in \sigma_n} \operatorname{sign} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Egalitatea $\det((a_{ij})(a'_{ij})) = \det(a_{ij}) \cdot \det(a'_{ij})$ nu este neapărat adevărată decît dacă a_{ij}, a'_{ij} sînt în A^+. Avem totuşi:

(1) Dacă $a_{ij}, a'_{ij} \in A^+$ şi $b_{ij} \in A$, $t \in R$, atunci

$$\det((a_{ij})(a'_{ij} + t b_{ij})) - \det((a'_{ij} + t b_{ij})(a_{ij})) = t^2 \omega(t),$$

unde $\omega(t)$ e un polinom în t cu coeficienţi în A.

Fie $\alpha = (a_{ij})$, $\beta = (b_{ij})$ cu $a_{ij} \in A^+$, $b_{ij} \in A^-$. Punem:

$$P(\alpha, \beta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det(a_{ij} + t b_{ij})\Big|_{t=0} = \det\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots \\ a_{21} & a_{22} \cdots \\ a_{31} & a_{32} \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots \\ b_{21} & b_{22} \cdots \\ a_{31} & a_{32} \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} + \cdots$$

Avem

(2) $$P(\alpha\gamma, \beta\gamma) = P(\gamma\alpha, \gamma\beta) \text{ dacă } \gamma = (c_{ij}),\ c_{ij} \in A^+.$$

În adevăr, folosind (1) avem

$$P(\alpha\gamma, \beta\gamma) - P(\gamma\alpha, \gamma\beta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((a_{ij} + t b_{ij})(c_{ij}))\Big|_{t=0} -$$

$$- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((c_{ij})(a_{ij} + t b_{ij}))\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2 \omega(t))\Big|_{t=0} = 0.$$

Luînd $\alpha = 1$ obţinem :

$$P(\gamma,\ \beta\gamma) = P(\gamma,\ \gamma\beta). \tag{3}$$

Să presupunem acum că $a_{ij} \in A^+$, $b_{ij} \in A^-$, $c_{ij} \in A^-$.

$$\text{Fie } I = -\sum_{i<j} \det \begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum (a_{ih}b_{hl} - b_{ih}a_{hl}) \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{jl} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{i} \det \begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum (c_{ih}b_{hl} + b_{ih}c_{hl}) \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{i<j} \det \begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{il} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum (a_{jh}b_{hl} - b_{jh}a_{hl}) \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{pmatrix},$$

unde pe *liniile* necompletate figurează a_{kl}. Atunci

$$I = 0. \tag{4}$$

În adevăr, putem presupune că A este algebra Z_2-graduată anticomutativă *liberă* cu generatorii : $a_{ij} \in A^+$; b_{ij}, c_{ij}, u, $v \in A^-$.

Avem

$$I\,u\,v = \sum_{i<j} \det \begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum (a_{ih}b'_{hl} - b'_{ih}a_{hl}) \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c'_{jl} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{i} \det \begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum (c'_{ih}b'_{hl} - b'_{ih}c'_{hl}) \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{i<j} \det \begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c'_{il} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum (a_{jh}b'_{hl} - b'_{jh}a_{hl}) \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{pmatrix} +$$

unde am notat

$$b'_{ij} = b_{ij}\, u,\ c'_{ij} = c_{ij}\, v.$$

Să considerăm identitatea

$$\sum_i \det \begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum (a_{ih} b'_{hl} - b'_{ih} a_{hl}) \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{pmatrix} = 0$$

(pe liniile necompletate : a_{kl}) obținută din (3) pentru $\gamma = (a_{ij})$, $\beta = (b'_{ij})$, și să-i aplicăm operatorul de derivare

$$\sum c'_{ij} \frac{\partial}{\partial a_{ij}} .$$

Este ușor de văzut că rezultatul este $Iuv = 0$ și deci $I = 0$.

Existența claselor Chern. O conexiune pentru fibrarea $E \rightarrow X$ este un operator diferențial $D : C^\infty(E) \rightarrow C^\infty (T^*(X) \underset{R}{\otimes} E)$ astfel că $D(fs) = df \cdot s + f \cdot Ds$ pentru $f \in C^\infty(X, C)$, $s \in C^\infty(E)$.

Orice fibrare E admite o conexiune, după cum se vede punînd local $s = (s_1, \ldots, s_n)$, $Ds = (ds_1, \ldots, ds_n)$ și folosind o partiție a unității.

Fie $U \subset X$ deschis peste care se dau secțiunile liniar independente $s_1, \ldots, s_n$ ale lui E.

Avem $Ds_i = \sum_j \theta_{ij} s_j$, unde θ_{ij} sînt 1-forme pe U.

Matricial putem scrie $Ds = \theta s$, $\theta = (\theta_{ij}) \in A^-$ (punem A = algebra formelor exterioare complexe pe U, A^+ = forme de grad par, A^- = forme de grad impar).

Dacă $s'_i = \sum_j A_{ij} s_j$ formează un alt reper de secțiuni peste U, avem $A_{ij} \in C^\infty(U, C)$, $\det(A_{ij}) \neq 0$. Matricial avem $s' = As$, deci

$$Ds' = \theta' s' = \theta' As = dA \cdot s + A\,\theta s$$

sau

$$\theta' = dA \cdot A^{-1} + A \cdot \theta \cdot A^{-1}. \tag{5}$$

Notăm $K = d\theta - \theta \wedge \theta$ sau $K_{ij} = d\theta_{ij} - \sum \theta_{i\alpha} \wedge \theta_{\alpha j}$.

Atunci

$$d\theta' = - dA \wedge d(A^-) + dA \wedge \theta A^{-1} - A\theta \wedge d(A^{-1}) + A(d\theta) A^{-1}$$

$$\theta' \wedge \theta' = dA \cdot A^{-1} \wedge dA \cdot A^{-1} + dA \cdot A^{-1} \wedge A\theta A^{-1} +$$

$$+ A\theta A^{-1} \wedge dA \cdot A^{-1} + A\theta A^{-1} \wedge A\theta A^{-1}.$$

Folosind relaţia

$$dA \cdot A^{-1} + A \cdot d(A^{-1}) = 0$$

obţinem :

$$K' = d\theta' - \theta' \wedge \theta' = A(d\theta - \theta \wedge \theta)A^{-1} = AKA^{-1}. \tag{6}$$

Această formulă arată că K defineşte o secţiune definită global $K \in C^\infty(\Lambda^2 T^*(X) \otimes \mathrm{Hom}(E, E))$ numită *curbura* conexiunii D.

Definim forma Chern $c(D) \in A$ prin

$$c(D)\Big|_U = \det\left(\delta_{jl} + \frac{i}{2\pi} K_{jl}\right).$$

Din formula (6) şi din invarianţa determinantului faţă de conjugare rezultă că $c(D)$ este corect definită. Punem $c(D) = 1 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n$, unde c_i este componenta de grad $2i$ a lui $c(D)$.

Avem identitatea lui *Bianchi* :

$$dK = \theta \wedge K - K \wedge \theta. \tag{7}$$

În adevăr :

$$dK = d(d\theta - \theta \wedge \theta) = -d\theta \wedge \theta + \theta \wedge d\theta,\ \theta \wedge K - K \wedge \theta =$$

$$= (\theta \wedge d\theta - \theta \wedge \theta \wedge \theta) - (d\theta \wedge \theta - \theta \wedge \theta \wedge \theta) = \theta \wedge d\theta - d\theta \wedge \theta.$$

Arătăm că c_i sînt *forme închise*, adică :

$$d\,c(D) = 0. \tag{8}$$

În adevăr, să punem $\overline{K}_{ij} = \delta_{ij} + \frac{i}{2\pi} K_{ij}$, atunci avem încă $d\overline{K} = \theta \wedge \overline{K} - \overline{K} \wedge \theta$.

$$dc(D) = P(\overline{K}, d\overline{K}) = P(\overline{K}, \theta \wedge \overline{K}) - P(\overline{K}, K \wedge \theta) = 0$$

după (3).

Arătăm acum că, dacă D_t e o familie de conexiuni pe E, depinzînd C^∞ de parametrul real t, atunci

$$c(D_a) - c(D_b) \text{ este exactă pentru orice } a, b \in R. \tag{9}$$

În adevăr, punem $\dot{D}_t(s) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(D_t s)$; avem

$$\dot{D}_t \in C^\infty(T^*(X) \otimes \mathrm{Hom}(E, E));$$

în adevăr

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(D_t fs) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(fD_t s + \mathrm{d}f\cdot s) = f\dot{D}_t(s) \text{ pentru } f \in C^\infty(X, C).$$

Avem

$$\dot{D}_t s = \dot{\theta}_t s.$$

Punem

$$\psi_t = P(\overline{K}_t, \dot{\theta}_t) = \det\begin{pmatrix} \dot{\theta}_{11} & \dot{\theta}_{12} \dots \\ \overline{K}_{11} & \overline{K}_{12} \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \overline{K}_{11} & \overline{K}_{12} \dots \\ \dot{\theta}_{21} & \dot{\theta}_{22} \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} + \dots \in A^-\ (\text{pe } U).$$

La o schimbare de reper avem:

$$\overline{K}_t' = A\overline{K}_t A^{-1}, \qquad \dot{\theta}_t' = A\dot{\theta}_t A^{-1} \quad (\text{conform } (5)),$$

deci

$$\psi_t' = P(A\overline{K}_t A^{-1}, \quad A\dot{\theta}_t A^{-1}) = P(\overline{K}_t, \dot{\theta}_t) = \psi_t$$

(am folosit (2)). Rezultă că ψ_t sînt forme global definite pe X.

Avem

$$\mathrm{d}\psi_t = -\sum_{i<j} \det\begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ \Sigma\, \overline{K}_{ih} \wedge \theta_{hl} - \theta_{ih} \wedge \overline{K}_{hl}) \dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dot{\theta}_{jl} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{pmatrix} + \sum_i \det\begin{pmatrix} \dots\dots \\ \mathrm{d}\dot{\theta}_{ii} \dots \\ \dots\dots \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{i<j} \det\begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ \dot{\theta}_{il} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \Sigma(\overline{K}_{jh} \wedge \theta_{hl} - \theta_{jh} \wedge \overline{K}_{hl}) \dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{pmatrix} \quad (\text{pe liniile necompletate: } \overline{K}_{kl}).$$

Folosind (4) avem

$$d\psi_t = \sum_i \det \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (d\dot{\theta}_{il} - \Sigma(\theta_{ih} \wedge \dot{\theta}_{hl} + \dot{\theta}_{ih} \wedge \theta_{hl}), & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \sum_i \det \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dot{K}_{il} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2\pi}{i} \frac{d}{dt} \det\left(1 + \frac{i}{2\pi} K_{jl}\right).$$

Rezultă

$$c(D_b) - c(D_a) = d\left(\frac{i}{2\pi}\int_a^b \psi_t \, dt\right)$$

și afirmația (9) e demonstrată.

Deoarece pentru două conexiuni D, D' ale lui E există familia de conexiuni $D_t = (1 - t)\, D + tD'$ astfel că $D_0 = D$, $D_1 = D'$, rezultă că clasa de coomologie a lui $c_i(D)$ este independentă de conexiunea D. Notăm această clasă prin $c_i(E)$. Arătăm că clasele $c_e(E), \ldots, c_n(E)$ satisfac (b), (c), (d).

Verificăm (b) : In $f^* E$ avem o conexiune indusă avînd pe $f^{-1}(u)$ aceeași matrice θ ca și conexiunea D a lui E. Rezultă ușor că $c(f^*E) = f^* c(E)$.

Verificăm (c) : Dacă în E și F avem conexiunile D_E, D_F, putem defini o conexiune în $E \oplus F$ prin $D_{E\oplus F}(s_1 \oplus s_2) = D_1 s_1 \oplus D_2 s_2$. Rezultă :

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_E & 0 \\ 0 & \theta_F \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} K_E & 0 \\ 0 & K_F \end{pmatrix},$$

deci

$$c(D_{E\oplus F})|_U = \det\left(1 + \frac{i}{2\pi}\begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix}\right) = \det\left(1 + \frac{i}{2\pi} K_1\right) . \det\left(1 + \frac{i}{2\pi} K_2\right) =$$

$$= c(D_E) \cdot c(D_F).$$

Verificăm (d) : Identificăm $P^1(C)$ cu sfera lui Riemann $S^2 = C \cup \{\infty\}$, și definim fibrarea vectorială complexă de dimensiune 1, olomorfă. $E_1^* \to S^2$ astfel : $E_1^* | S^2 - \{\infty\}$ are secțiunea olomorfă s_0 ; $E_1^* | S^2 - \{0\}$ are secțiunea olomorfă s_∞ ; presupunem că pe $S^2 - \{0, \infty\}$ avem : $s_\infty(x) = z \cdot s_0(z)$. Dacă s e o secțiune definită pe $U \subset S^2 - \{0\}$, definim $f_s \in C^\infty(U, C)$ prin $s(z) = f_s(z)\, s_\infty(z)$ iar dacă s e definită pe $V \subset S^2 - \{\infty\}$, definim $g_s \in C^\infty(V, C)$ prin $s(z) = g_s(z)\, S_0(z)$.

Definim o metrică hermitiană pe E_1^* astfel :

Fie s, t secțiuni definite în vecinătatea lui $z \in S^2 - \{0\}$; punem

$$(s(z),\ t(z)) = \frac{f_s(z)\,\overline{f_t(z)}}{1 + |z|^2};$$

dacă $z \in s^2 - \{\infty\}$ punem

$$(s(z),\ t(z)) = \frac{g_s(z)\,\overline{g_t(z)}}{1 + \left|\dfrac{1}{z}\right|^2}.$$

Aceste două definiții coincid pentru $z \in S^2 - \{0, \infty\}$; în adevăr, în acest caz avem $g_s(z) = \dfrac{f_s(z)}{z}$, $g_t(z) = \dfrac{f_t(z)}{z}$.

Să determinăm o conexiune D pentru E_1^*.

Trebuie să avem $Ds_0 = \theta_0 s_0$, $Ds_\infty = \theta_\infty s_\infty$ de unde $D(z\, s_0) = \mathrm{d}z \cdot s_0 + z\theta_0 \cdot s_0 = \theta_\infty z s_0$ pe $S^2 - \{0, \infty\}$, deci $\theta_\infty - \theta_0 = \dfrac{\mathrm{d}z}{z}\cdot$ Dacă notăm ∂, $\bar\partial$ componentele de tip (1, 0) respectiv (0, 1) ale lui d, atunci $\dfrac{\mathrm{d}z}{z} = \partial \lg |z|^2$ deci putem lua

$$\theta_\infty = \partial \lg \frac{1}{1 + \dfrac{1}{|z|^2}} = \partial \lg |s_\infty|^2,$$

$$\theta_0 = \partial \lg \frac{1}{1 + |z|^2} = \partial \lg |s_0|^2.$$

În $S^2 - \{\infty\}$ avem : $K = \mathrm{d}\theta_0 = \mathrm{d}\left(\dfrac{\bar z \mathrm{d}z}{1 + |z|^2}\right) = \dfrac{\mathrm{d}\bar z \wedge \mathrm{d}z}{(1 + |z|^2)^2}$.

Avem

$$\int_{S^2} c_1(E_1^*) = \frac{i}{2\pi}\int_C \frac{\mathrm{d}\bar z \wedge \mathrm{d}z}{1 + |z|^2} = \frac{i}{2\pi}\int_{R^2} \frac{2i\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1 + x^2 + y^2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\rho\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta}{(1 + \rho^2)^2} = 1.$$

Astfel $c_1(E_1^*)$ este generatorul canonic al lui $H^2(S^2)$ și existența claselor Chern este demonstrată.

Unicitatea claselor Chern. Fie $\{c_i\}$, $\{c_i'\}$ două sisteme de clase definite pentru orice E satisfăcînd (a) — (d). Atunci pentru fibrarea canonică $E_n \to P^n(C)$ avem $i^*(c_1(E_n)) = i^*(c_1'(E_n))$ (conform (c) și (d)), unde $i : P^1(C) \subset P^n(C)$. Cum $i^* : H^2 P^n(C) \approx H^2 P^1(C)$, avem $c_1(E_n) = c_1'(E_n)$.

Dacă $E \to X$ e o fibrare de dimensiune 1, există $f : X \to P^n(C)$ diferențiabilă, astfel că $E = f^*(E_n)$. Rezultă $c_1 = c_1'$ pentru fibrări de dimensiune 1. Fie $E \to X$ o n-fibrare vectorială oarecare, $F(E) \xrightarrow{\pi} X$ fibrarea asociată lui E avînd ca fibră în x, mulțimea sistemelor de n drepte liniar independente din E_x. Atunci $\pi^* E$ este o fibrare peste $F(E)$ care se descompune în sume Whitney de n fibrări de dimensiune 1. Rezultă că pentru $\pi^* E$ clasele c_i, c_i' coincid. Dar $\pi^* : H^1(X) \to H^i(F(E))$ este o injecție, după o teoremă a lui Borel; astfel c_i, c_i' trebuie să coincidă pentru orice E.

Pe de altă parte, în [10] se construiesc în mod topologic clase $c_i(E) \in H^{2i}(X, Z)$. Fie $c_i(E)_c$ imaginile lor în $H^{2i}(X)$; acestea satisfac (a)—(d), deci coincid cu clasele construite aici.

Aplicaţii. Formula Gauss-Bonnet. Fie X^n o varietate compactă aproape complexă, D o conexiune pentru fibrarea tangentă la X (aceasta e o fibrare complexă), K curbura ei. În [10] se arată că $c_n(TX)_c$ coincide cu clasa Euler a lui TX. Dacă notăm cu $\chi(X)$ caracteristica Euler — Poincaré a lui X, rezultă:

$$\int \det(K_{ij}) = (-2\pi i)^n \chi(X).$$

Fibrări plate. Fie $E \to X$ o fibrare plată; atunci există o acoperire (U_i) a lui X şi secţiuni $(s_1^i, \ldots, s_n^i) = s^i$ peste U_i (liniar independente) astfel că trecerea de la s^i la s^j să fie dată de matrici constante. Punem $Ds_\alpha^1 = 0$ şi obţinem o conexiune pentru care $\theta = 0$ în fiecare U_i, deci $K = 0$.

Astfel, *orice fibrare plată are clasele Chern nule.*

Primită la redacţie la 25 mai 1968

Universitatea din Bucureşti
Facultatea de matematică-mecanică,
Str. Academiei nr. 14.

COOMOLOGIA COMPLEXELOR ELIPTICE

ABSTRACT

The paper develops the theory of elliptic complexes over compact manifolds without boundary. In chapter 1 we expose the general theory of elliptic operators in vector bundles (the finiteness theorem, the hypoellipticity theorem, etc.). We avoid the use of pseudodifferential operators, the main tool being the inequality of Friedrichs. In chapter 2 we consider some aspects of the spectral theory for elliptic operator. This theory is used in the chapter 3 concerned with the theory of families of elliptic operators, due to Kodaira and Spencer [7], but the self-adjointness of the operators or their strong elipticity is not supposed. In chapter 4, the theory of harmonic sections in elliptic complexes is developed and the theorems of Hodge, Künneth and Poincaré are proved in this context. The central point of the paper is the chapter 5. Here we introduce the notion of a fibered elliptic complex and prove a theorem on the existence of a spectral sequence for such complexes announced without proof in [9]. As application we obtain a multiplicativity theorem for the index which implies ameliorations for results in [5], [6]. In contrast with [9], here we avoid the use of the Atiyah Singer theorem. As another application we present a Lefschetz-type formula for the free actions of finite groups, announced in [8], which has applications in the study of involutions; the proof of this formula does not use the Atiyah — Bott fixed point formula, as in [8]. In the appendix we expose the Chern-Weil theory of characteristic classes.

BIBLIOGRAFIE

1. ATIYAH M., *Lekții po K-teorii.* Moskva, 1968.
2. ATIYAH M., R. BOTT, *A Lefschetz fixed point formula for elliptic differential operators.* Bull. Amer. Math. Soc., **72**, 245—250, (1966).
3. BERS L., F. JOHN-M. SCHÄCHTER, *Uravnenia s ceastnimi proizvodnimi.* Moskva, 1966.
4. BOTT R., S. S. CHERN, *Hermitian vector bundles. . .*, Acta Math., **114**, 71—112, 1965.
5. CHERN S. S., F. HIRZEBRUCH, J. P. SERRE, *On the index of a fibered manifold.* Proc. Am.Math. Soc., **8**, 587—596 (1957).
6. HIRZEBRUCH F., *Topological methods in algebraic geometry*; Appendix by A Borel; Springer Verlag, 1966.
7. KODAIRA K., D. C. SPENCER, *On deformations of complex analytic structures III.* Ann. Math., **71**, 43—76 (1960).
8. LUSZTIG GH., *Sur les actions libres des groupes finis.* Bull. de l'Acad. Pol. de Sci., (1968).
9. LUSZTIG GH., *Sur les complexes elliptiques fibrés.* C. R. Acad. Sci. Paris (1968).
10. MILNOR J., *Lectures on characteristic classes.* Princeton, 1958.
11. NIRENBERG L., *On elliptic partial differential equations.* Annali Sc. N. S. Pisa, **XIII**, 115—162 (1959).
12. PALAIS R., *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem.* Ann. of Math. Studies, 57, Princeton, 1965.
13. SCHWARTZ L., *Complexnie analiticeskie mnogoobraziia.* Moskva, 1964.
14. SERRE J. P., *Homologie singulière des espaces fibrés.* Ann. Math., **54**, 425—505 (1951).
15. TELEMAN C., *Elemente de topologie şi varietăți diferențiabile.* Bucureşti, 1964.

O MAȘINĂ TURING UNIVERSALĂ PENTRU ALGORITMII NORMALI

DE

I. MARUȘCIAC și GH. NADIU

Cluj

În prezenta Notă se dă o demonstrație directă a echivalenței algoritmilor normali cu mașinile Turing, construindu-se o mașină Turing universală pentru algoritmii normali într-un alfabet dat $\mathcal{A}$. Mașina Turing universală este o compunere de două tipuri de mașini; mașini care recunosc intrările cuvintelor într-un cuvînt dat și cele care efectuează substituțiile.

Echivalența mașinilor Turing cu algoritmii normali se demonstrează de obicei prin intermediul altor sisteme algoritmice, ca de exemplu funcțiile recursive și altele.

În 1959, Cerneavski [3] dă o demonstrație directă a echivalenței algoritmilor normali cu mașinile Turing punînd în evidență o subclasă a algoritmilor normali cu proprietatea de localizare a procesului algoritmic, iar ceva mai recent, în anul 1965 P. V. Babikov [1] dă o rezolvare a aceleiași probleme cu ajutorul sistemelor Tue [4].

În această lucrare vom demonstra echivalența algoritmilor normali cu mașinile Turing, construind direct o mașină universală pentru clasa algoritmilor normali într-un alfabet dat.

1. Fie $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un alfabet dat și

$$\mathfrak{A} : \begin{cases} A_1 \to B_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_k \to B_k \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_N \to B_N \end{cases}$$

un algoritm normal în alfabetul $\mathcal{A}$.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 1, P. 85–95, BUCUREȘTI, 1969

Notăm cu $\underline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\overline{\mathcal{A}}}$ alfabetele obţinute din alfabetul $\mathcal{A}$ respectiv prin sublinierea, supralinierea şi supralinierea dublă a literelor din alfabetul $\mathcal{A}$ şi fie $\mathcal{B} = \{a_0\} \cup \mathcal{A} \cup \underline{\mathcal{A}} \cup \overline{\mathcal{A}} \cup \overline{\overline{\mathcal{A}}}$, unde a_0 reprezintă simbolul vid.

Fie $\cdot, \ast, \square_1, \square_2, \ldots, \square_k, \ldots \square_N$, litere ce nu fac parte din alfabetul $\mathcal{B}$, iar $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B} \cup \{\cdot, \ast, \square_1, \ldots, \square_N\}$.

Ataşăm fiecărei litere a_i simbolurile q_{a_i} şi $\underline{q}_{a_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Fie acum $Q' = \{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_N, \gamma, \delta, \varepsilon, \nu, \mu, . \theta, \tau, \rho, q_{a_1}, \ldots, q_{a_n}, \underline{q}_{a_1}, \ldots, \underline{q}_{a_n}, q_0', q_0''\}$ unde nici o literă a alfabetului Q' nu aparţine alfabetului $\mathcal{B}_1$.

Vom construi mai întîi o maşină Turing $\mathfrak{T}_k'$ cu alfabetul exterior $\mathcal{B}_1$ şi alfabetul interior Q', unde α reprezintă starea iniţială, iar q_0', q_0'' stările finale ale maşinii $\mathfrak{T}_k'$, adică

$$\mathfrak{T}_k' : Q' \times \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_1 \times \Pi \times Q',$$

unde $\Pi = \{S, L, D\}$, care va recunoaşte intrarea membrului întîi a formulei de substituţie $A_k \to B_k$ a algoritmului $\mathfrak{U}$, în cuvîntul de prelucrat P.

Maşina Turing $\mathfrak{T}_k'$ o descriem prin programul de comenzi obişnuit între dublete şi triplete, adică de forma

$$qa \to a' \pi q',$$

unde a, $a' \in \mathcal{B}_1$, q, $q' \in Q'$, $\pi \in \Pi$. Pentru comoditatea scrierii, acest program se dă sub formă de tabel (tabelul 1) în care tripleta care corespunde perechii (a, q) se citeşte la intersecţia liniei q şi coloanei a.

Considerăm configuraţia iniţială a benzii maşinii $\mathfrak{T}_k'$ dată prin cuvîntul de maşină

$$M = \alpha P \square_1 A_1 \ast B_1 \square_2 \ldots \square_k A_k \ast \cdot B_k \square_{k+1} \ldots \square_N A_N \ast B_N$$

obţinut prin scrierea liniară a cuvîntului de prelucrat şi a formulelor de substituţie a algoritmului $\mathfrak{U}$ în care înlocuim → prin $\ast$, iar $\square_1, \square_2, \ldots$ $\ldots, \square_N$ fiind litere separatoare pentru formulele de substituţie.

Pentru a putea analiza şi formulele de substituţie de încheiere, presupunem că formula de substituţie de ordinul k este o formulă de substituţie de încheiere.

Să notăm cu $M^{(1)}$ cuvîntul de maşină obţinut din M prin aplicarea unui singur pas elementar al maşinii Turing $\mathfrak{T}_k'$ şi în general

$$M^{(t+1)} = (M^{(t)})^{(1)}, \qquad (t = 1, 2, 3, \ldots),$$

unde $M^{(t)}$ este cuvîntul de maşină obţinut din M prin t paşi elementari ai maşinii. Punînd $M^{(1)} = B$ şi $M^{(t)} = C$, vom folosi notaţia : $M \vdash B$, respectiv $M \sqsubseteq C$.

Lema 1. *Dacă formula de substituţie a algoritmului* $\mathfrak{U}$ *este aplicabilă cuvîntului* P, *atunci există un indice* t^* *astfel încît*

$$q_0'' \in M^{(t^*)}$$

şi

$$M^{(t^*)} = \Sigma (P, A_k, \overline{A}_k) \square_1 A_1 \ast B_1 \square_2 \ldots \square_k \underline{A}_k q_0'' \ast B_k \square_{k+1} \ldots,$$

Tabelul 1

(Mașina pentru recunoașterea intrărilor)

	a_0	$*$	$\square_1$	$\square_j$ $(j=\overline{2,\ k-1})$	$\square_k$	a_i $(i=1,\overline{n})$	a_j $(j=1,\overline{n})$	$\bar{a}_i$ $i=1,\overline{n}$	$\bar{a}_j$ $(j=1,\overline{n})$	$\underline{a}_i$ $(i=1,\overline{n})$	$\underline{a}_j$ $(j=1,\overline{n})$	$\bar{\bar{a}}_i$ $(i=1,\overline{n})$	$\bar{\bar{a}}_j$ $(j=1,\overline{n})$	$\cdot$
α		$*D\alpha$	$\square_1 D\alpha$	$\square_j D\alpha$	$\square_k D\beta_k$	$a_i D\alpha$	$a_j D\alpha$							
β_k		$*Lq_0''$			$\square_k D\beta_k$	$\underline{a}_i L\underline{q}_{a_i}$	$a_j L\underline{q}_{a_j}$			$a_i D\beta_k$	$\underline{a}_j D\beta_k$			
γ	$a_0 D\varepsilon$					$a_i D\varepsilon$	$a_j D\varepsilon$	$a_i S\gamma$	$a_j S\gamma$					
δ		$*S\tau$				$a_i D\delta$	$a_j D\delta$			$a_i D\delta$	$a_j D\delta$			
ε						$\bar{\bar{a}}_i D\mu$	$\bar{\bar{a}}_j D\mu$							
ν	$a_0 Dq_0'$	$*S\nu$	$\square_1 S\nu$	$\square_j S\nu$	$\square_k S\nu$	$a_i S\nu$	$a_j S\nu$							$\cdot S\nu$
μ		$*D\mu$	$\square_1 D\mu$	$\square_j D\mu$	$\square_k D\delta$	$a_i D\mu$	$a_j D\mu$							$\cdot D\mu$
τ	$a_0 D\rho$				$\square_k L\beta_k$	$a_i S\tau$	$a_j S\tau$	$a_i S$	$a_j S\tau$					
θ		$*S\nu$				$a_i D\theta$	$a_j D\theta$			$a_i D\theta$	$a_j D\theta$			
ρ		$*D\rho$	$\square_1 D\rho$	$\square_j D\rho$	$\square_k D\theta$	$a_i D\rho$	$a_j D\rho$							$\cdot D\rho$
q_{a_i}			$\square_1 S\tau$			$\bar{a}_i D\alpha$	$a_j S\gamma$							
$\underline{q}_{a_i}$	$a_0 Dq_{a_i}$	$*S\underline{q}_{a_i}$	$\square_1 S\underline{q}_{a_i}$	$\square_j S\underline{q}_{a_i}$	$\square_k S\underline{q}_{a_i}$	$a_i S\underline{q}_{a_i}$	$a_j S\underline{q}_{a_i}$	$\bar{a}_i Dq_{a_i}$	$\bar{a}_j Dq_{a_i}$	$\underline{a}_i S\underline{q}_{a_i}$	$\underline{a}_j Sq_{a_i}$	$a_i Dq_{a_i}$	$a_j Dq_{a_i}$	$\cdot S\underline{q}_{a_i}$

unde $\underline{A}_k$, $\overline{A}_k$ *sînt cuvintele obținute din* A_k *prin sublinierea și respectiv supralinierea literelor din* A_k.

Într-adevăr, dacă formula $A_k \to B_k$ este aplicabilă cuvîntului P, atunci va exista o primă intrare a cuvîntului A_k în cuvîntul P de forma

$$P = R\underline{A}_k T.$$

Fie $A_k = a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_r}$. Dacă R este cuvîntul vid, atunci

$$P = A_k T$$

și rezultă că

$$M \sqsubset a_0 P \square_1 A_1 \ast B_1 \square_2 \ldots \alpha \square_k A_k \ast \cdot B_k \square_{k+1} \ldots \square_N A_N \ast B_N \vdash$$

$$\vdash a_0 P \square_1 \ldots \square_k \beta_k A_k \ast \cdot B_k \square_{k+1} \ldots \vdash a_0 P \square_1 \ldots \square_k$$

$$\underline{q}_{a_{j_1}} \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_r} \ast \cdot B_k \square_{k+1} \ldots \sqsubset \underline{q}_{a_{j_1}} a_0 P \square_1 \ldots \square_k \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \ldots$$

$$\ldots a_{j_r} \ast \cdot B_k \square_{k+1} \vdash a_0 q_{a_{j_1}} \cdot P \square_1 \ldots \square_k \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_r} \ast \cdot B_k \square_{k+1} \ldots$$

$$\vdash a_0 \overline{a}_{j_1} \alpha a_{j_2} \ldots a_{j_r} T \square_1 \ldots \square_k \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_r} \ast \cdot B_k \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_0 \overline{a}_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_r} T \square_1 \ldots \alpha \square_k \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_r} \ast \cdot B_k \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_0 \overline{a}_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_r} T \square_1 \ldots \square_k \underline{a}_{j_1} \beta_k a_{j_2} \ldots a_{j_r} \ast \cdot B_k \square_{k+1} \ldots \vdash$$

$$\vdash a_0 \overline{a}_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_r} T \square_1 \ldots \square_k \underline{a}_{j_1} \underline{q}_{a_{j_2}} \underline{a}_{j_2} a_{j_3} \ldots a_{j_r} \ast \cdot B_k \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_0 \underline{q}_{a_{j_2}} \overline{a}_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_r} T \square_1 \ldots \square_k \underline{a}_{j_1} \underline{a}_{j_2} a_{j_3} \ldots a_{j_r} \ast \cdot B_k \square_{k+1} \ldots \vdash$$

$$\vdash a_0 \overline{a}_{j_1} q_{a_{j_2}} a_{j_2} \ldots a_{j_r} T \square_1 \ldots \square_k \underline{a}_{j_1} \underline{a}_{j_2} a_{j_3} \ldots a_{j_r} \ast \cdot B_k \square_{k+1} \ldots$$

$$\sqsubset a_0 \overline{A}_k T \square_1 \ldots \square_k \underline{a}_{j_1} \underline{a}_{j_2} \ldots \underline{a}_{j_T} \beta_k \ast \cdot B_k \square_{k+1} \ldots \vdash$$

$$\vdash a_0 \overline{A}_k T \square_1 \ldots \square_k \underline{A}_k q_0'' \ast \cdot B_k \square_{k+1} \ldots$$

Fie acum R diferit de cuvîntul vid, adică;
$P = Ra_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_r} T$, unde $R = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_m}$; atunci avem succesiv

$$\underline{M} \sqsubset a_0 q_{a_{j_1}} a_{i_1} \ldots a_{i_m} A_k T \square_1 \ldots \square_k \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_r} \ast \cdot B_k \square_{k+1} \ldots \vdash$$

$$\vdash \gamma a_0 a_{i_1} \ldots a_{i_m} A_k T \square_1 \ldots \square_k \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_r} \ast \cdot B_k \square_{k+1} \ldots \vdash$$

$$\vdash a_0 \varepsilon a_{i_1} \ldots a_{i_m} A_k T \square_1 \ldots \square_k \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_r} \ast \cdot B_k \square_{k+1} \ldots \vdash$$

$$\vdash a_0 \overline{\overline{a}}_{i_1} \mu a_{i_2} \ldots a_{i_m} A_k T \square_1 \ldots \square_k \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_r} \ast \cdot B_k \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_0 \overline{\overline{a}}_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_m} A_k T \square_1 \ldots \square_k \delta \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_r} \ast \cdot B_k \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_0 \overline{\overline{a}}_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_m} A_k T \square_1 \ldots \square_k a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_r} \delta \ast \cdot B_k \square_{k+1} \ldots \vdash$$

$$\vdash a_0 \overline{\overline{a}}_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_m} A_k T \square_1 \ldots \square_k a_{j_1} \ldots a_{j_{r-1}} \tau a_{j_r} \ast \cdot B_k \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_0\bar{\bar{a}}_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_m} A_k T \square_1 \ldots \beta_k \square_k a_{j_1} \ldots a_{j_r} \ast \cdot B_k \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_0\bar{\bar{a}}_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_m} A_k T \square_1 \ldots \square_k \underline{q}_{a_{j_1}} \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_r} \ast \cdot B_k \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_0 \underline{q}_{a_{j_1}} \bar{\bar{a}}_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_m} A_k T \square_1 \ldots \square_k \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_r} \ast \cdot B_k \square_{k+1} \ldots \vdash$$

$$\vdash a_0 a_{i_1} q_{a_{j_1}} a_{i_2} \ldots a_{i_m} A_k T \square_1 \ldots \square_k \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_r} \ast \cdot B_k \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_0 R q_{a_{j_1}} a_{j_1} \ldots a_{j_r} T \square_1 \ldots \square_k \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_r} \ast \cdot B_k \square_{k+1} \ldots$$

și de aici se repetă procesul ca și în cazul precedent și deci lema **1** este demonstrată.

LEMA 2. *Dacă formula de substituție* $A_k \to B_k$ *nu este aplicabilă cuvîntului* P, *atunci există un indice* t^{**} *astfel că*

$$q_0' \in M^{(t^{**})}$$

și

$$M^{(t^{**})} = q_0' P \square_1 A_1 \ast B_1 \square_2 \ldots \square_N A_N \ast B_N.$$

Într-adevăr, dacă formula de substituție $A_k \to B_k$ nu este aplicabilă cuvîntului P, atunci rezultă că A_k nu intră în P, deci mașina $\mathfrak{T}_k$ va transforma cuvîntul de mașină M într-un cuvînt de mașină de forma

$$M^* = a_0 P' \bar{a}_{j_1} \ldots \bar{a}_{j_{m'}} q_{a_i} \square_1 \ldots \square_k \underline{a}_{j_1} \ldots \underline{a}_{j_{m'}} a_{j_{m'+1}} \ldots a_{j_r} \ast B_k \square_{k+1} \ldots$$

unde $m' < r$, ceea ce înseamnă că un început al lui A_k este terminație a cuvîntului P, deci $P = P' a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_{m'}}$. Toate celelalte cazuri se reduc la acesta. Astfel avem succesiv

$$M^* \vdash a_0 P' \bar{a}_{j_1} \ldots \bar{a}_{j_{m'-1}} \tau \bar{a}_{j_{m'}} \square_1 \ldots \square_k \underline{a}_{j_1} \ldots \underline{a}_{j_{m'}} \ldots a_{j_r} \ast B_k \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_0 \rho P \square_1 \ldots \square_k \underline{a}_{j_1} \ldots \underline{a}_{j_{m'}} a_{j_{m'+1}} \ldots a_{j_r} \ast B_k \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_0 P \square_1 \ldots \square_k \theta \underline{a}_{j_1} \ldots \underline{a}_{j_{m'}} a_{j_{m'+1}} \ldots a_{j_r} \ast B_k \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_0 P \square_1 \ldots \square_k a_{j_1} \ldots a_{j_{r-1}} \nu a_{j_r} \ast B_k \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_0 q_0' P \square_1 \ldots \square_k A_k \ast B_k \square_{k+1} \ldots \square_N A_N \ast B_N$$

adică lema are loc.

2. Fie $\bar{q}_{a_i}$, $\underline{q}_{a_i}$, q_{a_i} trei simboluri atașate literelor a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, iar Q'' alfabetul următor :

$$Q'' = \{\alpha, \beta, \gamma_1, \ldots \gamma_k, \ldots, \gamma_N, \delta, \varepsilon, \mu, \nu, \theta, \rho, \tau, \varphi, \psi, \chi, \xi,$$
$$q_{a_1}, \ldots, q_{a_n}, \bar{q}_{a_1}, \ldots, \bar{q}_{a_n}, \underline{q}_{a_1}, \ldots, \underline{q}_{a_n}, q_0', q_0''\}.$$

Vom construi acum o mașină Turing $\mathfrak{T}_k''$ cu alfabetul exterior $\mathfrak{B}_1$ și alfabetul interior Q'', în care β este starea inițială, iar q_0', q_0'' două stări finale, de forma

$$\mathfrak{T}_k'' : Q'' \times \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_1 \times \Pi \times Q''$$

cu schema logică dată în tabelul 2.

Tabelul 2

Maşina pentru efectuarea substituţiilor

	a_0	$\cdot$	$*$	$\square_1$	$\square_j$ $(j=2, \overline{k-1})$	$\square_k$	a_i $(i=\overline{1, n})$	a_j $(j=\overline{1, n})$	$\overline{a}_i$ $(i=\overline{1, n})$	$\overline{a}_j$ $(j=\overline{1, n})$	$\underline{a}_i$ $(i=\overline{1, n})$	$\underline{a}_j$ $(j=\overline{1, n})$	$\square_{k+1}$
α	$a_0D\tau$	$\cdot S\rho$	$* S\alpha$			$\square_k L\rho$	$\underline{a}_i S\alpha$	$\underline{a}_j S\alpha$			$a_i S\alpha$	$a_j S\alpha$	
β		$\cdot D\beta$	$* D\beta$	$\square_1 D\beta$	$\square_j D\beta$	$\square_k D\beta$	$a_i D\beta$	$a_j D\beta$			$\underline{a}_i D\beta$	$\underline{a}_j D\beta$	$\square_{k+1} S\gamma_k$
γ_k		$\cdot D\varepsilon$	$* D\varepsilon$				$\underline{a}_i S\underline{q}_{a_i}$	$\underline{a}_j S\underline{q}_{a_j}$			$\underline{a}_i S\gamma_k$	$\underline{a}_j S\gamma_k$	
δ	$a_0D\tau$						$\underline{a}_i S\alpha$	$\underline{a}_j S\alpha$	$\overline{a}_i D\varepsilon$	$\overline{a}_j D\varepsilon$			
ε	$a_0D\nu$			$\square_1 D\beta$			$\underline{a}_i D\varepsilon$	$a_j D\varepsilon$			$\underline{a}_i D\varepsilon$	$\underline{a}_j D\varepsilon$	$\square_{k+1} S\alpha$
μ	$a_0D\varepsilon$						$a_i Lq_{a_i}$	$a_j Lq_{a_j}$	$a_0 S\mu$	$a_0 S\mu$			
ν	$a_0L\theta$			$\square_1 D\varphi$			$a_i D\nu$	$a_j D\nu$					
θ	$a_0S\mu$			$\square_1 \delta\theta$			$a_i S\theta$	$a_j S\theta$	$a_0 S\mu$	$a_0 S\mu$			
τ	$a_0D\tau$						$a_i L\beta$	$a_j L\beta$			$\underline{a}_i L\overline{q}_{a_i}$	$\underline{a}_j L\overline{q}_{a_j}$	
ρ		$\cdot S\rho$	$* S\rho$	$\square_1 S\rho$	$\square_j S\rho$	$\square_k S\rho$	$a_i S\rho$	$a_j S\rho$			$a_i S\rho$	$a_j S\rho$	
ξ		$\cdot S\psi$	$* D\xi$				$a_i D\xi$	$a_j D\xi$					$\square_{k+1} S\chi$
φ		$\cdot D\varphi$	$* D\varphi$	$\square_1 D\varphi$	$\square_j D\varphi$	$\square_k D\xi$	$a_i D\varphi$	$a_j D\varphi$					
ψ	a_0Dq_0'	$\cdot S\psi$	$* S\psi$	$\square_1 S\psi$	$\square_j S\psi$	$\square_k D\psi$	$a_i S\psi$	$a_j S\psi$					
χ	a_0Dq_0''	$\cdot S\chi$	$* S\chi$	$\square_1 S\chi$	$\square_j S\chi$	$\square_k S\chi$	$a_i S\chi$	$a_j S\chi$					
$\overline{q}_{a_i}$	$a_iD\tau$										$a_0 S\overline{q}_{a_i}$	$a_0 S\overline{q}_{a_i}$	
q_{a_i}	$a_iS\theta$						$a_0 Dq_{a_i}$	$a_0 Dq_{a_i}$					
$\underline{q}_{a_i}$	$a_iS\delta$	$\cdot S\underline{q}_{a_i}$	$* S\underline{q}_{a_i}$	$\square_1 S\underline{q}_{a_i}$	$\square_j S\underline{q}_{a_i}$	$\square_k S\underline{q}_{a_i}$	$a_i S\underline{q}_{a_i}$	$a_j S\underline{q}_{a_i}$	$a_i S\delta$	$a_i S\delta$	$\underline{a}_i S\underline{q}_{a_i}$	$\underline{a}_j S\underline{q}_{a_i}$	

Considerăm configuraţia iniţială a benzii maşinii $\mathfrak{T}''_k$ sub forma

$$M_1 = R\overline{A}_k T \Box_1 A_1 \ast B_1 \Box_2 \ldots \Box_k \underline{A}_k \beta \ast B_k \Box_{k+1} \ldots \Box_N A_N \ast B_N,$$

adică un cuvînt de maşină în care este pusă în evidenţă intrarea lui A_k în cuvîntul P.

Fie $B_k = a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_l}$

Vom arăta în cele ce urmează că maşina $\mathfrak{T}''_k$ efectuează substituţia în cuvîntul P, adică înlocuieşte prima intrare a cuvîntului A_k în P cu cuvîntul B_k. În acest sens vom demonstra trei leme.

LEMA 3. *Dacă lungimea cuvîntului A_k este egală cu lungimea cuvîntului B_k, adică $l(A_k) = l(B_k)$, atunci maşina $\mathfrak{T}''_k$ transformă cuvîntul M_1 conform lui* (1) *sau* (2):

$$M_1 \sqsubset q'_0 \sum (P, A_k, B_k) \Box_1 A_1 \ast B_1 \Box_2 \ldots \Box_k A_k \ast \cdot B_k \Box_{k+1} \ldots \tag{1}$$

$$M_1 \sqsubset q''_0 \sum (P, A_k, B_k) \Box_1 A_1 \ast B_1 \Box_2 \ldots \Box_k A_k \ast B_k \Box_{k+1} \ldots \tag{2}$$

după cum formula de substituţie $A_k \to B_k$ este de încheiere sau este simplă. Aici prin $\sum (P, A_k, B_k)$ s-a notat cuvîntul rezultat în urma înlocuirii în P a primei intrări a cuvîntului A_k cu cuvîntul B_k.

Într-adevăr, conform schemei logice a maşinii $\mathfrak{T}''_k$ dată în tabelul 2, avem succesiv

$$M_1 \sqsubset R\overline{A}_k T \Box_1 A_1 \ast B_1 \Box_2 \ldots \Box_k \underline{A}_k \ast \cdot a_{k_1} \cdots a_{k_{l-1}} \gamma_k a_{k_l} \Box_{k+1} \ldots \vdash$$

$$\vdash R\overline{A}_k T \Box_1 \ldots \Box_k \underline{A}_k \ast \cdot a_{k_1} \ldots \underline{q}_{a_{k_l}} a_{k_{l-1}} a_{k_l} \Box_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset R\overline{a}_{j_1} \ldots \overline{a}_{j_{r-1}} q_{a_{k_l}} \overline{a}_{j_r} T \Box_1 \ldots \Box_k \underline{A}_k \ast \cdot a_{k_1} \ldots a_{k_{l-1}} \underline{a}_{k_l} \Box_{k+1} \ldots \vdash$$

$$\vdash R\overline{a}_{j_1} \ldots \overline{a}_{j_{r-2}} \delta \overline{a}_{j_{r-1}} a_{k_l} T \Box_1 \ldots \Box_k \underline{A}_k \ast \cdot a_{k_1} \ldots a_{k_{l-1}} \underline{a}_{k_l} \Box_{k+1} \ldots \vdash$$

$$\vdash R\overline{a}_{j_1} \ldots \overline{a}_{j_{r-1}} \varepsilon a_{k_l} T \Box_1 \ldots \Box_k \underline{A}_k \ast \cdot a_{k_1} \ldots \underline{a}_{k_l} \Box_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset R\overline{a}_{j_1} \ldots \overline{a}_{j_{r-1}} a_{k_l} T \Box_1 \beta \ldots \Box_k \underline{A}_k \ast \cdot a_{k_1} \ldots a_{k_{l-1}} \underline{a}_{k_l} \Box_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset R\overline{a}_{j_1} \ldots \overline{a}_{j_{r-1}} a_{k_l} T \Box_1 \ldots \Box_k \underline{A}_k \ast \cdot a_{k_1} \ldots \gamma_k a_{k_{l-1}} \underline{a}_{k_l} \Box_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset R\underline{q}_{a_{k_1}} \overline{a}_{j_1} a_{k_2} \ldots a_{k_l} T \Box_1 \ldots \Box_k A_k \ast \cdot a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_l} \Box_{k+1} \ldots \vdash$$

$$\vdash \ldots \delta a_{i_m} a_{k_1} \ldots a_{k_l} T \Box_1 \ldots \Box_k \underline{A}_k \ast \cdot \underline{B}_k \Box_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset \alpha a_0 \underline{R} B_k T \Box_1 \ldots \Box_k \underline{A}_k \ast \cdot \underline{B}_k \Box_{k+1} \ldots \vdash$$

$$\vdash a_0 \tau \underline{R} B_k T \Box_1 \ldots \Box_k \underline{A}_k \ast \cdot \underline{B}_k \Box_{k+1} \ldots \vdash$$

$$\vdash a_0 \overline{q}_{a_{i_1}} \underline{a}_{i_1} \ldots \underline{a}_{i_m} B_k T \Box_1 \ldots \vdash \overline{q}_{a_{i_1}} a_0 a_0 \underline{a}_{i_2} \ldots \underline{a}_{i_m} B_k T \Box_1 \ldots \vdash$$

$$\vdash a_{i_1} a_0 \tau \underline{a}_{i_2} \ldots \underline{a}_{i_m} B_k T \Box_1 \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset R a_0 \beta B_k T \Box_1 \ldots \Box_k \underline{A}_k \ast \cdot \underline{B}_k \Box_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset R a_0 B_k T \Box_1 \ldots \Box_k \underline{A}_k \ast \gamma_k \cdot \underline{B}_k \Box_{k+1} \ldots \vdash$$

$$\vdash R a_0 B_k T \Box_1 \ldots \Box_k \underline{A}_k \ast \cdot \varepsilon \underline{B}_k \Box_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset Ra_0\, B_k\, T\, \Box_1 \ldots \Box_k\, \underline{A}_k \divideontimes \cdot \dot{\underline{B}}_k\, \varepsilon\, \Box_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset Ra_0\, B_k\, T\, \Box_1 \ldots \Box_k\, \underline{A}_k \divideontimes \rho \cdot B_k\, \Box_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset Ra_0\, B_k T\, \theta\, \Box_1 \ldots \Box_k\, A_k \divideontimes \cdot B_k\, \Box_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset R\, \theta\, a_0\, B_k\, T\, \Box_1 \ldots \Box_k A_k \divideontimes \cdot B_k\, \Box_{k+1} \ldots \vdash$$

$$\vdash a_{i_1} \ldots \mu\, a_{i_m} a_0\, B_k\, T\, \Box_1 \ldots \vdash a_{i_1} \ldots q_{a_{i_m}} a_{i_m} a_0\, B_k\, T\, \Box_1 \ldots \vdash$$

$$\vdash a_{i_1} \ldots a_0\, q_{a_{i_m}} a_0\, B_k\, T\, \Box_1 \ldots \vdash a_{i_1} \ldots a_{i_{m-1}}\, \theta\, a_0\, a_{i_m} B_k\, T\, \Box_1 \ldots$$

$$\ldots \sqsubset\ \theta\, a_0\, R\, B_k\, T\, \Box_1 \ldots \vdash \mu\, a_0\, a_0\, R\, B_k\, T\, \Box_1 \ldots \vdash$$

$$\vdash a_0\, \varepsilon\, a_0\, R\, B_k\, T\, \Box_1 \ldots \vdash a_0\, \nu\, R\, B_k\, T\, \Box_1 \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset R\, B_k\, T\, \nu\, \Box_1 \ldots$$

De aici avem două cazuri :

a)
$$M_1 \sqsubset R\, B_k\, T\, \Box_1 \ldots \Box_k\, \psi\, A_k \divideontimes \cdot B_k\, \Box_{k+1} \ldots \sqsubset$$
$$\sqsubset q_0' \sum (P, A_k, B_k)\, \Box_1\, A_1 \divideontimes B_1\, \Box_2 \ldots$$

dacă formula de substituţie $A_k \to B_k$ este o formulă de încheiere şi

b) $M_1 \sqsubset R\, B_k\, T\, \Box_1 \ldots \sqsubset q_0'' \sum (P, A_k, B_k)\, \Box_1 A_1 \divideontimes B_1\, \Box_2 \ldots$

dacă formula de substituţie este simplă.

LEMA 4. *Dacă $l(A_k) < l(B_k)$, atunci are loc de asemenea una din relaţiile (1) sau (2).*

Într-adevăr, dacă $l(A_k) < l(B_k)$, atunci vom vedea că maşina va crea o celulă liberă pentru substituţiile literelor, o dată ce lungimea cuvîntului A_k a fost depăşită. Pentru aceasta vom analiza transformările succesive în cazul cînd nu există celulă liberă pentru continuarea înlocuirii literelor cuvîntului B_k, adică începînd cu situaţia

c) $a_{i_1} \ldots a_{i_{m-1}}\, \delta a_{i_m} a_{k_p} \ldots a_{k_l}\, T\, \Box_1 \ldots \Box_k\, \underline{A}_k \divideontimes \cdot a_{k_1} \ldots \underline{a}_{k_p} \ldots \underline{a}_{k_l}\, \Box_{k+1}$

$$\ldots \sqsubset \tau\, \underline{R} a_{k_p} \ldots a_{k_l}\, T\, \Box_1 \ldots \vdash \overline{q}_{a_{i_1}} \underline{a}_{i_1} \ldots \underline{a}_{i_m} a_{k_p} \ldots a_{k_l}\, T\, \Box_1 \ldots \vdash$$

$$\vdash \overline{q}_{a_{i_1}} a_0\, a_0\, \underline{a}_{i_2} \ldots \underline{a}_{i_m} a_{k_p} \ldots a_{k_l}\, T\, \Box_1 \ldots \vdash a_{i_1} a_0\, \tau\, \underline{a}_{i_2} \ldots \underline{a}_{i_m} a_{k_p} \ldots$$

$$\ldots a_{k_l}\, T\, \Box_1 \ldots \vdash a_{i_1} a_0\, q_{a_{i_2}} \underline{a}_{i_2} \ldots \underline{a}_{i_m} a_{k_p} \ldots a_{k_l}\, T\, \Box_1 \ldots \vdash$$

$$\vdash a_{i_1} \overline{q}_{a_{i_2}} a_0\, a_0\, \underline{a}_{i_3} \ldots \underline{a}_{i_m} a_{k_p} \ldots a_{k_l}\, T\, \Box_1 \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset Ra_0\, \beta\, a_{k_p} \ldots a_{k_l}\, T\, \Box_1 \ldots \Box_k\, \underline{A}_k \divideontimes \cdot a_{k_1} \ldots a_{k_{p-1}} \underline{a}_{k_p} \ldots \underline{a}_{k_l}\, \Box_{k+1} \ldots$$

Din acest punct se reia ciclul de lucru al lui β, analog cazului precedent, pînă ce se ajunge în situaţia

d) $a_{i_1} \ldots a_{i_m} \underline{q}_{a_{p-1}} a_0\, a_{k_p} \ldots a_{k_l}\, T\, \Box_1 \ldots \Box_k\, \underline{A}_k \divideontimes \cdot a_{k_1} \ldots \underline{a}_{k_{p-1}} \ldots$

$$\ldots \underline{a}_{k_l}\, \Box_{k+1} \ldots \vdash R\delta a_{k_{p-1}} a_{k_p} \ldots a_{k_l}\, T\, \Box_1 \ldots \Box_k\, \underline{A}_k \divideontimes \cdot a_{k_1} \ldots \underline{a}_{k_{p-1}} \ldots$$

$$\ldots \underline{a}_{k_l}\, \Box_{k+1} \ldots$$

De aici se reia ciclul d) pînă se epuizează cuvîntul B_k. Ciclul se încheie la cuvîntul de maşină

$$Ra_0\, B_k\, T\, \square_1 \ldots \square_k \underline{A}_k \ast \gamma_k \cdot \underline{B}_k\, \square_{k+1} \ldots$$

din care este suficientă eliminarea literei a_0. Eliminarea literelor vide se face ca în lema 2 şi astfel rezultă lema 4.

LEMA 5. *Dacă* $l(A_k) > l(B_k)$, *atunci au loc de asemenea relaţiile* (*1*) *sau* (*2*).

Într-adevăr, din demonstraţia lemelor precedente rezultă că este suficient să analizăm transformările succesive începînd cu cuvîntul de maşină

$$R\bar{a}_{j_1} \ldots \theta\bar{a}_{j_{p_1}} B_k\, T\, \square_1 \ldots \square_k\, A_k \ast \cdot B_k\, \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset\; a_{i_1} \ldots a_{j_{m-1}} q_{a_{i_m}} a_{i_m} a_0 \ldots a_0\, B_k\, T\, \square_1 \ldots \vdash$$

$$\vdash\; a_{i_1} \ldots a_{i_{m-1}} a_0\, q_{a_{i_m}} a_0 \ldots a_0\, B_k\, T\, \square_1 \ldots \vdash$$

$$\vdash\; a_{i_1} \ldots a_{i_{m-1}}\, \theta a_0\, a_{i_m} a_0 \ldots a_0 B_k\, T\, \square_1 \ldots \vdash$$

$$\vdash\; a_{i_1} \ldots a_{i_{m-2}}\, \mu\, a_{i_{m-1}} a_0\, a_{i_m} a_0 \ldots a_0\, B_k\, T\, \square_1 \ldots \vdash$$

$$\vdash\; a_{i_1} \ldots a_{i_{m-2}} q_{a_{i_{m-1}}} a_{i_{m-1}} a_0\, a_{i_m} a_0 \ldots a_0\, B_k\, T\, \square_1 \ldots$$

Astfel se reia ciclul deplasîndu-se la dreapta cu o celulă cuvîntul R, iar apoi prin intermediul stărilor μ, ν, ε se verifică dacă astfel de deplasări mai sînt necesare sau nu. Dacă deplasarea nu mai este necesară, atunci obţinem cuvîntul de maşină

$$RB_k\, T\, \square_1\, \varphi\, A_1 \ast B_1\, \square_2 \ldots \sqsubset RB_k\, T\, \square_1 \ldots \square_k\, A_k \ast \psi \cdot B_k\, \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset\; q_0' \sum (P, A_k, B_k)\, \square_1 \ldots,$$

dacă formula de substituţie $A_k \to B_k$ este de încheiere şi

$$RB_k\, T\, \square_1\, \varphi\, A_1 \ast B_1\, \square_2 \ldots \sqsubset q_0'' \sum (P, A_k, B_k)\, \square_1 \ldots,$$

dacă formula de substituţie $A_k \to B$ este simplă.

3. În paragrafele precedente am construit maşinile Turing $\mathfrak{T}_k'$, $\mathfrak{T}_k''$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Să considerăm acum maşina Turing $\mathfrak{T}_k$ obţinută prin compunerea maşinilor $\mathfrak{T}_k'$ şi $\mathfrak{T}_k''$ în modul următor:

$$\mathfrak{T}_k = \mathfrak{T}_k' \begin{cases} (1)\ \mathfrak{T}_{k+1}' \\ (2)\ \mathfrak{T}_k'' \begin{cases} (1)\ \text{stop} \\ (2)\ \mathfrak{T}_1' \end{cases} \end{cases} (k = \overline{1, N-1}), \quad \mathfrak{T}_N = \mathfrak{T}_N' \begin{cases} (1)\ \text{stop} \\ (2)\ \mathfrak{T}_N'' \begin{cases} (1)\ \text{stop} \\ (2)\ \mathfrak{T}_1' \end{cases} \end{cases}$$

(Aici (1) corespunde stării de repaus q_0', iar (2) stării de repaus q_0'').

Este uşor de observat din construcţia maşinilor $\mathfrak{T}_k'$ şi $\mathfrak{T}_k''$ că maşina $\mathfrak{T}_k$ modelează formula de substituţie de ordinul k.

Considerăm acum compunerea maşinilor $\mathfrak{T}_k$ sub forma

$$\mathfrak{T}_k \left\{\begin{array}{l} (1)\ \mathfrak{T}_{k+1} \\ (2)\ \text{stop} \\ (3)\ \mathfrak{T}_1 \end{array}\right.$$

unde

$$\mathfrak{T}_N \left\{\begin{array}{l} (1)\ \text{stop} \\ (2)\ \text{stop} \\ (3)\ \mathfrak{T}_1 \end{array}\right.$$

în care poziţia (1) corespunde stării q_0' a maşinii $\mathfrak{T}_k'$, iar (2) şi (3) respectiv stărilor q_0' şi q_0'' a maşinii $\mathfrak{T}_k''$.

Fie $\mathfrak{T}$ maşina Turing astfel obţinută. Ţinînd seamă de modul de construcţie a maşinii $\mathfrak{T}$ şi de proprietăţile maşinilor $\mathfrak{T}_k'$ şi $\mathfrak{T}_k''$ avem următoarea

TEOREMĂ. *Maşina Turing $\mathfrak{T}$ este universală pentru clasa algoritmilor normali în alfabetul $\mathcal{A}$.*

Prin urmare, oricare ar fi un algoritm normal în alfabetul $\mathcal{A}$, maşina Turing modelează operaţiile acestui algoritm. Pentru aceasta este suficient să se înscrie pe banda maşinii $\mathfrak{T}$ cuvîntul P şi schema algoritmului normal sub forma unui cuvînt ce reprezintă reprezentarea sa.

Reciproca este evidentă. Oricare ar fi o maşină Turing cu alfabetul exterior $\mathfrak{B}_1$ şi alfabetul interior Q există un algoritm normal în alfabetul $\mathfrak{B}_1 \cup Q$ care modelează operaţiile maşinii lui Turing. Acest algoritm normal este cel obţinut luînd drept schema sa corespondenţa dintre dublete şi triplete din programul de lucru al maşinii lui Turing.

În felul acesta clasa algoritmilor normali în alfabetul $\mathcal{A}$ este echivalentă cu o clasă de maşini Turing în care alfabetul exterior este o extindere a alfabetului $\mathcal{A}$.

Primită la redacţie la 9 mai 1968

Academia Republicii Socialiste România
Filiala Cluj
Institutul de calcul

UNE MACHINE DE TURING UNIVERSELLE POUR LES ALGORITHMES NORMAUX

RÉSUMÉ

Dans cette note on présente une démonstration directe de l'équivalence des machines de Turing avec les algorithmes normaux, en construisant une machine de Turing universelle pour les algorithmes normaux dans un alphabet donné $\mathcal{A}$. La machine universelle est une composition de deux types de machines ; les machines qui reconnaissent les entrées des mots dans un mot donné et ceux qui réalisent les substitutions.

BIBLIOGRAFIE

1. П. В. БАБИКОВ, *Нормальные алгоритмы и машины Тьюринга*. Мат. Записки, V, *1* (1965).
2. T. BECVAR, *A universal Turing Machine with a programming tape*. Cooloquium on the foundations of Mathematics, mathematical machines and their applications. Tihany, 11–15 september 1962.
3. ЧЕРНЯВСКИЙ, *Об одном подклассе нормальных алгоритмов*. Логические исследования, 1959.
4. S. C. KLEENE, *Introduction to Metamathematics*. Princenton, N. J., 1962.
5. А. И. МАЛЬЦЕВ, *Алгоритмы и рекурсивные функции*. Изд. ,,Наука'', Москва, 1965.
6. А. А. МАРКОВ, *Теория алгоритмов*. Труды мат. Ин-та АН СССР, 42 (1954).
7. I. MARUŞCIAC, *Teoria algoritmilor*. Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1967.

ASUPRA GRUPULUI DE STABILITATE AL UNUI SPAȚIU A_3 OMOGEN

DE

I. MATEI

Se arată că dacă grupul de stabilitate al unui spațiu A_3 omogen conține o transformare de forma $Z = bU + x^1 p_3 - x^3 p_1 + ax^2 p_2$ cu $b \neq 0$, $a - b \neq 0$, $a + b \neq 0$, atunci spațiul este euclidian. Se studiază și cazurile în care punctul $M(a, b)$ se află pe una din dreptele $b = 0$, $a - b = 0$, $a + b = 0$.

Se știe că dacă grupul de stabilitate al unui spațiu A_n omogen conține transformarea distinsă U, [1], sau o transformare avînd una din formele $U + \sum_1^m x^\alpha p_{\alpha+1} (m < n)$, $aU + x^i p_i$ cu $\left(a \neq 0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}\right)$ și i indice fix [2], atunci spațiul A_n este euclidian.

În această lucrare se consideră în cazul $n = 3$, transformările de forma

$$bU + x^1 p_3 - x^3 p_1 + ax^2 p_2. \tag{1}$$

Astfel de transformări apar în cazul clasificării în real a subgrupurilor grupului centro-afin în trei variabile [3].

Pentru a caracteriza un spațiu A_n admițînd o transformare liniară dată $a^i_k x^k p_i$, se folosesc în primul rînd condițiile impuse de aceasta tensorilor de torsiune și curbură în origină [4]:

$$T^i_{sk} a^s_j + T^i_{js} a^s_k - T^s_{jk} a^i_s = 0 \tag{2}$$

$$\Gamma^i_{skl} a^s_j + \Gamma^i_{jsl} a^s_k + \Gamma^i_{jks} a^s_l - \Gamma^s_{jkl} a^i_s = 0. \tag{3}$$

În cazul transformării (1), ecuațiile (2) se scriu

$$\begin{aligned} &bT^i_{jk} + (T^i_{3k}\delta^1_j + T^i_{j3}\delta^1_k - T^1_{jk}\delta^i_3) - (T^i_{1k}\delta^3_j + T^i_{j1}\delta^3_k - T^3_{jk}\delta^i_1) + \\ &+ a(T^i_{2k}\delta^2_j + T^i_{j2}\delta^2_k - T^2_{jk}\delta^i_2) = 0, \qquad (i, j, k = 1, 2, 3). \end{aligned} \tag{4}$$

Din aceste ecuații rezultă în primul rînd

$$T^2_{12} = T^3_{13} = T^2_{23} = T^1_{13} = 0, \qquad (b - a)\, T^2_{13} = 0 \tag{5}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 1, P. 97–99, BUCUREȘTI, 1969

apoi ecuațiile

$$(6)\qquad \begin{aligned} &(a+b)\,T^1_{12} - T^1_{23} + T^3_{12} = 0, \ (a+b)\,T^1_{23} + T^1_{12} + T^3_{23} = 0 \\ &(a+b)\,T^3_{12} - T^1_{12} - T^3_{23} = 0, \ (a+b)\,T^3_{23} - T^1_{23} + T^3_{12} = 0 \end{aligned}$$

care formează un sistem omogen avînd determinantul coeficienților necunoscutelor

$$(7)\qquad \Delta = (a+b)^2\,[(a+b)^2 + 4].$$

De asemenea în cazul transformării (1), ecuațiile (3) devin

$$(8)\qquad \begin{aligned} &2b\,\Gamma^i_{jkl} + (\Gamma^i_{3kl}\delta^1_j + \Gamma^i_{j3l}\delta^1_k + \Gamma^i_{jk3}\delta^1_l - \Gamma^1_{jkl}\delta^i_3) - (\Gamma^i_{1kl}\delta^3_j + \\ &+ \Gamma^i_{j1l}\delta^3_k + \Gamma^i_{jk1}\delta^3_l - \Gamma^3_{jkl}\delta^i_1) + (\Gamma^i_{2kl}\delta^2_j + \Gamma^i_{j2l}\delta^2_k + \Gamma^i_{jk2}\delta^2_l - \Gamma^2_{jkl}\delta^i_2) = 0 \end{aligned}$$

şi dau în primul rînd

$$(9)\qquad 2b\,\Gamma^2_{231} = 0$$

$$(10)\qquad \Gamma^2_{221} = \Gamma^2_{223} = \Gamma^2_{131} = \Gamma^2_{331} = \Gamma^1_{231} = \Gamma^3_{231} = 0$$

$$(11)\qquad \Gamma^1_{121} = \Gamma^1_{123} = \Gamma^1_{321} = \Gamma^1_{323} = \Gamma^3_{121} = \Gamma^3_{123} = \Gamma^3_{321} = \Gamma^3_{323} = 0$$

apoi sistemele omogene

$$(12)\qquad \begin{aligned} &2b\,\Gamma^2_{112} - \Gamma^2_{321} - \Gamma^2_{123} = 0, \ 2b\,\Gamma^2_{321} + \Gamma^2_{323} + \Gamma^2_{112} = 0 \\ &2b\,\Gamma^2_{123} + \Gamma^2_{323} + \Gamma^2_{112} = 0, \ 2b\,\Gamma^2_{323} - \Gamma^2_{123} - \Gamma^2_{321} = 0 \end{aligned}$$

$$(13)\qquad \begin{aligned} &2b\,\Gamma^1_{131} + \Gamma^1_{331} + \Gamma^3_{131} = 0, \ 2b\,\Gamma^1_{331} - \Gamma^1_{131} + \Gamma^3_{331} = 0 \\ &2b\,\Gamma^3_{131} + \Gamma^3_{331} - \Gamma^1_{131} = 0, \ 2b\,\Gamma^3_{331} - \Gamma^1_{331} - \Gamma^3_{131} = 0 \end{aligned}$$

$$(14)\qquad \begin{aligned} &2(a+b)\,\Gamma^1_{221} + \Gamma^1_{223} + \Gamma^3_{221} = 0, \ 2(a+b)\,\Gamma^1_{223} - \Gamma^1_{221} + \Gamma^3_{223} = 0 \\ &2(a+b)\,\Gamma^3_{221} + \Gamma^3_{223} - \Gamma^1_{221} = 0, \ 2(a+b)\,\Gamma^3_{223} - \Gamma^1_{223} - \Gamma^3_{221} = 0 \end{aligned}$$

avînd determinanții coeficienților necunoscutelor

$$(15)\qquad \Delta_1 = \Delta_2 = 16b^2\,(b^2 + 1), \ \Delta_3 = 16(a+b)^2\,[(a+b)^2 + 1].$$

Din cele de mai sus se vede că dacă $b \neq 0$, $a - b \neq 0$, $a + b \neq 0$, atunci toate componentele tensorilor de torsiune şi curbură sînt nule în origină şi deoarece spațiul este omogen, rezultă după o teoremă stabilită de G. Vrănceanu [5], că spațiul este euclidian. Avem astfel

TEOREMA 1. *Spațiile* A_3 *omogene al căror grup de stabilitate conține o transformare de forma* (1) *cu* $b \neq 0$, $a - b \neq 0$, $a + b \neq 0$ *sînt euclidiene.*

Dacă $a - b = 0$ dar $b \neq 0$, $a + b \neq 0$, deci dacă $a = b \neq 0$, atunci dintre componentele tensorilor de torsiune şi curbură calculate în origină, numai componenta T^2_{13} poate fi eventual nenulă şi prin urmare avem

TEOREMA 2. *Spațiile* A_3 *omogene al căror grup de stabilitate conține o transformare de forma* (1) *cu* $a = b \neq 0$ *sînt sau euclidiene sau cu conexiune nesimetrică generală cu grup maxim* G_9.

Dacă $a+b=0$, $b\neq 0$, $a-b\neq 0$, deci $a=-b\neq 0$, rezultă

TEOREMA 3. *Spațiile A_3 al căror grup de stabilitate conține o transformare de forma* (1) *cu $a=-b\neq 0$, au proprietatea că singurele componente ale tensorilor de torsiune și curbură* (*calculate în origină*) *eventual nenule, satisfac condițiile*

$$T^1_{12}-T^3_{32}=0,\ T^1_{23}+T^3_{21}=0,\ \Gamma^1_{223}+\Gamma^3_{221}=0,\ \Gamma^1_{221}+\Gamma^3_{223}=0.$$

În sfîrșit, dacă $b=0$, $a-b\neq 0$, $a+b\neq 0$, deci dacă $b=0$, $a\neq 0$ avem

TEOREMA 4. *Spațiile A_3 al căror grup de stabilitate conține o transformare de forma* (1) *cu $b=0$, $a\neq 0$, au proprietatea că singurele componente ale tensorilor de torsiune și curbură* (*calculate în origină*) *eventual nenule sînt Γ^2_{231} și cele care satisfac condițiile*

$$\Gamma^2_{321}+\Gamma^2_{123}=0,\ \Gamma^2_{323}+\Gamma^2_{112}=0,\ \Gamma^1_{331}+\Gamma^3_{131}=0,\ \Gamma^3_{331}+\Gamma^1_{113}=0$$

Primită la redacție la 4 decembrie 1967

Institutul de construcție București

SUR LE GROUPE DE STABILITÉ D'UNE ESPACE A_3 HOMOGÈNE

RÉSUMÉ

On démontre que si le groupe de stabilité d'un espace a connexion affine A_3 homogène contient une transformation de la forme $Z = bU + x^1p_3 - x^3p_1 + ax^2p_2$ avec $b\neq 0$, $a-b\neq 0$, $a+b\neq 0$, alors l'espace est euclidien.

On étudie également les cas où le point $M(a, b)$ appartient à l'une de droites $b=0$, $a-b=0$, $a+b=0$.

BIBLIOGRAFIE

1. G. VRĂNCEANU, *Sur le groupe de stabilité d'un espace à connexion affine.* Bull. Math. **1** (1957).
2. V. DUMITRAȘ, *Asupra transformărilor grupului de stabilitate al unui spațiu A_n.* Analele Univ. Buc., Seria Științele naturii, *14* și *16* (1957).
3. I. MATEI, *Asupra subgrupurilor grupului centro-afin în trei variabile.* St. cerc. mat., **20**, *10* (1968).
4. G. VRĂNCEANU, *Lecții de geometrie diferențială.* vol. I, București, 1961.
5. G. VRĂNCEANU, *Sugli spazi omogenei a conessione affine.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1956).

ASUPRA SPAŢIILOR A_3 OMOGENE CU GRUP $G_r(r \leqslant 7)$

DE

I. MATEI

Se determină spaţiile A_3 omogene cu grup de mişcări $G_r(r \leqslant 7)$, avînd grup de stabilitate ireductibil în real la tipurile clasificării subgrupurilor grupului centroafin în trei variabile dată de S. Lie.

Determinarea spaţiilor A_3 omogene cu grup de mişcări $G_r(r \leqslant 7)$ plecînd de la grupul de stabilitate a fost făcută de V. Dumitraş [1], [2], [3], [4], care a utilizat clasificarea subgrupurilor grupului centroafin în trei variabile dată de S. Lie [5]. Considerînd această clasificare în real, am arătat într-o lucrare anterioară [6] că există şapte tipuri de grup $G_r(r \leqslant 4)$ care nu întră în clasificarea lui S. Lie şi nu conţin transformarea distinsă, anume

(1) $bU + x^1p_3 - x^3p_1,\ x^1p_2,\ x^3p_2,\ \beta U + x^2p_2,$

(2) $bU + x^1p_3 - x^3p_1,\ x^2p_1,\ x^2 p_3,\ \beta U + x^2 p_2,$

(3) $bU + x^1p_3 - x^3p_1 + ax^2p_2,\ x^1p_2,\ x^3p_2,$

(4) $bU + x^1p_3 - x^3p_1 + ax^2p_2,\ x^2p_1,\ x^2p_3,$

(5) $x^2p_3 - x^3p_2,\ x^3p_1 - x^1p_3,\ x^1p_2 - x^2p_1,$

(6) $bU + x^1p_3 - x^3p_1,\ \beta U + x^2p_2,$

(7) $bU + x^1p_3 - x^3p_1 + ax^2p_2.$

Scopul acestei lucrări este determinarea spaţiilor A_3 omogene avînd grup de stabilitate unul din aceste grupuri.

§1. SPAŢIILE A_3 OMOGENE CU GRUP DE STABILITATE (1)

Utilizînd teoremele stabilite într-o lucrare anterioară [7] relative la spaţiile A_3 omogene admiţînd o transformare de forma $bU + x^1p_3 - x^3p_1 + ax^2p_2$ în grupul lor de stabilitate, se arată că ne putem reduce la grupul de stabilitate

$$X_4 = x^1p_3 - x^3p_1,\ X_5 = x^3p_2,\ X_6 = x^1p_2,\ X_7 = x^2p_2 \tag{1.1}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 1, P. 101–109, BUCUREŞTI, 1969

în caz contrar spațiul admite grup de mișcări $G_r(r > 7)$. Acest grup (cu schimbarea variabilelor x^2, x^3 între ele) este întîlnit de V. Dumitraș în clasificarea spațiilor A_3 proiectiv euclidiene [8]. Ținînd seama de rezultatele acestei lucrări, ecuațiile de structură ale grupului G_7 admițînd (1.1) ca subgrup de stabilitate sînt

$$\begin{aligned}
(1.2)\quad & (X_1X_4) = X_3,\ (X_1X_5) = 0,\ (X_1X_6) = X_2,\ (X_1X_7) = 0,\ (X_1X_2) = \rho X_6,\\
& (X_2X_4) = 0,\ (X_2X_5) = 0,\ (X_2X_6) = 0,\ (X_2X_7) = X_2,\ (X_1X_3) = \rho X_4,\\
& (X_3X_4) = -X_1,\ (X_3X_5) = X_2,\ (X_3X_6) = 0,\ (X_3X_7) = 0,\ (X_3X_2) = \rho X_5,\\
& (X_4X_5) = X_6,\ (X_4X_7) = 0,\ (X_5X_7) = X_5,\\
& (X_4X_6) = -X_5,\ (X_5X_6) = 0,\ (X_6X_7) = X_6
\end{aligned}$$

și pot fi satisfăcute luînd operatorii principali de forma

$$(1.3)\qquad X_1 = p_1 - \rho x^1 U,\ X_2 = p_2,\ X_3 = p_3 - \rho x^3 U.$$

Folosind condițiile impuse de transformările (1.1) și (1.3) conexiunii și tensorului de torsiune

$$(1.4)\qquad \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^s}\xi^s + \Gamma^i_{sk}\frac{\partial \xi^s}{\partial x^j} + \Gamma^i_{js}\frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} - \Gamma^s_{jk}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^s},$$

$$0 = \frac{\partial T^i_{jk}}{\partial x^s}\xi^s + T^i_{sk}\frac{\partial \xi^s}{\partial x^j} + T^i_{js}\frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} - T^s_{jk}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^s},$$

se arată că spațiul este fără torsiune și deci rămîn valabile rezultatele din [8], conexiunea spațiului poate fi scrisă sub forma

$$(1.5)\qquad \Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j,$$

unde

$$(1.6)\qquad \varphi_i = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\ln[1 - \rho(x^1)^2 - \rho(x^3)^2]$$

Excludem cazul $\rho = 0$, cînd spațiul este euclidian. Avem astfel

TEOREMA 1. *Grupul* (1) *poate fi grup total de stabilitate al unui spațiu* A_3 *omogen numai în cazul* $b = \beta = 0$. *Spațiul corespunzător, admițînd grup de mișcări* G_7, *are conexiunea dată de* (1.5), (1.6) *cu* $\rho \neq 0$ *și este proiectiv euclidian.*

§2. SPAȚIILE A_3 OMOGENE CU GRUP DE STABILITATE (2)

Cu teoremele din [7] se arată că ne reducem la grupul de stabilitate

$$(2.1)\qquad X_4 = x^2 p_1,\ X_5 = x^2 p_3,\ X_6 = x^3 p_1 - x^1 p_3,\ X_7 = x^1 p_1 + x^3 p_3$$

în caz contrar spațiul A_3 admite grup $G_r(r > 7)$. Acest grup este întîlnit de G. Vrănceanu în determinarea spațiilor A_3 omogene neproiectiv euclidiene cu grup G_7 [9]. Ecuaţiile de structură ale grupului G_7 admiţînd (2.1) ca subgrup de stabilitate, pot fi aduse la forma

$$\begin{aligned}
(2.2)\quad & (X_1X_4) = 0,\ (X_2X_4) = X_1,\ (X_3X_4) = 0,\ (X_1X_3) = 0,\\
& (X_1X_5) = 0,\ (X_2X_5) = X_3,\ (X_3X_5) = 0,\ (X_2X_3) = pX_4 + qX_5,\\
& (X_1X_6) = -X_3,\ (X_2X_6) = 0,\ (X_3X_6) = X_1,\ (X_2X_1) = qX_4 - pX_5,\\
& (X_1X_7) = X_1,\ (X_2X_7) = 0,\ (X_3X_7) = X_3,\\
& (X_4X_5) = 0,\ (X_4X_6) = -X_5,\ (X_4X_7) = X_4,\\
& (X_5X_6) = X_4,\ (X_5X_7) = X_5,\ (X_6X_7) = 0.
\end{aligned}$$

Se arată că aceste ecuaţii pot fi satisfăcute luînd operatorii principali de forma

$$\begin{aligned}
(2.3)\quad & X_1 = p_1 + x^2(\varphi p_1 + \psi p_3),\ X_3 = p_3 + x^2(-\psi p_1 + \varphi p_3),\\
& X_2 = p_2 + (x^3\psi - x^1\varphi)\,p_1 - (x^1\psi + x^3\varphi)\,p_3,
\end{aligned}$$

unde funcţiile $\varphi(x^2)$, $\psi(x^2)$ analitice în vecinătatea originii satisfac sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{aligned}
(2.4)\quad & x^2\varphi' + x^2(\varphi^2 - \psi^2) + 2\varphi = qx^2\\
& x^2\psi' + 2x^2\varphi\psi + 2\psi = -px^2.
\end{aligned}$$

Relativ la existenţa soluţiilor se arată că sistemul (2.4) admite soluţie analitică unică pe intervalul $\left(\frac{-\pi}{\sqrt[4]{p^2+q^2}}, \frac{\pi}{\sqrt[4]{p^2+q^2}}\right)$ în cazul $p^2 + q^2 \neq 0$ şi soluţia banală $\varphi(x^2) = \psi(x^2) = 0$ în cazul $p^2 + q^2 = 0$. Componentele conexiunii se determină din (1.4) şi sînt

$$\begin{aligned}
(2.5)\quad & \Gamma^1_{12} = \Gamma^3_{32} = -\varphi + \alpha,\ \Gamma^1_{21} = \Gamma^3_{23} = -\varphi + \beta,\ \Gamma^2_{22} = \alpha + \beta\\
& \Gamma^1_{23} = -\Gamma^3_{21} = \psi + \gamma,\ \Gamma^3_{12} = -\Gamma^1_{32} = -\psi + \gamma\\
& \Gamma^1_{22} = \frac{2x^1\varphi - 2x^3\varphi}{x^2},\ \Gamma^3_{22} = \frac{2x^1\psi + 2x^3\varphi}{x^2}
\end{aligned}$$

cu α, β, γ constante arbitrare iar celelalte componente ale conexiunii fiind nule. Se arată că spaţiul admite grup maxim de mişcări G_7 numai dacă cantităţile γ, $p - 2\beta\gamma$ nu sînt ambele nule. Avem deci

TEOREMA 2. *Grupul* (2) *poate fi grup total de stabilitate al unui spaţiu* A_3 *omogen numai în cazul* $b = 0$, $\beta = -1$. *Spaţiul corespunzător admiţînd grup de mişcări* G_7 *are conexiunea dată de* (2.5) *cu cantităţile* γ, $p - 2\beta\gamma$ *nu ambele nule şi funcţiile* $\varphi(x^2)$, $\psi(x^2)$ *satisfăcînd sistemul* (2.4).

§3. SPAŢIILE A_3 OMOGENE CU GRUP DE STABILITATE (3)

Se arată că ne reducem la grupul de stabilitate

$$X_4 = x^1 p_2,\ X_5 = x^3 p_2,\ X_6 = x^1 p_3 - x^3 p_1 \tag{3.1}$$

în caz contrar spaţiul admite grup $G_r (r > 6)$.

Ecuaţiile de structură ale grupului G_6 admiţînd (3.1) subgrup de stabilitate pot fi aduse la forma

$$\begin{aligned} (3.2)\quad & (X_1X_4) = X_2,\ (X_2X_4) = 0,\ (X_3X_4) = 0,\ (X_1X_2) = \rho X_4,\\ & (X_1X_5) = 0,\ (X_2X_5) = 0,\ (X_3X_5) = X_2,\ (X_1X_3) = \rho X_6,\\ & (X_1X_6) = X_3,\ (X_2X_6) = 0,\ (X_3X_6) = -X_1,\ (X_3X_2) = \rho X_5,\\ & (X_4X_5) = 0,\ (X_4X_6) = X_5,\ (X_5X_6) = -X_4 \end{aligned}$$

şi pot fi satisfăcute luînd operatorii principali

$$X_1 = p_1 - \rho x^1 U,\ X_2 = p_2,\ X_3 = p_3 - \rho x^3 U. \tag{3.3}$$

Componentele conexiunii determinate din ecuaţiile (1.4) sînt

$$\begin{aligned} (3.4)\quad & \Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = \frac{\Gamma^3_{33}}{2} = \frac{-\rho x^3}{1-\rho(x^1)^2-\rho(x^3)^2},\\ & \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \frac{\Gamma^1_{11}}{2} = \frac{-\rho x^1}{1-\rho(x^1)^2-\rho(x^3)^2},\\ & \Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = \frac{\tau}{1-\rho(x^1)^2-\rho(x^3)^2}, \end{aligned}$$

iar restul componentelor conexiunii sînt nule. Se arată că acest spaţiu admite G_6 grup maxim de automorfisme numai dacă avem $\rho \neq 0$, $\tau \neq 0$ şi deci rezultă

TEOREMA 3. *Grupul* (3) *poate fi grup total de stabilitate al unui spaţiu A_3 omogen numai în cazul $b = 0$, $a = 0$. Spaţiul corespunzător admiţînd grup de mişcări G_6 are conexiunea dată de* (3.4) *cu $\rho \neq 0$, $\tau \neq 0$.*

§4. SPAŢIILE A_3 OMOGENE CU GRUP DE STABILITATE (4)

Ne putem reduce la grupul

$$X_4 = x^2 p_1,\ X_5 = x^2 p_3,\ X_6 = b(x^1 p_1 + x^3 p_3) + x^1 p_3 - x^3 p_1 \tag{4.1}$$

în caz contrar spaţiul este cu grup $G_r (r > 6)$.

Ecuaţiile de structură ale grupului G_6 admiţînd (4.1) ca subgrup de stabilitate se pot reduce la forma

$$\begin{aligned} (4.2)\quad & (X_1X_4) = 0,\ (X_2X_4) = 0,\ (X_3X_4) = 0,\\ & (X_1X_5) = 0,\ (X_2X_5) = X_3,\ (X_3X_5) = 0,\\ & (X_1X_6) = bX_1 + X_3,\ (X_2, X_6) = 0,\ (X_3X_6) = bX_3 - X_1,\\ & (X_1X_3) = 0, (X_2X_3) = 2mX_3 + pX_4 + qX_5, (X_2X_1) = 2mX_1 + qX_4 - pX_5,\\ & (X_4X_5) = 0,\ (X_4X_6) = bX_4 + X_5,\ (X_5X_6) = X_4 + bX_5, \end{aligned}$$

unde m, p, q sînt constante arbitrare. Putem satisface aceste ecuaţii luînd operatorii principali

$$(4.3)\quad X_1 = p_1 + x^2(\varphi p_1 + \psi p_3),\ X_3 = p_3 + x^2(-\psi p_1 + \varphi p_3)$$
$$X_2 = p_2 + (x^3\psi - x^1\varphi)\,p_1 - (x^1\psi + x^3\varphi)\,p_3$$

cu $\varphi(x^2)$, $\psi(x^2)$ funcţii analitice în vecinătatea originii şi satisfăcînd sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$(4.4)\quad x^2\varphi' + x^2(\varphi^2 - \psi^2) + 2\varphi = x^2q + 2m(1 + x^2\varphi)$$
$$x^2\psi' + 2x^2\varphi\psi + 2\psi = -x^2p + 2mx^2\psi.$$

Componentele conexiunii spaţiului obţinute din ecuaţiile (1.4) sînt

$$(4.5)\quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^3_{32} = -\varphi + \beta,\ \Gamma^1_{21} = \Gamma^3_{23} = -\varphi + \beta,\ \Gamma^2_{22} = \alpha + \beta - 2m$$
$$\Gamma^1_{23} = -\Gamma^3_{21} = \psi + \gamma,\ \Gamma^1_{32} = -\Gamma^3_{12} = \psi - \gamma$$
$$\Gamma^1_{22} = \frac{2(\varphi - m)\,x^1 - 2x^3\psi}{x^2},\ \Gamma^3_{22} = \frac{2(\varphi - m)x^3 + 2x^1\psi}{x^2}$$

iar restul componentelor sînt nule.

Dacă introducem notaţiile

$$(4.6)\quad \alpha = \bar{\alpha} + m,\ \beta = \bar{\beta} + m,\ \varphi(x^2) = \bar{\varphi}(x^2) + m,$$

ecuaţiile (4.5) se reduc la forma (2.5), iar sistemul (4.4) se reduce la sistemul (2.4), deci avem

TEOREMA 4. *Grupul (4) nu poate fi grup total de stabilitate al unui spaţiu A_3 omogen.*

§5. SPAŢIILE A_3 OMOGENE CU GRUP DE STABILITATE (5)

Avem deci grupul de stabilitate

$$(5.1)\quad X_4 = x^1p_2 - x^2p_1,\ X_5 = x^2p_3 - x^3p_2,\ X_6 = x^3p_1 - x^1p_3.$$

Ecuaţiile de structură ale grupului G_6 admiţînd (5.1) ca subgrup de stabilitate se pot aduce la forma

$$(5.2)\quad (X_4X_5) = -X_6,\ (X_4X_6) = X_5,\ (X_5X_6) = -X_4,$$
$$(X_1X_4) = X_2,\ (X_2X_4) = -X_1,\ (X_3X_4) = 0,$$
$$(X_1X_5) = 0,\ (X_2X_5) = X_3,\ (X_3X_5) = -X_2,$$
$$(X_1X_6) = -X_3,\ (X_2X_6) = 0,\ (X_3X_6) = X_1,$$
$$(X_1X_2) = aX_4,\ (X_2X_3) = aX_5,\ (X_3X_1) = aX_6$$

şi pot fi satisfăcute luînd operatorii principali [8]

$$(5.3)\quad X_1 = p_1 - ax^1U,\ X_2 = p_2 - ax^2U,\ X_3 = p_3 - ax^3U.$$

Se arată că în cazul $a \neq 0$, spaţiul este fără torsiune şi în acest caz conexiunea este dată de formulele

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j \tag{5.4}$$

cu

$$\varphi_i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} \ln [1 - a(x^1)^2 - a(x^2)^2 - a(x^3)^2]. \tag{5.5}$$

Spaţiul este riemannian cu curbură constantă şi grup G_6 de automorfisme [8].

Pentru $a = 0$ se obţine spaţiul cu conexiune constantă

$$\Gamma^1_{23} = \Gamma^2_{31} = \Gamma^3_{12} = -\Gamma^1_{32} = -\Gamma^2_{13} = -\Gamma^3_{21} = k \text{ (const.)} \tag{5.6}$$

şi restul componentelor nule. Pentru $k = 0$, spaţiul este euclidian iar pentru $k \neq 0$, spaţiul este cu torsiune şi admite grupul de automorfisme

$$\overline{x}^i = a^i_j x^j + a^i \tag{5.7}$$

cu determinantul $|a^i_j|$ ortogonal, grup care depinde de 6 parametri. Avem deci

Teorema 5. *Spaţiile* A_3 *avînd grupul* (5) *ca grup de stabilitate sînt sau spaţii riemanniene avînd conexiunea dată de* (5.4), (5.5) *sau spaţii cu conexiune constantă cu torsiune, componentele nenule ale conexiunii fiind date de* (5.6).

§6. SPAŢIILE A_3 OMOGENE CU GRUP DE STABILITATE (6)

Ne putem reduce la cazul grupului de stabilitate

$$X_4 = x^2 p_2, \; X_5 = x^1 p_3 - x^3 p_1 \tag{6.1}$$

în caz contrar spaţiul admiţînd grup $G_r (r > 5)$. Ecuaţiile de structură ale grupului G_5 sînt

$$\begin{aligned} &(X_1 X_4) = 0, \; (X_2 X_4) = X_2, \; (X_3 X_4) = 0, \\ &(X_1 X_5) = 0, \; (X_2 X_5) = 0, \; (X_3 X_5) = -X_1, \\ &(X_1 X_2) = 0, \; (X_2 X_3) = 0; \; (X_1 X_3) = \mu X_5, \; (X_4 X_5) = 0 \end{aligned} \tag{6.2}$$

şi pot fi satisfăcute luînd operatorii principali

$$X_1 = p_1 - \mu x^1 V, \; X_2 = p_2, \; X_3 = p_3 - \mu x^3 V, \tag{6.3}$$

unde

$$V = x^1 p_1 + x^3 p_3. \tag{6.4}$$

Componentele conexiunii se pot scrie sub forma

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j \qquad (i, j, k = 1, 3) \tag{6.5}$$

cu

$$\varphi_i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} \ln [1 - \mu (x^1)^2 - \mu (x^3)^2] \tag{6.6}$$

şi restul componentelor nule

Pentru $\mu = 0$, spaţiul este euclidian; pentru $\mu \neq 0$, spaţiul este produsul direct al unui spaţiu Riemann $V_2(x^1 x^3)$ cu curbură constantă cu o dreaptă afină. Avem astfel

TEOREMA 6. *Grupul* (6) *poate fi grup total de stabilitate al unui spaţiu A_3 omogen numai în cazul $a = b = 0$. Spaţiul corespunzător admiţînd grup de mişcări G_5, are conexiunea dată de* (6.5), (6.6) *şi este produsul direct al unui spaţiu Riemann $V_2(x^1, x^3)$ cu curbură constantă cu o dreaptă afină.*

§7. SPAŢIILE A_3 OMOGENE CU GRUP DE STABILITATE (7)

Se arată că ne putem reduce la grupul de stabilitate

$$X_4 = x^1 p_3 - x^3 p_1 \tag{7.1}$$

altfel spaţiul admite grup de mişcări $G_r (r > 4)$. Ecuaţiile de structură se reduc la forma

$$\begin{aligned} &(X_1 X_4) = X_3, \ (X_2 X_4) = 0, \ (X_3 X_4) = -X_1 \\ &(X_1 X_2) = \lambda X_1, \ (X_3 X_2) = \lambda X_3, \ (X_1 X_3) = \mu X_2 + \nu X_4 \end{aligned} \tag{7.2}$$

cu

$$\lambda (X_1 X_3) = 0. \tag{7.3}$$

Se arată că pentru $\lambda \neq 0$ obţinem spaţiul avînd componentele nenule ale conexiunii

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{12} = \Gamma^3_{32} = \alpha, \ \Gamma^3_{23} = \Gamma^1_{21} = \beta, \ \Gamma^2_{22} = \varepsilon \\ &\Gamma^1_{23} = -\Gamma^3_{21} = \gamma, \ \Gamma^1_{32} = -\Gamma^3_{12} = \delta, \ \Gamma^2_{13} = -\Gamma^2_{31} = \eta e^{-2\lambda x^2} \end{aligned} \tag{7.4}$$

cu $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$ constante arbitrare. În ipoteza $\eta \neq 0$, $\alpha - \beta \neq 0$ şi γ, δ nu ambele nule, grupul de automorfisme G_4 este dat de

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= a^1_1 x^1 + a^1_3 x^3 + a^1 \\ \bar{x}^2 &= x^2 + a^2 \\ \bar{x}^3 &= a^3_1 x^1 + a^3_3 x^3 + a^3 \end{aligned} \tag{7.5}$$

cu

$$a^1_3 + a^3_1 = 0, \ a^1_1 - a^3_3 = 0, \ a^1_1 a^3_3 - a^3_1 a^1_3 = e^{2\lambda a^2}. \tag{7.6}$$

În cazul $\lambda = 0$, notînd $\mu = 2a$, $\nu = 4b$, ecuaţiile (7.2) pot fi satisfăcute luînd operatorii principali

$$X_1 = p_1 - b[(x^1)^2 - (x^3)^2]\,p_1 - ax^3p_2 - 2bx^1x^3p_3, \tag{7.7}$$

$$X_2 = p_2,$$

$$X_3 = p_3 - 2bx^1x^3p_1 + ax^1p_2 + b[(x_1)^2 - (x^3)^2]\,p_3.$$

Se obţine spaţiul A_3 avînd componentele conexiunii

$$\Gamma^1_{22} = \Gamma^3_{22} = 0,\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^3_{32} = \alpha,\ \Gamma^1_{21} = \Gamma^3_{23} = \beta, \tag{7.8}$$

$$\Gamma^1_{23} = -\Gamma^3_{21} = \gamma,\ \Gamma^1_{32} = -\Gamma^3_{12} = \delta,\ \Gamma^2_{22} = \varepsilon,$$

$$\Gamma^3_{13} = -\frac{(a\delta + 2b)\,x^1 + a\beta x^3}{M},\ \Gamma^3_{31} = -\frac{(a\gamma + 2b)\,x^1 + a\alpha x^3}{M},$$

$$\Gamma^2_{23} = \frac{(\varepsilon - \beta)\,ax^1 + a\gamma x^3}{M},\ \Gamma^2_{32} = \frac{(\varepsilon - \alpha)\,ax^1 + a\delta x^3}{M},$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{a\delta x^1 - a(\varepsilon - \alpha)\,x^3}{M},\ \Gamma^2_{21} = \frac{a\gamma x^1 - a\,(\varepsilon - \beta)\,x^3}{M},$$

$$\Gamma^1_{11} = -\frac{2bx^1 + a\,(\alpha + \beta)\,x^3}{M},\ \Gamma^3_{33} = \frac{a\,(\alpha + \beta)x^1 - 2bx^3}{M},$$

$$\Gamma^1_{13} = \frac{a\alpha x^1 - (2b + a\gamma)x^3}{M},\ \Gamma^1_{31} = \frac{a\beta x^1 - (2b + a\delta)x^3}{M},$$

$$\Gamma^3_{11} = \frac{[2b + a(\gamma + \delta)]\,x^3}{M},\ \Gamma^1_{33} = \frac{[2b + a\,(\gamma + \delta)x^1]}{M},$$

$$\Gamma^2_{11} = -a\,\frac{[2b + a\,(\gamma + \delta)]\,x^1x^3 - a\,(\varepsilon - \alpha - \beta)\,(x^3)^2}{M^2},$$

$$\Gamma^2_{33} = -a\,\frac{[2b + a\,(\gamma + \delta)]\,x^1x^3 - a\,(\varepsilon - \alpha - \beta)\,(x^1)^2}{M^2},$$

$$\Gamma^2_{13} = a\,\frac{(b + a\delta)\,(x^1)^2 + a\,(\alpha + \beta - \varepsilon)\,x^1x^3 - (b + a\gamma)\,(x^3)^2 + \eta}{M^2},$$

$$\Gamma^2_{31} = a\,\frac{(b + a\gamma)\,(x^1)^2 + a\,(\alpha + \beta - \varepsilon)x^1x^3 - (b + a\delta)\,(x^3)^2 - \eta}{M^2},$$

unde $M = 1 - b\,(x^1)^2 - b\,(x^3)^2$. Avem deci

TEOREMA 7. *Grupul* (7) *poate fi grup total de stabilitate al unui spaţiu* A_3 *omogen numai în cazul* $a = b = 0$. *Spaţiul* A_3 *corespunzător are conexiunea dată de* (7.4) *sau de* (7.8).

Primită la redacţie la 4 decembrie 1967

Institutul de construcţie Bucureşti

SUR LES ESPACES A_3 HOMOGÈNES À GROUPE $G_r(r \leqslant 7)$

RÉSUMÉ

On détermine les espaces A_3 homogènes avec des groupes de mouvements $G_r(r \leqslant 7)$ ayant les groupes de stabilité (1) — (7) irréductibles en réel aux types de la classification des sous-groupes du groupe centro-affine en trois variables donnée par S. Lie. Les espaces obtenus, ainsi que ceux obtenus par V. Dumitraş en utilisant la classification de S. Lie mentionnée, sont tous les espaces A_3 homogènes possédant les groupes de mouvements $G_r(r \leqslant 7)$.

BIBLIOGRAFIE

1. V. Dumitraş, *Determinarea spaţiilor A_3 cu grup tranzitiv G_7*. St. cerc. mat., **8**, *1—2*, 183—234 (1957).
2. V. Dumitraş, *Grupurile de mişcare cu 6 parametri ale spaţiilor A_3*. St. cerc. mat., **8**, *3—4*, 303—342 (1957).
3. V. Dumitraş, *Determinarea spaţiilor omogene A_3 cu grup de mişcări G_5*. St. cerc. mat., **10**, *2*, 331—364 (1959).
4. V. Dumitraş, *Grupurile de mişcare cu 4 parametri ale spaţiilor A_3*. St. cerc. mat., **11**, *1*, 133—157 (1960).
5. S. Lie, F. Engel, *Theorie der Transformation gruppen*. Leipzig, t. III, 1893, p. 117.
6. I. Matei, *Asupra subgrupurilor grupului centro-afin în trei variabile*. St. cerc. mat., **20**, *10* (1968).
7. I. Matei, *Asupra grupului de stabilitate al unui spaţiu A_3 omogen*. St. cerc. mat., **21**, *1* (1969).
8. V. Dumitraş, *Clasificarea spaţiilor A_3 proiectiv euclidiene*. Analele Univ. Buc., Seria St. Naturii, *19* (1958).
9. G. Vrănceanu, *Sur les espace A_3 non projectivement euclidiens à groupe transitiv G_7*. Journal of the Math. Soc. Japan, **10**, 221—233 (1958).

NOMOGRAME DE GENUL DOI CU SCARĂ RECTILINIE REGULATĂ SAU PROIECTIVĂ

DE

MARIA MIHOC
(Cluj)

În lucrare se cercetează reprezentarea ecuaţiilor de ordinul cinci nomografic (1′) cu ajutorul nomogramelor cu puncte aliniate cu o scară rectilinie. Se dau pentru fiecare tip de nomogramă considerat formule pentru calculul parametrilor scărilor nomogramei.

În această lucrare vom cerceta reprezentarea ecuaţiilor de ordinul cinci nomografic, cu ajutorul nomogramelor cu puncte aliniate cu o scară rectilinie şi celelalte scări situate pe două curbe oarecare.

Fie ecuaţia de ordinul cinci nomografic cu trei variabile de forma :

$$\begin{aligned}&(A_0 f_1 f_2 + A_1 f_1 g_2 + A_2 f_2 + A_3 g_2 + A_4 f_1 + A_5) f_3 +\\ &+ (B_0 f_1 f_2 + B_1 f_1 g_2 + B_2 f_2 + B_3 g_2 + B_4 f_1 + B_5)\, g_3 +\\ &+ (C_0 f_1 f_2 + C_1 f_1 g_2 + C_2 f_2 + C_3 g_2 + C_4 f_1 + C_5) = 0,\end{aligned} \tag{1}$$

unde $f_1 = f_1(x)$, $f_2 = f_2(y)$, $g_2 = g_2(y)$, $f_3 = f_3(z)$, $g_3 = g_3(z)$.

Se caută în ce condiţii ecuaţia (1) se poate reprezenta printr-o nomogramă cu puncte aliniate avînd scara rectilinie regulată, sau proiectivă. Pentru aceasta $f_1(x) = x$ şi deci ecuaţia (1) devine :

$$\begin{aligned}&(A_0 f_2 x + A_1 g_2 x + A_2 f_2 + A_4 g_2 + A_4 x + A_5) f_3 +\\ &+ (B_0 f_2 x + B_1 g_2 x + B_2 f_2 + B_3 g_2 + B_4 x + B_5)\, g_3 +\\ &+ (C_0 f_2 x + C_1 g_2 x + C_2 f_2 + C_3 g_2 + C_4 x + C_5) = 0.\end{aligned} \tag{1'}$$

1. Se consideră mai întîi cazul cînd scara rectilinie a nomogramei este regulată. Ecuaţia lui Soreau este atunci următoarea :

$$\begin{vmatrix} a'x + b' & c'x + d' & 1 \\ e'f_2 + f'g_2 + g' & h'f_2 + i'g_2 + j' & 1 \\ l'f_3 + m'g_3 + n' & p'f_3 + r'g_3 + s' & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 1, P. 111–118, BUCUREŞTI, 1969

Printr-o transformare afină corespunzătoare putem aduce determinantul (2) la forma :

$$\begin{vmatrix} ax & 0 & 1 \\ bf_2 + cg_2 + d & ef_2 + fg_2 + g & 1 \\ \rho f_3 + hg_3 + j & \nu f_3 + mg_3 + n & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

unde $a, b, c, d, e, f, g, \rho, h, j, \nu, m, n$ sînt parametrii scărilor nomogramei.

Să împărţim coloana întîi a determinantului (3) prin unul din parametrii b, c sau ρ, h şi a doua coloană prin unul din parametrii e, f sau ν, m (cel puţin cîte un parametru din aceste perechi este diferit de zero, deoarece în caz contrar curba degenerează într-o dreaptă şi astfel ordinul nomografic scade). Pentru simplificarea ideilor întrucît $\rho \neq 0$ şi $\nu \neq 0$, luăm $\rho = \nu = 1$.

Dezvoltînd în acest caz membrul stîng al ecuaţiei (3) găsim :

$$\begin{aligned} &(b - e) f_2 f_3 + (c - f) g_2 f_3 - af_3 x + (d - g) f_3 + (bm - eh) f_2 g_3 + \\ &+ (cm - fh) g_2 g_3 - amg_3 x + (dm - gh) g_3 + aef_2 x + afg_2 x + \\ &+ (bn - ej) f_2 + (cn - fj) g_2 + a(g - n)x + dn - gj = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Pentru determinarea condiţiilor în care o ecuaţie de ordinul cinci nomografic se reprezintă printr-o astfel de nomogramă, identificăm coeficienţii ecuaţiilor (1′) şi (4). Dacă $A_0 = A_1 = B_0 = B_1 = 0$, găsim sistemul :

$$\begin{aligned} b - e &= A_2, & dm - gh &= B_5, \\ c - f &= A_3, & ae &= C_0, \\ -a &= A_4, & af &= C_1, \\ d - g &= A_5, & bn - ej &= C_2, \\ bm - eh &= B_2, & cn - fj &= C_3, \\ cm - fh &= B_3, & a(g - n) &= C_4, \\ -am &= B_4, & dn - gj &= C_5. \end{aligned} \tag{5}$$

1.1. Dacă $C_0 \neq 0$, soluţia sistemului (5) este :

$$\begin{aligned} &a = -A_4, \; b = A_2 - \frac{C_0}{A_4}, \; c = A_3 - \frac{C_1}{A_4}, \; d = A_5 + \frac{C_0(A_5B_4 - A_4B_5)}{A_4(A_4B_2 - A_2B_4)}, \\ &e = -\frac{C_0}{A_4}, \; f = -\frac{C_1}{A_4}, \; g = \frac{C_0(A_5B_4 - A_4B_5)}{A_4(A_4B_2 - A_2B_4)}, \\ &h = \frac{A_4B_2 - A_2B_4}{C_0} + \frac{B_4}{A_4}, \\ &j = \frac{A_4(A_2C_3 - A_3C_2) + C_1C_2 - C_0C_3}{A_2C_1 - A_3C_0}, \; m = \frac{B_4}{A_4}, \; n = \frac{C_1C_2 - C_0C_3}{A_2C_1 - A_3C_0}. \end{aligned} \tag{6}$$

Compatibilitatea sistemului (5) este asigurată de următoarele condiții :

$$\begin{aligned} & C_0(A_4B_3 - A_3B_4) = C_1(A_4B_2 - A_2B_4), \\ (7) \qquad & \frac{A_4(C_1C_2 - C_0C_3)}{A_2C_1 - A_3C_0} - \frac{C_0(A_5B_4 - A_4B_5)}{A_4B_2 - A_2B_4} = C_4, \\ & A_5\frac{C_1C_2 - C_0C_3}{A_2C_1 - A_3C_0} - \frac{C_0(A_5B_4 - A_4B_5)(A_2C_3 - A_3C_2)}{(A_4B_2 - A_2B_4)(A_2C_1 - A_3C_0)} = C_5. \end{aligned}$$

1.2. Dacă $C_0 = 0$, soluția sistemului (5) se obține din soluția (6) cu condițiile (7), unde se înlocuiește raportul $\dfrac{C_0}{A_4B_2 - A_2B_4}$ cu raportul $\dfrac{C_1}{A_4B_3 - A_3B_4}$.

2. Cercetăm acum cazul cînd scara rectilinie a nomogramei este proiectivă. În acest caz ecuația lui Soreau este :

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{a'x + b'}{x + c'} & \dfrac{d'x + e'}{x + f'} & 1 \\ g'f_2 + h'g_2 + i' & j'f_2 + k'g_2 + m' & 1 \\ n'f_3 + p'g_3 + r' & s'f_3 + t'g_3 + u' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

În urma unei transformări proiective putem aduce scara rectilinie pe una din axele de coordonate

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\rho x + a}{x + b} & 0 & 1 \\ cf_2 + dg_2 + e & gf_2 + hg_2 + j & 1 \\ mf_3 + ng_3 + p & \nu f_3 + sg_3 + t & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltînd membrul stîng al ecuației (9), unde pentru simplificarea calculelor s-a considerat $\rho = \nu = 1$, găsim :

$$\begin{aligned} & (c - gm) f_2f_3x + (d - hm) g_2f_3x + b(c - gm)f_2f_3 + \\ & + b(d - hm) g_2f_3 + (-1 + e - jm) f_3x + [- a + b (e - jm))] f_3 + \\ & + (cs - ng) f_2g_3x + (ds - hn) g_2g_3x + b(cs - ng) f_2g_3 + \\ & + b (ds - hn) g_2g_3 + (- s + es - jn) g_3x + [-as + \\ (10) \qquad & + b(es - jn)] g_3 + (g + ct - gp) f_2x + (h + dt - hp) g_2x + \\ & + [ag + b(ct - gp)] f_2 + [ah + b(dt - hp)] g_2 + \\ & + [j - t + (et - pj)] x + a(j - t) + b(et - pj) = 0. \end{aligned}$$

Pentru a găsi condiţiile în care ecuaţia (1′) se reprezintă printr-o nomogramă cu puncte aliniate cu scara regulată proiectivă, iar celelalte două scări situate de două curbe, rezolvăm sistemul obţinut prin identificarea coeficienţilor ecuaţiilor (1′) şi (10) :

$$\begin{array}{ll}
c - gm = A_0, & b(ds - hn) = B_3, \\
d - hm = A_1, & -s + es - jn = B_4, \\
b(c - gm) = A_2, & -as + b(es - jn) = B_5, \\
b(d - hm) = A_3, & g + ct - gp = C_0, \\
-1 + e - jm = A_4, & h + dt - hp = C_1, \\
-a + b(e - jm) = A_5, & ag + b(ct - gp) = C_2, \\
cs - ng = B_0, & ah + b(dt - hp) = C_3, \\
ds - hn = B_1, & j - t + et - pj = C_4, \\
b(cs - ng) = B_2, & a(j - t) + b(et - pj) = C_5.
\end{array} \tag{11}$$

2.1. Dacă $A_0 \neq 0$ şi $A_0C_2 - A_2C_0 \neq 0$, soluţia sistemului (11) este următoarea :

$$a = \frac{A_2A_4 - A_0A_5 + A_2}{A_0}, \quad b = \frac{A_2}{A_0}, \quad c = A_0 + \frac{A_0C_2 - A_2C_0}{A_2A_4 - A_0A_5}m$$

$$d = A_1 + \frac{A_0C_3 - A_2C_1}{A_2A_4 - A_0A_5}m, \quad g = \frac{A_0C_2 - A_2C_0}{A_2A_4 - A_0A_5},$$

$$e = 1 + A_4 + \frac{A_0(A_5B_4 - A_4B_5)}{A_0A_5B_0 - A_2A_4B_0 - A_0^2B_5 + A_0A_2B_4} \cdot \frac{A_0C_2 - A_2C_0}{A_2A_4 - A_0A_5}m,$$

$$h = \frac{A_0C_3 - A_2C_1}{A_2A_4 - A_0A_5},$$

$$j = \frac{A_0C_2 - A_2C_0}{A_2A_4 - A_0A_5} \cdot \frac{A_0(A_5B_4 - A_4B_5)}{A_0A_5B_0 - A_2A_4B_0 - A_0^2B_5 + A_0A_2B_4},$$

$$n = \frac{A_0B_5 - A_2B_4}{A_0A_5 - A_2A_4}m + \frac{A_0A_5B_0 - A_2A_4B_0 - A_0^2B_5 + A_0A_2B_4}{A_0C_2 - A_2C_0}, \tag{12}$$

$$p = 1 - C_0\frac{A_2A_4 - A_0A_5}{A_0C_2 - A_2C_0} + \left(A_0 + \frac{A_0C_2 - A_2C_0}{A_2A_4 - A_0A_5}m\right) \times$$

$$\times \left[\frac{A_0(A_5B_4 - A_4B_5)}{A_0A_5B_0 - A_2A_4B_0 - A_0^2B_5 + A_0A_2B_4} - \frac{A_0C_5 - A_2C_4}{A_0C_2 - A_2C_0}\right],$$

$$s = \frac{A_0B_5 - A_2B_4}{A_0A_5 - A_2A_4},$$

$$t = \frac{A_0C_2 - A_2C_0}{A_2A_4 - A_0A_5}\,\frac{A_0(A_5B_4 - A_4B_5)}{A_0A_5B_0 - A_2A_4B_0 - A_0^2B_5 + A_0A_2B_4} - \frac{A_0C_5 - A_2C_4}{A_2A_4 - A_0A_5},$$

unde parametrul m rămîne arbitrar.

Sistemul (11) este compatibil dacă sînt îndeplinite următoarele condiţii :

$$\frac{A_2}{A_0} = \frac{A_3}{A_1} = \frac{B_2}{B_0} = \frac{B_3}{B_1}$$

$$\frac{A_0C_2 - A_2C_0}{A_0C_3 - A_2C_1} = \frac{A_0A_5B_0 - A_2A_4B_0 - A_0^2B_5 + A_0A_2B_4}{A_0A_5B_1 - A_2A_4B_1 - A_0A_1B_5 + A_1A_2B_4}$$

$$(13) \quad B_1C_0 - B_0C_1 - (A_1C_0 - A_0C_1)\frac{A_0B_5 - A_2B_4}{A_0A_5 - A_2A_4} +$$

$$+ (A_1B_0 - A_0B_1)\left[\frac{A_0C_2 - A_2C_0}{A_2A_4 - A_0A_5}\,\frac{A_0(A_5B_4 - A_4B_5)}{A_0A_5B_0 - A_2A_4B_0 - A_0^2B_5 + A_0A_2B_4} -\right.$$

$$\left. - \frac{A_0C_5 - A_2C_4}{A_2A_4 - A_0A_5}\right] = 0$$

$$B_4C_0 - B_0C_4 - (A_4C_0 - A_0C_4)\frac{A_0B_5 - A_2B_4}{A_0A_5 - A_2A_4} +$$

$$+ (A_4B_0 - A_0B_4)\left[\frac{A_0C_2 - A_2C_0}{A_2A_4 - A_0A_5}\,\frac{A_0(A_5B_4 - A_4B_5)}{A_0A_5B_0 - A_2A_4B_0 - A_0^2B_5 + A_0A_2B_4} -\right.$$

$$\left. - \frac{A_0C_5 - A_2C_4}{A_2A_4 - A_0A_5}\right] = 0.$$

2.2. Dacă $A_0 \neq 0$, $A_0C_2 - A_2C_0 = 0$, soluţia sistemului (11) este următoarea :

$$a = \frac{A_2A_4 - A_0A_5 + A_2}{A_0}, \quad b = \frac{A_2}{A_0}; \; c = A_0, \; d = A_1 +$$

$$+ \frac{A_0C_3 - A_2C_1}{A_2A_4 - A_0A_5}m, \quad e = 1 + A_4 + \frac{(A_0B_4 - A_4B_0)(A_0C_3 - A_2C_1)}{(A_0B_1 - A_1B_0)(A_2A_4 - A_0A_5)}m,$$

$$g = 0, \; h = \frac{A_0C_3 - A_2C_1}{A_2A_4 - A_0A_5} \; j = \frac{C_0}{A_0} + \frac{A_0C_5 - A_2C_4}{A_2A_4 - A_0A_5},$$

$$(14) \quad n = \frac{B_0}{A_0}m - \frac{(A_0B_1 - A_1B_0)(A_2A_4 - A_0A_5)}{A_0(A_0C_3 - A_2C_1)},$$

$$p = 1 + \frac{(A_1C_0 - A_0C_1)(A_2A_4 - A_0A_5)}{A_0(A_0C_3 - A_2C_1)} + \frac{C_0}{A_0}m,$$

$$s = \frac{B_0}{A_0}, \; t = \frac{C_0}{A_0},$$

unde m este un parametru arbitrar.

Soluția (14) are loc dacă următoarele condiții sînt îndeplinite :

$$
(15)\quad
\begin{aligned}
&\frac{A_2}{A_0} = \frac{A_3}{A_1} = \frac{B_2}{B_0} = \frac{B_3}{B_1} = \frac{C_2}{C_0},\\
&\frac{A_0B_5 - A_2B_4}{A_0A_5 - A_2A_4} = \frac{B_0}{A_0},\\
&A_0(A_0B_4 - A_4B_0)(A_0C_3 - A_2C_1) = (A_0B_1 - A_1B_0)\,[A_0(A_0C_5 -\\
&\quad - A_2C_4) + C_0(A_2A_4 - A_0A_5)],\\
&A_0(A_0C_4 - A_4C_0)(A_0C_3 - A_2C_1) = (A_0C_1 - A_1C_0)\,[A_0\,(A_0C_5 -\\
&\quad - A_2C_4) + C_0(A_2A_4 - A_0A_5)].
\end{aligned}
$$

2.3. Dacă $A_0 = 0$, rezultă și $A_2 = 0$, iar soluția sistemului (11) este :

$$
(16)\quad
\begin{aligned}
&a = \frac{A_3A_4 - A_1A_5 + A_3}{A_1}, \quad b = \frac{A_3}{A_1}, \quad c = \frac{A_1C_2 - A_3C_0}{A_3A_4 - A_1A_5}\,m,\\
&d = A_1 + \frac{A_1C_3 - A_3C_1}{A_3A_4 - A_1A_5}\,m, \qquad g = \frac{A_1C_2 - A_3C_0}{A_3A_4 - A_1A_5},\\
&e = 1 + A_4 + \frac{A_1(A_5B_4 - A_4B_5)}{B_0(A_1A_5 - A_3A_4)} \cdot \frac{A_1C_2 - A_3C_0}{A_3A_4 - A_1A_5}\,m,\\
&h = \frac{A_1C_3 - A_3C_1}{A_3A_4 - A_1A_5}, \quad j = \frac{A_1(A_5B_4 - A_4B_5)(A_3C_0 - A_1C_2)}{B_0(A_3A_4 - A_1A_5)^2},\\
&n = \frac{A_1B_5 - A_3B_4}{A_1A_5 - A_3A_4}\,m - \frac{B_0(A_3A_4 - A_1A_5)}{A_1C_2 - A_3C_0},\\
&p = 1 - \frac{C_0(A_3A_4 - A_1A_5)}{A_1C_2 - A_3C_0} + \left[\frac{A_1(A_5B_4 - A_4B_5)(A_3C_0 - A_1C_2)}{B_0(A_3A_4 - A_1A_5)^2} -\right.\\
&\qquad \left. - \frac{A_1C_5 - A_3C_4}{A_3A_4 - A_1A_5}\right]m,\\
&s = \frac{A_1B_5 - A_3B_4}{A_1A_5 - A_3A_4},\\
&t = \frac{A_1(A_5B_4 - A_4B_5)(A_3C_0 - A_1C_2)}{B_0(A_3A_4 - A_1A_5)^2} - \frac{A_1C_5 - A_3C_4}{A_3A_4 - A_1A_5},
\end{aligned}
$$

unde *m* rămîne un parametru arbitrar.

Soluția (16) are loc dacă următoarele condiții sînt îndeplinite :

$$\frac{A_3}{A_1}=\frac{B_2}{B_0}=\frac{B_3}{B_1},$$

$$\frac{A_1C_2-A_3C_0}{A_1C_3-A_3C_1}=\frac{B_0(A_1A_5-A_3A_4)}{A_1A_5B_1-A_3A_4B_1-A_1^2B_5+A_1A_3B_4},$$

$$\tag{17} B_1C_0-B_0C_1-A_1C_0\frac{A_1B_5-A_3B_4}{A_1A_5-A_3A_4}+$$

$$+A_1B_0\left[\frac{A_1(A_5B_4-A_4B_5)(A_3C_0-A_1C_2)}{B_0(A_3A_4-A_1A_5)^2}-\frac{A_1C_5-A_3C_4}{A_3A_4-A_1A_5}\right]=0,$$

$$B_4C_0-B_0C_4-A_4C_0\frac{A_1B_5-A_3B_4}{A_1A_5-A_3A_4}+$$

$$+A_4B_0\left[\frac{A_1(A_5B_4-A_4B_5)(A_3C_0-A_1C_2)}{B_0(A_3A_4-A_1A_5)^2}-\frac{A_1C_5-A_3C_4}{A_3A_4-A_1A_5}\right]=0.$$

Exemple. 1. Considerăm ecuația de ordinul cinci nomografic :

$$(f_2+g_2-x-2)f_3+(-3f_2-4g_2+2x-3)g_3+f_2x+$$
$$+2g_2x+3f_2+4g_2+5x+3=0.$$

În acest caz, condițiile (7) sînt îndeplinite și $C_0=1$.

Parametrii scărilor nomogramei se calculează după formulele (6) :

$$a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=5,\ e=1,\ f=2,\ g=7,\ h=-1,$$
$$j=1,\ m=-2,\ n=2.$$

Ecuația lui Soreau corespunzătoare este :

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1\\ 2f_2+3g_2+5 & f_2+2g_2+7 & 1\\ f_3-g_3+1 & f_3-2g_3+2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

2. Se dă ecuația de ordinul cinci nomografic :

$$(f_2x+2g_2x+2f_2+4g_2+3x+5)F_3+(2f_2x+g_2x+4f_2+$$
$$+2g_2+x+1)g_3+f_2x+2g_2x+3f_2+3g_2+3x+2=0.$$

Condițiile (13) sînt îndeplinite, $A_0\neq0$, $A_0C_2-A_2C_0\neq0$, iar parametrii scărilor nomogramei, calculați după formulele (12), sînt :

$$a=3,\ b=2,\ c=1+m,\ d=2-m,\ e=4-2m,$$
$$g=1,\ h=-1,\ j=-2,\ n=-1+m,$$
$$p=1+m,\ s=1,\ t=1.$$

În acest caz ecuaţia lui Soreau este :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{x+3}{x+2} & 0 & 1 \\ (1+m)f_2+(2-m)g_2+(4-2m) & f_2-g_2-2 & 1 \\ mf_3+(1+m)g_3+(1+m) & f_3+g_3+1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Primită la redacţie la 18 martie 1968

Academia Republicii Socialiste România
— filiala Cluj. Institutul de calcul.

NOMOGRAMMES DE GENRE DEUX À ÉCHELLE RECTILIGNE RÉGULIÈRE OU PROJECTIVE

RÉSUMÉ

Dans ce travail on étudie la représentation des équations du cinquième ordre nomographiques (1′) à l'aide des nomogrammes à points alignés à une échelle rectiligne et deux autres échelles disposées sur deux courbes quelconques.

On considère le cas où l'échelle rectiligne du nomogramme est régulière. L'équation de Soreau est (3), où $\rho = \nu = 1$. Si les conditions (7) sont remplies, les valeurs des paramètres des échelles du nomogramme sont données par la solution (6) du système (5).

On traite ensuite le cas où l'échelle rectiligne du nomogramme est projective. On analyse les sous-cas 2.1, 2.2, 2.3, on donne les valeurs des paramètres des échelles du nomogramme, ainsi que les conditions qu'il faut remplir pour que la solution du système existe.

BIBLIOGRAFIE

1. BAL L., RADÓ F., *Lecţii de nomografie.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1956.
2. BAL L., MIHOC M., *Sur une classe de nomogrammes à échelles de type donné.* Mathematica, **8** (**31**), *2*, 199—216 (1966).
3. ДЖЕМС Л. Е., КАЗМИН В. В., *Номограммы с равномерными прямолинейными шкалами.* Номографической сборник, Москва, **2**, 133—1340 (1962).
4. ГЛАГОЛЕВ Н. А., *Курс номографии*, Изд. 2-е, М. Гос. изд.-во, ,,Высшая школа'', 1961.

ASUPRA CURBELOR DE GRAD MINIM NEOLONOME

DE

SIMONA PANTAZI

Articolul de față are drept scop să demonstreze o proprietate a curbelor unicursale neolonome în spațiul euclidian E_3.

Profesorul G. Vrănceanu a arătat [1]) că fiind dată ecuația lui Pfaff redusă la forma canonică

$$dz - x\,dy = 0 \tag{1}$$

în spațiul euclidian $E_3(x, y, z)$ există întotdeauna o curbă unicursală de gradul cinci care să treacă prin două puncte date arbitrar. A mai arătat că printr-o schimbare de variabile convenabilă, originea axelor poate fi întotdeauna luată într-unul din puncte. Vrem să arătăm, în urma propunerii prof. G. Vrănceanu, că în acest sistem de coordonate există curbe de gradul trei, care pot uni originea cu un punct arbitrar, dacă acest punct nu este situat pe axa OZ.

Vom considera pentru demonstrație toate curbele

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

de grad mai mic decît cinci, care satisfac relația :

$$\frac{dz}{dt} - x\frac{dy}{dt} = 0 \tag{2}$$

şi care pentru valoarea $t = 0$ a parametrului trec prin origine, iar pentru $t = 1$ printr-un punct arbitrar $P(x_1, y_1, z_1)$ al spațiului. Putem observa că gradul lui $z(t)$ este întotdeauna egal cu gradul produsului $x(t)\,y(t)$. Observăm de asemenea că $x(t)$ sau $y(t)$ nu pot fi constante diferite de zero,

---

1) G. Vrănceanu, *Varieta differenziabili anolonome*. Rend. Sem. Matem. Messina. **X**, 2°, 139–145 (1965–66).

căci atunci nu satisfac condiției de a se anula pentru $t = 0$ și deci curba nu ar trece prin origine.

Curbele de gradul doi se obțin luînd $x(t)$ și $y(t)$ de gradul întîi :

$$x = at, \quad y = \alpha t$$

care introduse în ecuația (2) ne dau :

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = a\alpha t,$$

de unde prin integrare se obține curba de ecuații parametrice :

$$x = at, \quad y = \alpha t, \quad z = \frac{a\alpha}{2} t^2. \tag{3}$$

Pentru o astfel de curbă numărul parametrilor nu este în general suficient de mare pentru a o putea determina să treacă printr-un punct arbitrar $P(X_1, Y_1, Z_1)$ al spațiului pentru $t = 1$ decît dacă x_1, y_1, z_1 satisfac ecuației :

$$z_1 = \frac{x_1 y_1}{2}. \tag{3'}$$

Să căutăm curbe de gradul trei alegînd

$$x = at, \quad y = \alpha t + \beta t^2.$$

Procedînd ca mai sus se va obține curba :

$$x = at, \quad y = \alpha t + \beta t^2, \quad z = \frac{a\alpha}{2} t^2 + \frac{2a\beta}{3} t^3. \tag{4}$$

Impunînd curbei să treacă prin punctul $P_1(x_1, y_1, z_1)$, pentru $t = 1$ obținem :

$$x_1 = a, \quad y_1 = \alpha + \beta, \quad z_1 = \frac{a\alpha}{2} + \frac{2a\beta}{3}$$

deci :

$$a = x_1 \,; \quad \beta = y_1 - \alpha \,; \quad \alpha = \frac{4x_1 y_1 - 6z_1}{x_1}.$$

Se observă de aici că numai punctele planului $x_1 = 0$ nu pot fi unite printr-o astfel de curbă.

Tot o curbă de gradul trei se obține alegînd :

$$x = at + \beta t^2, \quad y = \alpha t$$

de unde curba :

$$x = at + bt^2, \quad y = \alpha t, \quad z = \frac{a\alpha}{2} t^2 + \frac{\alpha b}{3} t^3 \tag{5}$$

şi pentru determinarea parametrilor în aşa fel încît aceasta să treacă prin punctul $P_1 (x_1, y_1, z_1)$, relaţiile :

$$b = x_1 - a, \ \alpha = y_1, \ a = \frac{6z_1 - 2x_1 y_1}{y_1}$$

de unde condiţia ca $y_1 \neq 0$. Deci numai punctele planului $y = 0$ nu pot fi unite printr-o astfel de curbă.

Deci nu există curbe de gradul trei care să unească originea cu un punct al axei OZ, deoarece pentru un asemenea punct avem $x = y = 0$.

Să căutăm curbe de gradul patru. Pentru

$$x = at, \ y = \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3$$

se obţine curba

$$x = at, \ y = \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3, \ z = \frac{a\alpha}{2} t^2 + \frac{2a\beta}{3} t^3 + \frac{3a\gamma}{4} t^4 \tag{6}$$

şi pentru determinarea parametrilor pentru care curba trece prin punctul $P_1 (x_1, y_1, z_1)$ pentru $t = 1$, avem relaţiile :

$$a = x_1, \ \gamma = y_1 - \alpha - \beta, \ 3x_1\alpha + x_1\beta = 9x_1 y_1 - 12 z_1$$

de unde condiţia ca $x_1 \neq 0$. Dacă luăm

$$x = at + bt^2, \ y = \alpha t + \beta t^2$$

se obţine curba :

$$\begin{aligned} x &= at + bt^2 \\ y &= \alpha t + \beta t^2 \\ z &= \frac{a\alpha}{2} t^2 + \frac{2a\beta + \alpha b}{3} t^3 + \frac{2b\beta}{4} t^4 \end{aligned} \tag{7}$$

şi pentru determinarea parametrilor, ca mai sus :

$$b = x_1 - a; \ \beta = y_1 - \alpha; \ ay_1 - \alpha x_1 = 6z_1 - 3x_1 y_1$$

de unde condiţia că sau $x_1 \neq 0$ sau $y_1 \neq 0$.

Deci punctele axei OZ nu pot fi unite printr-o astfel de curbă.

Se mai obţine o curbă de gradul patru alegînd :

$$x = at + bt^2 + ct^3, \ y = \alpha t$$

de unde rezultă curba :

$$x = at + bt^2 + ct^3, \ y = \alpha t, \ z = \frac{a\alpha}{2} t^2 + \frac{\alpha b}{3} t^3 + \frac{\alpha c}{4} t^4$$

iar pentru determinarea parametrilor relaţiile :

$$c = x_1 - a - b, \ \alpha = y_1, \ 3ay_1 + by_1 = 12z_1 - 3x_1y_1$$

deci condiţia $y_1 \neq 0$. Avem deci teorema :

Nu există curbe unicursale neolonome de gradul patru, care să unească originea cu un punct al axei OZ.

Ţinînd seama de rezultatul dat de prof. G. Vrănceanu rezultă că numai curbele unicursale de gradul cinci au proprietatea de a uni două puncte oarecare din spaţiu.

Primită la redacţie la 25 martie 1968.

Institutul de Construcţii
Bucureşti

SUR LES COURBES DE GRADE MINIMUM NÉOLONOMES

RÉSUMÉ

Le but du présent article est de démontrer une propriété des courbe unicurselles néolonomes dans l'espace euclidien E_3.

CONTEXTE CARACTERISTICE ÎN LINGVISTICA ALGEBRICĂ

DE

CONSTANTIN T. RAISCHI

În acest articol, în prima parte se propun două definiţii riguroase pentru conceptul de context caracteristic, utilizat în lingvistica structurală pentru definirea părţii de vorbire şi a categoriilor gramaticale.

În a doua parte se defineşte relaţia de *Δ-dominare-X* şi se dau unele proprietăţi ale ei.

1. INTRODUCERE

Conceptul de context caracteristic, introdus de Z. S. Harris în [7] este utilizat în lingvistica structurală pentru definirea părţii de vorbire şi a categoriilor gramaticale. O definiţie riguroasă a acestui concept nu a fost dată. Singura trăsătură specifică a unui context caracteristic care rezulta din exemplele date în [7] (a se vedea şi [6]) este următoarea : contextul caracteristic admite numai cuvintele aparţinînd aceleaşi părţi de vorbire.

În cele ce urmează se va propune două definiţii riguroase ale acestui concept cu exemplificări din limbile naturale. Prima definiţie se bazează pe noţiunea de context care admite un tip (pentru noţiunea de tip a se vedea [12], [17]) ce va fi introdusă în paragraful 3. Cea dea doua definiţie se bazează pe noţiunea de context diagnostic pentru un tip, introdusă de I. I. Revzin în [17].

Apoi se vor compara cele două definiţii între ele ajungîndu-se la concluzia că prima definiţie este mai generală cu posibilităţi mai largi de utilizare.

Se va introduce în paragraful 4 noţiunea de familie caracteristică pentru un tip şi se vor da unele proprietăţi ale ei.

O condiţie suficientă pentru ca o limbă să fie complet adecvată [12], va fi dată de teorema 1.

În continuare se va introduce relaţia de Δ-dominare-X care este definită în raport cu o sublimbă Δ şi o mulţime contextuală X.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 1, P. 123–139 BUCUREŞTI, 1969

În propoziţia 12 şi propoziţia 13 se va demonstra echivalenţa relaţiei de Δ-dominare -X cu relaţia de dominare condiţionată a lui Nebesky definită în [13]. (Pentru unele proprietăţi ale acestei relaţii a se vedea [3].)

În încheiere, se vor defini cîteva tipuri de fragmente contextuale şi se vor da unele proprietăţi ale lor.

2. DEFINIŢII, NOTAŢII ŞI REZULTATE ANTERIOARE

Considerăm o mulţime finită şi nevidă V (vocabularul) ale cărei elemente sînt numite cuvinte. O frază peste V este un şir finit de elemente din V. Fraza vidă va fi notată prin O. Orice mulţime de fraze peste V este o limbă L, peste V. Compunerea frazelor este o operaţie asociativă şi necomutativă. Mulţimea tuturor frazelor peste V o vom nota prin V^*, iar mulţimea tuturor contextelor peste V, prin Σ ($\Sigma = V^* \times V^*$). Contextul vid, format din fraza vidă, $\langle O, O \rangle$, va fi notat prin O.

Fiind dat un limbaj L peste V şi două cuvinte a şi b, vom spune că a domină b, în raport cu el şi vom scrie $a \underset{L}{\rightarrow} b$, dacă pentru orice context $\langle u, v \rangle$ (pereche ordonată de fraze), astfel încît $uav \in L$ avem $ubv \in L$ [1], [2]. Relaţia de dominare între cuvinte depinde de limba L. Relaţia de dominare între cuvinte este un caz particular al relaţiei de dominare între fraze [9]. Dacă avem în acelaşi timp $a \underset{L}{\rightarrow} b$ şi $b \underset{L}{\rightarrow} a$, vom scrie $a \underset{L}{\leftrightarrow} b$. Mulţimea cuvintelor b astfel încît $a \underset{L}{\leftrightarrow} b$ este prin definiţie familia $S(a)$ a frazei a. Relaţia „$\rightarrow$" este reflexivă şi tranzitivă în V, iar „$\leftrightarrow$" este o relaţie de echivalenţă în V. Familiile de cuvinte sînt clase de echivalenţă în raport cu „$\leftrightarrow$".

Fie $A, B \in V$. Vom spune că A domină B, în raport cu L, şi vom scrie $A \underset{L}{\rightarrow} B$, dacă pentru fiecare $a \in A$ şi pentru fiecare $b \in B$, avem $a \underset{L}{\rightarrow} b$. O mulţime de cuvinte este iniţială dacă pentru fiecare cuvînt x astfel încît $x \underset{L}{\rightarrow} A$ avem $x \in A$, [1], [2], [9].

Vom nota prin $\hat{A}$ mulţimea tuturor cuvintelor x astfel încît $A \underset{L}{\rightarrow} x$. Mulţimea $\hat{A}$ se numeşte produs saturat. Reuniunea $G(A) = A \cup \hat{A}$ este, prin definiţie, categoria gramaticală generată de A. În cazul particular, cînd A este o familie de cuvinte iniţială, mulţimea $G(A)$ este, prin definiţie, o categorie gramaticală elementară [1], [12], [2], 9].

Fiind dat un limbaj L peste V şi un cuvînt a, vom spune că contextul $\langle f, g \rangle$ admite (acceptă) fraza a (sau că a este admisă (acceptată) de $\langle f, g \rangle$) în raport cu L, dacă fraza fag aparţine limbii L [11], [18].

Vom nota prin $\alpha_L(a)$ mulţimea tuturor contextelor peste V, care admit cuvîntul $a \in V$, în raport cu aceeaşi limbă L.

Fiind dat un context $x = \langle f, g \rangle$, vom nota prin $\alpha_L^{-1}(x)$, mulţimea tuturor cuvintelor admise de x, [18].

Anumite proprietăți ale operatorilor α_L și α_L^{-1} sînt date în [11], [19].

Fiind date două contexte x și y vom spune că x domină în raport cu L pe y și vom scrie $x \xrightarrow[L]{} y$, dacă și numai dacă, avem

$$\alpha_L^{-1}(x) \subset \alpha_L^{-1}(y).$$

Două contexte x și y se domină reciproc și vom scrie $x \xleftrightarrow[L]{} y$, dacă și numai dacă avem :

$$\alpha_L^{-1}(x) = \alpha_L^{-1}(y).$$

Două contexte care se domină reciproc sînt echivalente, [15].

Fiind dat un context x, mulțimea tuturor contextelor echivalente cu x se numește familia contextuală $S_c(x)$, a lui x [15].

Fie X și Y două mulțimi contextuale. Vom spune că mulțimea X domină în raport cu L mulțimea Y și vom scrie $X \xrightarrow[L]{} Y$, dacă pentru orice context $x \in X$ și orice context $y \in Y$ avem $x \xrightarrow[L]{} y$, [15].

O mulțime contextuală X se numește inițială, dacă pentru orice context x, astfel încît $x \xrightarrow[L]{} X$ avem $x \in X$.

Fiind dată o mulțime contextuală $\hat{X}$, vom nota prin $\hat{X}$ mulțimea acelor contexte x, pentru care $X \xrightarrow[L]{} x \cdot \hat{X}$ se numește produsul saturat al lui X.

Reuniunea $K(X) = X \cup \hat{X}$ este, prin definiție, categoria contextuală generată de X, [15].

Fie vocabularul V și limba L peste V. Vom considera o partiție în paradigme a lui V, adică :

$$V = \bigcup_{a \in V} \Gamma(a),$$

unde paradigma $\Gamma(a)$ reprezintă mulțimea tuturor formelor flexionare ale cuvîntului a. Rezultă că două paradigme $\Gamma(a)$ și $\Gamma(b)$ sînt disjuncte dacă $a \neq b$. În limbile naturale acest fapt nu este întotdeauna adevărat.

Două paradigme $\Gamma(a)$ și $\Gamma(b)$ sînt Γ-echivalente și vom scrie : $\Gamma(a) \underset{\Gamma}{\sim} \Gamma(b)$, dacă pentru orice context $(z_1 \ldots z_k, z_{k+1} \ldots z_n)$ care admite $\Gamma(a)$ există un context $(z'_1 \ldots z'_k, z'_{k+1} \ldots z'_n)$, care admite $\Gamma(b)$ și astfel încît, pentru orice $1 \leqslant i \leqslant n$, $z'_i \in \Gamma(z_i)$ și reciproc, pentru orice context $(u_1 \ldots u_l, u_{l+1} \ldots u_m)$ care admite $\Gamma(b)$, există contextul $(u'_1 \ldots u'_l, u'_{l+1} \ldots \ldots u'_m)$, care admite $\Gamma(a)$, astfel încît pentru orice $1 \leqslant j \leqslant m$, $u'_j \in \in \Gamma(u_j)$, [17].

Mulțimea tuturor paradigmelor $\Gamma(b)$ echivalente cu paradigma $\Gamma(a)$ formează un tip T, tipul cuvîntului a, [12], [17].

Deci două cuvinte a și b aparțin aceluiași tip T, dacă și numai dacă : $\Gamma(a) \underset{\Gamma}{\sim} \Gamma(b)$.

Vom spune după [12] că o limbă este regulată, dacă pentru fiecare familie inițială S este un tip T, astfel încît :

$$G(S) \subseteq T.$$

O limbă este adecvată, dacă pentru orice cuvînt $a \in V$, avem : $S(a) \subseteq T(a)$.

O limbă L este complet adecvată [12], dacă relaţia : $a \xrightarrow[L]{} b$ şi $a, b \in V$, implică apartenenţa cuvintelor a şi b la acelaşi tip.

O limbă complet adecvată este adecvată şi regulată [12].

3. NOŢIUNEA DE CONTEXT CARACTERISTIC PENTRU UN TIP

În lingvistica structurală unul din procedeele principale de studiu este analiza distributivă, care utilizează conceptul de distribuţie a unui element.

Acest concept este definit de Z. S. Harris în [7], ca fiind ,,totalitatea vecinătăţilor în care apare" acel element. Dacă am considera distribuţia unui cuvînt a dintr-un vocabular V, atunci distribuţia lui va coincide cu mulţimea de contexte $\alpha_L(a)$, unde L reprezintă limba considerată peste vocabularul V, în raport cu care este definit operatorul α.

Cercetînd distribuţia cuvîntului a se observă că nu toate contextele au aceeaşi forţă de caracterizare, relativ la partea de vorbire T, căruia îi aparţine a. Astfel, în $\alpha_L(a)$ pot exista contexte care acceptă şi cuvinte care nu aparţin părţii de vorbire T, şi pot exista contexte care acceptă numai cuvinte aparţinînd părţii de vorbire T. Se poate spune că contextele din cea de a doua categorie au o forţă de caracterizare a părţii de vorbire T, mai mare decît celelalte contexte. În legătură cu această forţă de caracterizare a contextelor, Z. S. Harris introduce în [7], printr-un şir de exemple, conceptul de *context caracteristic*. Din studiul acestui şir de exemple rezultă că un asemenea context caracteristic se raportează la o anumită parte de vorbire şi are următoarea trăsătură : *admite numai cuvinte aparţinînd aceleiaşi părţi de vorbire.*

Contextele caracteristice sînt folosite la definirea părţii de vorbire şi a categoriilor gramaticale. În decursul acestei utilizări apar următoarele probleme :

(a) Un context ca să fie caracteristic pentru o anumită parte de vorbire T, trebuie să admită toate cuvintele aparţinînd lui T, sau este suficient să admită numai o parte din cuvintele aparţinînd lui T? Un răspuns la această problemă este dat de I. I. Revzin, care introduce noţiunea de context diagnostic pentru un tip, [17].

(b) Mulţimea contextelor caracteristice pentru o parte de vorbire T este, adeseori, destul de bogată. Se pune problema : este necesar să se ia în consideraţie întreaga mulţime de contexte caracteristice pentru definirea părţii de vorbire T? Dacă nu, prin ce se caracterizează submulţimea de contexte caracteristice, care este suficientă pentru a defini partea de vorbire T?.

Se va da în cele ce urmează un anumit răspuns acestor probleme.

De asemenea au apărut cazuri, de exemplu [5], în care se considera context caracteristic şi contextul care avea următoarea proprietate : numărul cuvintelor admise de acest context, care aparţineau aceleiaşi părţi de vorbire T, era suficient de mare.

În cele ce urmează, utilizîndu-se noţiunea de tip, care modelează partea de vorbire, noţiunea de paradigmă a unui cuvînt, care reprezintă totalitatea formelor flexionare ale cuvîntului, se propun două definiţii riguroase ale conceptului de context caracteristic pentru un tip.

Fie V un vocabular, $L(V)$ o limbă peste V, $\mathcal{T}$ mulţimea tuturor tipurilor limbii L şi Σ mulţimea tuturor contextelor peste V.

Fie a un cuvînt din V şi x un context. Vom spune după I. I. Revzin [17], că x admite paradigma $\Gamma(a)$, dacă există un cuvînt $b \in \Gamma(a)$ astfel încît b să fie admis de x.

DEFINIŢIA 1. *Fie un tip* $T \in \mathcal{T}$ *şi un context* $x \in \Sigma$. *Vom spune că* x *admite tipul* T, *dacă există un cuvînt* $a \in T$ *astfel încît* x *admite paradigma* $\Gamma(a)$.

Fiind dat un tip T, vom nota prin $\mathcal{B}_T$ mulţimea tuturor contextelor care admit tipul T.

Rezultă, în baza definiţiei 1, că avem :

$$\mathcal{B}_T = \bigcup_{a \in T} \alpha_L(a).$$

Adică $\mathcal{B}_T$ reprezintă mulţimea tuturor contextelor care admit cel puţin un cuvînt aparţinînd tipului T.

Exemplu. Considerăm T = partea de vorbire substantiv şi contextul $x = \langle$ *aceşti*, *o* $\rangle$. Acest context admite T, deoarece există substantivul *elevi*, admis de x.

Vom da după I. I. Revzin [17] definiţia contextului diagnostic pentru un tip.

DEFINIŢIA 2. *Fie un tip* $T \in \mathcal{T}$ *şi un context* $x \in \Sigma$. *Vom spune că* x *este un context diagnostic pentru tipul* T, *dacă pentru orice paradigmă* $\Gamma(a) \subseteq T$ *avem* x *admite* $\Gamma(a)$.

Vom nota prin $\mathcal{D}_T$ mulţimea tuturor contextelor diagnostice pentru tipul T.

Exemple de contexte diagnostice. În limba română : fie T = partea de vorbire substantiv ; contextul $\langle$ *o*, *meu* $\rangle$ este un context diagnostic pentru tipul T.

În limba rusă : fie T = partea de vorbire substantiv ; contextul $\langle$ *он дыл*, *o* $\rangle$ este un context diagnostic pentru tipul T.

În continuare vom propune următoarele două definiţii pentru conceptul de context caracteristic pentru un tip.

DEFINIŢIA 3. *Se spune că un context* $x \neq \langle 0,0 \rangle$ *este un context caracteristic pentru un tip* T, *dacă are următoarele proprietăţi* :

1. x *admite tipul* T.
2. x *nu admite tipul* T', *oarecare ar fi* $T' \neq T$.

Exemplu. Fie T = partea de vorbire prepoziţie. Contextul $\langle$ *merg*, *nişte copii* $\rangle$ este un context caracteristic pentru tipul T, în sensul definiţiei 3, deoarece are proprietăţile 1 şi 2, după cum a fost demonstrat în [20].

Vom nota prin $\mathcal{A}_T$ mulţimea tuturor contextelor caracteristice pentru tipul T, în sensul definiţiei 3. În [20] s-a lucrat cu contexte caracteristice pentru un tip, în sensul definiţiei 3.

DEFINIŢIA 3′. *Se spune că un context* $x \neq \langle 0,0 \rangle$ *este context caracteristic pentru un tip* T, *dacă are următoarele proprietăţi* :

1. x *este context diagnostic pentru tipul* T.
2. x *nu admite tipul* T', *oricare ar fi* $T' \neq T$.

Vom nota prin $\mathcal{C}_T$ mulţimea tuturor contextelor caracteristice pentru tipul T, în sensul definiţiei 3′.

Exemple. În limba română : fie T = partea de vorbire substantiv ; contextele ⟨ *acest*, *o*⟩, ⟨ *această*,*o* ⟩ sînt caracteristice pentru tipul T, în sensul definiţiei 3′.

În limba engleză : fie T = partea de vorbire substantiv ; contextele ⟨ *the*, *is good*⟩, ⟨ *the*, *are good* ⟩ sînt contexte caracteristice pentru T, în sensul definiţiei 3′.

Observaţie. În definiţia 3 se pleacă de la noţiunea de ,,context care admite un tip'', iar în definiţia 3′ se pleacă de la noţiunea de ,,context diagnostic pentru un tip''.

Pentru un tip T avem, în mod evident, următoarele relaţii :

$$\mathcal{B}_T \supseteq \mathcal{D}_T \supseteq \mathcal{C}_T$$

$$\mathcal{B}_T \supseteq \mathcal{A}_T \supseteq \mathcal{C}_T.$$

Interpretarea acestor relaţii este următorea :

Orice context caracteristic pentru un tip T, în sensul definiţiei 3′, este un context diagnostic pentru tipul T. Reciproca nu este adevărată, întotdeauna, după cum se va demonstra.

Orice context diagnostic pentru un tip T admite tipul T.

Orice context caracteristic pentru un tip T, în sensul definiţiei 3′, este un context caracteristic pentru T, în sensul definiţiei 3. După cum se va demonstra, în general, reciproca nu este adevărată.

Orice context caracteristic pentru un tip T, în sensul definiţiei 3, admite tipul T.

Există un tip T, astfel încît mulţimea $\mathcal{B}_T - \mathcal{D}_T$ este nevidă. Într-adevăr, fie T partea de vorbire substantiv. Contextul $x = \langle$ *foarte*, *o* $\rangle$ admite tipul T, deoarece există substantivul *fin* pe care-l admite, dar există şi substantive, de exemplu : *om*, *copil*, pentru care x nu admite paradigmele Γ (*copil*) şi Γ (*om*).

Există un tip T, astfel încît mulţimea $\mathcal{A}_T - \mathcal{C}_T$ este nevidă. Într-adevăr, fie T partea de vorbire prepoziţie. Contextul $x = \langle$ *vin*, *unii copii* $\rangle$ este caracteristic pentru tipul T, în sensul definiţiei 3′ dar nu este caracteristic pentru T, în sensul definiţiei 3′, deoarece nu este diagnostic pentru tipul T : există prepoziţii, de exemplu, *de*, *întru*, *de către*, care nu sînt admise de contextul x.

Din cele două definiţii ale conceptului de context caracteristic rezultă că în definirea lui nu se pune condiţia ca el să admită toate cuvintele aparţinînd unei părţi de vorbire. Prin aceasta s-a dat un răspuns la problema (a).

4. NOŢIUNEA DE FAMILIE CARACTERISTICĂ PENTRU UN TIP

În acest paragraf se va da un răspuns la problema (b) pusă în paragraf 3. În baza definiţiilor 3 şi 3′ se introduce noţiunea de familie caracteristică pentru un tip, cu ajutorul căreia se va pune problema definirii unui tip.

În cele ce urmează se vor considera numai contexte caracteristice pentru un tip, în sensul definiţiei 3.

Un tip poate avea unul sau mai multe contexte caracteristice sau nici unul. Dintre mulţimile de contexte caracteristice pentru un tip sînt interesante mulţimile definite astfel :

DEFINIŢIA 4. *O mulţime* $\{x_i\}_{i \in I}$ *de contexte caracteristice pentru un tip* T *este o familie caracteristică pentru tipul* T, *dacă este îndeplinită următoarea condiţie* :

(α) *Oricare ar fi cuvîntul* $a \in T$, *există* $i \in I$, *astfel încît contextul* x_i *admite cuvîntul* a.

O familie caracteristică pentru un tip poate fi alcătuită şi dintr-un singur context. Un tip poate avea mai multe familii caracteristice.

Exemple. În limba română : fie T = partea de vorbire prepoziţie ; mulţimea de contexte caracteristice pentru T $\langle V,\ Ar\ S \rangle$ este o familie caracteristică pentru T [20], unde s-a notat cu S substantivul, cu Ar articolul, iar cu V verbul.

În limba engleză : fie T = partea de vorbire substantiv ; mulţimea de contexte caracteristice pentru T $\langle$ *The*, *verb* $\rangle$ este o familie caracteristică pentru T, [7].

În continuare vom nota o familie caracteristică pentru un tip T, prin F_T.

PROPOZIŢIA 1. *Fie* $F_T = \{x_i\}_{i \in I}$ o *familie caracteristică pentru tipul* T. *Este adevărată relaţia* :

$$T = \bigcup_{x_i \in F_T} \alpha_L^{-1}(x_i).$$

Se poate spune, în baza propoziţiei 1, că la problema (b) s-a dat următorul răspuns : pentru definirea unei părţi de vorbire este suficient să se utilizeze submulţimi de contexte caracteristice pentru un tip, care au proprietatea (α).

În continuare se dau unele proprietăţi ale contextelor care admit tipul T, ale contextelor caracteristice pentru T şi ale famiilor caracteristice pentru T.

PROPOZIŢIA 2. *Pentru orice tip* T, *avem* :

$$F_T \subseteq \mathcal{B}_T.$$

PROPOZIŢIA 3. *Fie două tipuri* T *și* T', *cu* $T = T'$. *Avem* :

$$F_T \cap F_{T'} = \varnothing.$$

PROPOZIŢIA 4. *Fie un tip* T *și o familie caracteristică pentru* T, F_T. *Pentru orice cuvînt* $a \in T$, *avem* :

$$\alpha_L(a) \cap F_T \neq O.$$

PROPOZIŢIA 5. *Fie* x *un context caracteristic pentru un tip* T *și* a, $b \in V$. *Dacă* $x \in \alpha_L(a) \cap \alpha_L(b)$, *atunci* $\Gamma(a) \underset{\Gamma}{\sim} \Gamma(b)$.

Demonstraţie. Presupunem $x \in \alpha_L(a) \cap \alpha_L(b)$. În baza propoziţiei 1, rezultă că a, $b \in T$. Din faptul că a şi b aparţin aceluiaşi tip, rezultă $\Gamma(a) \underset{\Gamma}{\sim} \Gamma(b)$, [12].

PROPOZIȚIA 6. *Fie x un context caracteristic pentru un tip T și $a, b \in V$. Dacă $a \underset{L}{\rightarrow} b$ și $x \in \alpha_L(a)$, atunci $b \in T$.*

Demonstrație. Din faptul că a domină b, rezultă că $\alpha_L(a) \subset \alpha_L(b)$. Deci $x \in \alpha_L(b)$. În baza propoziției 1, rezultă că $b \in T$.

LEMA 1. *Dacă pentru un tip T există o familie caracteristică F_T, atunci avem $S(a) \subseteq T$, pentru orice $a \in T$.*

Aceasta rezultă în baza propoziției 6.

TEOREMA 1. *Fie o limbă L și $\mathcal{T}$ mulțimea tuturor tipurilor acestei limbi. Dacă pentru orice tip $T \in \mathcal{T}$ există o familie caracteristică F_T, atunci limba L este complet adecvată.*

Această teoremă rezultă în baza lemei 1 și a propoziției 6.

Teorema 1 dă o condiție suficientă pentru ca o limbă L să fie complet adecvată și în același timp exprimă o condiție necesară pentru ca o limbă L să aibe următoarea proprietate :

(β) *Pentru orice tip al limbii L există o familie caracteristică.*

Necesitatea acestei condiții pentru ca o limbă L să aibe proprietatea (β) poate fi exprimată și astfel :

TEOREMA 1′. *Fie L o limbă, care nu este complet adecvată. În aceste condiții există un tip T al acestei limbi, pentru care nu există o familie caracteristică F_T.*

Deoarece, din faptul că o limbă L este complet adecvată rezultă faptul că limba L este adecvată și regulată, deducem că ipoteza din teorema 1′ se poate înlocui prin una din următoarele ipoteze mai slabe : „limba L nu este adecvată" sau „limba L nu este regulată". (Pentru noțiunile de limbă adecvată, regulată și complet regulată, a se vedea [12].)

Limbile naturale, în general, sînt complet adecvate [12]. Deci este posibil ca, în general, limbile naturale să aibe proprietatea (β).

Proprietatea (β) este interesantă datorită faptului că pentru o limbă cu proprietatea (β) se pot defini tipurile contextuale. Adică, se determină familia caracteristică F_T pentru fiecare tip T și în baza propoziției 1, rezultă că orice tip T este, în acest mod, perfect determinat.

Un exemplu de familie caracteristică și de modul în care ea determină un anumit tip este următorul :

Considerăm limba română și partea de vorbire prepoziție. În [20] s-a determinat familia caracteristică pentru prepoziție $\langle V, Ar\ S \rangle$. Orice cuvînt admis de cel puțin un context din această familie caracteristică este o prepoziție și reciproc, orice prepoziție este admisă de cel puțin un context din această mulțime de contexte.

Deoarece, în limba română, există adverbe, recrutate din rîndul adjectivelor, se poate spune că nu există familie caracteristică pentru adjective sau pentru adverbe. Deci limba română nu are proprietatea (β).

O condiție suficientă pentru ca o limbă L să aibe proprietatea (β) este dată de următoarea propoziție :

PROPOZIȚIA 7. *Fie L o limbă și $\mathcal{B}$ mulțimea tuturor tipurilor acestei limbi. Dacă sînt îndeplinite următoarele condiții :*

$$1\ \mathcal{B}_T \cap \mathcal{B}_{T'} = 0$$

$$2\ \alpha_L(a) \neq \langle 0, 0 \rangle$$

pentru orice cuvînt $a \in T$ *și orice* T, $T' \in \mathcal{T}$, *atunci limba L are proprietatea* (β).

Demonstrație. Fie $T \in \mathcal{T}$. Familia caracteristică pentru tipul T este $\{x_i\}_{i \in I}$, unde x_i aparține unui $\alpha_L(a)$ și numai unuia, iar a este un cuvînt, aparținînd tipului T.

COROLARUL 1. *O limbă L este complet adecvată, dacă avem :*

$$\mathcal{B}_T \cap \mathcal{B}_{T'} = 0 \text{ și } \alpha_L(a) \neq \langle 0,0 \rangle$$

pentru orice $a \in T$ *și orice* T, $T' \in \mathcal{T}$.

Aceasta rezultă în baza propoziției 7 și a teoremei 1.

PROPOZIȚIA 8. *Pentru orice două tipuri* T *și* T' *condiția :* $\mathcal{B}_T \cap \mathcal{B}_{T'} = 0$ *este echivalentă cu relația :* $\alpha_L(x) \cap \alpha_L(y) = \langle 0,0 \rangle$, *pentru orice* x *și* y, *unde* $x \in T$ *și* $y \in T'$.

PROPOZIȚIA 9. *Fie un tip* T *și* $\mathcal{A}_T$ *mulțimea tuturor contextelor caracteristice pentru tipul* T. *Dacă* $\mathcal{A}_T$ *este o familie caracteristică pentru* T, *atunci* $\mathcal{A}_T$ *este o reuniune de familii contextuale, adică avem :*

$$\mathcal{A}_T = \bigcup_{x \in \mathcal{A}_T} S_c\ (x).$$

Demonstrație. Mai întîi vom demonstra că dacă $x \in \mathcal{A}_T$ și $x \underset{L}{\leftrightarrow} y$, atunci $y \in A_T$. Într-adevăr, din $x \underset{L}{\leftrightarrow} y$ rezultă $\alpha_L^{-1}(x) = \alpha_L^{-1}(y)$ (vezi [15]). Atunci y admite tipul T și este un context caracteristic pentru T. Deci $y \in \mathcal{A}_T$.

PROPOZIȚIA 10. *Fie un tip* T *și* F_T *o familie caracteristică pentru* T. *Orice supramulțime de contexte caracteristice* F_T^1 *a familiei caracteristice* F_T *este o familie caracteristică pentru tipul* T.

Aceasta rezultă imediat din faptul că F_T are proprietatea (α).

În baza propoziției 10 se poate spune că proprietatea unei mulțimi de contexte caracteristice pentru un tip T, de a fi o familie caracteristică pentru T, este o proprietate filtrantă. (O proprietate a unei mulțimi este filtrantă, dacă orice supramulțime a mulțimii date are aceea proprietate [14]).

Se poate spune, în baza propozițiilor 9 și 10, și a propoziției 7 din [14], că, categoria contextuală generată de o familie contextuală, care este o familie caracteristică pentru un tip T este o familie caracteristică pentru T.

Reuniunea a două familii caracteristice este o familie caracteristică, în baza propoziției 10.

În schimb, intersecția a două familii caracteristice pentru același tip T nu este întotdeauna o familie caracteristică pentru tipul T.

Noțiunea de familie caracteristică poate fi definită utilizîndu-se definiția 3′ astfel :

DEFINIȚIA 4′. *O mulțime* $\{x_i\}_{i \in I}$ *de contexte caracteristice pentru un tip* T, *în sensul definiției* T', *este o familie caracteristică pentru tipul* T, *dacă este îndeplinită condiția* (α).

Vom nota o familie caracteristică pentru un tip T, în sensul definiției 4′, prin F'_T.

Se poate spune, în baza definițiilor 4 și 4′, că orice familie caracteristică pentru un tip T, în sensul definiției 4′, este o familie caracteristică pentru T, în sensul definiției 4.

Propoziția 1 se transpune astfel :

PROPOZIȚIA 1′. *Fie* $F'_T = \{x_i\}_{i \in I}$ *o familie caracteristică pentru tipul* T. *Este adevărată relația :*

$$T = \bigcup_{x_i \in F'_T} \alpha_L^{-1}(x_i).$$

Comparînd cele două definiții ale familiei caracteristice pentru un tip T și ținînd seama de propozițiile 1 și 1′ se poate spune că ambele definiții pot fi utilizate pentru definirea unui tip ; totuși se poate spune că noțiunea de familie caracteristică pentru un tip, în sensul definiției 4, este o noțiune mai generală care permite o utilizare mai largă.

După transpunerea lor, rămîn adevărate propozițiile 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10 și teoremele 1 și 1′.

În continuare se dau unele proprietăți specifice contextelor diagnostice pentru un tip.

LEMA 2. *Fie* $x, y \in \Sigma$ *și* x *este context diagnostic pentru un tip* T. *Dacă* $x \xrightarrow[L]{} y$, *atunci* y *este un context diagnostic pentru tipul* T.

Demonstrație. Într-adevăr, avem : $\alpha_L^{-1}(x) \subset \alpha_L^{-1}(y)$, de unde rezultă afirmația făcută.

COROLARUL 2. *Dacă un context* x *este diagnostic pentru un tip* T, *atunci familia contextuală* $S_c(x)$ *este formată din contexte caracteristice pentru acel tip*

TEOREMA 2. *Dacă* $S(x)$ *este o familie contextuală formată din contexte diagnostice pentru un tip* T, *atunci categoria contextuală* $K(S_c(x))$ *generată de* $S(x)$ *este formată din contexte diagnosiice pentru acel tip.*

Aceasta rezultă în baza lemei 2 și corolarului 2.

5. RELAȚIA DE Δ-DOMINARE-X

Deoarece limbile naturale sînt, în general, complet adecvate, relația de dominare are loc în general, între cuvinte aparținînd aceleiași părți de vorbire.

Pentru a determina dacă două cuvinte sînt sau nu în relația de dominare, este evident că, practic, nu se poate lua în considerare în această cercetare întreaga limbă. Această observație a dus la introducerea unei relații de dominare în raport cu o anumită sublimbă Δ și anume, relația de Δ-dominare, în [16] (a se vedea și [3], [4]). De asemenea este evident că pentru a determina relația de dominare între două cuvinte, practic, nu se poate lua în considerare mulțimea tuturor contextelor peste limba dată. Această observație face naturală introducerea unei relații de dominare în raport cu o sublimbă $\Delta \subset L$ și o parte X a mulțimii tuturor contextelor Σ_L asociată limbii L, pe care o vom numi relația de Δ-dominare-X.

Observație. Fiind dat un vocabular V și o limbă $L \subset V^*$, unde V^* este mulțimea tuturor frazelor peste V, notăm :

$$\Sigma_L = \bigcup_{a \in V} \alpha_L(a).$$

Rezultă că pentru orice limbă L peste vocabularul V avem :

$$\Sigma_L \subset \Sigma,$$

unde $\Sigma = V^* \times V^*$ este mulţimea tuturor contextelor peste V.

Deci fiecărei limbi L peste V i se poate asocia în mod unic o mulţime de contexte Σ_L.

Mulţimea de contexte $\Sigma - \Sigma_L$ nu are nici o influenţă asupra studiului relaţiei de dominare în raport cu limba L.

Sublimba Δ este aleasă, pe cît este posibil, astfel încît să aibă anumite proprietăţi, de exemplu să fie un fragment regulat.

Fragmentul contextual X trebuie ales într-un mod cît mai convenabil.

O aproximare a fragmentului contextual X o vom da mai jos.

DEFINIŢIA 5. *Un context x nu este caracteristic pentru un tip T, dacă pentru orice $a \in T$, x acceptă a şi există cel puţin un tip T', diferit de T, astfel încît x admite tipul T'.*

Vom da numai cu titlu ilustrativ următorul exemplu de context necaracteristic : considerăm partea de vorbire adjectiv şi vrem să studiem relaţia de dominare între adjective. Un context necaracteristic pentru adjective este contextul $\langle$*foarte*, $o\rangle$. Acest context admite orice adjectiv (presupunem că expresiile de forma „*foarte excepţional*" sînt corecte). Există însă partea de vorbire adverb, admisă de acest context. (Considerăm adverbul *repede* ; contextul dat admite acest cuvînt.)

Orice context necaracteristic este, în baza definiţiei 5, un context diagnostic ; reciproca nu este adevărată.

În cele ce urmează vom lucra cu definiţiile 3 şi 4.

În ipoteza că avem de studiat relaţia de dominare între cuvinte, aparţinînd aceluiaşi tip T, vom da o aproximare a fragmentului contextual X.

În acest caz este natural să studiem relaţia de dominare în raport cu o mulţime contextuală X, astfel încît să avem :

$$\Sigma_L - [\overline{\mathcal{B}}_T \cup \{\langle 0,0 \rangle\} \cup W_T \cup Z_T] \supseteq X$$

unde prin $\overline{\mathcal{B}}_T$ am notat mulţimea tuturor contextelor, care nu admit tipul T, prin W_T am notat mulţimea tuturor contextelor caracteristice pentru tipul T care formează familii caracteristice, iar prin Z_T am notat mulţimea tuturor contextelor, care nu sînt caracteristice pentru tipul T.

În ipoteza că avem de studiat relaţia de dominare între cuvinte aparţinînd la două tipuri diferite T şi T', aproximarea fragmentului contextual X este următoarea :

$$\Sigma_L - [(\overline{\mathcal{B}}_T \cap \overline{\mathcal{B}}_{T'}) \cup \{\langle 0,0 \rangle \cup W_{T \cup T'}] \supseteq X,$$

unde $W_{T \cup T'}$ este mulţimea tuturor contextelor x cu proprietatea pentru orice cuvînt $a \in T \cup T'$, x admite a.

În continuare vom defini relaţia de Δ-dominare-X.

Fie V un vocabular şi V^* mulţimea tuturor frazelor peste V. Fie Σ mulţimea tuturor contextelor peste V, $L \subset V^*$ o limbă, $X \subset \Sigma_L$ un fragment contextual, $\Delta \subset L$ o sublimbă şi Σ_L mulţimea tuturor contextelor asociate lui L.

DEFINIŢIA 6. *Fie* $a, b \in V^*$, $\Delta \subset L$ *şi* $X \subset \sum_L$. *Fraza* a Δ*-domină-*X *fraza* b *şi vom scrie* $a \xrightarrow[\Delta]{X} b$, *dacă şi numai dacă avem* :

$$\underline{O} \neq \alpha_\Delta(a) \cap X \subset \alpha_\Delta(b) \cap X.$$

În cazul în care $X = \sum_L$, atunci se obţine ca un caz particular relaţia de Δ-*dominare* şi vom scrie $a \xrightarrow[\Delta]{\Sigma_L} b$.

Dacă $\Delta = L$, atunci se obţine ca un caz particular *dominarea-*X şi vom scrie $a \xrightarrow[L]{X} b$.

Două fraze a şi b sînt Δ*-echivalente-*X şi vom scrie $a \xleftrightarrow[\Delta]{X} b$, dacă şi numai dacă avem :

$$\underline{O} \neq \alpha_\Delta(a) \cap X = \alpha_\Delta(b) \cap X.$$

Observaţie. Relaţia de Δ-dominare-X a fost definită pentru fraze. În mod analog, se poate defini această relaţie pentru cuvinte.

Se verifică imediat că relaţia de Δ-dominare-X este o relaţie reflexivă şi tranzitivă.

TEOREMA 3. *Pentru orice* $a, b \in V^*$, *orice* $\Delta, \Delta_1, \Delta_2 \subset L$ *şi orice* $X_1, X_2 \subset \subset \Sigma_L$, *avem* :

1. *Dacă* $a \xrightarrow[\Delta]{\Sigma_L} b$, *atunci* $a \xrightarrow[\Delta]{X} b$ *sau* $a \xleftrightarrow[\Delta]{X} b$, *pentru orice* X *şi orice* a *şi* b.
2. *Dacă* $a \xrightarrow[\Delta_1]{X} b$ *şi* $a \xrightarrow[\Delta_2]{X} b$, *atunci* $a \xrightarrow[\Delta_1 \cup \Delta_2]{X} b$, *pentru orice* a *şi* b.
3. *Dacă* $a \xrightarrow[\Delta]{X_1} b$ *şi* $a \xrightarrow[\Delta]{X_2} b$, *atunci* $a \xrightarrow[\Delta]{X_1 \cup X_2} b$, *pentru orice* a *şi* b.

Demonstraţie. 1. Deoarece $\alpha_\Delta(a) \subset \alpha_\Delta(b)$, rezultă pentru orice $X \subset \Sigma_L$, $\alpha_\Delta(a) \cap X \subseteq \alpha_\Delta(b) \cap X$ şi afirmaţia 1 este demonstrată.

2. $\alpha_{\Delta_1 \cup \Delta_2}(a) = \alpha_{\Delta_1}(a) \cup \alpha_{\Delta_2}(a)$ şi $\alpha_{\Delta_1 \cup \Delta_2}(b) = \alpha_{\Delta_1}(b) \cup \alpha_{\Delta_2}(b)$. Deoarece $\alpha_{\Delta_1}(a) \subset \alpha_{\Delta_2}(b)$ şi $\alpha_{\Delta_2}(a) \subset \alpha_{\Delta_2}(b)$, rezultă $\alpha_{\Delta_1 \cup \Delta_2}(a) \subset \alpha_{\Delta_1 \cup \Delta_2}(b)$, adică $a \xrightarrow[\Delta_1 \cup \Delta_2]{X} b$.

3. $\alpha_\Delta(a) \cap (X_1 \cup X_2) = (\alpha_\Delta(a) \cap X_1) \cup (\alpha_\Delta(a) \cap X_2)$ şi $\alpha_\Delta(b) \cap (X_1 \cup \cup X_2) = (\alpha_\Delta(b) \cap X_1) \cup (\alpha_\Delta(b) \cap X_2)$. Deoarece $\alpha_\Delta(a) \cap X_1 \subset \alpha_\Delta(b) \cap X_1$ şi $\alpha_\Delta(a) \cap X_2 \subset \alpha_\Delta(b) \cap X_2$, rezultă că : $\alpha_\Delta(a) \cap (X_1 \cup X_2) \subset \alpha_\Delta(b) \cap (X_1 \cup X_2)$, adică $a \xrightarrow[\Delta]{X_1 \cup X_2} b$.

COROLARUL 3. *O condiţie suficientă pentru ca să avem* $a \xrightarrow[\Delta]{\Sigma_L} b$ *pentru orice* $a, b \in V^*$ *şi* $\Delta \subset L$ *este ca să existe* $X \subset \sum_L$, *astfel încît* :

$$a \xrightarrow[\Delta]{X} b \text{ şi } a \xrightarrow[\Delta]{\Sigma_L - X} b.$$

Aceasta rezultă în baza teoremei 3.

6. LEGĂTURA DINTRE RELAŢIA DE DOMINARE CONDIŢIONALĂ A LUI NEBESKY ŞI RELAŢIA DE Δ-DOMINARE-X

Mai întîi vom da o nouă definiţie a relaţiei de dominare condiţionată a lui Nebesky, echivalentă cu definiţia dată de Nebesky în [13].

DEFINIŢIA 7. *Spunem că fraza a domină condiţionat fraza b, în raport cu M și N,* $(M, N \subset V^*)$, *și scriem* $a \xrightarrow[M/N]{} b$, *dacă și numai dacă avem :*

$$\underline{O} \neq \alpha_M(a) \cap X_{a,b} \subset \alpha_M(b) \cap X_{a,b} \tag{1}$$

unde $X_{a,b} = \alpha_N(a) \cap \alpha_N(b)$.

Relaţia de dominare condiţionată, în general, nu este tranzitivă.

O condiţie necesară şi suficientă pentru ca relaţia de dominare condiţionată să fie tranzitivă este dată de următoarea propoziţie.

PROPOZIŢIA 11. *Necesar și suficient pentru ca din* $a \xrightarrow[M/N]{} b$ *și* $b \xrightarrow[M/N]{} c$ *să rezulte* $a \xrightarrow[M/N]{} c$ *este să avem* $a \xrightarrow[N]{} c$, *unde* $M, N \subset V^*$.

Demonstraţie. Presupunem $a \xrightarrow[N]{} c$, Atunci avem : $\alpha_N(a) \subset \alpha_N(c)$. Deoarece $X_{a,b} = \alpha_N(a) \cap \alpha_N(b)$ şi $X_{b,c} = \alpha_N(b) \cap \alpha_N(c)$, rezultă :

$$X_{a,b} \subset X_{b,c}.$$

Deoarece $\alpha_M(a) \cap X_{a,b} \subset \alpha_M(b) \cap X_{a,b}$ şi $\alpha_M(b) \cap X_{b,c} \subset \alpha_M(c) \cap X_{b,c}$, rezultă, în baza relaţiei (1), că avem : $\alpha_M(a) \cap X_{a,b} \subset \alpha_M(c) \cap X_{b,c}$, adică : $a \xrightarrow[M/N]{} c$.

Presupunem că din $a \xrightarrow[M/N]{} b$ şi $b \xrightarrow[M/N]{} c$ rezultă $a \xrightarrow[M/N]{} c$. Atunci : $\alpha_M(a) \cap X_{a,b} \subset \alpha_M(c) \cap X_{b,c}$, $\alpha_M(a) \cap X_{a,b} \subset \alpha_M(b) \cap X_{a,b}$ şi $\alpha_M(b) \cap X_{b,c} \subset \alpha_M(c) \cap X_{b,c}$, implică :

$$\alpha_M(b) \cap X_{a,b} \subseteq \alpha_M(b) \cap X_{b,c}. \tag{2}$$

Din relaţia (2) rezultă $X_{a,b} \subseteq X_{b,c}$, adică $\alpha_N(a) \cap \alpha_N(b) \subseteq \alpha_N(b) \cap \alpha_N(c)$. Rezultă în mod necesar că $\alpha_N(a) \subset \alpha_N(c)$, adică $a \xrightarrow[N]{} c$.

O anumită legătură între relaţia de Δ-dominare-X şi relaţia de dominare condiţionată se stabileşte în cele ce urmează.

PROPOZIŢIA 12. *Pentru orice* $a, b \in V^*$ *și orice* $N, M \subset V^*$, *există* $X_{a,b} \subset \subset \Sigma$, *astfel încît relația* $a \xrightarrow[M/N]{} b$ *să implice relația* $a \xrightarrow[M]{X_{a,b}} b$.

Demonstraţie. Considerăm $X_{a,b} = \alpha_N(a) \cap \alpha_N(b)$. Atunci în baza definiţiei 5 rezultă $a \xrightarrow[M]{X_{a,b}} b$.

Se poate spune, în baza propoziţiei 12, că existenţa relaţiei de dominare condiţionată implică existenţa relaţiei de Δ-dominare-X.

Reciproca acestei afirmaţii este adevărată.

PROPOZIŢIA 13. *Pentru orice* $a, b \in V^*$, *orice* $\Delta \subset L$ *și orice* $X \subset \Sigma_L$, *există* $M, N_{a,b} \subset V^*$, *astfel încît relația* $a \xrightarrow[\Delta]{X} b$ *să implice* $a \xrightarrow[M/N_{a,b}]{} b$.

Demonstrație. Fie $N_{a,b} = \{fag, fbg \mid \langle f, g\rangle = x \in X\}$ și $\Delta = M$. Atunci în baza definiției 5 rezultă : $a \xrightarrow[M/N_{a,b}]{} b$.

În baza propoziției 12 și a propoziției 13 se poate spune că relația de Δ-dominare-X este echivalentă cu relația de dominare condiționată.

7. TIPURI DE FRAGMENTE CONTEXTUALE

În cele ce urmează vom considera diferite tipuri de fragmente contextuale în raport cu care se definește relația de Δ - dominare - X. O parte din aceste tipuri reprezintă transpunerea unor tipuri de fragmente de limbă.

DEFINIȚIA 8. *Un fragment contextual X este fragment contextual reprezentativ, dacă avem :*

$$a \xrightarrow[L]{X} b \Rightarrow a \xrightarrow[L]{\Sigma_L} b$$

pentru orice a și b din V.

DEFINIȚIA 9. *Un fragment contextual X este fragment contextual regulat, dacă avem :*

$$a \xrightarrow[L]{\Sigma_L} b \Rightarrow a \xrightarrow[L]{X} b$$

pentru orice a și b din V.

DEFINIȚIA 10. *Un fragment contextual X, este fragment contextual reprezentativ față de sublimba $\Delta \subset L$, dacă avem :*

$$a \xrightarrow[\Delta]{X} b \Rightarrow a \xrightarrow[\Delta]{\Sigma_L} b$$

pentru orice a și b din V.

DEFINIȚIA 11. *Un fragment contextual X este fragment contextual regulat față de sublimba $\Delta \subset L$, dacă avem :*

$$a \xrightarrow[\Delta]{\Sigma_L} b \Rightarrow a \xrightarrow[\Delta]{X} b$$

pentru orice a și b din V.

DEFINIȚIA 12. *Fragmentul contextual X și fragmentul de limbă Δ inclus în L sînt reprezentative simultan, dacă avem :*

$$a \xrightarrow[\Delta]{X} b \Rightarrow a \xrightarrow[L]{\Sigma_L} b$$

pentru orice a și b din V.

DEFINIȚIA 13. *Fragmentul contextual X și fragmentul de limbă Δ inclus în L sînt regulate simultan, dacă avem :*

$$a \xrightarrow[L]{\Sigma_L} b \Rightarrow a \xrightarrow[\Delta]{X} b$$

pentru orice a și b din V.

PROPOZIŢIA 14. *Oricare ar fi fragmentul contextual X, avem* :

1. $$a \xrightarrow[L]{\Sigma_L} b \Rightarrow \left\{ a \xrightarrow[L]{X} b \right\} \text{ sau } \left\{ a \xleftrightarrow[L]{X} b \right\}$$

2. $$a \xrightarrow[\Delta]{\Sigma_L} b \Rightarrow \left\{ a \xrightarrow[\Delta]{X} b \right\} \textit{ sau } \left\{ a \xleftrightarrow[\Delta]{X} b \right\}$$

pentru orice a şi b din V, $\Delta \subset L$.

Se poate spune, în baza propoziţiei 14, că orice fragment contextual X este un fragment regulat, respectiv, regulat faţă de un fragment de limbă Δ.

Un exemplu de fragment contextual reprezentativ, respectiv, de fragment contextual reprezentativ faţă de fragmentul de limbă $\Delta \subset L$ este dat de următoarea propoziţie :

PROPOZIŢIA 15. *Fie L o limbă complet adecvată şi T un tip al limbii L. Presupunem că $\mathcal{B}_T$ are proprietatea* :

$$\mathcal{B}_T \cap \mathcal{B}_{T'} = \langle 0, 0 \rangle$$

pentru orice tip T' diferit de tipul T.

În aceste condiţii avem :

1. $$a \xrightarrow[L]{\mathcal{B}_T} b \Rightarrow a \xrightarrow[L]{\Sigma_L} b$$

2. $$a \xrightarrow[\Delta]{\mathcal{B}_T} b \Rightarrow a \xrightarrow[\Delta]{\Sigma_L} b$$

pentru orice a şi b din V şi $\Delta \subset L$.

Exemplu de fragment contextual reprezentativ, în limba română :

Pentru a se studia relaţia de dominare între pronumele posesiv şi substantivul în genetiv s-a considerat, [8], următorul fragment contextual :

X = {⟨*casa, este frumoasă*⟩, ⟨*casele, sînt frumoase*⟩, ⟨*copilul, drag pleacă*⟩, ⟨*această faptă, este demnă*⟩, ⟨*al, pleacă*⟩, ⟨*ai, pleacă*⟩, ⟨*al, tînăr învaţă*⟩, ⟨*ai, tineri învaţă*⟩, ⟨*cartea este a, o*⟩, ⟨*a luptat contra, 0*⟩, ⟨*caietul, harnice*⟩}, pe baza căruia s-a determinat că posesivul domină substantivul în genetiv.

PROPOZIŢIA 16. *Fie o limbă L, un fragment contextual X şi un fragment de limbă $\Delta \subset L$. O condiţie suficientă pentru ca să fie un fragment de limbă reprezentativ este ca X şi Δ să fie reprezentative simultan, adică avem* :

$$\left\{ a \xrightarrow[\Delta]{X} b \Rightarrow a \xrightarrow[L]{\Sigma_L} b \right\} \Rightarrow \left\{ a \xrightarrow[\Delta]{\Sigma_L} b \Rightarrow a \xrightarrow[L]{\Sigma_L} b \right\}$$

pentru orice a şi b din V.

PROPOZIŢIA 17. *Fie o limbă L, un fragment contextual $X \subset \sum_L$ și un fragment de limbă $\Delta \subset L$. O condiție necesar pentru ca Δ să fie un fragment regulat este ca X și Δ să fie regulate simultan, adică avem :*

$$\left\{ a \xrightarrow[L]{\Sigma_L} b \Rightarrow a \xrightarrow[\Delta]{\Sigma_L} b \right\} \Rightarrow \left\{ a \xrightarrow[L]{\Sigma_L} b \Rightarrow a \xrightarrow[\Delta]{X} b \right\}$$

sau

$$\left\{ a \xrightarrow[L]{\Sigma_L} b \Rightarrow a \xleftrightarrow[\Delta]{X} b \right\}$$

pentru orice a și b din V.

Un exemplu care ilustrează această propoziție este următorul :

Fie $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $L = \{afb, afd, afc, agb, agc, bgc, bgd, agd, agg, agf, bgb, aff, afg\}$, $\Delta = \{afb, afd, afc, agb, agc, bgd, agd, bgb, bgc\}$.

Avem : $\alpha_L(a) = \{\langle o, fb \rangle, \langle o, fd \rangle, \langle o, fc \rangle, \langle o, gb \rangle, \langle o, gc \rangle \, \langle o, gd \rangle, \langle o, gg \rangle, \langle o, gf \rangle, \langle o, ff \rangle, \langle o, fg \rangle\}$

$\alpha_L(b) = \{\langle af, o \rangle, \langle ag, o \rangle, \langle o, gc \rangle, \langle o, gd \rangle, \langle o, gb \rangle, \langle bg, o \rangle\}$.

$\alpha_L(c) = \{\langle af, o \rangle, \langle ag, o \rangle, \langle bg, o \rangle\}$

$\alpha_L(f) = \{\langle a, b \rangle, \langle a, d \rangle, \langle a, c \rangle, \langle ag, o \rangle, \langle a, f \rangle, \langle af, o \rangle, \langle a, g \rangle\}$.

$\alpha_L(d) = \{\langle af, o \rangle, \langle bg, o \rangle, \langle ag, o \rangle\}$.

$\alpha_L(g) = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle a, d \rangle, \langle a, g \rangle, \langle ag, o \rangle, \langle a, f \rangle, \langle af, o \rangle, \langle b, b \rangle\}$.

$\alpha_L(a) = \{\langle o, fb \rangle, \langle o, fd \rangle, \langle o, fc \rangle, \langle o, gb \rangle, \langle o, gc \rangle \, \langle o, gd \rangle\}$.

$\alpha_\Delta(b) = \{\langle af, o \rangle, \langle ag, o \rangle, \langle o, gd \rangle, \langle o, gb \rangle, \langle bg, o \rangle \, \langle o, gc \rangle\}$.

$\alpha_\Delta(c) = \{\langle af, o \rangle, \langle ag, o \rangle, \langle bg, o \rangle\}$.

$\alpha_\Delta(f) = \{\langle a, b \rangle, \langle a, d \rangle, \langle a, c \rangle\}$.

$\alpha_\Delta(g) = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle\}$.

$\alpha_\Delta(d) = \{\langle af, o \rangle, \langle ag, o \rangle, \langle ag, o \rangle, \langle bg, o \rangle\}$.

Avem următoarele L-dominări-$\sum_L$:

$$c \xrightarrow[L]{\Sigma_L} b, \quad d \xrightarrow[L]{\Sigma_L} b, \quad c \xleftrightarrow[L]{\Sigma_L} d, \quad f \xrightarrow[L]{\Sigma_L} g$$

Avem următoarele Δ-dominări-$\sum_L$:

$$c \xrightarrow[\Delta]{\Sigma_L} b, \quad d \xrightarrow[\Delta]{\Sigma_L} b, \quad c \xleftrightarrow[\Delta]{\Sigma_L} d, \quad f \xrightarrow[\Delta]{\Sigma_L} g.$$

Fie un fragment contextual, $X = \{\langle a, b \rangle, \langle b, b \rangle, \langle ag, o \rangle, \langle o, gd \rangle\}$. Avem următoarele Δ-dominări-X :

$$c \xrightarrow[\Delta]{X} b, \quad d \xrightarrow[\Delta]{X} b, \quad c \xleftrightarrow[\Delta]{X} d, \quad f \xrightarrow[\Delta]{X} g.$$

Primită la redacție la 3 martie 1968

Centrul de Calcul Economic
și Cibernetică Economică

CONTEXTES CARACTÉRISTIQUES DANS LA LINGUISTIQUE ALGÉBRIQUE

RÉSUMÉ

On construit un modèle algébrique de la notion de contexte caractéristique, introduite par le linguiste Z. S. Harris [7]. On étudie ensuite la relation de domination conditionnée, due à L. Nebesky [13], et on donne une généralisation de cette relation, qui utilise certains paramètres contextuels, dont la notion de contexte caractéristique.

BIBLIOGRAFIE

1. R. L. Dobrušin, *Elementarnaja grammatičeskaja kategorija*. Bjulleten Objedinenija po problemam mašinnogo perevoda, *5*, 19—21 (1957).
2. — *Matematiceskie metody v lingvistike*. Priloženie, Matematičeskoe prosvesčenie, 6, 52—59 (1961).
3. C. V. Crăciun, *Δ — dominare și dominare condiționată în gramatica algebrică*. St. cerc. mat. **20** (1968).
4. — *Domination et sous-langages dans la Théorie analitique de la Grammaire*. Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, *1* (1968).
5. P. Diaconescu, *Numărul și genul substantivului românesc*. SCL, **XV**, 295—316 (1964).
6. H. A. Gleason, *Linguistics and English Grammar*, New York-Chicago San Francisco Toronto-London, 1965.
7. Z. S. Harris, *Structural Linguistics*. Fifth impression, Univ. of Chicago Press, 1961.
8. M. Manoliu, *Genitivul pronumelui personal în limba română contemporană. Elemente de lingvistică strucurală*, Ed. științifică, București, 1967.
9. S. Marcus, *Introduction mathématique à la lingustique structurale*. Dunod, Paris, 1967.
10. — *Analyse contextuelle*. Zeitschrift für Phonetik Sprachwissenschaft und Kommunikationsforschung, **18** *3*, 301—313 (1965).
11. — *Catégories de Dobrušin, fermetures des Sestier et voisinages de Sakai*. Glossa, **1**, 1 (1967).
12. — *Lingvistică matematică. Modele matematice în lingvistică*. Ed. de Stat Didactică și Pedagogică, București, 1963.
13. L. Nebesky, *Conditional replacement of words*. Prague Bulletin of Math. Linguistics, **3**, 3—12 (1965).
14. C. T. Raischi, *Asupra unui model algebric al categoriilor gramaticale I*. St. cerc., **19**, *4* (1967).
15. — *Relația de dominare și analiză algebrică contextuală*. St. cerc. mat., **20**, *1* (1968).
16. I. I. Revzin, *Nekotorye voprosy teorii modelei jozuka*, Naučnotechničeskaja informacija, **8** 42—46 (1964).
17. I. I. Revzin, *Metod modelirovanja i tipologhija slavjanskih jazykah*, Moskva, 1967.
18. A. Sestier, *Contribution à une theorie ensembliste des classifications linguistiques*, Actes du Premier Congres de L'AFCAL, 1960, Paris, 1961, p. 293—305.
19. E. Toma-Marcu, *Proprietăți ale închiderilor Sestier din teoria algebrică a gramaticii*, St. cerc. mat. **19**, (1967).
20. L. Vasiliu, *Asupra definiției prepoziției. Elemente de lingvistică structurală*, Ed. științifică București, 1967.

TOPOSUL PREFASCICULELOR ADITIVE DE GRUPURI ABELIENE PESTE O CATEGORIE PREADITIVĂ MICĂ (I)

DE

ALEXANDRU GH. RADU

Se dă un contraexemplu la o afirmaţie a lui Ouzilou [1], conform căreia orice prefascicul aditiv de grupuri abeliene peste o categorie preaditivă mică ar fi o limită inductivă de prefascicule reprezentabile; se pune în evidenţă o clasă generală de functori de tipul functorului produs tensorial şi se dă construcţia functorilor imagine directă şi reciprocă de prefascicule aditive, precum şi unele proprietăţi de adjuncţie.

0. În tot ceea ce urmează se fixează un univers $\mathcal{U}$ convenabil ales, încît mulţimea **Z** a întregilor raţionali, precum şi toate mulţimile ce vor apărea să fie elemente ale lui $\mathcal{U}$.

0.1. Vom spune că $\mathcal{C}$ este o $\mathcal{U}$-categorie dacă $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ este o mulţime izomorfă cu un element din $\mathcal{U}$, oricare ar fi perechea (X, Y) de obiecte din $\mathcal{C}$.

Notăm cu $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ clasa obiectelor lui $\mathcal{C}$ şi cu $\mathrm{Fl}(\mathcal{C})$ clasa morfismelor lui $\mathcal{C}$ adică reuniunea tuturor mulţimilor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ cînd X şi Y parcurg independent pe $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

$\mathcal{U}$-categorie $\mathcal{C}$ se numeşte mică sau element al lui $\mathcal{U}$ dacă $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ este o mulţime izomorfă cu un element din $\mathcal{U}$; rezultă atunci că şi $\mathrm{Fl}(\mathcal{C})$ este o mulţime izomorfă cu un element din $\mathcal{U}$.

Categoria $\mathcal{C}$ se numeşte preordonată dacă $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ constă din cel mult un element, oricare ar fi perechea (X, Y) de obiecte din $\mathcal{C}$.

Evident, o categorie preordonată este o $\mathcal{U}$-categorie.

Notăm cu $\mathcal{U}$-Ab categoria ale cărei obiecte sînt grupuri abeliene pentru care mulţimile subiacente sînt elemente din $\mathcal{U}$ şi ale cărei morfisme sînt homomorfisme de grupuri abeliene.

$\mathcal{U}$-Ab este o $\mathcal{U}$-categorie, însă nu element al lui $\mathcal{U}$. $\mathcal{U}$-categoria $\mathcal{C}$ se numeşte preaditivă dacă pentru orice pereche (X, Y) de obiecte

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 1, P. 141–149, BUCUREŞTI, 1969

din $\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ este un obiect din $\mathcal{U}$-Ab şi dacă, oricare ar fi morfismele $f : X' \to X$ şi $g' : Y \to Y'$ din $\mathcal{C}$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, g) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y')$$

este un morfism din $\mathcal{U}$-Ab.

Dacă $\mathcal{C}$ este o $\mathcal{U}$-categorie preaditivă, atunci, pentru orice obiect X din $\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ este un inel cu element unitate a cărei mulţime subiacentă este element din $\mathcal{U}$.

Reciproc, oricărui inel cu element unitate a cărei mulţime subiacentă este element din $\mathcal{U}$, i se asociază o $\mathcal{U}$-categorie preaditivă cu un singur obiect.

Categoria preaditivă $\mathcal{C}$ se numeşte aditivă dacă posedă un obiect nul şi sume directe finite sau, ceea ce este echivalent, produse directe finite.

Categoria aditivă $\mathcal{C}$ se numeşte abeliană dacă orice morfism are nucleu şi conucleu (deci şi imagine şi cominagine) şi dacă, orice bimorfism este izomorfism.

$\mathcal{U}$-categoria $\mathcal{U}$-ab este abeliană cu limite inductive şi proiective oarecare; în plus, limitele inductive filtrate sînt exacte, adică comută cu limitele proiective finite.

1.1. Fie $\mathcal{C}$ o $\mathcal{U}$-categorie preaditivă mică şi $\mathcal{C}^{\circ}$ duala sa care de asemenea este $\mathcal{U}$-categorie preaditivă mică.

Notăm cu $\overline{\mathcal{C}} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}^{\circ}, U - Ab)$, categoria ale cărei obiecte sînt functori contravarianţi aditivi definiţi pe $\mathcal{C}$ şi cu valori în $\mathcal{U}$-Ab şi ale cărei morfisme sînt transformări naturale de astfel de functori.

$\overline{\mathcal{C}}$ este $\mathcal{U}$-categorie, însă nu element al lui $\mathcal{U}$ şi se numeşte categoria $\mathcal{U}$-prefasciculelor de grupuri abeliene definite pe $\mathcal{C}$ sau simplu categoria prefasciculelor aditive definite pe $\mathcal{C}$.

$\overline{\mathcal{C}}$ este o categorie abeliană cu limite inductive şi proiective şi aceste limite se calculează „argument cu argument", în plus, limitele inductive filtrate sînt exacte.

Rezultă de aici că pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, functorul covariant aditiv, numit functorul secţiune deasupra lui X,

$$e_X : \overline{\mathcal{C}} \to \mathcal{U}\text{-Ab}, \ (F \rightsquigarrow F(X))$$

comută cu limitele inductive şi proiective.

În particular, un morfism din $\overline{\mathcal{C}}$

$$\alpha : F \to G$$

este monomorfism (epimorfism, izomorfism) dacă şi numai dacă pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, morfismul $\alpha(X) : F(X) \to G(X)$ este astfel în $\mathcal{U}$ Ab.

Există un factor covariant aditiv

$$h : \mathcal{C} \to \overline{\mathcal{C}}$$

care asociază la orice obiect X din $\mathcal{C}$, obiectul $h_X = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ din $\overline{\mathcal{C}}$ şi la orice morfism $f : X \to Y$ din $\mathcal{C}$, morfismul functorial $h_f : h_X \to h_Y$ de componente $h_f(Z) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, f)$, $Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.

Se arată uşor că functorul h comută cu limitele proiective reprezentabile din $\mathcal{C}$.

1.2. TEOREMA YONEDA-GROTHENDIECK (T.Y.-G.). *Pentru orice obiect* F *din* $\overline{\mathcal{C}}$ *şi orice* $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, *aplicaţia*

$$\alpha : \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_X F) \rightarrow F(X), \qquad (v \rightsquigarrow v_{(X)}(1_X))$$

este un izomorfism de grupuri abeliene, functorial în F *şi* X.

Demonstraţie. Functorialitatea lui α precum şi faptul că este un morfism de grupuri abeliene este evident.

Fie $x \in F(X)$ şi pentru orice $Y \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, morfismul $\beta(x)(Y)$: $h_X(Y) \rightarrow F(Y)$, $((Y \xrightarrow{f} X) \rightsquigarrow F(f)(x))$ din $\mathcal{U}$-Ab.

Morfismele $(\beta(x)(Y))_{Y \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}}$ sînt componentele unui morfism functorial

$$\beta(x) : h_X \rightarrow F.$$

Asocierea $x \rightsquigarrow \beta(x)$ defineşte o aplicaţie

$$\beta : F(X) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_X, F)$$

de grupuri abeliene, inversă lui α.

Dacă $F = h_Y$, $Y \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, atunci bijecţia

$$\beta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_X h_Y)$$

coincide cu aplicaţia

$$f \rightsquigarrow h_f$$

indusă de h şi prin urmare functorul h este deplin fidel.

Dacă F este un obiect din $\overline{\mathcal{C}}$, notăm cu $\mathcal{C}_F$ categoria obiectelor F-punctate din $\mathcal{C}$, adică categoria ale cărei obiecte sînt perechi (X, x) cu $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ şi $x \in F(X)$ şi ale cărei morfisme se definesc în mod evident. $\mathcal{C}_F$ este o $\mathcal{U}$-categorie mică.

Vom spune că obiectul F este reprezentabil dacă există un obiect (X, x) din $\mathcal{C}_F$ astfel ca morfismul functorial

$$\beta(x) : h_X \rightarrow F$$

să fie izomorfism : dacă un astfel de obiect există, este unic determinat pînă la un izomorfism din $\mathcal{C}_F$

Functorul h ne permite să identificăm pe $\mathcal{C}$, pînă la o echivalenţă de categorii, cu subcategoria plină a lui $\overline{\mathcal{C}}$ definită de obiectele reprezentabile. Graţie acestei identificări, vom abuza de notaţia X pentru h_X şi vom numi functorul h imersiunea canonică a lui $\mathcal{C}$ în $\overline{\mathcal{C}}$.

Ca o consecinţă imediată a T.Y.-G., rezultă că pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, functorul covariant aditiv

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_X, -) : \overline{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{U}\text{-Ab}$$

este izomorf cu E_X şi prin urmare este exact.

Rezultă de aici că pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, h_X este obiect proiectiv în $\overline{\mathcal{C}}$ şi functorul e_X este reprezentabil.

Familia $\mathcal{G} = \{h_x\}_{X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}}$ este o mulţime de generatori ai lui $\overline{\mathcal{C}}$ căci dacă $F \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} G$ sînt două morfisme diferite din $\overline{\mathcal{C}}$, atunci există $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ astfel ca $u(X) \neq v(X)$ şi din T.Y.-G. rezultă un morfism $t : h_X \to F$ astfel ca $ut \neq vt$.

Tot din T.Y.-G. rezultă un izomorfism între categoria $\mathcal{C}_F$ şi categoria $\mathcal{C}/F$ ale cărei obiecte sînt perechi (X, α) cu $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ şi $\alpha : h_X \to F$ morfism din $\overline{\mathcal{C}}$ şi ale cărei morfisme sînt evidente, $\mathcal{C}/F$ este o subcategorie plină a categoriei $\mathcal{C}/F$.

Există un factor covariant

$$s_F : \mathcal{C}/F \to \mathcal{C}, \ ((X, \alpha)\ X).$$

numit, în cele ce urmează, functorul uituc şi un morfism unic Q_F astfel încît diagrama

$$\begin{tikzcd}
\underrightarrow{\lim}_{\mathcal{C}/F}\ h\, s_F(X, \alpha) \arrow[rr, "Q_F"] & & F \\
& hs_F(X, \alpha) \arrow[ul, "q^{(\alpha, x)}"] \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă, unde $(q^{(X,\alpha)})_{(X, \alpha) \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}/F}$ sînt morfismele de structură.

Rezultă imediat, aplicînd T.Y.-G., că Q_F este un epimorfism care în general nu este izomorfism aşa cum rezultă din următorul exemplu:

Fie Z inelul intregilor raţionali şi $\mathcal{C}$ categoria preaditivă cu un singur obiect corespunzătoare lui Z. Deoarece Z, considerat ca mulţime, este element al lui U, rezultă că $\mathcal{C}$ este U-categorie evident mică.

Categoria $\overline{\mathcal{C}}$ coincide cu U-Ab şi imersiunea canonică $h : \mathcal{C} \to \overline{\mathcal{C}}$ reţine numai structura de grup abelian a lui Z.

Dacă $Z_2 = \{\hat{0}, \hat{1}\}$ este inelul claselor de resturi modulo (2), considerat ca grup abelian, atunci, evident, $\underrightarrow{\lim}_{\mathcal{C}/Z_2} h\, s_{Z_2} = Z$ şi $Q_{Z_2} : Z \to Z_2$ nu poate fi izomorfism.

1.3. *Observaţie*. Dacă $\mathcal{C}$ este aditivă, atunci pentru orice obiect F din $\mathcal{C}$, Q_F este izomorfism ([2]).

1.4. Deoarece $\mathcal{G} = \{h_x\}_{X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}}$ este o familie de generatori proiectivi ai lui $\overline{\mathcal{C}}$, pentru orice obiect F din $\overline{\mathcal{C}}$ există un şir exact

$$(E) \qquad \bigoplus_{i \in I} h_{X_i} \xrightarrow{u_F} \bigoplus_{j \in J} h_{X_j} \xrightarrow{p_F} F \to 0,\ I,\ J \in \mathcal{U}$$

şi pentru orice morfism $\alpha : F \to G$ din $\overline{\mathcal{C}}$, diagrama comutativă canonic construită :

$$(D) \qquad \begin{tikzcd}
\bigoplus_{i \in I} h_{X_i} \arrow[r, "u_F"] \arrow[d, "\alpha_1"] & \bigoplus_{j \in J} h_{X_j} \arrow[r, "p_F"] \arrow[d, "\alpha_0"] & F \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
\bigoplus_{k \in K} h_{Xk} \arrow[r, "v_G"] & \bigoplus_{l \in L} h_X \arrow[r, "G"] & G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Rezultă imediat că obiectul F determină şirul exact (E) pînă la un izomorfism.

5. LEMĂ. *Fie $\mathcal{C}$ o U-categorie preaditivă mică, $\mathfrak{D}$ o $\mathcal{U}$-categorie aditivă cu limite inductive şi $T : \overline{\mathcal{C}} \to \mathfrak{D}$ un functor covariant aditiv.*

Sînt echivalente următoarele afirmaţii :

i) *Există un functor S adjunct la dreapta pentru T*

ii) *T comută cu limitele inductive.*

Demonstraţie. i) ⇒ ii) rezultă din adjuncţie. ii) ⇒ i). Arătăm că functorul

$$S : \mathfrak{D} \to \overline{\mathcal{C}}, \quad (D \rightsquigarrow S_D = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}\,(T\,(h_-),\ D))$$

este un adjunct la dreapta pentru T.

Pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ şi orice obiect D din $\mathfrak{D}$ există, după T.Y.-G., o aplicaţie bijectivă de grupuri abeliene

$$\varphi\,(h_X,\ D) : \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}\,(h_X,\ S_D) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}\,(T\,(h_X),\ D))$$

functorială în X şi D, cu alte cuvinte izomorfismul de adjuncţie $\varphi\,(F,\ D)$ al lui T cu S este verificat pentru orice obiect D din $\mathfrak{D}$ şi orice obiect reprezentabil F din $\overline{\mathcal{C}}$.

Izomorfismul $\varphi\,(F,\ D)$ este iarăşi evident dacă F este o sumă directă de obiecte reprezentabile din $\overline{\mathcal{C}}$, iar dacă F este obiect oarecare în $\overline{\mathcal{C}}$, atunci izomorfismul $\varphi\,(F,\ D)$ se deduce din şirul exact (E) şi diagrama comutativă (D).

1.6. TEOREMA GENERALĂ A PRODUSULUI TENSORIAL. *Fie $\mathcal{C}$ o U-categorie preaditivă mică şi $\mathfrak{D}$ o U-categorie aditivă cu limite inductive. Pentru orice functor covariant aditiv $t : \mathcal{C} \to \mathfrak{D}$ există un functor covariant aditiv $T : \overline{\mathcal{C}} \to \mathfrak{D}$ unic determinat, pînă la un izomorfisim functorial, de condiţia $Th = t$ şi una din condiţiile echivalente din lema precedentă.*

Demonstraţie. Fie F un obiect din $\overline{\mathcal{C}}$. Dacă $F \approx h_X$, $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, definim $T\,(F) = t\,(X)$ şi dacă $\alpha : h_X \to h_Y$ este un morfism din $\overline{\mathcal{C}}$ definim $T\,(\alpha) = t\,(f)$, unde $f : X \to Y$ este morfismul din $\mathcal{C}$ pentru care $\alpha = h_f$.

Dacă $F = \bigoplus\limits_{i \in I} h_{X_i}$, $I \in \mathcal{U}$, definim $T\,(F) = \bigoplus\limits_{i \in I} t\,(X_i)$ şi dacă $\alpha : \bigoplus\limits_{i \in I} h_{X_i} \to \bigoplus\limits_{j \in J} h_{X_j}$, $J \in \mathcal{U}$, este un morfism din $\overline{\mathcal{C}}$, definim $T\,(\alpha)$ în felul următor :

Conform *T.Y.-G.*, pentru orice $i \in I$, morfismul $\alpha_i = \alpha \cdot \eta_i$, unde $\eta_i : h_{X_i} \to \bigoplus\limits_{i \in I} h_{X_i}$ este morfismul de structură, este bine determinat de elementul $\alpha_i\,(1_{X_i}) \in \bigoplus\limits_{j \in J} h_{X_j}\,(X_i)$ care la rîndul său este bine determinat de un şir finit

$$f_{j_k} : X_i \to X_{j_k}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Din proprietatea de universalitate a produsului direct rezultă un morfism unic

$$t\,(X_i) \to \prod_{k=1}^{n} t\,(X_{j_k}) \approx \bigoplus_{k=1}^{n} t\,(X_{j_k})$$

ce face anumite diagrame comutative şi deci un morfism unic

$$t(X_i) \to \bigoplus_{i\in J} t(X_j), \qquad i \in I.$$

Din proprietatea de universalitate a sumei directe rezultă un morfism unic

$$T(\alpha) : \bigoplus_{i\in I} t(X_i) \to \bigoplus_{j\in J} t(X_j)$$

ce face comutative anumite diagrame.

Dacă F este obiect oarecare în $\bar{\mathcal{C}}$, se consideră şirul exact (E) din $\bar{\mathcal{C}}$ şi şirul exact

$$(TE);\ \bigoplus_{i\in I} t(X_i) \xrightarrow{T(U_F)} \bigoplus_{j\in J} t(X_j) \xrightarrow{V_F} \operatorname{Coker} T(U_F) \to 0$$

din $\mathfrak{D}$ şi definim $T(F) = \operatorname{Coker} T(U_F)$.

Diagrama (D) ne permite să definim functorul T şi pe morfisme şi se arată uşor că T astfel definit este într-adevăr un functor covariant.

Functorul T este aditiv, căci dacă $F \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} G$ sînt două morfisme din $\bar{\mathcal{C}}$ şi (α_0, α_1), (β_0, β_1) morfismele corespunzătoare ce fac diagrama (D) comutativă, atunci

$$T(\alpha + \beta) V_F = V_G(\alpha_0 + \beta_0) = V_G\alpha_0 + V_G\beta_0 = T(\alpha) V_F + T(\beta) V_F =$$
$$= (T(\alpha) + T(\beta)) V_F,$$

de unde

$$T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta)$$

căci V_F este epimorfism.

Din definiţia lui T rezultă $t = Th$ şi se vede uşor că functorul

$$S : \mathfrak{D} \to \bar{\mathcal{C}}, \ (D \rightsquigarrow S_D = \operatorname{Hom}_{\mathfrak{D}}(t(-), D))$$

este un adjunct la dreapta pentru T.

Aceste două proprietăţi ale functorului T îl definesc pînă la un izomorfism functorial, căci dacă $T' : \bar{\mathcal{C}} \to \mathfrak{D}$ este un alt functor covariant aditiv cu cele două proprietăţi, atunci uşor se vede că are pe S ca functor adjunct la dreapta.

1.7. Dacă t este un functor deplin fidel, atunci $St = h$. Rezultă atunci că pentru orice $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, $\psi_{h_X} : h_X \to ST\,(h_X)$ este izomorfism, unde $\psi : \operatorname{Id}_{\bar{\mathcal{C}}} \to ST$ este săgeata de adjuncţie a lui S cu T.

În particular, dacă $\mathcal{C}$ este aditivă şi S comută cu limitele inductive, atunci T este deplin fidel dacă t este astfel, căci în acest caz orice obiect din $\bar{\mathcal{C}}$ este limita inductivă a obiectelor reprezentabile deasupra sa (1.3).

1.8. Dacă $\mathcal{C}$ este o U-categorie preaditivă cu un singur obiect, adică un inel A cu element unitate a cărei mulţime subiacentă este element din $\mathcal{U}$, atunci $\bar{\mathcal{C}}$ coincide cu $\mathcal{U}$-categorie Mod A a A-modulelor drepte unitare. Imersiunea canonică h înzestrează pe A cu structura sa canonică de A-modul drept unitar.

Dacă B este un alt inel cu element unitate şi $\mathfrak{D}$ este $\mathcal{U}$-categoria Mod B a B-modulelor drepte unitare, evident aditivă şi cu limite inductive, atunci categoria functorilor covarianţi aditivi de la $\mathcal{C}$ la $\mathfrak{D}$ coincide cu categoria bimodulelor la stînga peste A şi la dreapta peste B.

Dacă M este un astfel de bimodul, atunci functorul ce-i corespunde prin teorema precedentă este izomorf cu functorul produs tensorial

$$- \otimes_A M \ : \mathrm{Mod}\ A \to \mathrm{Mod}\ B.$$

Un adjunct al său la dreapta este functorul

$$\mathrm{Hom}_B\,(M,\ -) : \mathrm{Mod}\ B \to \mathrm{Mod}\ A.$$

Graţie acestei observaţii vom nota functorul T corespunzător lui t cu $- \otimes_{\mathcal{C}} t$ şi-l vom numi functorul produs tensorial asociat lui t.

1.9. Dacă $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ şi dacă t este functorul covariant aditiv

$$h^X : \mathcal{C} \to U - \mathrm{Ab},\ (Y \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ Y)),$$

atunci $- \otimes_{\mathcal{C}} t \approx e_X$.

Un adjunct la dreapta pentru functorul e_X este functorul

$$e_X^+ : U\text{-}\mathrm{Ab} \to \overline{\mathcal{C}},\ (M \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}-Ab}\,(h^X(-),\ M).$$

Deoarece pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ functorul e_X este exact, functorul e_X^+ păstrează obiectele injective. În particular, pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, $e_X^+\,(Q/Z)$ este obiect injectiv însă nu şi cogenerator căci e_X nu este fidel.

Totuşi categoria $\overline{\mathcal{C}}$ are un cogenerator injectiv, căci fiind o categorie abeliană cu limite inductive filtrate exacte şi generatori, are suficiente injective ([4]) şi este suficient atunci să considerăm produsul P al tuturor cîturilor generatorului (proiectiv) $G = \bigoplus_{X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}} h_X$ şi să-l scufundăm într-un obiect injectiv I, care uşor se arată că este şi cogenerator.

1.10. Fie $u : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor covariant aditiv între două $\mathcal{U}$-categorii preaditive elemente ale lui $\mathcal{U}$ şi

$$u_* : \overline{\mathcal{C}'} \to \overline{\mathcal{C}},\ (F \rightsquigarrow Fu),$$

functorul covariant aditiv indus de u.

Evident, functorul u_* comută cu limitele inductive şi proiective şi se numeşte functorul imagine directă de prefascicule aditive indus de u.

Din teorema precedentă rezultă existenţa unui functor

$$u^* : \overline{\mathcal{C}} \to \overline{\mathcal{C}'}$$

numit functorul imagine reciprocă de prefascicule aditive indus de u, determinat pînă la un izomorfism functorial de următoarele două proprietăţi :

a) Diagrama de categorii și functori

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h"'] & \mathcal{C}' \arrow[d, "h'"] \\ \overline{\mathcal{C}} \arrow[r, "u^*"] & \overline{\mathcal{C}}' \end{tikzcd}$$

este comutativă, unde h și h' sînt functorii de imersiune canonică.

b) Există un functor S adjunct la dreapta pentru u^*.

Folosind definiția lui S, rezultă imediat că $S \approx u_*$.

Deoarece u_* este exact, rezultă că u^* păstrează obiectele proiective.

Dacă $\mathcal{C}$ este aditivă și u este deplin fidel, atunci u^* este deplin fidel și deci, în acest caz, u_* păstrează cogeneratorii.

Deoarece u_* comută cu limitele inductive, există un adjunct la dreapta pentru u_*:

$$u^+ : \to \overline{\mathcal{C}} \to \overline{\mathcal{C}}', \ (G \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}} (u_*(h'_-), (G))$$

care păstrează injectivele.

Prima afirmație rezultă din 1.5, iar a doua din faptul că u_* este exact.

Dacă u admite un adjunct la stînga v, atunci $u^* \approx v_*$ și $u^* \approx v^+$, de unde rezultă că u^* comută și cu limitele proiective și prin urmare functorul u^* păstrează obiectele injective. Dacă în plus u este deplin fidel și $\mathcal{C}$ este aditivă, atunci u_* păstrează cogeneratorii injectivi.

Într-adevăr, fie F un obiect oarecare în $\overline{\mathcal{C}}$ și șirul exact în $\overline{\mathcal{C}}$

$$\bigoplus_i h_{X_i} \to \bigoplus_j h_{X_{y'}} \to F \to 0$$

care pentru orice $Y \in Ob(\mathcal{C}')$ induce șirul exact în $\mathcal{U}$-Ab

$$\bigoplus_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} (v(Y), X_i) \to \bigoplus_j \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} (v(Y), X_j) \to F(v(Y)) \to 0.$$

Prin definiție,

$$u^* F = \mathrm{Coker} (\bigoplus_i h'_{u(X_i)} \to \bigoplus_j h'_{u(X_j)})$$

și deci

$$u^* F(Y) = \mathrm{Coker} (\bigoplus_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'} (Y, u(X_i)) \to \bigoplus_j \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'} (Y, u(X_j))$$

pentru orice $Y \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$.

Din diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(v(Y), X_i) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_1 \wr"'] & \bigoplus_j \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(v(Y), X_j) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_2 \wr"'] & F(v(Y)) \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & 0 \\ \bigoplus_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'} (Y, u(X_i) \arrow[r] & \bigoplus_j \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, u(X_j)) \arrow[r] & u^*(F(Y) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

cu liniile exacte și θ_1, θ_2 izomorfisme, rezultă θ izomorfism care evident este functorial în F și Y, adică izomorfismul $u^* \approx v_*$.

Pentru orice $Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ şi orice obiect G din $\overline{\mathcal{C}}'$, $v^{+} F(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}'}(v_{*}(h_{Y}), G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}'}(u^{*}(h_{Y}), G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_{Y}, u_{*}(G)) = u_{*}G(Y)$ şi acest izomorfism este functorial în G şi Y, adică $u_{*} = v^{+}$.

Primită la redacţie la 25 iunie 1968

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

LE TOPOS DES PRÉFAISCEAUX ADDITIFS DES GROUPES ABÉLIENS SUR UNE PETITE CATÉGORIE PRÉADDITIVE (I)

RÉSUMÉ

On donne un contre-exemple à une assertion de Ouzilou ([1]) par laquelle tout préfaisceau additif des groupes abéliens sur une petite catégorie préadditive serait une limite inductive des préfaisceaux représentables. On met en évidence une classe générale des foncteurs du type de foncteur produit tensoriel et on donne la construction des foncteurs image directe et inverse des préfaisceaux additifs, ainsi que quelques propriétés d'adjonction.

BIBLIOGRAFIE

1. Ouzilou, R., *Faisceaux additifs et applications catégoriques.* Publications du département de mathématiques, Lyon, **3**, *3* (1966).
2. Verdier, Jean Louis, *Topologies et faisceaux.* Seminaire I.H.E.S., I, II, III (1964).
3. Radu Alexandru, Gh., *Le théorème général du produit tensoriel.* Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, **13**, *8* (1968).
4. Bucur, I., *Algebră omologică.* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1965.

PROPRIETĂȚI DE FINITUDINE ÎN CATEGORII ABELIENE (II)

DE

ALEXANDRU GH. RADU

Plecînd de la proprietățile generale ale categoriei modulelor drepte unitare peste un inel cu element unitate am arătat că de fapt cadrul natural al proprietăților de caracter finit din această categorie îl constituie toposurile abeliene în sensul lui Grothendieck, adică categorii abeliene cu limite inductive filtrate exacte și cu generatori.

Am arătat cu această ocazie că toposul prefasciculelor aditive de grupuri abeliene definite peste o categorie preaditivă mică este local de tip finit și chiar local de prezentare finită și am caracterizat obiectele de tip finit și de prezentare finită din acest topos cînd categoria de bază este aditivă.

1. Propoziție *Fie $\mathcal{C}$ o $\mathcal{U}$ -categorie abeliană și X un obiect din $\mathcal{C}$. Următoarele afirmații sînt echivalente :*

i) *Functorul*

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \to \mathcal{U} - \mathrm{Ab}$$

comută cu sumele directe.

ii) *Orice morfism*

$$X \to \bigoplus_{i \in \pm} X_i, \quad I \in \mathcal{U}$$

se factorizează printr-o sumă parțială finită $\bigoplus\limits_{j \in J} X_j$, $J \subset I$, *= finită.*

Demonstrație. i) $\Rightarrow$ ii) căci $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \bigoplus\limits_{i} X_i) = \bigoplus\limits_{i} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X_i) =$

$$= \varinjlim_{J} (\bigoplus_{j \in J} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X_j) = \varinjlim_{J} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \bigoplus_{j} X_j)$$

ii) $\Rightarrow$ i), căci monomorfismul canonic

$$\bigoplus_{i} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X_i) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \bigoplus_{i} X_i)$$

este și epimorfism.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 1 P. 151–159, BUCUREȘTI, 1969

2. Definiție. Obiectul X din $\mathcal{C}$ se numește finit transferabil dacă verifică din condițiile propoziției precedente.

3. *Exemplu.* Dacă $\mathcal{C}$ este o $\mathcal{U}$ -categorie preaditivă mică, atunci pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, h_X este obiect finit transferabil în $\overline{\mathcal{C}}$, căci functorul $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_X, -) \approx e_X$ comută chiar cu limitele inductive. Rezultă deci că $G = \{h_X\}_{X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}$ formează o familie de generatori proiectivi finit transferabili în $\overline{\mathcal{C}}$.

Evident, o sumă directă finită de obiecte finit transferabile este un obiect finit transferabil.

4. Definiție. Un obiect X din $\mathcal{C}$ se numește de tip finit dacă orice familie $(X_i)_{i \in J}$ filtrată crescător de subobiecte ale sale a cărei margine superioară este X conține printre elementele ei pe X.

5. Definiție. O $\mathcal{U}$-categorie abeliană $\mathcal{C}$ cu limite inductive filtrate exacte și posedînd o $\mathcal{U}$-familie de generatori se numește $\mathcal{U}$-topos abelian.

$\mathcal{U}$-toposul abelian $\mathcal{C}$ se numește local de tip finit dacă posedă o $\mathcal{U}$-familie de generatori de tip finit.

6. Propoziție. *Dacă $\mathcal{C}$ este o $\mathcal{U}$-categorie preaditivă mică, atunci $\overline{\mathcal{C}}$ este un $\mathcal{U}$-topos abelian local de tip finit.*

Demonstrație. Este suficient să arătăm că pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, h_X este obiect de tip finit în $\overline{\mathcal{C}}$.

Fie $(F_i)_{i \in I}$ o familie filtrată crescător de subobiecte ale lui h_X astfel ca $\bigcup_i F_i = h_X$. Rezultă atunci un epimorfism canonic

$$\bigoplus_i F_i \xrightarrow{p} h_X \longrightarrow 0$$

care este secționabil căci h_X este proiectiv.

Cum h_X este finit transferabil, există o submulțime finită J a lui I astfel încît diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \bigoplus\limits_{j \in J} F_j \arrow[dr, "t"] & \\
h_X \arrow[ur, "q"] \arrow[rr, "s"] & & \bigoplus\limits_i F_i
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă, unde s este un invers la dreapta al lui p. Din relația $1_{h_X} = ps = p\,(tq) = (pt)\,q$ rezultă epimorfismul

$$pt : \bigoplus_j F_j \to h_X$$

și deci $h_X = \bigcup_{j \in J} F_j$. Deoarece această reuniune este finită și mulțimea I filtrată crescător, există un $i_0 \in I$ astfel ca $h_X = Fi_0$.

7. Propoziție. *Dacă $0 \to X' \xrightarrow{j} X \xrightarrow{p} X'' \longrightarrow 0$ este un șir exact în $\mathcal{U}$-categoria abeliană $\mathcal{C}$ cu limite inductive, filtrate exacte, atunci sînt adevărate următoarele afirmații :*

i) *Dacă X este obiect de tip finit, la fel este și X''.*

ii) *Dacă X și X'' sînt de tip finit, la fel este și X.*

Demonstrație. i) Dacă $X'' = \bigcup_{i\in I} X_i$, unde $(X_i)_{i\in I}$ este trată crescător de subobiecte ale lui X'', atunci $X=p^{-1}(X'') =$ de unde, conform ipotezei, există $i_0 \in I$ astfel ca $X = p^{-1}(X_{i_0})$ și deci $X'' = X_{i_0}$.

ii) Fie $(X_i)_{i\in I}$ o familie filtrată crescător de subobiecte ale lui X astfel ca $X = \bigcup_i X_i$.

Evident, $(p(X_i))_{i\in I}$ este o familie filtrată crescător de subobiecte ale lui X'' astfel ca $X'' = \bigcup_i p(X_i)$ și deci există $i_0 \in I$ cu $X'' = p(X_{i_0})$.

La fel, $(X' \cap X_i)_{i\in I}$ este o familie filtrată crescător de subobiecte ale lui X' astfel ca $X' = \bigcup_i (X' \cap X_i)$ și deci există $i_1 \in I$ cu $X' = X' \cap X_{i_1}$.

Prin ipoteză există $i_2 \in I$ astfel ca $X_{i_0}, X_{i_1} \subseteq X_{i_2}$.

Evident, $X' = X' \cap X_{i_2}$. Din $X'' = p(X_{i_0}) \subseteq p(X_{i_2}) \subseteq X''$ rezultă $X'' = p(X_{i_2})$. Arătăm că $X = X_{i_2}$. Să considerăm diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "\bar{j}"] \arrow[d, equal] & X_{i_2} \arrow[r, "\bar{p}"] \arrow[d, "i"] & X'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "j"] & X \arrow[r, "p"] & X'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

cu linia de jos exactă prin ipoteză. Se arată ușor că și linia de sus este exactă și din lema celor cinci morfisme rezultă i izomorfism și propoziția este dovedită.

8. COROLAR. *Dacă $\mathcal{C}$ este o $\mathcal{U}$-categorie abeliană cu limite inductive filtrate exacte, atunci o sumă directă finită de obiecte de tip finit din $\mathcal{C}$ este un obiect de tip finit și reciproc, dacă o sumă directă finită de obiecte din $\mathcal{C}$ este un obiect de tip finit, la fel sînt și sumanzii săi direcți.*

Rezultă de aici că subcategoria plină a lui $\mathcal{C}$ definită de obiectele de tip finit este o categorie aditivă, observînd că obiectul nul din $\mathcal{C}$ este de tip finit. Din propoziția 7, i) rezultă că această subcategorie este cu conuclee.

9. COROLAR. *În aceeași ipoteză ca în corolarul precedent, dacă $(X_i)_{i\in I}$ este o familie finită de subobiecte de tip finit ale unui obiect X din $\mathcal{C}$, atunci $\bigcup_{i\in I} X_i$ este un subobiect de tip finit al lui X. Evident.*

10. TEOREMĂ. *$\mathcal{U}$-toposul abelian $\mathcal{C}$ este local de tip finit dacă și numai dacă fiecare obiect din $\mathcal{C}$ este marginea superioară a subobiectelor sale de tip finit.*

Demonstrație. Fie X un obiect din $\mathcal{C}$ și $(X_i)_{i\in I}$ mulțimea subobiectelor sale de tip finit care este nevidă (corolarul 8) și filtrată crescător (corolarul 9).

Dovedim că $X = \bigcup_{i\in I} X_i$, adică monomorfismul canonic $\bigoplus_i X_i \xrightarrow{\theta} X$, este epimorfism.

Dacă această incluziune ar fi strictă, atunci ar exista un generator Y, care prin ipoteză este de tip finit, și un morfism $Y \xrightarrow{u} X$, care nu se factorizează prin θ, ceea ce este absurd, căci $\operatorname{Im}(u)$ este un subobiect de tip finit al lui X.

Reciproca este imediată, căci dacă $(X_i)_{i\in I}$ este o familie de generatori ai lui $\mathcal{C}$ și dacă pentru orice $i \in I$, $X_i = \bigcup\limits_{j\in J} X_i^j$ cu X_i^j de tip finit, atunci familia $(X_i^j)_{(i,j)\in I\times J}$ este o familie de generatori de tip finit ai lui $\mathcal{C}$.

11. DEFINIȚIE. Obiectul X din $\mathcal{U}$-toposul abelian $\mathcal{C}$ se numește finit generat în raport cu familia de generatori $(X_i)_{i\in I}$ dacă există o submulțime finită J a lui I și un epimorfism

$$\bigoplus_{j\in J} X_j \xrightarrow{p} X \longrightarrow 0$$

12. PROPOZIȚIE. *Dacă $\mathcal{C}$ este un $\mathcal{U}$-topos abelian local de tip finit, atunci un obiect X din $\mathcal{C}$ este de tip finit dacă și numai dacă este finit generat în raport cu familia de generatori de tip finit $(X_j)_{j\in J}$ ai lui $\mathcal{C}$.*

Demonstrație. Presupunem că X este de tip finit.

Deoarece $\mathcal{C}$ este cu sume directe, există un epimorfism

$$(*) \qquad \bigoplus_{i\in I} X_i \xrightarrow{p} X \longrightarrow 0,$$

unde I este mulțimea $\bigoplus\limits_{j\in J} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_j, X)$ și unde pentru orice $j \in J$, X_j apare în suma directă din (*) de atîtea ori cîte elemente are mulțimea $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_j, X]$.

Însă $\bigoplus\limits_{i\in I} X_i = \bigcup\limits_{\mathfrak{F}} (\bigoplus\limits_{K} X_i)$, unde $K \in \mathfrak{F}$ și unde $\mathfrak{F}$ este mulțimea submulțimilor finite ale lui I.

Cum $X = p(\bigoplus\limits_{i} X_i) = \bigcup\limits_{\mathfrak{F}} (p(\bigoplus\limits_{K} X_i)$ este de tip finit, rezultă $X = p(\bigoplus\limits_{K} X_i)$ pentru un $K \in \mathfrak{F}$, adică X este finit generat în raport cu familia de generatori $(X_i)_{i\in I}$.

Reciproca rezultă imediat din corolarul 8 și propoziția 7, i).

13) COROLAR. *Dacă $\mathcal{C}$ este o $\mathcal{U}$-categorie aditivă mică, un obiect din $\overline{\mathcal{C}}$ este de tip finit dacă și numai dacă este cîtul unui obiect reprezentabil.*

14) PROPOZIȚIE. *Dacă $\mathcal{C}$ este o $\mathcal{U}$-categorie abeliană cu limite inductive filtrate exacte, atunci orice obiect de tip finit X din $\mathcal{C}$ este finit transferabil. Reciproca este adevărată dacă X este și proiectiv.*

Demonstrație. Fie X un obiect de tip finit și $X \xrightarrow{u} \bigoplus\limits_{i\in I} X_i$ un morfism în $\mathcal{C}$. Deoarece $\bigoplus\limits_{i\in I} X_i = \bigcup\limits_{J} (\bigoplus\limits_{j\in J} X_j)$, $J \subset I$, $J =$ finită și deoarece $X = u^{-1} \bigoplus\limits_{i\in I} (X_i) = u^{-1} (\bigcup\limits_{J} \bigoplus\limits_{j\in J} X_j)) = \bigcup\limits_{J} (u^{-1} (\bigoplus\limits_{j\in J} X_j))$ este de tip finit, rezultă că există un J astfel ca $X = u^{-1} (\bigoplus\limits_{i\in J} X_j)$ și atunci u se factorizează prin suma directă finită $\bigoplus\limits_{j\in J} X_j$.

Reciproca se demonstrează la fel ca în propoziția 6.

15. DEFINIȚIE. Obiectul X din $\mathcal{U}$-categoria abeliană $\mathcal{C}$ se numește de prezentare finită dacă este de tip finit și dacă, pentru orice epimorfism $Y \xrightarrow{u} X$ cu Y de tip finit, rezultă și Ker u de tip finit.

Evident, un obiect proiectiv și de tip finit din $\mathcal{C}$ este de prezentare finită. În particular, dacă $\mathcal{C}$ este o $\mathcal{U}$-categorie preaditivă mică, atunci pentru orice $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, h_X este obiect de prezentare finită în $\overline{\mathcal{C}}$. Rezultă așadar că $\overline{\mathcal{C}}$ posedă o familie de generatori de prezentare finită.

16. PROPOZIȚIE. *Fie* $\mathcal{C}$ *o* $\mathcal{U}$*-categorie abeliană cu limite inductive filtrate exacte și*

$$0 \longrightarrow X' \xrightarrow{j} X \xrightarrow{p} X'' \longrightarrow 0$$

un șir exact în $\mathcal{C}$. *Sînt adevărate următoarele afirmații* :

i) *Dacă* X *este de prezentare finită și* X' *este de tip finit, atunci* X'' *este de prezentare finită.*

ii) *Dacă* X' *și* X'' *sînt de prezentare finită, atunci și* X *este la fel.*

Demonstrație. i) Din propoziția 7, i) rezultă X'' de tip finit.

Fie $Y \xrightarrow{u} X''$ un epimorfism în $\mathcal{C}$ cu Y de tip finit.

Să considerăm diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \operatorname{Ker} u' \arrow[r, dash, "\sim"] \arrow[d] & \operatorname{Ker} u \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} p' \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & X \times_{X''} Y \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "u'"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "j"] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d] & X'' \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

cu liniile și coloanele exacte. Deoarece X' și Y sînt de tip finit, rezultă $X \underset{X''}{\times} Y$ de tip finit (propoziția 7, ii).

Însă u' este epimorfism și deci Ker u' este de tip finit căci X este de prezentare finită.

Așadar Ker u este de tip finit și prima afirmație este dovedită.

ii) Din propoziția 7, ii) rezultă X de tip finit.

Fie $Y \xrightarrow{u} X$ un epimorfism în $\mathcal{C}$ cu Y de tip finit şi diagrama o n ic construită

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[ddr, "\mathrm{Ker}\,pu"] & 0 \arrow[d] & & \\
 & & \mathrm{Ker}\,u \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X' \times_X Y \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "u'"] & Y \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "u"] & \mathrm{Coker}\,j' \arrow[r] \arrow[d, "u''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "j"] \arrow[d] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d] & X'' \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

cu liniile exacte, u'' monomorfism şi u' epimorfism.

Cum X'' este de prezentare finită şi pu epimorfism, rezultă $\mathrm{Ker}\,(pu)$ de tip finit. Însă $\mathrm{Ker}\,(pu) \approx \mathrm{Ker}\,p'$ căci u'' este monomorfism şi deci $X' \times_X Y \approx \mathrm{Ker}\,p'$ este de tip finit.

Deoarece X' este de prezentare finită, $\mathrm{Ker}\,u$ ($\approx \mathrm{Ker}\,u\,u'$) este de tip finit şi propoziţia este complet dovedită.

17. COROLAR. *O sumă directă finită de obiecte de prezentare finită dintr-o $\mathcal{U}$-categorie abeliană cu limite inductive filtrate exacte este un obiect de prezentare finită şi reciproc, dacă o sumă directă finită de obiecte din $\mathcal{C}$ este un obiect de prezentare finită, la fel sînt şi sumanzii săi direcţi.*

Rezultă deci că subcategoria plină a lui $\mathcal{C}$ definită de obiectele de prezentare finită este o categorie aditivă, observînd că obiectul nul din $\mathcal{C}$ este de prezentare finită.

Mai mult, această subcategorie este cu conuclee (propoziţia 16, i).

18. COROLAR *Dacă $(X_i)_{i\in I}$ este o familie finită de subobiecte de prezentare finită ale unui obiect X dintr-o $\mathcal{U}$-categorie abeliană $\mathcal{C}$ cu limite inductive filtrate exacte, atunci $\bigcup_{i\in I} X_i$ este un subobiect de prezentare finită al lui X dacă şi numai dacă $\bigcap_{i\in I} X_i$ este de tip finit.*

19. PROPOZIŢIE. *Dacă $\mathcal{C}$ este o $\mathcal{U}$-categorie abeliană cu limite inductive filtrate exacte şi cu o familie de generatori $(X_i)_{i\in I}$ de prezentare finită, atunci orice obiect din $\mathcal{C}$ este o limită inductivă filtrată de obiecte de prezentare finită.*

Demonstraţie. Fie X un obiect din $\mathcal{C}$. Deoarece $\mathcal{C}$ este cu sume directe, există un epimorfism

$$\bigoplus_{j\in Y} X_j \xrightarrow{\theta} X \longrightarrow 0, \tag*{(*)}$$

unde J este mulţimea $\bigoplus\limits_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, X)$ şi unde, pentru orice $i \in I$, X_i apare în suma directă din (*) de atîtea ori cîte elemente are mulţimea $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, X)$.

Fie $R = \mathrm{Ker}\ \theta$ şi $\mathcal{F}$ mulţimea perechilor (K, S), unde K este o submulţime finită a lui J şi S un subobiect de tip finit al lui $(\bigoplus\limits_{K} X_k) \cap R$.

Evident, $\mathcal{F} \neq \varnothing$ şi este filtrată crescător relativ la relaţia de ordine $(K_1, S_1) \leqslant (K_2, S_2) \Leftrightarrow K_1 \subseteq K_2$ şi $S_1 \subseteq S_2$.

Vom arăta că $X = \varinjlim\limits_{\mathcal{F}} (\bigoplus\limits_{K} X_k / S)$, unde, evident, pentru orice $(K, S) \in \mathcal{F}$, $\bigoplus\limits_{K} X_k/S$ este obiect de prezentare finită în $\mathcal{C}$.

Să considerăm diagrama comutativă şi exactă canonic construită

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 & & 0 & & \\
0 \arrow[rr] & & (\underset{K}{\otimes} X_k)\cap R/S \arrow[ur] \arrow[rr] & & \underset{K}{\otimes} X_k/S \arrow[ur] \arrow[ddd, "r(K,S)"] \arrow[ddrr, "q(K,S)"] & & & \\
 & & & 0 \arrow[d] & & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & (\underset{K}{\oplus} X_k)\cap R \arrow[uur] \arrow[rr, "l_K"] \arrow[dd, "i_K"'] & & \underset{K}{\oplus} X_k \arrow[uur, "p(K,S)"] \arrow[rrr, "p_K"] \arrow[dd, "t_K"] & & & \underset{K}{\oplus} X_k / (\underset{K}{\oplus} X_k)\cap R \arrow[r] \arrow[dd, "\lambda"] \arrow[dr] & 0 \\
 & & S \arrow[ul, "i_S"'] \arrow[ur] \arrow[dl] & & \varinjlim\limits_{\mathcal{F}} ((\underset{K}{\oplus} X_k)/S) \arrow[drr, "\theta_2"] & & & 0 \\
0 \arrow[r] & R \arrow[rr, "l"] & & \underset{j\in J}{\oplus} X_j \arrow[ur, "\theta_1"] \arrow[rrr, "\theta"] & & & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Deoarece pentru orice $(K, S) \in \mathcal{F}$, $p(K, S)$ şi $q(K, S)$ sînt epimorfisme, rezultă şi $\theta_1 = \varinjlim\limits_{\mathcal{F}} p(K, S)$, $\theta_2 = \varinjlim\limits_{\mathcal{F}} q(K, S)$ epimorfisme. Deci pentru a arăta că θ_2 este izomorfism, este suficient să arătăm că are un invers la stînga θ'. Pentru a construi pe θ' observăm că pentru orice $(K, S) \in \mathcal{F}$, $\theta_1 t_k l_k i_S = 0$, căci $\theta_1 t_k l_k i_S = r_{(K,S)} p_{(K,S)} l_k \cdot i_S = 0$.

Însă $\theta_1 t_k l_k i_S = \theta l i_k i_S$ şi din $R = \varinjlim ((\bigoplus\limits_{K} X_k) \cap R)$ şi $(\bigoplus\limits_{K} X_k) \cap R = \varinjlim S$, rezultă $\theta_1 . l = 0$ şi prin urmare există θ' cu $\theta_1 = \theta' \theta$.

Evident, $\theta' \theta_2 = \mathrm{Id}$ căci pentru orice $(K, S) \in \mathcal{F}$, $\theta' \theta_2 \Omega_{(K,S)} p_{(K,S)} = = \theta' \lambda q_{(K,S)} \cdot p_{(K,S)} = \theta' \lambda p_K = \theta' \theta t_K = \theta_1 t_K = \Omega_{(K,S)} \cdot p_{(K,S)}$ de unde $\theta' \theta_2 r_{(K,S)} = r_{(K,S)}$ căci $p_{(K,S)}$ sînt epimorfisme.

Din proprietatea de universalitate a limitei inductive rezultă $\theta' \theta_2 = \mathrm{Id}$.

20. PROPOZIŢIA. *În ipotezele propoziţiei precedente, un obiect X din $\mathcal{C}$ este de prezentare finită dacă şi numai dacă există un şir exact în* $\mathcal{C}$

$$\bigoplus_K X_k \longrightarrow \bigoplus_J X_j \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

cu K, J submulţimi finite ale lui I.

Demonstraţia este imediată.

21. COROLAR *Dacă $\mathcal{C}$ este o $\mathcal{U}$-categorie aditivă mică, un obiect F din $\overline{\mathcal{C}}$ este de prezentare finită dacă şi numai dacă există un şir exact în* $\overline{\mathcal{C}}$

$$h_Y \xrightarrow{v} h_X \xrightarrow{p} F \longrightarrow 0,\ X,\ Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}.$$

22. PROPOZIŢIE. *Dacă X este un obiect de tip finit într-o $\mathcal{U}$-categorie abeliană $\mathcal{C}$, atunci pentru orice sistem inductiv filtrat $(Y_i,\ v_{ij})_{i \in I}$ de obiecte din $\mathcal{C}$, morfismul canonic*

$$\varinjlim_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ Y_i) \xrightarrow{\theta} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ \varinjlim_I Y_i)$$

este monomorfism în $\mathcal{U}$-Ab.

Demonstraţie. Fie $\bar{\alpha} \in \varinjlim_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ Y_i)$ cu $\theta(\bar{\alpha}) = 0$ şi $\alpha : X \longrightarrow Y_i$ un reprezentant al lui $\bar{\alpha}$.

Din $\theta(\bar{\alpha}) = 0$, rezultă $\rho_i \cdot \alpha = 0$, unde $\rho_i : Y_i \rightarrow \varinjlim_I Y_i$ este morfismul de structură de indice i.

Pentru orice $j \geqslant i$ să considerăm diagrama comutativă canonic construită

$$\begin{tikzcd}
 & & & Y_j \arrow[dr, "\rho_j"] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\, \rho_i \arrow[rr, "k"] & & Y_i \arrow[u, "v_{ij}"] \arrow[r, "\rho_i"] & \varinjlim_I Y_i \\
 & & \mathrm{Im}(\alpha) \arrow[ul, "\alpha''"] \arrow[ur, "e"] & & \\
 & & & X \arrow[uu, "\alpha"] \arrow[ul, "p"] \arrow[uull, bend left, "\alpha'"] &
\end{tikzcd}$$

unde $\mathrm{Ker}\, \rho_i = \bigcup_{i \leqslant j} \mathrm{Ker}\, v_{ij}$, $\mathrm{Im}(\alpha)$ este de tip finit căci X este astfel şi α'' este monomorfism.

Deci $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Im}(\alpha) \cap \mathrm{Ker}\, \rho_i = \mathrm{Im}(\alpha) \cap (\bigcup_{i \leqslant j} \mathrm{Ker}\, v_{ij}) = \bigcup_{i \leqslant j} (\mathrm{Im}(\alpha) \cap \cap\, \mathrm{Ker}\, v_{ij}))$ şi cum $\mathrm{Im}(\alpha)$ este de tip finit, rezultă că există $j \in I$ astfel ca $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Im}(\alpha) \cap \mathrm{Ker}\, v_{ij} \subseteq \mathrm{Ker}\, v_{ij}$ adică morfismul $X \xrightarrow{\alpha} Y_i \xrightarrow{v_{ij}} Y_j$ este nul, deci α este echivalent cu morfismul nul $X \rightarrow Y_j$ şi deci $\bar{\alpha} = 0$.

23. *Observaţie.* Dacă în plus X este proiectiv şi $\mathcal{C}$ o U-categorie abeliană cu limite inductive filtrate exacte, atunci θ este epimorfism şi prin urmare izomorfism cum rezultă imediat din diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
\oplus \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_i) \arrow[r, "\rho", "\sim"'] \arrow[d] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \oplus Y_i) \arrow[d] \\
\varinjlim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_i) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \varinjlim Y_i) \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

unde ρ este izomorfism căci X este finit transferabil (propoziţia 14).

Primită la redacţie la 25 iunie 1968

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România, Str. M.
Eminescu nr. 47, Bucureşti.

PROPRIÉTÉS DE FINITUDE DANS LES CATÉGORIES ABÉLIENNES (II)

RÉSUMÉ

A partir des propriétés générales de la catégorie des modules à droite unitaires sur un anneau à élément unité nous avons montré proprement dit que le cadre naturel des propriétés de caractère fini dans cette catégorie est constitué par les topos abéliens, c'est-à-dire des catégories abéliennes aux limites inductives filtrantes exactes et aux générateurs. A cette occasion, nous avons montré que le topos des préfaisceaux additifs des groupes abéliens définis sur une petite catégorie préadditive est local de type fini et même de présentation finie et nous avons caractérisé les objets de type fini et de présentation finie de ce topos quand la catégorie de base est additive.

BIBLIOGRAFIE

1. L. GRUSON, Bull. Sc. Mat., **90** (1966).
2. R. OUZILOU, *Théorie des faisceaux.* Faculté des Sciences de Lyon.

ASUPRA JETURILOR INCOMPRESIBILE MĂRGINITE DE JETURI AUXILIARE INFINIT SUBŢIRI

DE

DAN SOCOLESCU

1. INTRODUCERE

Studiul aripei cu jet a fost făcut de către numeroşi cercetători, printre care vom cita pe : L. Malavard, Ph. Poisson-Quinton, P. Jousserandot [1], N. Patraulea [2], M. Kadosch [3] şi C. Jacob [4].

Recent C. S. Ioan şi D. Pantazopol [5] au atacat problema jeturilor incompresibile mărginite de pînze de jet subţiri, obţinînd rezultate interesante.

În lucrarea de faţă se reia studiul jeturilor incompresibile mărginite de jeturi auxiliare subţiri, folosind tratarea unitară dată de C. Iacob în [4]. În cazul particular al jeturilor cu pereţi rectilinii, care a fost considerat şi de autorii citaţi la [5], se aduc următoarele rezultate noi : se determină soluţia exactă a problemei la limită, dîndu-se o teoremă de existenţă şi de unicitate şi apoi se propune o metodă de aproximaţie. În lucrarea [5] nu se rezolvă problema la limită decît prin satisfacerea condiţiilor pe frontieră într-un număr finit de puncte.

2. ENUNŢAREA PROBLEMEI

Să considerăm mişcarea plană, permanentă şi irotaţională a unui lichid ce ţîşneşte dintr-un canal mărginit de doi pereţi infiniţi ϖ_1 şi ϖ_2 (fig. 1).

Vom presupune că pereţii ϖ_1 şi ϖ_2 sînt simetrici în raport cu axa Ox şi că posedă la infinit amonte asimptote bine determinate.

Particulele lichide ce se scurg de-a lungul pereţilor ϖ_1 şi ϖ_2 se detaşează în punctele P_1, P_2 descriind apoi liniile de curent, numite şi linii libere, λ_1 şi λ_2. Vom mai presupune că liniile libere se întind pînă la infinit aval unde posedă asimptote paralele cu axa Ox.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 1, P. 161-175, BUCUREŞTI, 1969

Problema clasică a lui Kirchhoff este aceea a determinării potențialului complex al mișcării și a liniilor de curent λ_1 și λ_2 aprioric necunoscute, prin condiții la limită corespunzătoare.

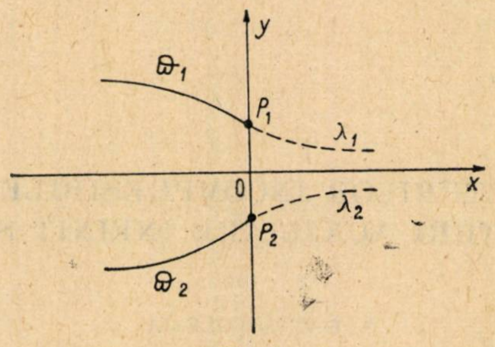


Fig. 1

Să presupunem acum că din punctele P_1, P_2 țîșnesc, tangențial la pereții ϖ_1 și ϖ_2, două jeturi auxiliare, infinit subțiri în raport cu jetul principal. Considerarea jeturilor auxiliare va conduce la modificarea formei liniilor de curent λ_1 și λ_2 precum și la modificarea condițiilor la limită ale problemei.

3. DETERMINAREA CONDIȚIILOR ȘI FORMULAREA PROBLEMEI LA LIMITĂ

Fie $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ potențialul complex al mișcării. Din considerente de simetrie a mișcării, axa Ox va fi linie de curent, pe care vom lua $\psi = 0$. Liniile $\varpi_1 + \lambda_1$, $\varpi_2 + \lambda_2$ vor fi de asemenea linii de curent. În virtutea principiului de simetrie al lui Schwarz vom putea scrie :

$$\psi|_{\varpi_j+\lambda_j} = (-1)^{j+1}\frac{h}{2}, \qquad (j = 1, 2), \tag{1}$$

unde $h > 0$ este o constantă ce urmează a fi determinată.

Notînd cu V_∞ viteza la infinit aval a jetului principal și cu θ unghiul făcut de viteză cu axa Ox, vom putea scrie viteza complexă sub forma :

$$\frac{df}{dz} = V e^{-i\theta} = V_\infty e^{-i\omega(z)}, \tag{2}$$

unde $\omega(z) = \theta + i\tau$ este funcția lui Levi-Cività.

În planul potențialului complex f (fig. 2) domeniul mișcării va fi reprezentat prin banda infinită

$$\begin{cases} -\infty < \varphi < +\infty, \\ -\dfrac{h}{2} \leqslant \psi \leqslant \dfrac{h}{2}. \end{cases} \tag{3}$$

Să reprezentăm conform banda infinită (3) pe semicercul $\zeta^2 + \eta^2 < 1$, $\eta > 0$ din planul auxiliar $\zeta = \xi + i\eta$ (fig. 3).

Corespondența celor două domenii este dată de relația :

$$f(\zeta) = \frac{h}{\pi} \lg \frac{2\zeta}{\zeta^2 + 1} - \frac{h}{2} i, \tag{4}$$

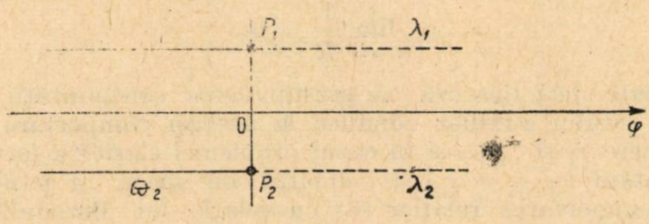


Fig. 2

unde determinarea logaritmului este aleasă astfel încît să avem $\lg \left. \frac{2\zeta}{\zeta^2 + 1} \right|_{\zeta=1} = 0$.

Să notăm cu U potențialul forțelor, cu p și ρ presiunea respectiv densitatea, iar cu R raza de curbură a liniei de curent. Ecuațiile de mișcare — în coordonate intrinseci, corespunzătoare mișcării plane — sînt :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s}\left[\dfrac{1}{2} V^2 + \displaystyle\int \dfrac{\mathrm{d}p}{\rho} - U\right] = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu}\left[U - \displaystyle\int \dfrac{\mathrm{d}p}{\rho}\right] = \dfrac{V^2}{R}, \end{cases} \tag{5}$$

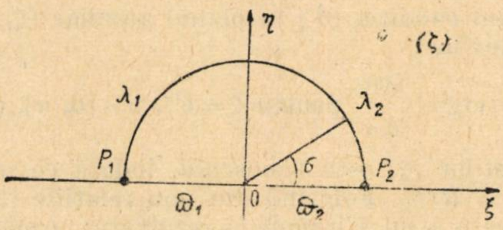


Fig. 3

unde prin $\vec{s}$ și $\vec{\nu}$ am notat versorii tangentei și ai normalei principale la linia de curent. Neglijînd influența forțelor masice și considerînd mișcarea incompresibilă, ecuațiile (5) devin :

$$\begin{cases} \dfrac{p}{\rho} + \dfrac{1}{2} V^2 = \dfrac{p_\infty}{\rho} + \dfrac{1}{2} V_\infty^2, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial \nu} = -\dfrac{V^2}{R}. \end{cases} \tag{5'}$$

Să notăm cu $\delta\nu$ grosimea jetului auxiliar. Vom presupune că la traversarea jetului auxiliar infinit subţire, presiunea variază continuu. Vom putea deci evalua :

$$p_\infty - p = \delta p = \frac{\partial p}{\delta \nu}\,\delta\nu = -\,\frac{\rho_a V_a^2}{R}\,\delta\nu, \tag{6}$$

unde cu indicele a am notat mărimile corespunzătoare jetului auxiliar.

De asemenea, presupunerea făcută implică :

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{R} = 0. \tag{7}$$

Se poate deci observa că presupunerea continuităţii presiunii la traversarea jetului auxiliar conduce la aceeaşi comportare asimptotică a liniilor libere λ_1 şi λ_2 ca şi în cazul problemei clasice a jeturilor.

Să notăm cu $q_a = \rho_a V_a \delta\nu$ debitul de masă al jetului auxiliar. Din comportarea relaţiei (6) cu relaţia lui Bernoulli ($5_1'$) scrisă pentru jetul principal, rezultă :

$$\frac{V_a q_a}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2}\cdot\frac{1}{R} = 1 - \frac{V^2}{V_\infty^2}. \tag{8}$$

Vom face presupunerea $V_a\, q_a =$ constant şi ţinînd cont de expresia razei de curbură, vom putea scrie condiţia la limită pe liniile libere λ_1 şi λ_2 de forma [1]

$$1 - \mathrm{e}^{2\tau} = k_1 \left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right|, \tag{8'}$$

unde $k_1 = \dfrac{V_a q_a}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2}$ este coeficientul lui Poisson-Quinton.

Să exprimăm condiţia (8′) în planul auxiliar (ζ). Folosind relaţiile (2) şi (4), (8′) devine :

$$\mathrm{sh}\,\tau = -\,k\,|\mathrm{ctg}\,\sigma| \left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\sigma}\right| \quad \text{pentru } \zeta = \mathrm{e}^{i\sigma},\ \sigma \in [0, \pi], \text{ unde } k = \frac{\pi V_\infty k_1}{2h}. \tag{8''}$$

Forma pereţilor ϖ_j este cunoscută, îndată ce se cunoaşte ecuaţia lor intrinsecă $R = R(\theta)$. Folosind din nou relaţiile (2) şi (4), reducem problema modificată a lui Kirchoff la rezolvarea următoarei probleme la limită în planul auxiliar (ζ) :

Să se determine o funcţie $\omega(\zeta)$ olomorfă în semicercul $\xi^2 + \eta^2 < 1$, $\eta > 0$ şi care satisface condiţiile la limită :

$$\begin{aligned} \left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right| &= \frac{h}{\pi V_\infty}\,\frac{1-\xi^2}{1+\xi^2}\,\frac{1}{|\xi|}\,\frac{\mathrm{e}^{-\tau}}{R(\theta)} \quad \text{pentru } \xi \in [-1, 1],\ \eta = 0, \\ \left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\sigma}\right| &= -\,\frac{1}{k}\,|\mathrm{tg}\,\sigma|\ \mathrm{sh}\,\tau \quad \text{pentru } \zeta = \mathrm{e}^{i\sigma},\ \sigma \in [0, \pi]. \end{aligned} \tag{9}$$

---

[1] În lucrarea [5] condiţia la limită (8′) este obţinută fără a ţine cont de module, fapt ce poate conduce la confuzii.

În lucrarea de faţă vom studia numai cazul jeturilor mărginite de pereţii concavi spre fluidul în mişcare. În planul (ζ) această restricţie se exprimă prin condiţia :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi} > 0 \text{ pentru } \xi \in [-1, 1] - \{0\}, \quad \eta = 0. \tag{10}$$

La infinit amonte pereţii ϖ_j ($j = 1, 2$) posedă asimptote ce fac unghiurile $(-1)^j \mu$ cu axa Ox, unde $\mu \in (0, \pi)$.

În absenţa jeturilor marginale, condiţia (10) conduce la teorema lui Boggio [4, pag. 616] ale cărei concluzii sînt următoarele :

a) În domeniul mişcării $\tau \leqslant 0$.

b) Pe liniile libere este îndeplinită condiţia $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\sigma} < 0$.

Rezultatele teoremei lui Boggio pot fi extinse, cu anumite modificări, şi în cazul jeturilor mărginite de jeturi auxiliare infinit subţiri.

Într-adevăr, θ şi τ fiind funcţii armonic conjugate, din (10) rezultă

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\eta} > 0 \text{ pentru } \xi \in [-1, 1] - \{0\}, \quad \eta = 0. \tag{10'}$$

În vecinătatea originii, funcţia $\omega(\zeta)$ se comportă ca $\dfrac{2\mu i}{\pi} \lg \zeta$ şi avem $\lim\limits_{\zeta \to 0} \tau = -\infty$. Rezultă că τ nu-şi poate atinge maximul pe axa reală, ci numai pe liniile libere λ_1 şi λ_2.

Ţinînd cont de expresia lui τ pe liniile libere (9), obţinem că în domeniul mişcării avem $\tau \leqslant 0$. Fie acum $\zeta_0 = e^{i\sigma_0} \in \lambda_1$ punctul în care τ îşi atinge valoarea maximă. Datorită simetriei mişcării, τ îşi va atinge maximul şi în $-\bar{\zeta}_0 = -e^{-i\sigma_0} \in \lambda_2$.

În aceste puncte va fi îndeplinită condiţia :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}n_i}\right)_{\sigma=\sigma_0;\ \sigma=\pi-\sigma_0} < 0. \tag{11}$$

Întrucît $\dfrac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}n_i}$ este o funcţie continuă, va exista chiar o vecinătate V_1 a lui σ_0, respectiv o vecinătate V_2 a lui $(\pi - \sigma_0)$, în care va fi îndeplinită relaţia :

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}n_i} < 0 \text{ pentru } \zeta = e^{i\sigma}, \quad \sigma \in V_1 \cup V_2; \tag{11'}$$

vom putea deci scrie :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}n_i} < 0 \text{ pentru } \zeta = e^{i\sigma}, \quad \sigma \in V_1 \cup V_2. \tag{11''}$$

Jeturile auxiliare fiind infinit subţiri în raport cu jetul principal, vom presupune că influenţa lor asupra formei liniilor libere este relativ puţin importantă. Conform acestei presupuneri, vom considera îndeplinită condiţia (11″) pe toată linia liberă. Rezultă că în cazul pereţilor concavi spre domeniul mişcării, problema la limită poate fi formulată astfel :

Să se determine o funcţie $\omega(\zeta) = \theta + i\tau$ olomorfă în semicercul $\xi^2 + \eta^2 < 1$, $\eta > 0$ şi care îndeplineşte condiţiile la limită :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi} = \frac{h}{\pi V_\infty} \frac{1-\xi^2}{1+\xi^2} \frac{1}{|\xi|} \frac{\mathrm{e}^{-\tau}}{R(\theta)} \quad \text{pentru } \xi \in [-1, 1],\ \eta = 0$$

$$\text{(9}') \qquad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{1}{k} |\operatorname{tg} \sigma| \operatorname{sh} \tau \quad \text{pentru } \zeta = \mathrm{e}^{i\sigma},\quad \sigma \in [0, \pi].$$

4. REZOLVAREA PROBLEMEI LA LIMITĂ ÎN CAZUL PEREŢILOR RECTILINII

În cazul pereţilor rectilinii, $\frac{1}{R} = 0$. Condiţiile (9′) devin :

$$\text{(9}'') \qquad \begin{cases} \theta|_{\varpi_j} = (-1)^j \mu \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\sigma}\right|_{\lambda_j} = \dfrac{1}{k} |\operatorname{tg} \sigma| \operatorname{sh} \tau, \qquad (j = 1, 2) \end{cases}$$

unde $\mu \in [0, \pi]$ este unghiul făcut de peretele λ_2 cu axa Ox.

Să arătăm mai întîi, folosind metoda dată de C. Jacob în studiul teoriei lui Helmholtz [4, pag. 586], că soluţia problemei la limită, dacă există, este unică.

Fie $\omega^1(\zeta)$ şi $\omega^2(\zeta)$ două soluţii ale problemei. Să notăm diferenţa lor cu $\Omega(\zeta) = \omega^1(\zeta) - \omega^2(\zeta) = \Theta + iT$. Funcţia olomorfă $\Omega(\zeta)$ satisface condiţiile :

$$\text{(12)} \qquad \begin{cases} \left.\dfrac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\sigma}\right|_{\lambda_j} = \dfrac{1}{k} |\operatorname{tg} \sigma| \, T \operatorname{ch} \widetilde{T}, \\ \Theta|_{\varpi_j} = 0, \qquad\qquad (j = 1, 2) \end{cases}$$

unde $\widetilde{T}$ este cuprins între τ^1 şi τ^2.

Întrucît $\Theta|_{\varpi_j} = 0$, putem prelungi funcţia $\Omega(\zeta)$ în tot cercul $\xi^2 + \eta^2 < 1$. Să arătăm că $\Omega(\zeta) \equiv 0$.

Într-adevăr, fie $\zeta_1 = \mathrm{e}^{i\sigma_1}$, $\zeta \neq \pm i$, punctul în care funcţia armonică T îşi atinge maximul pozitiv. Din (12) rezultă că $\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\eta_t}\right)_{\zeta = \mathrm{e}^{i\sigma_1}} > 0$, fapt ce contrazice ipoteza. În mod analog se arată că în nici un punct diferit de $\pm i$, T nu poate avea un minim negativ. Ţinînd cont de (7), obţinem că $(T)_{\zeta = \pm i} = 0$. Rezultă deci că $T \equiv 0$, $\Theta \equiv \text{const.} = 0$.

Să construim acum soluţia problemei la limită. Vom presupune parametrul k suficient de mic şi vom liniariza condiţiile la limită (9''):

$$(9''') \quad \begin{cases} \theta|_{\varpi_j} = (-1)^j \mu \\ \tau|_{\lambda_j} = k\,|\operatorname{ctg}\sigma|\, \dfrac{d\theta}{d\sigma} \qquad (j=1,2). \end{cases}$$

Condiţiile la limită fiind liniare, vom putea descompune funcţia $\omega(\zeta)$ în două funcţii $\omega_1(\zeta) = \theta_1 + i\tau_1$, respectiv $\omega_2(\zeta) = \theta_2 + i\tau_2$ olomorfe în semicercul $\xi^2 + \eta^2 < 1$, $\eta > 0$ şi care îndeplinesc condiţiile:

$$(13) \quad \begin{cases} \theta_1|_{\varpi_j} = (-1)^j \mu \\ \tau_1|_{\lambda_j} = 0 \qquad (j=1,2) \end{cases}$$

$$(14) \quad \begin{cases} \theta_2|_{\varpi_j} = 0 \\ \tau_2|_{\lambda_j} = k\,|\operatorname{ctg}\sigma| \left(\dfrac{d\theta_2}{d\sigma} + \dfrac{d\theta_1}{d\sigma}\right) \qquad (j=1,2). \end{cases}$$

Funcţia olomorfă $\omega_1(\zeta)$ ce îndeplineşte condiţiile la limită (13) reprezintă soluţia problemei clasice a lui Kirchhoff:

$$(15) \quad \omega_1(\zeta) = \frac{2\mu i}{\pi} \lg \zeta + \mu,$$

unde determinarea logaritmului a fost aleasă astfel încît să avem $\lg \zeta|_{\zeta=1} = 0$.

Problema s-a redus la determinarea funcţiei $\omega_2(\zeta)$. Întrucît $\theta_2|_{\varpi_j} = 0$, vom putea aplica principiul de simetrie al lui Schwarz şi vom prelungi funcţia $\omega_2(\zeta)$ în tot cercul. În puncte simetrice faţă de cele două axe $O\xi$ şi $O\eta$, funcţiile τ_2 şi $\dfrac{d\theta_2}{d\sigma}$ vor lua valori respectiv egale. Problema la limită a devenit următoarea:

Să se determine funcţia $\omega_2(\zeta)$ olomorfă în cercul $|\zeta| < 1$ şi astfel încît pe frontiera $|\zeta| = 1$ să satisfacă relaţia:

$$(16) \quad \tau_2 = k\,|\operatorname{ctg}\sigma| \left(\frac{d\theta_2}{d\sigma} - \frac{2\mu}{\pi}\right).$$

Vom face acum apel la următoarea lemă, demonstrată de R. Gerber în lucrarea [6].

LEMĂ DE PRELUNGIRE ANALITICĂ Fie $\omega(\zeta)$ o funcţie regulată în domeniul simplu conex D al planului $\zeta = \xi + i\eta$ mărginit de curba jordaniană rectificabilă C. Să alegem pe C o origine şi un sens de parcurs şi să notăm prin σ abscisa curbilinie. Vom face următoarele presupuneri:

a) Curba C este analitică în vecinătatea unui punct M de abscisă curbilinie σ_0.

b) În vecinătatea punctului M funcţia $\omega(\zeta)$ admite o limită continuă pe C, pe care o vom nota prin $\theta(\sigma) + i\tau(\sigma)$.

c) Funcţia $\theta(\sigma)$ este diferenţiabilă şi verifică ecuaţia :

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = F\,[\theta(\sigma),\ \tau(\sigma),\ \sigma], \tag{17}$$

unde funcţia $F\,[\theta,\ \tau,\ \sigma]$ este analitică în raport cu argumentele sale în vecinătatea valorilor $\theta_0 = \theta(\sigma_0)$; $\tau_0 = \tau(\sigma_0)$; $\sigma = \sigma_0$.

Cu aceste presupuneri, funcţia $\omega(\zeta)$ este prelungibilă analitic în vecinătatea punctului M prin curba C.

Să aplicăm lema funcţiei $\omega_2(\zeta)$, regulată în $|\zeta| < 1$ şi care pe frontiera $|\zeta| = 1$ îndeplineşte relaţia

$$\frac{d\theta_2}{d\sigma} = \frac{1}{k}\,|\operatorname{tg}\sigma|\,\tau_2 + \frac{2\mu}{\pi}\cdot \tag{16'}$$

Membrul drept al ecuaţiei (16′) este analitic în θ_2, τ_2, σ în vecinătatea oricărui punct al frontierei cu excepţia punctelor $\zeta = \pm 1$; $\zeta = \pm i$.

Putem presupune de asemenea că pe curba C funcţia $\omega_2(\zeta)$ admite limita continuă $\theta_2(\sigma) + i\,\tau_2(\sigma)$. Ipotezele lemei fiind îndeplinite, funcţia $\omega_2(\zeta)$ este prelungibilă analitic. Vom putea deci rezolva problema la limită (16) sau (16′) cu ajutorul dezvoltărilor în serie, folosind rezultatele expuse de Kantorovici şi Krîlov în [7].

Vom dezvolta mai întîi funcţia $\omega_2(\zeta)$ în serie Taylor în vecinătatea originii. Întrucît partea reală a funcţiei este nulă pe cele două axe, vom putea scrie :

$$\omega_2(\zeta) = i\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\zeta^{2n}, \tag{18}$$

unde coeficienţii a_{2n} sînt numere reale. Conform lemei de prelungire analitică, dezvoltarea (18) este valabilă în domeniul închis $|\zeta| \leqslant 1$.

Să dezvoltăm acum funcţiile $|\sin\sigma|$, $|\cos\sigma|$ în serie Fourier în intervalul $[-\pi,\ \pi]$:

$$\begin{cases} |\sin\sigma| = \dfrac{2}{\pi} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\right]\cos 2k\sigma \\ |\cos\sigma| = \dfrac{2}{\pi} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{(-1)^k}{2k-1}\right]\cos 2k\sigma. \end{cases} \tag{19}$$

Egalităţile (19) au loc, întrucît funcţiile $|\sin\sigma|$, $|\cos\sigma|$ sînt continue, chiar lipschitziene în intervalul $[-\pi,\ \pi]$, deci satisfac condiţiile lui Dirichlet.

Să introducem notaţiile :

$$\begin{cases} a = k \\ b = \dfrac{2\mu}{\pi}. \end{cases} \tag{20}$$

Din (16′), (18) şi (19) se obţine, folosind (20), următorul sistem infinit de ecuaţii liniare :

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{\infty}[2aj(-1)^{i+j}+1]\left[\frac{1}{4(i-j)^2-1}+\frac{1}{4(i+j)^2-1}\right]a_{2j}=\\ &\qquad=\frac{2ab(-1)^{i+1}}{4i^2-1}, \qquad (i=0,1,\ldots).\end{aligned} \tag{21}$$

Să facem transformarea :

$$a_{2j}=\frac{x_j}{2aj+1}, \qquad (j=0,1,\ldots). \tag{22}$$

Sistemul (21) va deveni :

$$\begin{aligned}x_i=&\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2aj(-1)^{i+j}+1}{2aj+1}\left[\frac{1-\delta_i^j}{4(i-j)^2-1}+\frac{1}{4(i+j)^2-1}\right]x_j+\\ &+\frac{2ab(-1)^i}{4i^2-1}, \qquad (i=0,1,\ldots),\end{aligned} \tag{21'}$$

unde δ_i^j este simbolul lui Kronecker.

Să izolăm din sistemul (21′) prima ecuaţie :

$$x_0=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2aj(-1)^j+1}{2aj+1}\cdot\frac{1}{4j^2-1}\,x_j-ab. \tag{23}$$

Vom studia subsistemul infinit de ecuaţii

$$\begin{aligned}x_i=&\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2aj(-1)^{i+j}+1}{2aj+1}\left[\frac{1-\delta_i^j}{4(i-j)^2-1}+\frac{1}{4(i+j)^2-1}\right]x_j+\\ &+\frac{2ab(-1)^i+2x_0}{4i^2-1}, \qquad (i=1,\ldots).\end{aligned} \tag{24}$$

Ne interesează să determinăm o soluţie mărginită a sistemului. Conform acestei restricţii vom obţine un majorant al sistemului (24) de forma :

$$\begin{aligned}X_i=&\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{1-\delta_i^j}{4(i-j)^2-1}+\frac{1}{4(i+j)^2-1}\right]X_j+\\ &+\frac{2ab+2c}{4i^2-1}, \qquad (i=1,\ldots).\end{aligned} \tag{25}$$

Sistemul (25) şi implicit sistemul (24) sînt sisteme regulate întrucît avem :

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{1-\delta_i^j}{4(i-j)^2-1}+\frac{1}{4(i+j)^2-1}\right]=\\ &\qquad=1-\frac{1}{4i^2-1}, \qquad (i=1,\ldots).\end{aligned} \tag{26}$$

Sistemul majorant (25) admite soluţia nenegativă:

$$X_i = 2ab + 2c, \qquad (i = 1, \ldots). \tag{27}$$

În aceste condiţii, sistemul (24) admite o soluţie x_i^* obţinută prin metoda aproximaţiilor succesive:

$$\begin{aligned} x_i^{(n+1)} &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2aj(-1)^{i+j}+1}{2aj+1}\left[\frac{1-\delta_i^j}{4(i-j)^2-1}+\right. \\ &\quad \left.+\frac{1}{4(i+j)^2-1}\right]x_j^{(n)} + \frac{2ab(-1)^i+2x_0}{4i^2-1}, \end{aligned} \tag{28}$$

unde

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = 0, \quad x_i^{(1)} = \dfrac{2ab(-1)^i + 2x_0}{4i^2-1}, & (i = 1, \ldots), \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i^* \end{cases}$$

Soluţia x_i^* va fi în plus egal mărginită:

$$|x_i^*| \leqslant 2ab + 2c. \tag{29}$$

În mod analog, sistemul (25) care admite soluţia constantă nenegativă (27) va admite şi o soluţie X_i^* obţinută prin metoda aproximaţiilor succesive:

$$X_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{1-\delta_i^j}{4(i-j)^2-1}+\frac{1}{4(i+j)^2-1}\right]X_j^{(n)}+\frac{2ab+2c}{4i^2-1}, \tag{30}$$

unde

$$X_i^{(0)} = 0, \; X_i^{(1)} = \frac{2ab+2c}{4i^2-1}, \; \lim_{n\to\infty} X_i^{(n)} = X_i^*, \qquad (i = 1, \ldots).$$

Soluţiile x_i^*, X_i^*, X_i vor satisface inegalităţile:

$$|x_i^*| \leqslant X_i^* \leqslant X_i = 2ab + 2c, \qquad (i = 1, \ldots). \tag{31}$$

Din (28) rezultă că $x_i^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_i^{(n)} = f_i(x_0, a, b)$ $(i = 1, \ldots)$, unde funcţiile f_i sînt liniare în raport cu x_0. Pentru determinarea lui x_0 vom folosi (23).

Seria $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \dfrac{2aj(-1)^j+1}{2aj+1} \cdot \dfrac{1}{4j^2-1} x_j^*$ ce intervine în calcule este absolut convergentă întrucît este majorată de seria convergentă cu termenii pozitivi $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \dfrac{1}{4j^2-1} X_j = ab + c$. Vom obţine $|x_0| \leqslant c$ în concordanţă cu restricţia impusă anterior.

Am reuşit deci să demonstrăm că sistemul (21′) şi implicit sistemul (21) admite o soluţie obţinută prin metoda aproximaţiilor succesive. În anumite condiţii, această soluţie este unică.

Să numim soluţiile x_i^*, X_i^* obţinute prin metoda aproximaţiilor succesive, plecînd de la valori iniţiale nule, soluţii principale ale sistemelor (24), respectiv (25). Vom putea folosi, pentru a demonstra unicitatea soluţiei sistemului (24), rezultatele unei teoreme demonstrate de Kantorovici şi Krîlov în [7]. Se obţine astfel:

TEOREMA 1. *Soluţia unică a sistemului (24) ce îndeplineşte inegalitatea* $|x_i| \leqslant PX_i$ *(*$P \geqslant 1$*, constant) este soluţia principală* $x_i = x_i^*$. *La această soluţie se poate ajunge prin metoda aproximaţiilor succesive, oricare ar fi datele iniţiale* $\overline{x}_i^{(0)}$, *ce îndeplinesc condiţiile* $|\overline{x}_i^{(0)}| \leqslant PX_i$ $(i = 1, \ldots)$.

Determinarea soluţiei unui sistem infinit cu ajutorul aproximaţiilor succesive prezintă dificultăţi de calcul. Din această cauză vom aproxima soluţia principală a sistemului (24) calculînd soluţiile unor sisteme finite, obţinute din sistemul infinit prin metoda trunchierii. Vom aplica sistemului (24) rezultatele unei teoreme demonstrate de Kantorovici şi Krîlov în [7]. Se obţine astfel:

TEOREMA 2. *Soluţia sistemului (24) ce admite sistemul majorant (25) cu soluţie constantă nenegativă, poate fi obţinută prin metoda trunchierii, adică considerînd sistemul finit:*

$$(32)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{2a+1}{2a+1}\cdot\dfrac{1}{15}\,x_1 + \ldots + \dfrac{2aN(-1)^{N+1}+1}{2aN+1}\left[\dfrac{1}{4(N-1)^2-1} + \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{1}{4(N+1)^2-1}\right]x_N + \dfrac{2x_0-2ab}{3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_N = \dfrac{2a(-1)^{N+1}+1}{2a+1}\left[\dfrac{1}{4(N-1)^2-1} + \dfrac{1}{4(N+1)^2-1}\right]x_1 + \\ \qquad + \ldots + \dfrac{2aN+1}{2aN+1}\cdot\dfrac{1}{16N^2-1}\,x_N + \dfrac{2x_0+2ab(-1)^N}{4N^2-1} \end{cases}$$

şi notînd prin x_i^N $(i = 1, \ldots, N)$ soluţia lui, vom avea: $\lim\limits_{N\to\infty} x_i^N = x_i^*$.

Să calculăm aproximativ primii patru termeni ai dezvoltării în serie a funcţiei $\omega_2(\zeta)$. Vom trunchia sistemul infinit (24) şi folosind (22) şi (23) obţinem următorul sistem de patru ecuaţii:

$$(33)\quad \begin{cases} a_0 - \dfrac{1-2a}{3}\,a_2 - \dfrac{1+4a}{15}\,a_4 - \dfrac{1-6a}{35}\,a_6 = -\,ab \\ a_0 - \dfrac{7(1+2a)}{5}\,a_2 + \dfrac{19(1-4a)}{35}\,a_4 + \dfrac{13(1+6a)}{105}\,a_6 = ab \\ a_0 + \dfrac{19(1-2a)}{7}\,a_2 - \dfrac{155(1+4a)}{21}\,a_4 + \dfrac{85(1-6a)}{33}\,a_6 = ab \\ a_0 + \dfrac{13(1+2a)}{9}\,a_2 + \dfrac{595(1-4a)}{99}\,a_4 - \dfrac{2485(1+6a)}{143}\,a_6 = ab. \end{cases}$$

În cazul particular al jetului cu pereți verticali, și pentru alegerea constantei $V_\infty k_1 = \frac{h}{20}$, din (8″) și (20) rezultă $a = \frac{\pi}{40}$, $b = 1$.

Soluția sistemului (33) este în acest caz:

$$\left\{\begin{aligned} a_0 &= -0{,}118962 \\ a_2 &= -0{,}131712 \\ a_4 &= -0{,}037028 \\ a_6 &= -0{,}011363 \end{aligned}\right. . \tag{34}$$

5. CALCULUL COEFICIENTULUI DE CONTRACȚIE

Să presupunem că am rezolvat problema la limită (9′) în cazul pereților curbilinii, simetrici și concavi spre fluidul în mișcare.

Cunoaștem în acest caz expresia funcției lui Levi-Cività $\omega(\zeta)$. Vom putea deci obține din (21) și (4) expresia reprezentării conforme $z = z(\zeta)$ dată de o relație de forma:

$$\mathrm{d}z = +\frac{h}{\pi V_\infty} \frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2} \mathrm{e}^{i\omega(\zeta)} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}. \tag{35}$$

Putem deci construi liniile libere λ_1 și λ_2. Folosind formula (35), prin integrare găsim:

$$\left\{\begin{aligned} z &= z_1 + \frac{h}{\pi V_\infty}\int_\sigma^\pi \mathrm{e}^{i\omega} \operatorname{tg}\sigma \, \mathrm{d}\sigma, \qquad z \in \lambda_1, \\ z &= z_2 - \frac{h}{\pi V_\infty}\int_0^\sigma \mathrm{e}^{i\omega} \operatorname{tg}\sigma \, \mathrm{d}\sigma, \qquad z \in \lambda_2, \end{aligned}\right. \tag{36}$$

unde prin z_1, z_2 am notat afixele punctelor P_1, respectiv P_2.

Ținînd cont de expresia reprezentării conforme (35), găsim

$$z_1 - z_2 = \frac{h}{\pi V_\infty}\int_{+1}^{-1} \mathrm{e}^{i\omega(\zeta)} \frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}. \tag{36′}$$

Vom alege drept drum de integrare semicircumferința $\zeta = \mathrm{e}^{i\sigma}$, $\sigma \in [0, \pi]$ din care vom exclude punctul $\zeta = i$ printr-o semicircumferință γ de centru $\zeta = 1$ și de rază ρ. Contribuția semicircumferinței γ este dată de relația:

$$\lim_{\rho\to 0}\int_\gamma \mathrm{e}^{i\omega} \frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = -\lim_{\rho\to 0}\int_{2\pi}^{\pi} [1 + \rho(\ldots)]\, i \, \mathrm{d}\alpha = i\pi. \tag{37}$$

Ținînd cont de expresia (37), (36′) devine:

$$z_1 - z_2 = \frac{hi}{\pi V_\infty}\int_0^\pi \mathrm{e}^{i\omega} \operatorname{tg}\sigma \, \mathrm{d}\sigma + \frac{hi}{V_\infty}. \tag{36″}$$

Din ultima expresie putem deduce lărgimea orificiului

$$(36''') \qquad l = y_1 - y_2 = \frac{h}{\pi V_\infty}\int_0^\pi \mathrm{e}^{-\tau}\sin\theta\,\mathrm{tg}\,\sigma\,\mathrm{d}\sigma + \frac{h}{V_\infty},$$

Evaluînd fluxul hidrodinamic, se poate observa că $l_\infty = \frac{h}{V_\infty}$ reprezintă tocmai lărgimea jetului la infinit aval. Vom putea deci scrie expresia coeficientului de contracție:

$$(38) \qquad \Gamma = \frac{l_\infty}{l} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{e}^{-\tau}\sin\theta\,\mathrm{tg}\,\sigma\,\mathrm{d}\sigma}.$$

Se observă că funcțiile armonic conjugate θ și τ posedă proprietățile de simetrie $\theta(\sigma) = -\theta(\pi - \sigma)$, $\tau(\sigma) = \tau(\pi - \sigma)$.

Ținînd cont de aceste proprietăți, expresia (38) devine:

$$(38') \qquad \Gamma = \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-\tau}\sin\theta\,\mathrm{tg}\,\sigma\,\mathrm{d}\sigma}.$$

În cazul jetului mărginit de pereții rectilinii, $\Gamma = \Gamma(\mu)$. Vom arăta, folosind metoda dată de C. Iacob în teoria jeturilor a lui Kirchhoff [4, pag. 625], că funcția $\Gamma(\mu)$ este descrescătoare.

Să considerăm funcția $\frac{\partial\omega}{\partial\mu}$, olomorfă în semicercul $\xi^2 + \eta^2 < 1$, $\eta > 0$ și care, conform cu (9'''), satisface condițiile la limită:

$$(39) \qquad \begin{cases} \left.\dfrac{\partial\theta}{\partial\mu}\right|_{\varpi_j} = (-1)^j \\ \left.\dfrac{\partial\tau}{\partial\mu}\right|_{\lambda_j} = k\,|\mathrm{ctg}\,\sigma|\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial\mu}\right) \end{cases} \qquad (j = 1, 2)$$

În vecinătatea originii, funcția $\frac{\partial\omega}{\partial\mu}(\zeta)$ se comportă ca $\frac{2i}{\pi}\lg\zeta$ și vom avea $\lim\limits_{\zeta\to 0}\frac{\partial\tau}{\partial\mu} = -\infty$. Întrucît $\left.\frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right|_{\varpi_j} = (-1)^j$, $(j = 1, 2)$, $\frac{\partial\tau}{\partial\mu}$ nu-și poate atinge maximul decît pe liniile libere. Se poate arăta, folosind relațiile (39_2) și (7), că funcția $\frac{\partial\tau}{\partial\mu}$ nu admite un maxim pozitiv și deci, în domeniul mișcării, vom avea:

$$\frac{\partial\tau}{\partial\mu} \leqslant 0$$

Să derivăm în raport cu μ relaţia (2). Vom găsi:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)=i\cdot\frac{\partial \omega}{\partial \mu}. \tag{40}$$

Separînd părţile reală şi imaginară şi folosind olomorfia funcţiei $\frac{\partial z}{\partial \mu}$, vom putea scrie:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)=-\frac{\partial \tau}{\partial \mu}\geqslant 0. \tag{40'}$$

Integrînd ultima egalitate găsim:

$$\frac{\partial y}{\partial \mu}=-\int_0^{v}\frac{\partial \tau}{\partial \mu}\,dy+g(x), \tag{41}$$

unde $g(x)$ este o funcţie arbitrară ce apare prin integrare. Folosind faptul că funcţia $\frac{\partial y}{\partial \mu}$ este impară în y, vom obţine $g(x)\equiv 0$. Relaţia (41) se va scrie:

$$\frac{\partial y}{\partial \mu}=-\int_0^{v}\frac{\partial \tau}{\partial \mu}\,dy\geqslant 0. \tag{41'}$$

În particular pentru $y(P_1)=y_1$ din (41') deducem:

$$\frac{\partial y_1}{\partial \mu}\geqslant 0. \tag{41''}$$

Am reuşit astfel să demonstrăm că y_1, ordonata punctului de detaşare P_1, este funcţie crescătoare de μ. Rezultă deci că coeficientul de contracţie $\Gamma=\Gamma(\mu)$ este funcţie descrescătoare de μ.

Să determinăm valoarea numerică a lui Γ în cazul particular al pereţilor verticali tratat anterior. Expresile aproximative ale funcţiilor θ şi τ sînt date de relaţiile:

$$\begin{cases}\theta=\frac{\pi}{2}-\sigma-a_2\sin 2\sigma-a_4\sin 4\sigma-a_6\sin 6\sigma,\\ \tau=a_0+a_2\cos 2\sigma+a_4\cos 4\sigma+a_6\cos 6\sigma.\end{cases} \tag{42}$$

Pentru calculul aproximativ al integralei din formula (38') vom folosi procedeul de interpolare al lui Simpson. Notînd cu $N=2p$ numărul subinteravelelor lui $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ şi cu $h=\frac{\pi}{2N}$ lungimea unui subinterval vom obţine formula:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sigma)\,d\sigma=\frac{h}{3}(f_0+4f_1+2f_2+\ldots+2f_{N-2}+4f_{N-1}+f_N)-\\ -\frac{\pi}{360}h^4f^{(4)}(\sigma_0), \tag{43}$$

unde $\sigma_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

În tabelul de mai jos se dau valorile aproximative ale lui Γ calculate pentru trei diviziuni ale intervalului $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

N	2	6	10
Γ	0,549	0,556	0,560

În lucrarea citată la [5], autorii determină valoarea coeficientului de contracţie prin planimetrie. În cazul particular al jetului cu pereţi verticali este obţinută valoarea $\Gamma = 0{,}565$.

Se observă că diferenţa între valorile coeficientului de contracţie calculate prin cele două metode este de ordinul miimilor.

Primită la redacţie la 28 iunie 1968

Universitatea din Bucureşti
Facultatea de matematică—mecanică, Str. Academiei nr. 14

SUR LES JETS INCOMPRESSIBLES LIMITÉS PAR DES JETS AUXILIAIRES MINCES

RÉSUMÉ

Plusieurs auteurs ont considéré récemment le problème de l'aile à jet [1], [2], [3], [4], ainsi que celui des jets incompressibles limités par des jets auxiliaires minces [5].

Dans le présent travail le second problème est repris et traité d'une manière unitaire, ainsi que d'un point de vue plus général.

Dans le cas particulier des jets à parois rectilignes, qui a été considéré dans [5], on donne de nouveaux résultats. Ainsi, après avoir établi l'unicité et l'existence de la solution du problème aux limites correspondant, on en donne l'expression exacte. Une méthode d'approximation est ensuite développée, ce qui conduit à une valeur numérique approchée du coefficient de contraction.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Malavard, Ph. Poisson-Quinton, P. Jousserandot, Note technique, O.N.E.R.A., 37 (1957).
2. N. Patraulea, *Contributions théoriques à l'étude des profils à profil fluide*, IXe Congrès International de Mécanique appliquée, Bruxelles Actes, **I**, 457—462 (1957).
3. M. Kadosch, Bulletin de la Société Française des Mécaniciens, 5e année, *18*, 15—31 (1955).
4. C. Jacob, *Introduction mathématique à la Mécanique des Fluides.* Paris-Gauthier Villars, 1959, pp. 680—692.
5. D. Pantazopol, C. S. Ioan, *A Method for studying incompressible plane jets bounded by thin jets sheets.* Revue de Mécanique appliquée, **VIII**, *5* (1963).
6. R. Gerber, *Sur solutions exactes des équations du mouvement avec surface libre d'un liquide pesant.* Journal des Mathématiques pures et Appliqués, **34**, 185—299 (1955).
7. L. Kantorovici-V. Krilov, *Metode de aproximaţie ale analizei superioare.* Vol. 1, Bucureşti.

ASUPRA APROXIMĂRII MIȘCĂRII SUBSONICE A UNUI FLUID COMPRESIBIL ÎN JURUL UNUI OBSTACOL

DE

ION GH. ȘABAC

Se consideră mișcarea irotațională plană a unui fluid compresibil în jurul unui obstacol oarecare, în regim subsonic. Pentru a utiliza o metodă de aproximare propusă în [11], se reprezintă conform domeniul ocupat de fluid pe exteriorul unui cerc de rază unitatea.

Problema se reduce la integrarea unei ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi liniară pentru o funcție complexă cu anumite condiții la limită. Se caută soluția dezvoltată în serie Fourier.

Ca aplicație se studiază mișcarea fără circulație în jurul unui obstacol eliptic.

1°. Fie $\vec{V} = \vec{i}u + \vec{j}v$ viteza într-un punct oarecare $z = x + iy$, θ unghiul format de $\vec{V}$ cu axa Ox, V_0 și θ_0 valorile pe care le ia V și θ la infinit, c viteza sunetului într-un punct oarecare, c_0 viteza sunetului în punctul în care $V = 0$.

Alegem ca necunoscute funcțiile $\sigma = \ln \frac{V}{V_0}$ și θ.

În [11] am arătat că, dezvoltînd în serie după puterile numărului lui Ciaplîghin $M_0 = \frac{V_0}{c_0}$ și neglijînd puterile de ordin $n \geqslant 4$, avem

$$\left\{\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 + M_0^2\, \sigma_2 \\ \theta &= \theta_1 + M_0^2\, \theta_2. \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Funcțiile σ_1 și θ_1 corespund mișcării fluidului incompresibil în jurul aceluiași obstacol γ, verifică în domeniul d ocupat de fluid ecuațiile

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \theta_1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} - \frac{\partial \theta_1}{\partial x} &= 0 \end{aligned}\right. \tag{2}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 1, P. 177–193, BUCUREȘTI, 1969

şi condiţiile la limită

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0, \ \theta_1 = \delta \text{ la infinit} \\ \theta_1 = l(s) \text{ pe } \gamma. \end{cases} \tag{3}$$

Funcţiile σ_2 şi θ_2, care dau corecţiile de compresibilitate, satisfac în domeniul d ecuaţiile

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial x} + \dfrac{\partial \theta_2}{\partial y} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\mathrm{d}e^{2\sigma_1}}{\mathrm{d}s_1} \cos \theta_1 \\ \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial y} - \dfrac{\partial \theta_2}{\partial x} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\mathrm{d}e^{2\sigma_1}}{\mathrm{d}s_1} \sin \theta_1 \end{cases} \tag{4}$$

şi condiţiile la limită

$$\begin{cases} \sigma_2 = 0, \ \theta_2 = 0 \text{ la infinit}; \\ \theta_2 = 0 \text{ pe } \gamma. \end{cases} \tag{5}$$

Am notat cu $\vec{s}_1$ versorul vitezei fluidului incompresibil şi cu $\dfrac{d}{ds_1}$ operatorul de derivare după direcţia $\vec{s}_1$,

$$\frac{d}{ds_1} = \cos \theta_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta_1 \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot$$

2°. Să considerăm o reprezentare conformă a domeniului d din planul variabilei $z = x + iy$ pe domeniul $D : | Z | > 1$ din planul variabilei $Z = X + iY$ în care punctele de la infinit se corespund. Funcţia

$$Z = g(z) = X(x, y) + iY(x, y) \tag{6}$$

care realizează această reprezentare conformă verifică în domeniul d condiţiile

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial x} = \dfrac{\partial Y}{\partial y}, \ \dfrac{\partial X}{\partial y} = - \dfrac{\partial Y}{\partial x} \\ g'(z) \neq 0. \end{cases} \tag{7}$$

Potenţialul complex al mişcării fluidului incompresibil în jurul obstacolului γ,

$$f(z) = \varphi(x, y) + i \psi(x, y),$$

este o funcţie olomorfă în d. Potenţialul complex $F(Z)$ al mişcării fluidului incompresibil în jurul lui $\Gamma : |Z| = 1$ este transformatul acestuia prin (6). Între vitezele complexe

$$w = u - iv = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}, \quad W = U - iV = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}Z}$$

ale celor două mişcări există relaţia

$$w = Wg'(z). \tag{8}$$

Utilizînd notaţiile de mai sus, avem

$$w = V_0 \mathrm{e}^{\sigma_1} \mathrm{e}^{-i\theta_1}. \tag{9}$$

Prin analogie, notăm

$$W = V_0 \mathrm{e}^{\Sigma_1} \mathrm{e}^{-i\Theta_1} \tag{9'}$$

şi introducînd în (8) deducem

$$\mathrm{e}^{\sigma_1} \mathrm{e}^{-i\theta_1} = g'(z) \mathrm{e}^{\Sigma_1} \mathrm{e}^{-i\Theta_1} \tag{10}$$

sau, cu inversa $z = G(Z)$ a funcţiei (6),

$$\mathrm{e}^{\Sigma_1} \mathrm{e}^{-i\Theta_1} = G'(Z) \mathrm{e}^{\sigma_1} \mathrm{e}^{-i\theta_1}. \tag{10'}$$

Rezultă

$$\mathrm{e}^{\Sigma_1} = \mathrm{e}^{\sigma_1} |G'(Z)|, \quad \Theta_1 = \theta_1 - \arg G'(Z). \tag{11}$$

Din (10′) şi (11) obţinem

$$|G'(Z)| \mathrm{e}^{-i\Theta_1} = G'(Z) \mathrm{e}^{-i\theta_1}, \tag{12}$$

egalitate echivalentă cu

$$|g'(z)| \mathrm{e}^{i\Theta_1} = g'(z) \mathrm{e}^{i\theta_1}. \tag{12'}$$

Înlocuind în această relaţie

$$g'(z) = \frac{\partial X}{\partial x} + i \frac{\partial Y}{\partial x}$$

şi ţinînd seama de (7), deducem

$$|g'(z)| \cos \Theta_1 = \frac{\partial X}{\partial x} \cos \theta_1 - \frac{\partial Y}{\partial x} \sin \theta_1 = \frac{\partial X}{\partial x} \cos \theta_1 + \frac{\partial X}{\partial y} \sin \theta_1$$

$$|g'(z)| \sin \Theta_1 = \frac{\partial Y}{\partial x} \cos \theta_1 + \frac{\partial X}{\partial x} \sin \theta_1 = \frac{\partial Y}{\partial x} \cos \theta_1 + \frac{\partial Y}{\partial y} \sin \theta_1$$

deci

$$|g'(z)|\cos\Theta_1 = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s_1}, \quad |g'(z)|\sin\Theta_1 = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s_1}. \tag{13}$$

Cu această pregătire, să cercetăm ce devine sistemul (4) şi condiţiile la limită (5) prin transformarea (6). Fie

$$z = G(Z) = x(X, Y) + iy(X, Y).$$

Funcţiile $\sigma_2(x, y)$, $\theta_2(x, y)$ devin

$$\begin{aligned} &\Sigma_2^*(X, Y) = \sigma_2[x(X, Y), y(X, Y)],\\ &\Theta_2^*(X, Y) = \theta_2[x(X, Y), y(X, Y)] \end{aligned} \tag{14}$$

şi avem

$$\frac{\partial\sigma_2}{\partial x} = \frac{\partial\Sigma_2^*}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial\Sigma_2^*}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial\sigma_2}{\partial y} = \frac{\partial\Sigma_2^*}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial\Sigma_2^*}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial x} = \frac{\partial\Theta_2^*}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial\Theta_2^*}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial\theta_2}{\partial y} = \frac{\partial\Theta_2^*}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial\Theta_2^*}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}.$$

Datorită relaţiilor (7) deducem

$$\frac{\partial\sigma_2}{\partial x} + \frac{\partial\theta_2}{\partial y} = \left(\frac{\partial\Sigma_2^*}{\partial X} + \frac{\partial\Theta_2^*}{\partial Y}\right)\frac{\partial X}{\partial x} + \left(\frac{\partial\Sigma_2^*}{\partial Y} - \frac{\partial\Theta_2^*}{\partial X}\right)\frac{\partial Y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\sigma_2}{\partial y} - \frac{\partial\theta_2}{\partial x} = -\left(\frac{\partial\Sigma_2^*}{\partial X} + \frac{\partial\Theta_2^*}{\partial Y}\right)\frac{\partial Y}{\partial x} + \left(\frac{\partial\Sigma_2^*}{\partial Y} - \frac{\partial\Theta_2^*}{\partial X}\right)\frac{\partial X}{\partial x}.$$

De aici rezultă

$$|g'(z)|^2\left(\frac{\partial\Sigma_2^*}{\partial X} + \frac{\partial\Theta_2^*}{\partial Y}\right) = \left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial x} + \frac{\partial\theta_2}{\partial y}\right)\frac{\partial X}{\partial x} + \left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial y} - \frac{\partial\theta_2}{\partial x}\right)\frac{\partial X}{\partial y},$$

$$|g'(z)|^2\left(\frac{\partial\Sigma_2^*}{\partial Y} - \frac{\partial\Theta_2^*}{\partial X}\right) = \left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial x} + \frac{\partial\theta_2}{\partial y}\right)\frac{\partial Y}{\partial x} + \left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial y} - \frac{\partial\theta_2}{\partial x}\right)\frac{\partial Y}{\partial y}$$

sau, ţinînd seama de (4),

$$\left\{\begin{aligned} &|g'(z)|^2\left(\frac{\partial\Sigma_2^*}{\partial X} + \frac{\partial\Theta_2^*}{\partial Y}\right) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}e^{2\sigma_1}}{\mathrm{d}s_1}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s_1}\\ &|g'(z)|^2\left(\frac{\partial\Sigma_2^*}{\partial Y} - \frac{\partial\Theta_2^*}{\partial X}\right) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}e^{2\sigma_1}}{\mathrm{d}s_1}\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s_1}. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Notăm

$$\sigma_1 [x(X, Y),\ y(X, Y)] = \Sigma_1^*(X, Y) \tag{16}$$

şi avem

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_1}{\mathrm{d}s_1} = \frac{\partial \Sigma_1^*}{\partial X}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s_1} + \frac{\partial \Sigma_1^*}{\partial Y}\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s_1}$$

sau, folosind egalităţile (13),

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_1}{\mathrm{d}s_1} = |g'(z)|\left(\frac{\partial \Sigma_1^*}{\partial X}\cos\Theta_1 + \frac{\partial \Sigma_1^*}{\partial Y}\sin\Theta_1\right) = |g'(z)|\frac{\mathrm{d}\Sigma_1^*}{\mathrm{d}S_1}.$$

Cu acest rezultat şi cu (13), sistemul (15) devine

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Sigma_2^*}{\partial X} + \frac{\partial \Theta_2^*}{\partial Y} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}e^{2\Sigma_1^*}}{\mathrm{d}S_1}\cos\Theta_1 \\ &\frac{\partial \Sigma_2^*}{\partial Y} - \frac{\partial \Theta_2^*}{\partial X} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}e^{2\Sigma_1^*}}{\mathrm{d}S_1}\sin\Theta_1 . \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Deoarece punctele de la infinit din cele două plane şi frontierele γ, Γ se corespund, condiţiile la limită (5) devin

$$\left\{\begin{aligned} &\Sigma_2^* = 0,\quad \Theta_2^* = 0 \quad \text{la infinit;} \\ &\Theta_2^* = 0 \quad \text{pe } \Gamma. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

În concluzie, aproximarea mişcării fluidului compresibil în jurul unui obstacol γ cu $V = V_0$, $\theta = \delta$ la infinit, printr-o reprezentare conformă a domeniului d ocupat de fluid pe domeniul $D : |Z| > 1$, se reduce la două probleme:

1) Determinarea mişcării fluidului incompresibil în domeniul D cu viteza la infinit $V_0 |G'(\infty)|$ formînd cu axa OX unghiul $\delta - \arg G'(\infty)$ aşa cum rezultă din (8) şi 11).

Cunoscînd viteza complexă W a acestei mişcări, din (9′) se deduc e^{Σ_1} şi Θ_1. Datorită egalităţilor (16) şi (11), avem

$$e^{2\Sigma_1^*} = \frac{e^{2\Sigma_1}}{|G'(Z)|^2}. \tag{19}$$

Cu acestea, membrul drept al ecuaţiilor (17) este determinat.

2) A doua problemă este integrarea sistemului (17) cu condiţiile la limită (18).

Cunoscînd Σ_1 şi Θ_1, din (11) se deduc σ_1 şi θ_1.

După determinarea funcţiilor $\Sigma_2^*(X, Y)$, $\Theta_2^*(X, Y)$, cu $X(x, y)$ şi $Y(x, y)$ din (6) se obţin

$$\sigma_2(x, y) = \Sigma_2^*[X(x, y),\ Y(x, y)],\ \theta_2(x, y) = \Theta_2^*[X(x, y),\ Y(x, y)].$$

Înlocuind în (1) se obţin funcţiile $\sigma(x, y)$, $\theta(x, y)$.

3°. Dacă mişcarea în d este fără circulaţie, mişcarea fluidului incompresibil în D va fi caracterizată prin viteza complexă

$$W = V_0 G'(\infty)\left(e^{-i\delta} - \frac{1}{Z^2}\, e^{i\delta}\right).$$

Cu (9′), această egalitate devine

$$e^{\Sigma_1} e^{-i\Theta_1} = G'(\infty)\, e^{-i\delta}\left(1 - \frac{1}{Z^2}\, e^{2i\delta}\right) \tag{20}$$

din care rezultă e^{Σ_1} şi Θ_1.

Domeniul D fiind exteriorul unui cerc cu centrul în origine, sînt indicate coordonatele polare. Notăm

$$Z = r\, e^{i\alpha}$$

şi (20) devine

$$e^{\Sigma_1} e^{-i\Theta_1} = G'(\infty)\, e^{-i\delta}\left[1 - \frac{1}{r^2}\, e^{2i(\delta-\alpha)}\right].$$

Deducem

$$e^{2\Sigma_1} = |G'(\infty)|^2\left[1 + \frac{1}{r^4} - \frac{2}{r^2}\cos 2(\delta - \alpha)\right],$$

$$e^{-i\Theta_1} = e^{-i(\delta-\beta)}\, \frac{1 - \dfrac{1}{r^2}\, e^{2i(\delta-\alpha)}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{r^4} - \dfrac{2}{r^2}\cos 2(\delta - \alpha)}}, \tag{21}$$

unde $\beta = \arg G'(\infty)$. Ţinînd seama de (19), obţinem

$$e^{2\Sigma_1^*} = \left|\frac{G'(\infty)}{G'(Z)}\right|^2\left[1 + \frac{1}{r^4} - \frac{2}{r^2}\cos 2(\delta - \alpha)\right]. \tag{22}$$

Cu (21) şi (22), membrul drept al ecuaţiilor (17) este cunoscut.

Notăm

$$\Sigma_1^*(r\cos\alpha, r\sin\alpha) = \Sigma_1^0(r,\alpha)$$

$$\Sigma_2^*(r\cos\alpha, r\sin\alpha) = \Sigma_2^0(r,\alpha),\quad \Theta_2^*(r\cos\alpha, r\sin\alpha) = \Theta_2^0(r,\alpha).$$

În coordonate polare, sistemul (17) se scrie

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\Sigma_2^0}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Theta_2^0}{\partial\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}e^{2\Sigma_1^0}}{\mathrm{d}S_1}\cos(\alpha-\Theta_1),\\ &\frac{\partial\Theta_2^0}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Sigma_2^0}{\partial\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}e^{2\Sigma_1^0}}{\mathrm{d}S_1}\sin(\alpha-\Theta_1),\end{aligned}\right. \tag{23}$$

unde

$$\frac{\mathrm{d}e^{2\Sigma_1^0}}{\mathrm{d}S_1} = \frac{\partial e^{2\Sigma_1^0}}{\partial r}\cos(\alpha-\Theta_1) - \frac{1}{r}\frac{\partial e^{2\Sigma_1^0}}{\partial\alpha}\sin(\alpha-\Theta_1) \tag{24}$$

iar condiţiile la limită (18) devin

$$\left\{\begin{aligned} &\Sigma_2^0(\infty,\alpha) = 0,\quad \Theta_2^0(\infty,\alpha) = 0\\ &\Theta_2^0(1,\alpha) = 0.\end{aligned}\right. \tag{25}$$

Considerînd funcţia

$$\Omega(r,\alpha) = \Sigma_2^0(r,\alpha) - i\Theta_2^0(r,\alpha), \tag{26}$$

sistemul (23) poate fi înlocuit printr-o singură ecuaţie

$$\frac{\partial\Omega}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha} = \Phi(r,\alpha) \tag{27}$$

cu condiţiile la limită

$$\Omega(\infty,\alpha) = 0,\quad \mathrm{Im}[\Omega(1,\alpha)] = 0. \tag{28}$$

Am notat

$$\Phi(r,\alpha) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}e^{2\Sigma_1^0}}{\mathrm{d}S_1}e^{-i(\alpha-\Theta_1)}.$$

Egalitatea (24) se mai scrie

$$\frac{\mathrm{d}e^{2\Sigma_1^0}}{\mathrm{d}S_1} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial e^{2\Sigma_1^0}}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial e^{2\Sigma_1^0}}{\partial\alpha}\right)e^{i(\alpha-\Theta_1)} + \left(\frac{\partial e^{2\Sigma_1^0}}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial e^{2\Sigma_1^0}}{\partial\alpha}\right)e^{-i(\alpha-\Theta_1)}\right]$$

deci

$$(29)\quad \Phi(r,\alpha)=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial e^{2\Sigma_1^0}}{\partial r}+\frac{i}{r}\,\frac{\partial e^{2\Sigma_1^0}}{\partial \alpha}\right)+\left(\frac{\partial e^{2\Sigma_1^0}}{\partial r}-\frac{i}{r}\,\frac{\partial e^{2\Sigma_1^0}}{\partial \alpha}\right)e^{-2i(\alpha-\Theta_1)}\right]$$

în care $e^{2j\Theta_1}$ este dat de (21),

$$e^{2i\Theta_1}=e^{2i(\delta-\beta)}\,\frac{1+r^4-2r^2\cos 2(\delta-\alpha)}{[r^2-e^{2i(\delta-\alpha)}]^2}.$$

Un calcul simplu duce la

$$(30)\qquad e^{-2i(\alpha-\Theta_1)}=e^{-2i\beta}\,e^{2i(\delta-\alpha)}\,\frac{r^2-e^{-2i(\delta-\alpha)}}{r^2-e^{2i(\delta-\alpha)}}.$$

De asemenea, din (22) deducem

$$(31)\qquad e^{2\Sigma_1^0}=\left|\frac{G'(\infty)}{G'(Z)}\right|^2\frac{1}{r^4}\,[r^2-e^{-2i(\delta-\alpha)}]\,[r^2-e^{2i(\delta-\alpha)}].$$

Funcţia $G'(Z)$, definită pe domeniul $D:\ |Z|>1$, poate fi scrisă ca funcţie de r şi $e^{i\alpha}$, deci $\Phi(r,\alpha)$ poate fi dezvoltată în serie Fourier în raport cu α sub forma

$$(32)\qquad \Phi(r,\alpha)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(r)\,e^{in\alpha},\quad c_n(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(r,\alpha)\,e^{-in\alpha}\,d\alpha$$

şi soluţia ecuaţiei (27) cu condiţiile la limită (28) poate fi căutată sub forma

$$(33)\qquad \Omega(r,\alpha)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\gamma_n(r)\,e^{in\alpha}.$$

În ipoteza că această serie poate fi derivată termen cu termen în raport cu r şi α, introducînd în (27) obţinem

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\gamma_n'(r)-\frac{n}{r}\,\gamma_n(r)\right]e^{in\alpha}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(r)\,e^{in\alpha}$$

şi prin identificare,

$$(34)\qquad \gamma_n'(r)-\frac{n}{r}\,\gamma_n(r)=c_n(r),\qquad n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Prima condiţie (28) se traduce prin

$$(35)\qquad \gamma_n(\infty)=0,\qquad n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Pentru cea de a doua, punînd în evidenţă în (33) partea reală şi partea imaginară, se găseşte

$$\gamma_{-n}(1) = \overline{\gamma}_n(1), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{36}$$

unde $\overline{\gamma}_n$ este conjugatul lui γ_n.

Problema s-a redus la integrarea ecuaţiilor (34) cu condiţiile (35) şi (36).

Cu schimbarea de funcţie

$$\gamma_n(r) = r^n u_n(r),$$

(34) devine

$$u_n'(r) = \frac{1}{r^n}\, c_n(r)$$

deci

$$\gamma_n(r) = r^n \left[\int_1^r \frac{c_n(r)}{r^n}\, \mathrm{d}r + K_n\right]. \tag{37}$$

Constantele K_n vor fi precizate prin condiţiile (35) şi (36). Din (36) rezultă

$$K_{-n} = \overline{K}_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{38}$$

iar din (35)

$$K_n = -\int_1^\infty \frac{c_n(r)}{r^n}\, \mathrm{d}r, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{39}$$

Coeficienţii seriei (33) sînt astfel complet determinaţi.

4°. Repartiţia vitezelor pe obstacolul γ se obţine calculînd $\Sigma_2^0(1, \alpha)$. Din (25) şi (26) rezultă

$$\Sigma_2^0(1, \alpha) = \Omega\,(1, \alpha),$$

şi seria (33), ţinînd seama de (36), va da

$$\Sigma_2^0(1, \alpha) = \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\gamma_n(1)\, \mathrm{e}^{in\alpha} + \overline{\gamma}_n(1)\, \mathrm{e}^{-in\alpha}\right]$$

sau încă

$$\Sigma_2^0(1, \alpha) = \mathrm{Re}\left[\gamma_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(1)\, \mathrm{e}^{in\alpha}\right].$$

Din (37) şi (39) obţinem

$$\gamma_n(1) = K_n = -\int_1^\infty \frac{c_n(r)}{r^n}\,\mathrm{d}r.$$

Egalitatea precedentă devine

$$\Sigma_2^0(1,\alpha) = -\operatorname{Re}\int_1^\infty \left[c_0(r) + 2\sum_{n=1}^\infty \frac{\mathrm{e}^{in\alpha}}{r^n}\,c^n(r)\right]\mathrm{d}r. \tag{40}$$

Introducînd expresiile (32) ale coeficienţilor $c_n(r)$ şi însumînd o serie geometrică, se obţine

$$\Sigma_2^0(1,\alpha) = -\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\int_1^\infty \mathrm{d}r\int_0^{2\pi} \Phi(r,u)\,\frac{r+\mathrm{e}^{i(\alpha-u)}}{r-\mathrm{e}^{i(\alpha-u)}}\,\mathrm{d}u. \tag{41}$$

5°. Ca aplicaţie, să considerăm mişcarea fără circulaţie a fluidului compresibil în jurul unui obstacol eliptic.

O reprezentare conformă a domeniului

$$d: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1, \quad 0 < b < a$$

pe $D: |Z| > 1$, în care punctele de la infinit se corespund, este dată de funcţia

$$z = \frac{a+b}{2}Z + \frac{a-b}{2}\,\frac{1}{Z}. \tag{42}$$

Notînd

$$p = \frac{a+b}{2},\quad q = \frac{a-b}{2},\quad \lambda^2 = \frac{q}{p} \quad (0 < \lambda < 1), \tag{43}$$

avem

$$G(Z) = pZ + q\,\frac{1}{Z} = p\left(Z + \frac{\lambda^2}{Z}\right)$$

$$G'(Z) = p\left(1 - \frac{\lambda^2}{Z^2}\right)$$

sau, în coordonate polare,

$$G'(Z) = p\left(1 - \frac{\lambda^2}{r^2}\,\mathrm{e}^{-2i\alpha}\right). \tag{44}$$

Deoarece

$$G'(\infty) = p > 0$$

$$|G'(Z)|^2 = G'(Z)\,\overline{G'(Z)} = \frac{p^2}{r^4}(r^2 - \lambda^2 e^{-2i\alpha})(r^2 - \lambda^2 e^{2i\alpha}),$$

egalitatea (31) devine

$$e^{2\Sigma_1^0} = \frac{[r^2 - e^{-2i(\delta-\alpha)}]\,[r^2 - e^{2i(\delta-\alpha)}]}{(r^2 - \lambda^2 e^{-2i\alpha})(r^2 - \lambda^2 e^{2i\alpha})}. \tag{45}$$

Introducînd în (29) şi ţinînd seama de (30), în care $\beta = \arg G'(\infty) = 0$, obţinem

$$\begin{aligned} \Phi(r, \alpha) &= (1 - \lambda^2 e^{2i\delta}) \frac{r(r^2 e^{-2i\delta} e^{2i\alpha} - 1)}{(r^2 - \lambda^2 e^{2i\alpha})^2 (r^2 - \lambda^2 e^{-2i\alpha})} + \\ &+ (1 - \lambda^2 e^{-2i\delta}) \frac{r(r^2 e^{2i\delta} e^{-2i\alpha} - 1)^2}{(r^2 - \lambda^2 e^{2i\alpha})(r^2 - \lambda^2 e^{-2i\alpha})^2 (r^2 e^{2i\delta} e^{-2i\alpha})}. \end{aligned} \tag{46}$$

Notăm

$$\Phi(r, \alpha) = \Phi_1(r, e^{2i\alpha})$$

şi introducem în (32),

$$c_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_1(r, e^{2i\alpha})\, e^{-in\alpha}\, d\alpha.$$

Pentru *n* impar,

$$c_{2p+1}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_1(r, e^{2i\alpha})\, e^{-2pi\alpha}\, e^{-i\alpha}\, d\alpha,$$

cu schimbarea de variabilă $2\alpha = \alpha'$, avem

$$c_{2p+1}(r) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi} \Phi_1(r, e^{i\alpha'})\, e^{-ip\alpha'} e^{-i\frac{\alpha'}{2}}\, d\alpha'.$$

Se desparte integrala în două, pe intervalele $[0, 2\pi]$ şi $[2\pi, 4\pi]$. Ultima, cu schimbarea de variabilă $\alpha' = 2\pi + \alpha''$, se reduce la opusa primei, deci

$$c_{2p+1}(r) = 0, \; p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{47}$$

Analog, pentru *n* par, se obţine

$$c_{2p}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_1(r, e^{i\alpha'})\, e^{-ip\alpha'}\, d\alpha', \tag{48}$$

cu $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Rezultă

$$c_{2p}(r) = r(1 - \lambda^2\, e^{2i\delta})\, I_1 + r\,(1 - \lambda^2\, e^{-2i\delta})\, I_2,$$

unde

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(r^2 e^{-2i\delta}\, e^{i\alpha'} - 1)\, e^{-ip\alpha'}\, d\alpha'}{(r^2 - \lambda^2 e^{i\alpha'})^2\, (r^2 - \lambda^2 e^{-i\alpha'})}$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(r^2\, e^{2i\delta} e^{-i\alpha'} - 1)^2\, e^{-ip\alpha'}\, d\alpha'}{(r^2 - \lambda^2\, e^{i\alpha'})\, (r^2 - \lambda^2\, e^{-i\alpha'})^2\, (r^2 - e^{2i\delta}\, e^{-i\alpha'})}$$

Pentru $p \geqslant 0$, cu schimbarea de variabilă $e^{-i\alpha'} = \zeta$, cele două integrale devin

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{(r^2\, e^{-2i\delta} - \zeta)\, \zeta^p}{(r^2\zeta - \lambda^2)^2\, (r^2 - \lambda^2\zeta)}\, d\zeta$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{(r^2\, e^{2i\delta}\, \zeta - 1)^2\, \zeta^p}{(r^2\zeta - \lambda^2)\, (r^2 - \lambda^2\zeta)^2\, (r^2 - e^{2i\delta}\, \zeta)}\, d\zeta$$

Folosind teorema reziduurilor se obţine

$$I_1 = p\, \frac{\lambda^{2p-2}}{r^{2p+2}}\, \frac{r^4 e^{-2i\delta} - \lambda^2}{r^4 - \lambda^4} + \frac{\lambda^{2p}\, (\lambda^2\, e^{-2i\delta} - 1)}{r^{2p-2}}\, \frac{1}{(r^4 - \lambda^4)^2}$$

$$I_2 = \frac{\lambda^{2p}\, (1 - \lambda^2\, e^{2i\delta})^2}{r^{2p-4}}\, \frac{1}{(r^4 - \lambda^4)^2\, (r^4 - \lambda^2\, e^{2i\delta})}$$

deci

$$c_{2p}(r) = \frac{\lambda^{2p}\, (1 - \lambda^2\, e^{2i\delta})}{r^{2p+1}} \Bigg[\frac{p}{\lambda^2}\, \frac{r^4\, e^{-2i\delta} - \lambda^2}{r^4 - \lambda^4} - (1 - \lambda^2\, e^{-2i\delta})\, \frac{r^4}{(r^4 - \lambda^4)^2} + \\ + (1 - \lambda^2\, e^{-2i\delta})\, (1 - \lambda^2 e^{2i\delta})\, \frac{r^6}{(r^4 - \lambda^4)^2\, (r^4 - \lambda^2\, e^{2i\delta})} \Bigg] \tag{49}$$

unde $p = 0, 1, 2, \ldots$

Dacă $p < 0$, cu schimbarea de variabilă $e^{i\alpha} = \zeta$, se obţine analog

$$I_1 = \frac{r^{2p}\, (\lambda^2\, e^{-2i\delta} - 1)}{\lambda^{2p}}\, \frac{r^{2p}}{(r^4 - \lambda^4)^2}$$

$$I_2 = \frac{r^{2p}}{\lambda^{2p}\, (1 - \lambda^2\, e^{-2i\delta})} \Bigg[\frac{\lambda^2}{e^{2pi\delta}\, (1 - \lambda^2 e^{-2i\delta})}\, \frac{(r^4 - 1)^2}{r^4\, (r^4 - \lambda^2 e^{2i\delta})} + \\ + \frac{p}{\lambda^2\, e^{2i\delta}}\, \frac{(r^4\, e^{2i\delta} - \lambda^2)^2}{r^4\, (r^4 - \lambda^4)} + \frac{1 - \lambda^2\, e^{2i\delta}}{e^{2i\delta}}\, \frac{r^4\, e^{2i\delta} - \lambda^2}{(r^4 - \lambda^4)^2} + \\ + \frac{1}{e^{2i\delta}\, (1 - \lambda^2\, e^{-2i\delta})}\, \frac{(1 - r^4)\, (r^4\, e^{2i\delta} - \lambda^2)}{r^4\, (r^4 - \lambda^4)} \Bigg]$$

deci

$$c_{2p}(r) = \frac{r^{2p+1}}{\lambda^{2p}} \Bigg[-(1-\lambda^2 e^{2i\delta})(1-\lambda^2 e^{-2i\delta}) \frac{r^2}{(r^4-\lambda^4)^2} +$$

$$(50) \quad + \frac{\lambda^{2p}}{e^{2pi\delta}(1-\lambda^2 e^{-2i\delta})} \frac{(r^4-1)^2}{r^4(r^4-\lambda^2 e^{2i\delta})} + \frac{p}{\lambda^2 e^{2i\delta}} \frac{(r^4 e^{2i\delta}-\lambda^2)^2}{r^4(r^4-\lambda^4)} +$$

$$+ \frac{1-\lambda^2 e^{2i\delta}}{e^{2i\delta}} \frac{r^4 e^{2i\delta}-\lambda^2}{(r^4-\lambda^4)^2} + \frac{1}{e^{2i\delta}(1-\lambda^2 e^{-2i\delta})} \frac{(1-r^4)(r^4 e^{2i\delta}-\lambda^2)}{r^4(r^4-\lambda^4)} \Bigg]$$

pentru $p = -1, -2, -3, \ldots$

Conform egalităţilor (37), (38) şi (39), calculul coeficienţilor $\gamma_{2p}(r)$ se reduce la calculul integralei

$$J_{2p}(r) = \int_1^r \frac{c_{2p}(r)}{r^{2p}} \mathrm{d}r, \; p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

iar coeficienţii de rang impar $\gamma_{2p+1}(r)$ sînt nuli deoarece $c_{2p+1}(r) = 0$.

Pentru $p \geqslant 0$ aceasta se mai poate scrie

$$(51) \qquad J_{2p}(r) = \frac{\lambda^{2p}(1-\lambda^2 e^{2i\delta})}{4} \Bigg[(1-\lambda^2 e^{-2i\delta}) \int_1^{\frac{1}{r^4}} \frac{u^p}{(1-\lambda^4 u)^2} \mathrm{d}u -$$

$$- \frac{p}{\lambda^2} \int_1^{\frac{1}{r^4}} \frac{e^{-2i\delta}-\lambda^2 u}{1-\lambda^4 u} u^{p-1} \mathrm{d}u - 2(1-\lambda^2 e^{2i\delta})(1-\lambda^2 e^{-2i\delta}) \int_1^{\frac{1}{r^2}} \frac{u^{2p+2}}{(1-\lambda^4 u^2)^2 (1-\lambda^2 e^{2i\delta} u^2)} \mathrm{d}u \Bigg]$$

iar pentru $p < 0$

$$(52) \qquad J_{2p}(r) = \frac{(1-\lambda^2 e^{2i\delta})(1-\lambda^2 e^{-2i\delta})}{4\lambda^{2p}(\lambda^4-1)} \frac{r^4-1}{r^4-\lambda^4} +$$

$$+ \frac{1}{2e^{2pi\delta}(1-\lambda^2 e^{-2i\delta})} \int_1^{r^2} \frac{u^2-1}{u^2(u^2-\lambda^2 e^{2i\delta})} \mathrm{d}u + \frac{p}{2\lambda^{2p+2} e^{2i\delta}} \int_1^{r^2} \frac{(u^2 e^{2i\delta}-\lambda^2)^2}{u^2(u^2-\lambda^4)} \mathrm{d}u +$$

$$+ \frac{1-\lambda^2 e^{2i\delta}}{2\lambda^{2p} e^{2i\delta}} \int_1^{r^2} \frac{u^2 e^{2i\delta}-\lambda^2}{(u^2-\lambda^4)^2} \mathrm{d}u +$$

$$+ \frac{1}{2\lambda^{2p} e^{2i\delta}(1-\lambda^2 e^{-2i\delta})} \int_1^{r^2} \frac{(1-u^2)(u^2 e^{2i\delta}-\lambda^2)}{u^2(u^2-\lambda^4)} \mathrm{d}u.$$

Cu schimbări de variabile convenabile (51) se reduce la

$$
\begin{aligned}
(53)\qquad J_{2_p}(r) = {} & \frac{\lambda^{2p-2}(1-\lambda^2 e^{2i\delta})}{4e^{2i\delta}} \, \frac{(r^2+1)(r^2-\lambda^2 e^{2i\delta})}{r^{4p}(\lambda^4 - r^4)} + \\
& + \frac{(1-\lambda^2 e^{2i\delta})^2}{4e^{2i\delta}\lambda^{2p+4}(1-\lambda^2 e^{-2i\delta})} \left\{ \frac{2p+1}{2}(1-\lambda^2 e^{-2i\delta}) \left[\int_{1-\lambda^2}^{1+\lambda^2} \frac{1}{v}(1-v)^{2p}\, dv - \right.\right. \\
& \left. - \int_{1-\frac{\lambda^2}{r^2}}^{1+\frac{\lambda^2}{r^2}} \frac{1}{v}(1-v)^{2p}\, dv \right] - \left[\int_{1-\lambda^2}^{1+\lambda^2} \frac{1}{v}(1-v)^{2p+2}\, dv - \int_{1-\frac{\lambda^2}{r^2}}^{1+\frac{\lambda^2}{r^2}} \frac{1}{v}(1-v)^{2p+2} dv \right] + \\
& \left. + \lambda^{2p+1} e^{-(2p+1)i\delta} \left[\int_{1-\lambda e^{i\delta}}^{1+\lambda e^{i\delta}} \frac{1}{v}(1-v)^{2p+2}\, dv - \int_{1-\frac{\lambda e^{i\delta}}{r^2}}^{1+\frac{\lambda e^{i\delta}}{r^2}} \frac{1}{v}(1-v)^{2p+2}\, dv \right] \right\}
\end{aligned}
$$

cu $p = 0, 1, 2, 3, \ldots.$ iar (52) devine

$$
\begin{aligned}
J_{2_p}(r) = {} & \frac{\lambda^2 - e^{-2i\delta}}{4\lambda^{2p+2}} \, \frac{(r^2+\lambda^2 e^{2i\delta})(r^2-1)}{r^4-\lambda^4} + \left[\frac{p\, e^{2i\delta}}{2\lambda^{2p+2}} + \right. \\
& \left. + \frac{e^{2i\delta} + \lambda^{2p-2} e^{-2pi\delta}}{2\lambda^{2p}(\lambda^2 - e^{2i\delta})} \right](r^2-1) + \frac{p(1-\lambda^2 e^{-2i\delta}) - 1}{2\lambda^{2p+2}(e^{2i\delta}-\lambda^2)} \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right) + \\
(54)\qquad & + \frac{(1-\lambda^2 e^{2i\delta})^2 \left[(2p-1) - (2p+1)\lambda^2 e^{-2i\delta}\right]}{8\lambda^{2p+4}(e^{2i\delta}-\lambda^2)} \left[\ln \frac{r^2-\lambda^2}{r^2+\lambda^2} - \ln \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \right] + \\
& + \frac{\lambda e^{2i\delta} - 1}{4\lambda^3 e^{(2p+1)i\delta}(e^{2i\delta}-\lambda^2)} \left[\ln \frac{1-\lambda e^{i\delta} r^2}{1+\lambda e^{i\delta} r^2} - \ln \frac{1-\lambda e^{i\delta}}{1+\lambda e^{i\delta}} \right]
\end{aligned}
$$

cu $p = -1, -2, -3, \ldots$

Repartiția vitezelor pe obstacol este dată de $\sum_2^0 (1,\alpha)$ a cărei expresie poate fi calculată pornind de la (41). Ținînd seama însă de forma particulară (46) a funcției $\Phi(r, \alpha)$, putem nota

$$\Phi(r, \alpha) = rF(r, e^{2i\alpha}).$$

Egalitatea (40), în care coeficienții $c_n(r)$ de rang impar sînt nuli, devine

$$\Sigma_2^0 (1, \alpha) = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_1^\infty r\, dr \int_0^{2\pi} F(r, e^{i\alpha'}) \frac{r^2 + e^{i(2\alpha-\alpha')}}{r^2 - e^{i(2\alpha-\alpha')}}\, d\alpha'.$$

Avem astfel

$$(55)\qquad \Sigma_2^0 (1, \alpha) = -\operatorname{Re} \int_1^\infty \psi(r, \alpha)\, r\, dr$$

cu

$$\psi(r,\alpha)=(\mathrm{e}^{-2i\delta}-\lambda^2)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2+\mathrm{e}^{2i\alpha}\mathrm{e}^{-i\alpha'}}{r^2-\mathrm{e}^{2i\alpha}\mathrm{e}^{-i\alpha'}}\,\frac{r^2\mathrm{e}^{i\alpha'}-\mathrm{e}^{2i\delta}}{(r^2-\lambda^2\mathrm{e}^{i\alpha'})^2(r^2-\lambda^2\mathrm{e}^{-i\alpha'})}\,\mathrm{d}\alpha'+$$

$$+\mathrm{e}^{2i\delta}(e^{2i\delta}-\lambda^2)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2+\mathrm{e}^{2i\alpha}\mathrm{e}^{-i\alpha'}}{r^2-\mathrm{e}^{2i\alpha}\mathrm{e}^{-i\alpha'}}\,\frac{(r^2\mathrm{e}^{-i\alpha'}-\mathrm{e}^{-2i\delta})^2}{(r^2-\lambda^2\mathrm{e}^{i\alpha'})(r^2-\lambda^2\mathrm{e}^{-i\alpha'})^2(r^2-\mathrm{e}^{2i\delta}\mathrm{e}^{-i\alpha'})}\,\mathrm{d}\alpha'.$$

Cu substituţiile $\mathrm{e}^{i\alpha'}=\zeta$ în prima integrală şi $\mathrm{e}^{-i\alpha'}=\zeta$ în a doua integrală, acestea se transformă în integrale pe cercul $|\zeta|=1$ care pot fi calculate folosind teorema reziduurilor. Se obţine

$$\psi(r,\alpha)=\frac{\mathrm{e}^{-2i\delta}-\lambda^2}{\mathrm{e}^{2i\alpha}-\lambda^2}\left[\frac{2\mathrm{e}^{2i\alpha}(\mathrm{e}^{2i\alpha}-\mathrm{e}^{2i\delta})}{(r^4-\lambda^2\mathrm{e}^{2i\alpha})^2}-\frac{(\lambda^2+\mathrm{e}^{2i\alpha})(\lambda^2-\mathrm{e}^{2i\delta})}{(r^4-\lambda^4)^2}\right]r^2-$$

$$-\frac{\mathrm{e}^{2i\delta}(\lambda^2-\mathrm{e}^{2i\delta})(\lambda^2-\mathrm{e}^{-2i\delta})(r^4+\lambda^2\mathrm{e}^{2i\alpha})}{(r^4-\lambda^2\mathrm{e}^{2i\alpha})(r^4-\lambda^4)^2(r^4-\lambda^2\mathrm{e}^{2i\delta})}\,r^4.$$

Introducînd în (55), se calculează următoarele integrale

$$J_1=\int_1^\infty\frac{r^3\,\mathrm{d}r}{(r^4-\lambda^2\mathrm{e}^{2i\alpha})^2}=\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\lambda^2\mathrm{e}^{2i\alpha}},\quad J_2=\int_1^\infty\frac{r^3\,\mathrm{d}r}{(r^4-\lambda^4)^2}=\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\lambda^4}$$

$$J_3=\int_1^\infty\frac{(r^4+\lambda^2\mathrm{e}^{2i\alpha})r^5\,\mathrm{d}r}{(r^4-\lambda^2\mathrm{e}^{2i\alpha})(r^4-\lambda^4)^2(r^4-\lambda^2\mathrm{e}^{2i\delta})}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^\infty\frac{\rho^2(\rho^2+\lambda^2\mathrm{e}^{2i\alpha})\,\mathrm{d}\rho}{(\rho^2-\lambda^4)^2(\rho^2-\lambda^2\mathrm{e}^{2i\alpha})(\rho^2-\lambda^2\mathrm{e}^{2i\delta})}.$$

Se obţine

$$\Sigma_2^0(1,\alpha)=\mathrm{Re}\left\{\frac{\lambda^2-\mathrm{e}^{-2i\delta}}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{2i\alpha}-\mathrm{e}^{2i\delta}}{(\lambda^2-\mathrm{e}^{2i\alpha})(\lambda^2-\mathrm{e}^{-2i\alpha})}-\frac{\lambda^2-\mathrm{e}^{-2i\delta}}{4\lambda^2}\,\frac{\lambda^2+\mathrm{e}^{2i\alpha}}{\lambda^2-\mathrm{e}^{2i\alpha}}-\right.$$

$$-\frac{\mathrm{e}^{2i\delta}(\lambda^2-\mathrm{e}^{-2i\delta})^2}{8\lambda^4}\left[\frac{\lambda^2+\mathrm{e}^{2i\delta}}{\lambda^2-\mathrm{e}^{2i\delta}}\,\frac{\lambda^2+\mathrm{e}^{2i\alpha}}{\lambda^2-\mathrm{e}^{2i\alpha}}+\frac{4\lambda^2\mathrm{e}^{2i\alpha}}{(\lambda^2-\mathrm{e}^{2i\alpha})^2}\right]\ln\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}+$$

$$+\frac{\mathrm{e}^{2i\delta}(\lambda^2-\mathrm{e}^{2i\delta})(\lambda^2-\mathrm{e}^{-2i\delta})^2}{2\lambda^3}\,\frac{\mathrm{e}^{3i\alpha}}{(\lambda^2-\mathrm{e}^{2i\alpha})^2(\mathrm{e}^{2i\alpha}-\mathrm{e}^{2i\delta})}\ln\frac{1+\lambda\mathrm{e}^{i\alpha}}{1-\lambda\mathrm{e}^{i\alpha}}+ \tag{56}$$

$$\left.+\frac{\mathrm{e}^{2i\delta}(\lambda^2-\mathrm{e}^{-2i\delta})^2}{4\lambda^3(\lambda^2-\mathrm{e}^{2i\delta})}\,\frac{\mathrm{e}^{2i\delta}+\mathrm{e}^{2i\alpha}}{\mathrm{e}^{2i\delta}-\mathrm{e}^{2i\alpha}}\ln\frac{1+\lambda\mathrm{e}^{i\delta}}{1-\lambda\mathrm{e}^{i\delta}}\right\}.$$

În cazul cînd unghiul vitezei la infinit cu axa Ox este $\delta = 0$, aceasta se reduce la

$$
\begin{aligned}
\Sigma_2^0(1,\ \alpha) = {} & \frac{1-\lambda^2}{4\lambda^2}\,\frac{\lambda^4+4\lambda^2\sin^2\alpha-1}{\lambda^4-2\lambda^2\cos 2\alpha+1} - \\
(57)\qquad & -\frac{(1-\lambda^2)^2}{8\lambda^4}\,\frac{(1-\lambda^2)^2(\lambda^4+4\lambda^2\cos^2\alpha+1)+2\lambda^2(1+\lambda^4)}{(\lambda^4-2\lambda^2\cos 2\alpha+1)^2}\ln\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}+\frac{(1-\lambda^2)^3}{4\lambda^3}\cdot \\
& \cdot\frac{2(1-\lambda^4)\cos\alpha\ln\sqrt{\dfrac{1+2\lambda\cos\alpha+\lambda^2}{1-2\lambda\cos\alpha+\lambda^2}}+\dfrac{2\lambda^2-(1+\lambda^4)\cos 2\alpha}{\sin\alpha}\operatorname{arctg}\dfrac{2\lambda\sin\alpha}{1-\lambda^2}}{(\lambda^4-2\lambda^2\cos 2\alpha+1)^2}.
\end{aligned}
$$

Primită la redacţie la 18 iulie 1968

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucureşti, str. Polizu nr. 1

SUR L'APPROXIMATION DU MOUVEMENT SUBSONIQUE D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE AUTOUR D'UN OBSTACLE

RÉSUMÉ

On considère le mouvement irrotationnel, plan, subsonique, d'un fluide compressible autour d'un obstacle quelconque. Dans le but d'utiliser la méthode d'approximation proposée en [11], on représente conformément le domaine occupé par le fluide sur l'extérieur d'un cercle.

Le problème se réduit à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre, (27), avec les conditions aux limites (28). On cherche la solution développée en série de Fourier.

On applique les résultats à l'étude du mouvement sans circulation autour d'un obstacle elliptique.

BIBLIOGRAFIE

1. I. Filimon, *L'application correcte de la méthode de Tchapliguine aux mouvements gazeux subsonique autour d'un obstacle elliptique.* Bull. math. de la Soc. Math. Phys. de la R.P.R., **1** (**49**), *3*, 269–279 (1957).
2. I. Filimon, *Asupra corecţiilor de compresibilitate la mişcări continue subsonice. Cazul obstacolului eliptic.* St. cerc. mat., *8*, 467–504 (1957).
3. I. Imai, T. Aihara, *On the subsonic flow of a compressible fluid past an elliptic cylinder.* Rep. Aeron. Res. Inst. Tokyo Imp. Univ., Nr. 144, **15** (1940).
4. C. Jacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides,* Ed. Acad. R.P.R. et Gauthier-Villars, Bucureşti — Paris, 1959.

5. C. JACOB, *Détermination de la seconde approximation de l'écoulement compressible subsonique autour d'un profil donné.* Archiwum Mechaniki Stosowanej, **2**, *16*, 273–284 (1964).

6. C. JACOB, *Cercetări asupra mişcării la mari viteze subsonice în jurul unor profile date.* St. cerc. mat., **17**, *2*, 173–187 (1965).

7. C. KAPLAN, *Two-dimensional subsonic compressible flow past elliptic cylinder.* NACA, T.R., 624 (1938).

8. E. KRAHN, *Die Janzen-Rayleighsche zweite Näherung der kompressiblen Strömung um ein beliebiges Profil.* Zeitsch. angew. Math. Mech., **23**, 33–35 (1943).

9. E. LAMLA, *Über die ebene Potentialströmung um ein Profil, dass sich konform auf einen Kreis abbilden lässt, im unterkritischen Gebiet.* Jahrbuch 1940 der deutschen Luftfahrtforschung.

10. MARINA PORICEL, *Corecţii de compresibilitate la mişcarea subsonică în jurul unui obstacol eliptic.* St. cerc. mat., **17**, *8*, 1305–1320 (1965).

11. I. ŞABAC, *O metodă de aproximare în studiul mişcării fluidelor perfecte compresibile.* St. cerc. mat., **20**, *3* 427–437 (1968).

ASUPRA SCHEMELOR π CU CONTACTE ȘI ELEMENTE DE EXECUȚIE

DE

PETRU ȘANDRU
(Baia Mare)

Se studiază schemele π cu contacte și elemente de execuție, aplicîndu-se la un dispozitiv care funcționează după un anumit program.

Numim dipol π cu contacte și elemente de execuție, dipolul în care intră contactele a, $\bar{a}$, b, $\bar{b}$, ... ale diferitelor elemente A, B, ... și elementele de execuție E_1, E_2, ... conexiunile fiind făcute numai în serie și paralel.

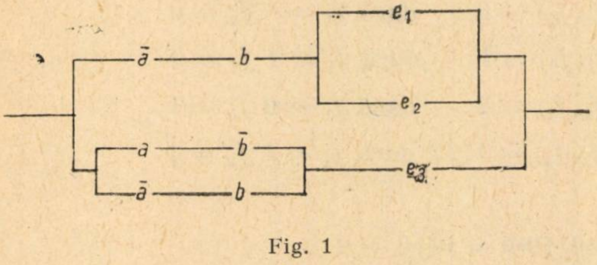
Notînd cu a, b, c, ... contactele de închidere, cu $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$... contactele de deschidere, cu e_1, e_2, e_3, ... elementele de execuție și cu :

,,$\bigcup$'' montarea în paralel a doi dipoli ;

,,$\circ$'' montarea unui dipol fără elemente de execuție în serie cu un element de execuție ;

,,$\cdot$'' montarea în serie a doi dipoli fără element de execuție vom obține formula de structură a unui dipol π cu contacte și elemente de execuție.

De exemplu schema din figura 1 are formula de structură :



$$\bar{a}b_0\,(e_1 \bigcup e_2) \bigcup (a\bar{b} \bigcup \bar{a}b_0)\, e_3.$$

Fig. 1

Observații. 1) Un element de execuție este dipol π cu contacte și elemente de execuție.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 1, P. 195–201, BUCUREȘTI, 1969

2) În loc de $e_1 \cup e_2$ putem scrie e:

Fie $f_1, \ldots, f_n$ funcţiile de lucru ale dipolilor $\pi F_1, \ldots, F_n$ cu m contacte şi $e_1, \ldots, e_n$ variabilele asociate elementelor de execuţie $E_1, \ldots, E_n$, care iau următoarele valori:

$$e_i = \begin{cases} 0 \text{ dacă } E_i \text{ este în repaus} \\ i \text{ dacă } E_i \text{ este pus în funcţiune} \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Să considerăm dipolul cu formula de structură

$$f_1' \circ e_1' \cup f_2' \circ e_2' \cup \cdots \cup f_n' \circ e_n'$$

şi cu funcţia de lucru $\varphi(a_1, \ldots, a_m) = F(f_1, \ldots, f_n)$ definită în felul următor

$$\varphi(a_1, \ldots, a_m) = \begin{cases} 0 \text{ dacă dipolul nu conduce} \\ i \text{ dacă dipolul conduce prin } E_i \ (i = 1, \ldots, n) \\ i_1 \cup i_2 \cup \ldots \cup i_r \text{ dacă dipolul conduce prin } E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots \text{ şi } E_{i_r} \end{cases}$$

$$(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant n; \quad 2 \leqslant r \leqslant n).$$

Dacă în formula de structură a dipolului considerat înlocuim nedeterminatele f_i' şi e_i' cu variabilele corespunzătoare f_i şi e_i $(i = 1, \ldots, n)$ se poate introduce notaţia

$$\varphi(a_1, \ldots, a_m) = f_1(a_1, \ldots, a_m) \circ e_1 \cup \cdots \cup f_m(a_1, \ldots, a_m) \circ e_n,$$

unde semnul „$\circ$" primeşte înţelesul de semn al funcţiei de lucru a unui dipol cu contacte şi elemente de execuţie.

În particular, dacă ţinem seama că pentru $f_i = 0$ avem $e_i = 0$ şi pentru $f_i = 1$ avem $e_i = i$, atunci

$$0 \circ 0 = 0 \qquad 1 \circ i = i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

În cazul în care

$$\varphi(a_1, a_2) = f_1 \circ e_1 \cup \gamma_2 \circ e_2,$$

ţinînd seama de observaţia de mai sus şi că

$$\begin{aligned} \varphi(a_1, a_2) &= F(f_1, f_2) = 0 && \text{dacă } f_1 = \ \ f_2 = 0 \\ \varphi(a_1, a_2) &= F(f_1, f_2) = 1 && \text{dacă } f_1 = 1 \ f_2 = 0 \\ \varphi(a_1, a_2) &= F(f_1, f_2) = 2 && \text{dacă } f_1 = 0 \ f_2 = 1 \\ \varphi(a_1, a_2) &= F(f_1, f_2) = 1 \cup 2 && \text{dacă } f_1 = 1 \ f_2 = 1 \end{aligned}$$

avem

$$\begin{aligned} 0 \circ 0 \cup 0 \circ 0 &= 0 \cup 0 = 0 \\ 1 \circ 1 \cup 0 \circ 0 &= 1 \cup 0 = 1 \\ 0 \circ 0 \cup 1 \circ 2 &= 0 \cup 2 = 2 \\ 1 \circ 1 \cup 1 \circ 2 &= 1 \cup 2 \end{aligned}$$

Observaţie. În cazul în care $\varphi(a_1, \ldots, a_m) = i_1 \cup i_2 \cup \ldots \cup i_r$ vom spune că φ este egală cu fiecare din $i_1, i_2, \ldots, i_r$.

TEOREMĂ. *Funcţia de lucru φ a unui dipol π cu contacte şi elemente de execuţie, poate fi scrisă sub forma*

$$\varphi(a_1 \ldots, a_m) = F(f_1, \ldots, f_n) =$$

$$= f_1(a_1, \ldots, a_m) \circ e_1 \cup \ldots \cup f_n(a_1, \ldots, a_m) \circ e_n,$$

unde

$$f_i(a_1, \ldots, a_m) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } \varphi(a_1, \ldots, a_m) \neq i \\ 1 \text{ dacă } \varphi(a_1, \ldots, a_m) = i. \end{cases}$$

Într-adevăr, dacă notăm cu $G(a_1, \ldots, a_m)$ membrul doi al egalităţii de mai sus, avem:

$$G(0, 0, \ldots, 0) = f_1(0, 0, \ldots, 0) \circ e_1 \cup \ldots \cup f_n(0, 0, \ldots, 0) \circ e_n.$$

Se observă că:

pentru $\varphi = 0$ avem $f_1 = f_2 = 0 \ldots f_n = 0$ deci şi $G = 0$;

pentru $\varphi = i$ avem $f_1 = \ldots = f_{i-1} = f_{i+1} = f_n = 0$, $f_i = 1$, deci şi $G = i$, $(i = 1, \ldots, n)$;

pentru $\varphi = i_1 \cup i_2 \cup \ldots \cup i_r$ avem $f_{i_1} = \ldots f_{i_r} = 1$, toate celelalte funcţii fiind egale cu zero, deci şi $G = i_1 \cup i_2 \cup \ldots \cup i_r$.

Rezultă că

$$\varphi(0, 0, \ldots, 0) = G(0, 0, \ldots, 0).$$

În mod analog se arată că

$$\varphi(0, 0, \ldots, 0, 1) = G(0, 0, \ldots, 0, 1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi(1, 1, \ldots, 1, 1) = G(1, 1, \ldots, 1, 1).$$

Exemplu. Să considerăm dispozitivul din figura 2 care se foloseşte la recondiţionarea aerului dintr-o încăpere, păstrînd o umiditate şi o temperatură constantă. Dispozitivul trebuie să funcţioneze după următorul program:

a) La mărirea umidităţii, higrometru g_1 comandă începerea uscării prin pornirea ventilatorului m_1 care recircuitează aerul din încăpere prin dispozitivul de uscare.

b) La mărirea temperaturii, termometrul g_2 comandă pornirea ventilatorului m_1 şi schimbarea poziţiei clapetei V_1 pe poziţia „admisie aer proaspăt".

c) La scăderea temperaturii termometrul g_3 comandă pornirea ventilatorului m_1 şi încălzirea radiatorului electric r_1.

d) Regenerarea materialului absorbant se face cu ajutorul unui contact c, acţionat de un mecanism de ceasornic, care comandă clapetele v_1 şi v_2, ventilatorul m_1 şi reşoul electric r_2, de sub materialul absorbant, astfel încît recircuitarea se face cu „aer proaspăt".

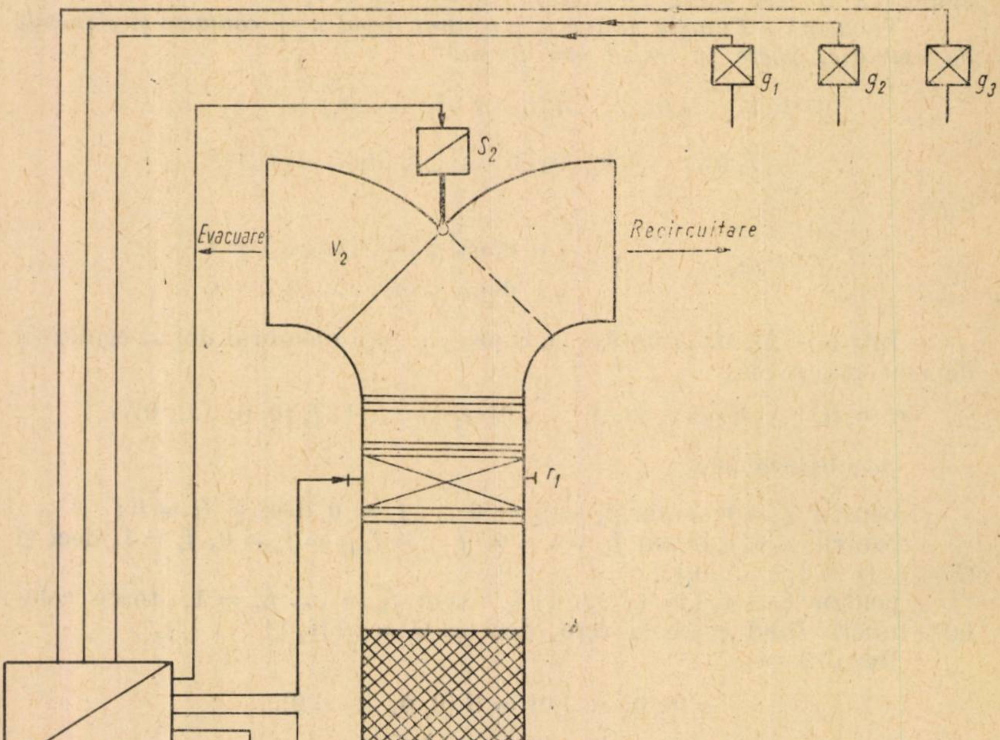

g1
g2
g3
S2
Evacuare
V2
Recircuitare
r1
PAC
r2
m1
Admisie
aer
proaspăt
V1
Recircuitare
S1

Fig. 2

e) În cazul în care atît g_2 cît şi g_3 închid contactele, soneria s va anunţa defecţiunea.

f) Instalaţia nu funcţionează cînd s-a atins umiditatea şi temperatura admisă şi materialul absorbant este regenerat.

Ţinînd seama că la un moment dat pot avea loc deodată mai multe din cazurile prevăzute mai sus, se cere să se deseneze schema cu contactele g_1, g_2, g_3, c şi cu elementele de execuţie $v_1, m_1, r_2, r_1, v_1, s$, care să execute programul descris.

Soluţie. Funcţia de lucru a dipolului poate fi scrisă astfel:

$$\varphi(g_1, g_2; g_3, c) = f_1 \circ v_1 \cup f_2 \circ m_1 \cup f_3 \circ r_2 \cup f_4 \circ r_1 \cup f_5 \circ v_2 \cup f_6 \circ s.$$

Dacă dăm lui φ valoarea 0 dacă nu conduce şi valorile 1, 2, 3, 4, 5, 6 dacă conduce respectiv prin $v_1, m_1, r_2, r_1, v_2, s$, avem

$$\varphi(0,0,0,0) = 0 \qquad \varphi(0,1,1,1) = 1 \cup 2 \cup 3 \cup 5 \cup 6$$

$$\varphi(0,0,0,1) = 1 \cup 2 \cup 3 \cup 5 \qquad \varphi(1,0,0,1) = 1 \cup 2 \cup 3 \cup 5$$

$$\varphi(0,0,1,0) = 2 \cup 4 \qquad \varphi(1,0,1,0) = 2 \cup 4$$

$$\varphi(0,1,0,0) = 1 \cup 2 \qquad \varphi(1,1,0,0) = 1 \cup 2$$

$$\varphi(1,0,0,0) = 2 \qquad \varphi(1,0,1,1) = 1 \cup 2 \cup 3 \cup 5$$

$$\varphi(0,0,1,1) = 1 \cup 2 \cup 3 \cup 5 \qquad \varphi(1,1,0,1) = 1 \cup 2 \cup 3 \cup 5$$

$$\varphi(0,1,0,1) = 1 \cup 2 \cup 3 \cup 5 \qquad \varphi(1,1,1,0) = 2 \cup 6$$

$$\varphi(0,1,1,0) = 6 \qquad \varphi(1,1,1,1) = 1 \cup 2 \cup 3 \cup 5 \cup 6.$$

În definirea funcţiei φ am ţinut seama de programul descris. De exemplu în toate cazurile în care $c = 1$, am prevăzut regenerarea materialului absorbant. În cazul în care $g_1 = 1$, $g_2 = 0$, $g_3 = 1$, $c = 0$ avem $\varphi(1, 0, 1, 0) = 2 \cup 4$, adică ventilatorul m_1 recircuitează aerul din încăpere trecîndu-l prin materialul absorbant şi prin reşoul r_1 care este încălzit. Lăsăm în seama cititorului explicarea celorlalte cazuri.

În baza teoremei de mai sus funcţiile $f_1, \ldots, f_6$ sînt definite astfel încît

$$f_1^{-1}(1) = \{0001, 0100, 0011, 0101, 0111, 1001, 1100, 1011, 1101, 1111\}$$

$$f_2^{-1}(1) = \{0001, 0010, 0100, 1000, 0011, 0101, 0111, 1001, 1010, 1100,$$
$$1011, 1101, 1110, 1111\}$$

$$f_3^{-1}(1) = \{0001, 0011, 0101, 0111, 1001, 1011, 1101, 1111\}$$

$$f_4^{-1}(1) = \{0010, 1010\}$$

$$f_5^{-1}(1) = \{0001, 0011, 0101, 0111, 1001, 1011, 1101, 1111\}$$

$$f_6^{-1}(1) = \{0110, 0111, 1110, 1111\}$$

adică după ce facem simplificările avem

$$f_1 = c \cup g_2 \cdot \overline{g}_3 \quad , \quad f_2 = c \cup g_1 \cup \overline{g}_2 \cdot g_3 \cup g_2 \cdot \overline{g}_3 \quad , \quad f_3 = c$$

$$f_4 = \overline{g}_2 \cdot g_3 \cdot \overline{c} \quad , \quad f_5 = c \quad , \quad f_6 = g_2 \cdot g_3 .$$

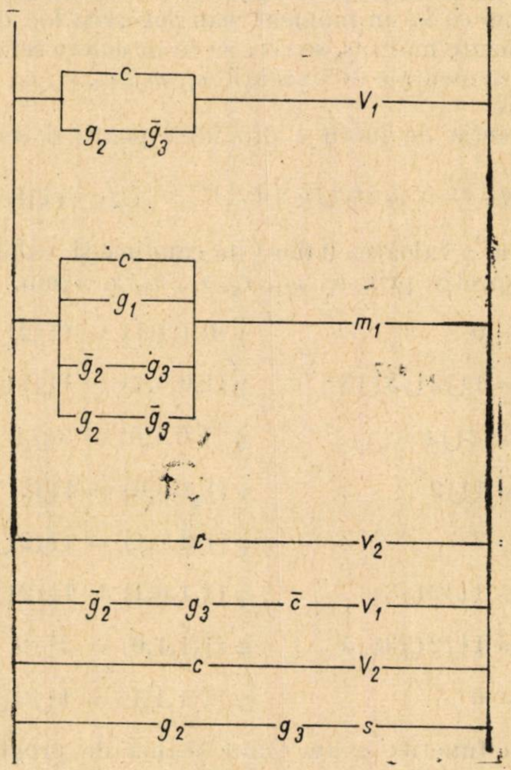


Fig. 3

Obţinem deci următoarea formulă de structură pentru schema căutată $(c \cup g_2 \overline{g}_3) \circ v_1 \cup (c \cup g_1 \cup \overline{g}_2 \cdot g_3 \cup g_2 \cdot \overline{g}_3) \circ m_1 \cup c \circ r_2 \cup \overline{g}_2 g_3 \overline{c} \circ r_1 \cup c \circ v_2 \cup g_2 g_3 \circ s$ şi schema din figura 3.

Primită la redacţie la 14 februarie 1968

Institutul pedagogic Baia-Mare

SUR LES SCHÉMAS π AUX CONTACTS ET ÉLÉMENTS D'EXÉCUTION

RÉSUMÉ

On désigne par « 0 » le montage d'un dipôle sans éléments d'exécution en série avec un élément d'exécution et par $\varphi(a_1, \ldots, a_m)$ la fonction de travail d'un dipôle avec m contacts et n éléments d'exécution.

On introduit la notation

$$\varphi\,(a\,,\ \ldots,\ a_m) = f_1\,(a_1\,,\ \ldots,\ a_m) \circ e_1 \bigcup \ldots \bigcup f_n\,(\,a_1,\ \ldots,\ a_m)_0\, e_n, \tag{1}$$

où e_i sont des variables binaires associées aux éléments d'exécution, qui prennent les valeurs

$$e_i = \begin{cases} i, & \text{si l'élément d'exécution est en fonction} \\ 0, & \text{si l'élément d'exécution est en état de repos} \end{cases}$$

$(i = 1,\ \ldots,\ n)$.

On montre que $\varphi\,(a_1,\ \ldots,\ a_m)$ peut être écrite sous la forme (1), où

$$f_i\,(a_1\ \ldots,\ a_m) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad \varphi \neq i \\ 1, & \text{si} \quad \varphi = i \end{cases} \qquad (\,i = 1,\ \ldots,\ n).$$

BIBLIOGRAFIE

1. Gr. C. Moisil, *Scheme cu comandă directă cu contacte şi relee.* Editura Academiei R.P.R., Bucureşti, 1959.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1963

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date din text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor din text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.
Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa Comitetului de redacţie, str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, A. DELEANU, M. JURCHESCU, **Topologie, Categorii, Suprafețe riemanniene**, 1967, 394 p., 21,50 lei.

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcțiilor**, 1967, 311 p., 15 lei.

I. COLOJOARA, **Elemente de teorie spectrală**, 1968, 311 p., 19,50 lei.

ROMULUS CRISTESCU și GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicații ale teoriei distribuțiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.

I. CUCULESCU, **Procese Markov și funcții excesive**, 1968, 356 p., 19 lei.

ȘT. I. GHEORGHIȚĂ, **Metode matematice în hidrogazodinamica subterană**, 1966, 582 p., 31 lei.

AL. GHIKA, **Analiza funcțională**, 1967, 594 p., 31 lei.

ALEXANDRU GHIKA, **Opera matematică**, 1968, 955 p., 50 lei.

S. GUIAȘU și R. THEODORESCU, **Teoria matematică a informației**, 1966, 227 p., 8,25 lei.

SILVIU GUIAȘU, **Aplicații ale teoriei informației. Sisteme dinamice. Sisteme cibernetice**, 1968, 350 p., 17 lei.

A. HALANAY, D. WEXLER, **Teoria calitativă a sistemelor cu impulsuri**, 1968, 313 p., 13 lei.

M. IOSIFESCU și P. TĂUTU, **Procese stohastice și aplicații în biologie și medicină**, 1968, 345 p. 22 lei.

IVAN SINGER, **Cea mai bună aproximare în spații vectoriale normate prin elemente din subspații vectoriale**, 1967, 386 p., 23 lei.

MARIUS I. STOKA, **Geometrie integrală**, 1967, 240 p., 9,75 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 1, P. 1 – 202, BUCUREȘTI 1969

I. P. „Informația" – c. 6028

43831

Lei 20.

F 762

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

2

TOMUL 21

1969

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAŞ — secretar de redacţie.

La revue „STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE" paraît 10 fois par an. Le prix d'un abonnement annuel est de $ 10. —; £ 4.3.0; F.F. 49. — ; D.M. 40. —.
Toute commande de l'étranger sera adressée a CARTIMEX, Boîte postale 134—135 Bucarest, Roumanie, ou à ses représentants à l'étranger.
En Roumanie, vous pourrez vous abonner par les bureaux de poste ou chez votre facteur.
În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din intreprinderi şi instituţii.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondenţă, se trimit la Comitetul de redacţie al revistei pe adresa: Str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

F 762

TOM. 21, Nr. 2
1969

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

SUMAR

ANDREI BARSONY-NAGY, Asupra teoremei lui Kutta-Jukovski la profile cu jet 205

LUCIA DOBRESCU-PURICE, Propagarea undelor în spaţiul timp conexat în cazul unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul II de tip hiperbolic 213

WILHELM KECS, Asupra derivării distribuţiilor compuse şi unele aplicaţii ale lor 223

I. MATEI, Clasificarea grupurilor lui Lie reale neintegrabile cu şase parametri 235

VIOREL POPA, Mişcarea plană staţionară cu suprafaţă liberă printr-o fantă într-un mediu poros omogen 251

ALEXANDRU GH. RADU, Ciururi şi topologii aditive (III) . . . 261

ALEXANDRU GH. RADU, Toposul abelian al fasciculelor aditive de grupuri abeliene peste un sit preaditiv mic (IV) 279

CONSTANTIN F. RADU, Grupurile de olonomie ale spaţiilor A_5 287

NICOLAE I. TIŢĂ, Asupra bazelor p-apropiate de o bază ortonormală în spaţii Hilbert 357

IONEL ŢEVY, Asupra punctelor singulare ale unei aplicaţii continue 361

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 2, P. 203–368, BUCUREŞTI, 1969

ASUPRA TEOREMEI LUI KUTTA-JUKOVSKI LA PROFILE CU JET

DE

ANDREI BÁRSONY-NAGY

Ne propunem să calculăm rezultanta forţelor hidrodinamice asupra unui profil cu jet în ipotezele că există potenţialele complexe $f_j(z)$ şi $f(z)$ ale mişcărilor din jet şi exteriorul său, liniile de jet avînd asimptote iar viteza nu are singularităţi pe profil. Se obţine o generalizare a formulei lui Blasius-Ciaplîghin care permite o generalizare a teoremei lui Kutta-Jukovski.

Considerăm un profil de contur $\sum = S + S_j$ care emite un jet pe porţiunea S_j iar S e o suprafaţă impermeabilă (figură).

Presupunem :

a) Mişcarea e plană, irotaţională, staţionară în exteriorul lui Σ, atît în jet cît şi în exteriorul jetului. Fluidul e incompresibil.

b) Viteza la infinit în exteriorul jetului este $\vec{V}_\infty$ paralelă cu axa Ox, iar viteza în jet la infinit aval e $V_{\infty j}$.

c) Vitezele în interiorul şi în exteriorul jetului nu au singularităţi pe Σ.

d) Liniile λ şi λ' de separare a jetului de fluidul exterior au asimptote care sînt evident paralele cu Ox şi se află la distanţa h una de cealaltă.

Notăm cu litere fără indici mărimile fizice referitoare la exteriorul jetului şi cu litere cu indicele j mărimile referitoare la fluidul din exteriorul jetului.

Din a) rezultă că există potenţialele complexe $f(z)$ şi $f_j(z)$ pentru mişcările din exteriorul lui Σ, în exteriorul şi în interiorul jetului. Condiţiile la limită complete ale problemei noastre sînt :

(1) $\operatorname{Im}\{f(z)\} = 0$ pe S

(2) $p = p_j$ (p fiind presiunea) pe λ' şi λ'

(3) $\operatorname{Im}\{f(z)\} = 0$ pe λ şi λ'

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 2, P. 205–211, BUCUREŞTI, 1969

$$\text{Im}\,\{f_j(z)\} = C \quad \text{pe } \lambda \tag{4}$$

$$\text{Im}\,\{f_j(z)\} = C' \quad \text{pe } \lambda' \tag{5}$$

$$\arg \left\{\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}z}\right\} = \text{dat pe } S_j \quad \text{(condiția de bracaj)} \tag{6}$$

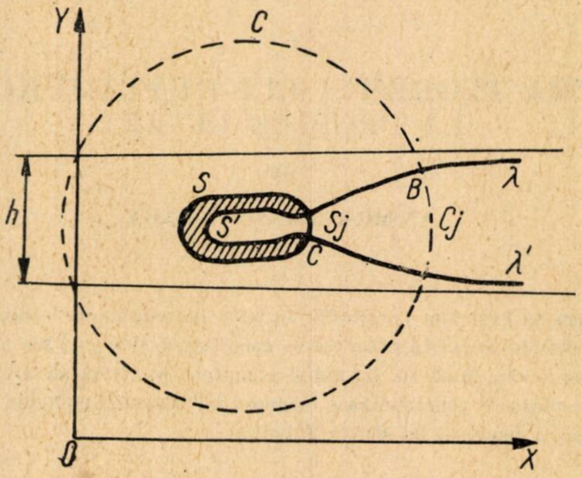


Fig. 1

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = V_\infty \tag{7}$$

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}z} = V_{j\infty}. \tag{8}$$

Pentru transcrierea cu ajutorul lui $f(z)$ și $f_j(z)$ a relației (2), ne folosim de formula lui Bernoulli

$$\frac{\rho}{2} V^2 + p = K = \frac{\rho}{2} V_\infty^2 + p_\infty \tag{9}$$

$$\frac{\rho}{2} V_j^2 + p_j = K_j = \frac{\rho_j}{2} V_{j\infty}^2 + p_{j\infty}\,, \tag{10}$$

unde ρ e densitatea.

Din relația

$$p_\infty = p_{j\infty} \tag{11}$$

rezultă

$$K_j - K = \frac{\rho_j}{2} V_{j\infty} - \frac{\rho}{2} V_\infty^2 \tag{12}$$

şi deci (2) devine

$$(13)\qquad \frac{\rho_j}{2}\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}z}\frac{\overline{\mathrm{d}f_j}}{\overline{\mathrm{d}z}} - K_j = \frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\frac{\overline{\mathrm{d}f}}{\overline{\mathrm{d}z}} - K.$$

Pentru calcularea acţiunii hidrodinamice asupra profilului calculăm rezultanta $\vec{R}_j$ a forţelor exercitate de fluidul din jet şi $\vec{R}'$ rezultanta forţelor exercitate de fluidul din exteriorul jetului. $\vec{R}_j$ se calculează aplicînd teorema impulsului în domeniul Δ ocupat de fluid în interiorul lui Σ. Se obţine

$$(14)\qquad 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{\Delta} \rho_j \vec{v}_j \mathrm{d}\tau = \int_{S'+s_j} \rho_j \vec{v}_j(\vec{v}_j\,\vec{n}_e)\,\mathrm{d}s = \int_{s_j} p_j \vec{n}_e\,\mathrm{d}s - \vec{R}_j,$$

S' fiind conturul interior al profilului, pe care avem :

$$(15)\qquad (\vec{v}_j\,\vec{n}_e) = 0$$

n_e fiind versorul normalei exteriore la Δ. Deci

$$(16)\qquad \vec{R}_j = \int_{s_j} p_j \vec{n}_e\,\mathrm{d}s - \int_{s_j} \rho_j \vec{v}_j\,\mathrm{d}\psi_j$$

sau sub formă complexă

$$(17)\qquad R_{jx} - iR_{jy} = -i\int_{s_j} p_j\,\mathrm{d}\bar{z} - \int_{s_j} \rho_i \frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}\psi_j.$$

Din relaţia lui Bernoulli rezultă

$$R_{jx} - iR_{jy} = -i\int_{s}\left(K_j - \frac{\rho_i\,\mathrm{d}f_j}{2\,\mathrm{d}z}\frac{\overline{\mathrm{d}f_j}}{\overline{\mathrm{d}z}}\right)\mathrm{d}\bar{z} - \int_{s_j}\rho_j\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}\psi_j = -iK_j\int_{s_j}\overline{\mathrm{d}z} +$$

$$(18)\qquad + \frac{i\rho_j}{2}\int_{s_j}\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}z}\,(\mathrm{d}f_j - 2i\mathrm{d}\psi_j) - \int_{s_j}\rho_j\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}\psi_j =$$

$$= \frac{i\rho_j}{2}\int_{s_j}\left(\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z - i\int_{s_j} K_j\overline{\mathrm{d}z}.$$

Analog

$$(19)\qquad \vec{R}' = \int_{s} p\,\vec{n}_e\,\mathrm{d}s.$$

$$(20)\qquad R'_x - i\,R'_y = -i\int_{s} p\,\mathrm{d}\bar{z} = \frac{i\rho}{2}\int_{s}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z - i\int_{s} K\mathrm{d}\bar{z}.$$

Deci rezultanta totală $\vec{R} = \vec{R}_j + \vec{R}'$ este

$$R_x - iR_y = \frac{i\rho}{2}\int_S\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z + \frac{i\rho_j}{2}\int_{S_j}\left(\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z - i\int_{S_j}(K_j - K)\,\mathrm{d}\bar{z} \tag{21}$$

cum

$$\oint_{\Sigma=S+S_j} K\,\mathrm{d}\bar{z} = 0. \tag{22}$$

Formula (21) generalizează formula lui Blasius-Ciaplîghin atît pentru profilul fără jet, cît şi cea dată pentru profilul cu jet în lucrarea [1].

Considerăm acum un cerc care înconjoară profilul şi are centrul într-un punct dat şi notăm cu C_j arcul acestui cerc cuprins în jet şi cu C arcul exterior jetului. Din c) rezultă :

$$\frac{i\rho_j}{2}\int_{S_j}\left(\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z = \frac{i\rho_j}{2}\oint_{C_j}\left(\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z + \frac{i\rho_j}{2}\int_{\widehat{CD}}\left(\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z - \frac{i\rho_j}{2}\int_{\widehat{AB}}\left(\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z \tag{23}$$

$$\frac{i\rho}{2}\int_S\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z = \frac{i\rho}{2}\oint_C\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z + \frac{i\rho}{2}\int_{\widehat{AB}}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)^2 - \frac{i\rho}{2}\int_{\widehat{CD}}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z \tag{24}$$

şi deci

$$\begin{aligned} R_x - iR_y = {} & \frac{i\rho_j}{2}\oint_{C_j}\left(\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z + \frac{i\rho}{2}\oint_C\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z + i\int_{\widehat{CD}}\left[\frac{\rho_j}{2}\left(\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}z}\right)^2 - \right. \\ & \left. - \frac{\rho}{2}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)^2\right]\mathrm{d}z - i\int_{\widehat{AB}}\left[\frac{\rho_j}{2}\left(\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}z}\right)^2 - \frac{\rho}{2}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)^2\right]\mathrm{d}z - i\int_{S_j}(K_j - K)\,\overline{\mathrm{d}z} \end{aligned} \tag{25}$$

Dar pe baza relaţiilor (3), (4), (5) rezultă că

$$\mathrm{d}\bar{f} = \mathrm{d}f \qquad \text{pe } \lambda \text{ şi } \lambda' \tag{26}$$

$$\mathrm{d}\bar{f}_j = \mathrm{d}f_j \qquad \text{pe } \lambda \text{ şi } \lambda'. \tag{27}$$

Avem deci

$$\begin{aligned} I = {} & i\int_{\widehat{CD}}\left[\frac{\rho_j}{2}\left(\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}z}\right)^2 - \frac{\rho}{2}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)^2\right]\mathrm{d}z - i\int_{\widehat{AB}}\left[\frac{\rho_j}{2}\left(\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}z}\right)^2 - \frac{\rho}{2}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)^2\right]\mathrm{d}z = \\ = {} & i\int_{\widehat{CD}}\left(\frac{\rho_j}{2}\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}z}\,\overline{\mathrm{d}f_j} - \frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\,\overline{\mathrm{d}f}\right) - i\int_{\widehat{AB}}\left(\frac{\rho_j}{2}\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}z}\,\overline{\mathrm{d}f_j} - \frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\,\overline{\mathrm{d}f}\right) = \\ = {} & i\int_{\widehat{CD}}\left(\frac{\rho_j}{2}\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}z}\frac{\overline{\mathrm{d}f_j}}{\mathrm{d}\bar{z}} - \frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\frac{\overline{\mathrm{d}f}}{\mathrm{d}\bar{z}}\right)\overline{\mathrm{d}z} - i\int_{\widehat{AB}}\left(\frac{\rho_j}{2}\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}z}\frac{\overline{\mathrm{d}f_j}}{\mathrm{d}\bar{z}} - \frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\frac{\overline{\mathrm{d}f}}{\mathrm{d}\bar{z}}\right)\overline{\mathrm{d}z} \end{aligned} \tag{28}$$

şi deci pe baza relaţiei (13)

$$I = i\int_{CD} (K_j - K)\,\overline{\mathrm{d}z} - i\int_{\widehat{AB}} (K_j - K)\,\overline{\mathrm{d}z}\cdot \tag{29}$$

Şi cum

$$-\,i\int_{\widehat{\ }\,j} (K_j - K)\,\overline{\mathrm{d}z} - i\int_{\frown} (K_j - K)\,\overline{\mathrm{d}z} + i\oint_{C_j} (K_j - K)\,\overline{\mathrm{d}z} + \tag{30}$$

$$+\, i\int_{\widehat{CD}} (K_j - K)\,\mathrm{d}z = 0$$

din (23), (29) şi (30) rezultă

$$R_x - i\,R_y = \frac{i\,\rho_j}{2}\oint_{C_j}\left(\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z + \frac{i\,\rho}{2}\oint_{C}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z - i\int_{C_j} (K_j - K)\,\overline{\mathrm{d}z}\cdot \tag{31}$$

Facem acum ca raza R a cercului pe care se integrează să tindă la infinit. Avem

$$\left|\frac{i\,\rho_j}{2}\oint_{C_j}\left(\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z + \frac{\rho_j}{2}\, V_{j\infty}^2\, h\right| \leqslant \left|\frac{i\,\rho_j}{2}\oint_{C_j}\left(\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}z}\right)^2 - \frac{i\,\rho_j}{2}\oint_{C_j} V_{j\infty}^2\,\mathrm{d}z\right| + \tag{32}$$

$$+\left|\frac{i\,\rho_j}{2}\oint_{C_j} V_{j\infty}^2\,\mathrm{d}z + V_{j\infty}^2\,\frac{\rho_j}{2}\, h\right|$$

şi cum

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}z} = V_{j\infty} \quad \text{uniform pe } C_j \tag{33}$$

şi

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{C_j} \mathrm{d}z = ih. \tag{34}$$

obţinem

$$\lim_{R\to\infty} \frac{i\,\rho_j}{2}\oint_{C_j}\left(\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z = -\,\frac{\rho_j}{2}\, V_{\infty j}^2\, h. \tag{35}$$

Pe $f(z)$ îl scriem sub forma

$$f(z) = V_\infty\, z + f_1(z), \tag{36}$$

unde $f_1(z)$ e potenţialul de perturbaţie a mişcării exterioare jetului şi deci o funcţie analitică în acest domeniu şi regulată la infinit

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)^2 = V_\infty^2 + 2\,V_\infty \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}z} + \left(\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}z}\right)^2 \tag{37}$$

şi deci

$$(38)\qquad \frac{i\rho}{2}\oint_C \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z = \frac{i\rho}{2} V_\infty^2 \oint_C \mathrm{d}z + i\rho V_\infty (f_1(D) - f_1(B)) + {} + \frac{i\rho}{2}\oint_C \left(\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z,$$

unde avem

$$(39)\qquad \lim_{R\to\infty} \oint_C \left(\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z = 0.$$

Pe de altă parte avem

$$(40)\qquad \operatorname{Im}\{f(z)\} = \operatorname{Im}\{V_\infty z + f_1(z)\} = 0 \quad \text{pe } \lambda \text{ şi } \lambda'$$

şi deci

$$(41)\qquad \lim_{R\to\infty} \operatorname{Im}[f_1(D) - f_1(B)] = -\lim_{R\to\infty} \operatorname{Im}\{V_\infty z_D - V_\infty z_B\} = V_\infty h$$

$$(42)\qquad \lim_{R\to\infty} \operatorname{Re}[f_1(D) - f_1(B)] = \lim_{R\to\infty} \operatorname{Re}[f(D) - f(B) - V_\infty z_D + V_\infty z_B] = \lim_{R\to\infty} \operatorname{Re}[f(D) - f(B)] = \Gamma,$$

unde Γ e circulaţia în fluidul exterior luată pe o curbă foarte îndepărtată de profil, avînd un capăt pe λ şi celălalt pe λ'.

Din relaţiile (12), (31), (33), (35), (38), (39), (41), (42) rezultă

$$(43)\qquad R_x - iR_y = -\frac{\rho_j V_{j\infty}^2 h}{2} + \frac{\rho V_\infty^2 h}{2} - \rho V_\infty^2 h + i\rho V_\infty \Gamma - {} - \frac{\rho_j V_{j\infty}^2 h}{2} + \frac{\rho V_\infty^2 h}{2}$$

$$(44)\qquad R_x - iR_y = -\rho_j V_{j\infty}^2 h + i\rho V_\infty \Gamma$$

Cum mărimea $\rho_j V_{j\infty}^2 h = Q_j V_{j\infty}$ unde Q_j este debitul jetului, este chiar debitul de impuls al jetului, obţinem în definitiv

$$(45)\qquad R_x - iR_y = -V_{j\infty} Q_j + i\rho V_\infty \Gamma.$$

Relaţia (45) generalizează teorema lui Kutta-Jukowski. Ea se găseşte sub această formă în lucrările [2] şi [3]. Însă acolo ea e dedusă prin metode aproximative (semicorpurile lui Jukovski sau aproximaţia lui Kadosch).

Totodată relaţia (45) demonstrează afirmaţia.

PROPOZIŢIE. *Forţa de propulsie datorată jetului (proiecţia pe suportul lui V_∞ a forţei rezultante), în cazul cînd vitezele nu au singularităţi pe profil nu depinde de condiţia de bracaj ci numai de debitul jetului şi viteza sa la infinit.*

Observaţie. Teorema anterioară se poate generaliza şi în cazul cînd profilul are puncte anguloase pe porţiunea S prin metoda expusă în [1]. Formula (45) rămîne neschimbată în afara cazului cînd aceste puncte sînt puncte de întoarcere dirijate către fluid în care caz ea devine

$$R_x = iR_y = -Q_j V_{j\infty} + i\rho V_\infty \Gamma + \pi\rho \sum_{l=0}^{n} Re_{z_l} \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)^2,$$

unde Re_z înseamnă reziduu, iar z_e sînt punctele de întoarcere considerate.

Primită la redacţie la 17 mai 1968

AU SUJET DU THEORÈME DE KUTTA-JUKOVSKI CONCERNANT LES PROFILS À JET

RÉSUMÉ

L'auteur se propose de calculer la résultante des forces hydrodynamiques sur un profil à jet dans les hypothèses qu'il existe des potentiels complexes $f_j(z)$ et $f(z)$ des mouvements dans le jet et dans son extérieur, les lignes du jet ont des asymptotes et la vitesse n'a pas les singularités sur le profil. On obtient une généralisation de la formule de Blasius-Tchapliguine qui permet une généralisation du théorème de Kutta-Jukovski.

BIBLIOGRAFIE

1. C. IACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides.* Editura Academiei R.P.R., Gauthiers Villars, Bucarest — Paris, 1959, p. 610—615; 680—692.
2. N. PATRAULEA, *Studii de aerodinamica hipersustentaţiei.* Editura Academiei R.P.R., Bucureşti, 1962, cap. 2 şi cap. 6.
3. M. KADOSCH, *Théorie des profils avec soufflage au bord de fuite.* Bulletin de la Soc. Française des Mécaniciens 5-e année, *18*, 15—31, (1955).

PROPAGAREA UNDELOR ÎN SPAŢIUL TIMP CONEXAT ÎN CAZUL UNEI ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE DE ORDINUL II DE TIP HIPERBOLIC

DE

LUCIA DOBRESCU-PURICE

Această lucrare constituie un nou stadiu în teoria unitară, invariantă a propagării undelor. Pentru a putea compara mărimile fizice fundamentale ale fenomenului de propagare, am introdus următorul principiu de conexiune :

Spaţiul local A^n_M poate fi transportat într-un punct vecin M', astfel încît timpul local al oricărei particule să-şi păstreze direcţia şi timpul scalar elementar să rămînă invariant.

Principiul de conexiune temporală adoptat conduce la introducerea unei conexiuni riemanniene, în spaţiul timp, coeficienţii de conexiune fiind simbolurile lui Christoffel de speţa a doua.

Alegînd ca metrică a spaţiului timp conexat elementul riemannian indefinit :

$$\mathrm{d}s^2 = \varepsilon a_{ij}\, \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^j,$$

se obţin o serie de rezultate privind propagarea.

Această lucrare constituie un nou stadiu în teoria unitară, invariantă a propagării undelor, [1], descrisă de o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul II de tip hiperbolic :

$$a^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i\, \partial x^j} + b^i \frac{\partial u}{\partial x^i} + c\, u = f \tag{1}$$

avînd ca ecuaţie caracteristică :

$$H \equiv a^{ij} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^j} = 0. \tag{2}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 2, P. 213–222, BUCUREŞTI, 1969

Acest stadiu corespunde introducerii conexiunii temporale care să ne permită compararea în două puncte vecine ale fenomenelor de perturbaţie şi propagare.

1. PRINCIPIUL DE CONEXIUNE TEMPORALĂ

Introducerea timpului local prin principiul de transversalitate şi a proiecţiei temporale, [2], permite cercetarea fenomenului de propagare a perturbaţiilor vecine unui centru M, pe particule de eveniment P_M, raportînd mărimile fizice propagate la sistemul de referinţă spaţio-temporal al particulei.

Cercetarea fenomenului se face de asemenea în sistemele de referinţă spaţio-temporale ale particulelor P_M care constituie spaţiul geometric.

Prin alegerea sistemului de referinţă spaţio-temporal în spaţiul fizic, în care spaţiul geometric devine varietatea $n-1$ dimensională $X^n=0$, putem atribui acelaşi timp scalar $t = 0$ particulelor eveniment ale spaţiului geometric, obţinînd noţiunea de spaţiu *geometric la momentul* $t = o$.

Prin evoluţie, varietatea $X^n = \text{const.} = t_0$ transversală liniilor de timp ieşite din spaţiul $X^n = 0$ la momentul $t = 0$, defineşte spaţiul geometric la momentul $t = t_0$.

Nu există însă posibilitatea de a compara în două puncte vecine mărimile fizice din spaţiile locale A^n_M şi $A^n_{M'}$ decît dacă sînt scalare, astfel încît fenomenele atît de perturbaţie cît şi de propagare nu sînt comparabile între ele decît în privinţa timpului scalar, deoarece celelalte mărimi ca : corpuscule, raze de propagare, timpuri locale, particule eveniment, au caracter vectorial.

Se impune deci introducerea unei conexiuni a spaţiului fizic, astfel încît să putem compara mărimile fundamentale ale fenomenului de propagare.

Această conexiune trebuie să stabilească o corespondenţă între spaţiile locale vecine A^n_M şi $A^n_{M'}$ care să permită, în primul rînd, compararea timpurilor locale a două particule eveniment din aceste spaţii.

Vom adopta următorul *principiu de conexiune temporală a spaţiului timp* :

Spaţiul local A^n_M poate fi transportat într-un punct vecin M', astfel încît timpul local al oricărei particule să-şi păstreze direcţia, iar timpul scalar elementar să rămînă invariant.

Acest mod de transport revine la stabilirea unei corespondenţe liniare între două spaţii locale vecine A^n_M şi $A^n_{M'}$ astfel încît diferenţiala absolută a oricărui vector $\overline{v}$ să fie nulă :

$$Dv^i = \delta v^i + \Gamma^j_{ik} v^j \, \delta x^k = 0,$$

δx^i fiind componentele vectorului elementar $\overline{MM'}$, δv^i variaţiile componentelor vectorului $\overline{v}$ $(v^1, v^2, \ldots, v^n)$ iar Γ^i_{jk} coeficienţii de conexiune.

Condiţia ca timpul scalar să rămână invariant revine la invarianţa formei pătratice :

$$\pounds(x^i, \mathrm{d}x^j) = a_{ij} \, \mathrm{d}x^i \, \mathrm{d}x^j,$$

astfel încît *principiul de conexiune temporală conduce la introducerea unei conexiuni riemanniene în spaţiul timp*, coeficienţii de conexiune fiind :

$$\Gamma^i_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\}$$

deci simbolurile lui Christoffel de speţa a doua.

Principiul de conexiune temporală decurge din principiul de conexiune fenomenală introdus de prof. N. Teodorescu în teoria fenomenului fizic.

Acest principiu are ca bază introducerea transportului paralel ca un fenomen fizic, care lasă invariante mărimi sau relaţii fizice definite în spaţiile locale, caracteristice pentru fenomenul considerat.

În cercetări anterioare [4] referitoare la ecuaţiile cu derivate parţiale ale propagării undelor, prof. N. Teodorescu a arătat că fenomenul de propagare este cel care impune adoptarea unei conexiuni a spaţiului prin transport paralel, impunînd acestui transport condiţii largi şi restrîngîndu-le succesiv.

Aceste condiţii erau legate de transportul undei epicentrale elementare, deoarece propagarea nu avea loc într-un spaţiu timp diferenţiat. *Conexiunea riemanniană adoptată de noi, cea mai particulară dintre aceste conexiuni, se justifică prin introducerea atît a timpului local, cît şi a timpului scalar.* Ea apare de altfel în metoda de integrare a lui Hadamard pentru ecuaţiile cu derivate parţiale de ordinul II de tip hiberbolic normal [3], însă este introdusă de necesitatea unei metrici în construcţia conoidului caracteristic şi a soluţiei elementare.

2. METRICA ÎN SPAŢIUL TIMP CONEXAT

Transportul paralel Levi-Civita introdus lasă invariantă forma pătratică $a_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$, care defineşte timpul scalar pe extremalele integralei :

$$\tau = \int \sqrt{a^{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j}\,. \tag{3}$$

Aceste extremale sînt soluţii ale ecuaţiilor lui Lagrange :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0$$

cu $\mathcal{L}\,(x^i, \dot{x}^j) = \varepsilon \quad (\varepsilon = \pm 1)$ şi sînt reale chiar cînd τ este imaginar.

Între aceste extremale sînt conţinute şi razele de propagare ale perturbaţiilor, pentru cazul cînd $L\,(x^i, \dot{x}^j) = 0$. În acest caz însă variabila t nu mai are semnificaţie temporală.

De-a lungul liniilor temporale, pentru care $\mathcal{L} > 0$, aceste extremale coincid cu geodezicele elementului liniar riemannian indefinit :

$$\mathrm{d}s^2 = a_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$$

astfel încît putem interpreta timpul scalar τ ca arcul acestor geodezice măsurat din centrele de perturbaţii din spaţiul geometric.

Pe de altă parte, conexiunea riemanniană considerată geometric, introduce o metrică în spaţiul timp V_n.

Pe liniile spaţiale, timpul scalar fiind imaginar, vom înlocui mărimea fizică imaginară τ printr-o mărime geometrică a cărei semnificaţie apare şi pe liniile temporale, în speţă prin arcul de geodezică.

Vom alege ca metrică a spaţiului timp conexat, elementul riemannian indefinit

$$\mathrm{d}s^2 = \varepsilon a_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j \qquad (\varepsilon = \pm 1) \tag{4}$$

astfel încît $\mathrm{d}s^2 > 0$ pe orice direcţie, excluzînd direcţiile nule, unde $\mathrm{d}s^2 = 0$.

Rezultă că *razele de propagare sînt geodezicele nule ale elementului riemannian* (4).

Dacă raportăm spaţiul timp la sistemul de referinţă spaţio-temporal al spaţiului geometric, vom avea :

$$\mathrm{d}s^2 = \varepsilon\,(\mathrm{d}x^{n^2} - a_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta) \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n-1)$$

sau

$$\mathrm{d}s^2 = \varepsilon\,(\mathrm{d}t^2 - a_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta \qquad (x^n = t).$$

Această metrică a spaţiului timp induce în spaţiul geometric $t = 0$ metrica

$$\mathrm{d}s^2 = \varepsilon\, a_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n-1),$$

unde :

$$a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}\,(x^1, \ldots, x^{n-1}, 0)$$

Vom zice că o varietate S_{n-1} este spaţială dacă toate direcţiile tangente la ea sînt spaţiale, deci dacă funcţia caracteristică $\pounds < 0$.

Spaţiul geometric va fi spaţial dacă

$$\pounds = -\,a_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta < 0$$

deci

$$a_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta > 0$$

în care caz :

$$\mathrm{d}s^2 = a_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta.$$

În fenomenul de propagare vom considera spaţiul geometric ca avînd orientare spaţială în toate punctele.

În particular, pentru fenomenele de propagare asociate ecuaţiilor de tip hiperbolic normal, pentru care forma pătratică $a_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$ are indicele de inerţie unu, în sistemul de referinţă spaţio-temporal $a_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta$, va fi o formă pozitivă definită.

Secţiunile în hiperconul caracteristic cu varietatea $t = \mathrm{d}t$ de ecuaţie :

$$a_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta = \mathrm{d}t^2.$$

vor fi cuadrice elementare închise (de gen elipsoid).

3. PROPAGAREA ÎN SPAŢIUL TIMP CONEXAT

Introducerea conexiunii în spaţiul timp prin transport paralel, dă o nouă semnificaţie propagării corpusculelor şi razelor elementare.

Într-adevăr, razele elementare sînt date de ecuaţiile

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0 & \left(\dot{x}^i = \dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\right) \\ \mathcal{L}(x^i, \dot{x}^i) = 0, & \end{cases}$$

unde însă *t* nu are semnificaţie de timp, nici de arc, ci este un parametru privilegiat. Se vede că razele de propagare *sînt curbe autoparalele şi geodezice de lungime nulă în spaţiul riemannian.*

Mai general, liniile temporale definite de ecuaţiile

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0, & \dot{x}^i = \dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}. \\ \mathcal{L}(x^i, \dot{x}^j) = 1, & \end{cases}$$

unde *t* are semnificaţia de timp scalar, sînt curbe autoparalele şi geodezice ale spaţiului riemannian.

De-a lungul acestor linii temporale se transportă particulele eveniment P_M conjugate direcţiilor $\dot{x}^i$.

Prin introducerea în spaţiul timp a metricei riemanniene :

$$\mathrm{d}s^2 = \varepsilon\, a_{ji}\, \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^j = \varepsilon\, \mathcal{L}(x^i, \dot{x}^j),$$

relaţia de conjugare a particulelor (x^i, p_j)

$$p_j = \frac{1}{2}\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^j} = a_{ij}\, \dot{x}^i$$

cu timpurile lor locale :

$$\mathrm{d}x^i = \dot{x}^i\, \mathrm{d}t$$

devine relaţia de ortogonalitate între vectorul $\mathrm{d}x^i$ şi vectorii δx^i conţinuţi în particula (x^i, p_j).

Într-adevăr, condiţia de contact

$$p_i\, \delta x^i = \frac{1}{2}\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\, \delta x^i = 0,$$

care este relaţia de transversalitate, devine :

$$a_{ij}\, \dot{x}^i\, \delta x^j = 0$$

sau

$$a_{ij}\, \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^j = 0$$

care reprezintă condiţia de ortogonalitate a vectorilor $\mathrm{d}x^i$ şi δx^j în spaţiul de metrică $\mathrm{d}s^2 = a_{ij}\, \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^j$.

Putem deci stabili următoarele :

1°. *Propagarea corpusculelor de-a lungul razelor de propagare, atît în spațiile locale, cît și în spațiul timp, se face prin transport paralel.*

Aceasta rezultă din faptul că razele de propagare sînt curbe autoparalele, avînd razele elementare :

$$\mathrm{d}x^i = \frac{1}{2}\,\frac{\partial H}{\partial p_i}\,\mathrm{d}t$$

ca vectori elementari tangenți.

Dar în același timp *corpusculele* (x^i, p_j) *se transportă prin paralelism*, componentele p_j nefiind decît componentele covariante ale vectorului x^i.

Interpretarea fenomenului de propagare a perturbațiilor de-a lungul razelor de propagare ca un transport paralel, a fost dată prima dată de prof. N. Teodorescu [5] în 1940. Fenomenul de propagare este însă considerat numai sub aspectul transportului razei elementare.

Introducerea noțiunii de corpuscul, datorită aceluiași autor, permite stabilirea acestui rezultat pentru corpuscul, reprezentat sub aspect covariant prin (x^i, p_j) și contravariant prin x^j.

2°. *Evoluția unei particule eveniment de-a lungul liniei sale temporale se face prin transport paralel al timpului local și a particulei înseși.*

Transportul paralel în direcția timpului local este deci echivalent cu evoluția particulei eveniment.

Într-adevăr, transportul paralel al timpului local în direcția sa este dat de ecuațiile :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}^i) + \left\{ {i \atop j\;\;k} \right\} \dot{x}^j\,\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = 0$$

de unde :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} + \left\{ {i \atop j\;\;k} \right\} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Aceste ecuații sînt însă echivalente cu :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0$$

cu

$$\mathcal{L} = a_{ij}\,x^i\,\dot{x}^j \qquad \dot{x}^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$$

deci cu ecuațiile lagrangiene de transport ale timpului elementar în evoluție.

Transportul paralel al particulei eveniment este dat de :

$$\frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} - \left\{ {l \atop j\;\;k} \right\} p_l\,\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Dacă deplasarea se face în direcţia timpului elementar $\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = \dot{x}^k$, vom pune :

$$\begin{Bmatrix} & l & \\ j & & k \end{Bmatrix} p_l \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = a^{il}\,[j\,k,\,i]\,a_{ls}\,\dot{x}^l\,\dot{x}^k$$

cu

$$p_l = a_{ls}\,\dot{x}^s = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^l}$$

deci

$$\begin{Bmatrix} & l & \\ j & & k \end{Bmatrix} p_l \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}x} = \delta^i_s\,[j\,k,\,i]\,\dot{x}^s\,\dot{x}^k = [j\,k,\,i]\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i}\right]\dot{x}^i\,\dot{x}^k =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j}\,\dot{x}^j\,\dot{x}^k = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^j},$$

ultimii termeni distrugîndu-se cîte doi.

Deci ecuaţiile de transport paralel sînt :

$$\frac{dp_j}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^j} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}^j}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^j} = 0.$$

care sînt verificate în virtutea ecuaţiilor lagrangiene.

Prin urmare, transportînd prin paralelism timpul local de-a lungul liniei de timp, şi transportată tot prin paralelism şi particula eveniment asociată lui, transportul se face astfel încît după transport ele rămîn transversale.

Relaţia de transversalitate este invariantă în transportul paralel de-a lungul timpului.

3°. *Spaţiul geometric transportat prin evoluţie particulă cu particulă de-a lungul liniilor temporale în acelaşi timp scalar dă naştere unei familii de hipersuprafeţe geodezice paralele.*

Într-adevăr, luînd pe congruenţa de curbe transversale, formată de liniile temporale, puncte definite prin parametrul

$$\tau = \int \sqrt{a_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j},$$

se obţine o hipersuprafaţă transversală liniilor temporale. Deoarece evoluţia particulelor se face prin transport paralel, între spaţiile geometrice la două momente τ_1 şi τ_2, se stabileşte o corespondenţă biunivocă între particulele eveniment corespunzătoare prin transport paralel de-a lungul liniilor temporale.

Timpul scalar este distanţa geodezică între centrul M din spaţiul geometric şi centrul M^x obţinut prin evoluţia lui M pe linia temporală MM^x.

Această noțiune cunoscută din calculul variațiilor, numită de Hilbert ,,Eikonal'' [6], apare în teoria lui Hadamard în construcția conoidului caracteristic, însă fără interpretare temporală.

4. PROPAGAREA ÎN REGIM VARIABIL ȘI PERMANENT

Raportînd spațiul timp la sistemul de referință spațio-temporal, care reduce spațiul geometric la ecuația $X^n = t_0$, funcția caracteristică sub forma lagrangiană devine :

$$\mathfrak{L}\,(x^i, \dot{x}^j) = (\mathrm{d}x^n)^2 - a_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j \qquad (i, j = 1, \dots, n-1).$$

dacă coeficienții $a_{ij}\,(x^1, \dots, x^n)$ depind de x^n propagarea are loc în *regim variabil*, iar dacă acești coeficienți nu depind de t regimul este *permanent*. În acest ultim caz modul de propagare este independent de momentul la care a apărut unda.

Această distincție a fost introdusă de Vessiot [7] în teoria sa de propagare prin unde geometrico-cinematică în spațiul geometric.

În spațiul timp conexat, regimul permanent corespunde unui element liniar $\mathrm{d}s^2$ static al lui Einstein.

Interpretarea în spațiul geometric al fenomenelor de propagare a corpusculelor conduce la introducerea razelor de propagare în acest spațiu, care sînt locurile proiecțiilor M' ale centrului de perturbație M' propagat de razele de propagare în spațiu timp, generatoare ale conoidului caracteristic cu centrul în M.

Razele de propagare în spațiul timp sînt reprezentate de geodezicele nule ale spațiului riemannian de metrică $\mathrm{d}s^2 = a_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$. Proiecțiile lor pe spațiul geometric însă nu sînt geodezice ale spațiului timp și deci nici ale spațiului geometric în cazul regimului variabil.

Aceasta reiese din însăși teoria lui Vessiot [7] în care se arată că traiectoriile corespunzînd razelor de propagare sînt date de ecuațiile :

$$(7) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{x}^r}\right) - \frac{\partial\Omega}{\partial t}\;\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{x}^r} - \frac{\partial\Omega}{\partial x^r} = 0, \qquad (r = 1, \dots, n-1),$$

unde s-a notat :

$$\Omega\,(x^r, \dot{x}^i) = a_{rs}\,\dot{x}^r\,\dot{x}^s, \qquad (r, s = 1, \dots, n-1).$$

În spațiul geometric, Ω reprezintă forma metrică fundamentală, deci cum ecuațiile (7) nu au forma lagrangiană, ele nu corespund geodezicelor spațiului geometric.

Nu vom putea deci afirma că undele epicentrale în regim variabil sînt hipersfere geodezice ale spațiului geometric. Ele sînt locurile centrelor corpusculelor eveniment la același moment t.

Într-un fenomen de propagare în *regim permanent*, termenul $\dfrac{\partial\Omega}{\partial t}$ din ecuația (7) definind razele de propagare este nul și ecuația (7) devine :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{x}^r}\right) - \frac{\partial\Omega}{\partial x^r} = 0,$$

deci de formă lagrangiană.

Razele de propagare în spaţiul geometric sînt geodezice ale spaţiului timp.

Undele epicentrale ieşite din centrul de perturbaţie M, sînt hipersfere geodezice ale spaţiului geometric.

În acelaşi timp, în regim variabil, transportul paralel depinzînd de timp, timpurile locale a două particule eveniment ale spaţiului geometric, nu sînt în general paralele.

În regim permanent, forma elementului liniar ds^2 static al lui Einstein corespunde existenţei unui cîmp de vectori paraleli care sînt chiar vectorii tangenţi direcţiilor :

$$\dot{x}^1 = 0, \ldots, \dot{x}^{n-1} = 0, \dot{x}^n = 1,$$

prin urmare :

Timpurile locale în două puncte M şi M' ale spaţiului geometric sînt paralele în regim permanent. Deci timpurile locale în spaţiul geometric formează o congruenţă de vectori paraleli.

Prin transport pe orice drum, particulele eveniment ale spaţiului geometric şi timpurile locale pot fi suprapuse.

Aceste proprietăţi ale propagării în regim permanent justifică interpretarea fenomenelor în care se introduce o metrică riemanniană sau o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul I neliniară şi pătratică de forma :

$$b^{ij} \frac{\partial t}{\partial x^i} \frac{\partial t}{\partial x^j} = f(x^1, \ldots, x^n) \tag{8}$$

cu fenomene de propagare de unde într-un spaţiu cu o dimensiune suplimentară, obţinut prin omogenizarea ecuaţiei (8).

Se ajunge astfel la o metrică :

$$ds^2 = \frac{1}{f} dt^2 - b_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

pentru care geodezicele nule sînt raze de propagare. Acest ds^2 fiind static, propagarea este în regim permanent şi se pot trage toate concluziile anterioare.

Se justifică astfel şi punctul de vedere exprimat de prof. N. Teodorescu [5] care propune, spre deosebire de Juvet, ca toate cazurile în care apar geodezice să fie reduse la acela al geodezicelor nule, prin introducerea unei dimensiuni suplimentare.

Se obţine astfel un regim permanent într-un spaţiu geometric inclus într-un spaţiu timp, în care fenomenul de propagare este geometrizat prin introducerea corpusculelor spaţio-temporale, timpul fiind de asemenea geometrizat, liniile temporale fiind obţinute prin principiul de transversalitate.

Primită la redacţie la 7 iunie 1968

THE WAVES PROPAGATION IN THE CONNECTED SPACE TIME, IN THE CASE OF A LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER OF HYPERBOLIC TYPE

SUMMARY

This work is a new stage in the unitary invariant theory of the waves propagation. In order to compare the fundamental physical magnitudes of the propagation phenomon, we introduced the following principle of connexion :

The local space A^n_M is transportable at a neighbouring point M', such that local time of anyone particle retains its direction, and the elementary scalar time remains invariant.

The principle of temporal connexion adopted leads to the introduction of a Riemannian connexion in the space-time, the coefficient of connexion being the symbols of Christoffel of the second kind.

Choosing as metric for the connected space-time the indefinite Riemannian element

$$ds^2 = \varepsilon\, a_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

one obtains a series of results concerning the propagation.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Dobrescu Purice, *Propagarea perturbațiilor în cazul ecuațiilor de ordinul II de tip hiperbolic.* Comunicările Acad. R.P.R., *2* (1958).
2. L. Dobrescu Purice, *Geometrizarea fenomenului de propagare prin unde, descris de o ecuație cu derivate parțiale de ordinul II, în spațiul timp.* St. cerc. mat., *2* (1958).
3. Hadamard, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles hyperboliques.* Hermann, Paris, 1932.
4. N. Teodorescu, *La géométrie des équations des ondes I, II, III, IV.* Bulletin mathématique de la Société Roumaine du Sciences. 1939, 1940, 1941, 1942.
5. N. Teodorescu, *Géodesiques de longueur nulle et propagation des ondes.* Bulletin de la section scientifique, **XXIII**, *3* (1940).
6. Courant-Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik.* J. Springer, Berlin, 1937.
7. Vessiot, *Essai sur la propagation des ondes.* Ann. de L'école Norm. Sup., **26**, 405 (1909)

ASUPRA DERIVĂRII DISTRIBUŢIILOR COMPUSE ŞI UNELE APLICAŢII ALE LOR

DE

WILHELM KECS
(Petroşeni)

Rezolvarea multor probleme teoretice şi practice este strîns legată de derivarea distribuţiilor compuse. După cum s-a arătat în [7] (p. 63, cap. III, § 4), derivata unei distribuţii poate fi definită drept limita în sensul distribuţiilor a unui cît diferenţial, ceea ce generalizează definiţia cunoscută a derivatei. Bazîndu-ne pe acest fapt, vom extinde noţiunea de diferenţială pentru distribuţii precum şi regula de derivare a distribuţiilor compuse.
În încheiere vom stabili cîteva descompuneri ale distribuţiei arătînd că ele corespund unor compuneri de vectori paraleli legaţi.

§1. Fie $f(x) \in k'$ o distribuţie reală de o variabilă aparţinînd dualului topologic K', al spaţiului fundamental K cuprinzînd funcţiile indefinit derivabile $\varphi(x)$ şi cu suport compact. Vom nota

$$(\Delta f(x))_h = f(x+h) - f(x) \tag{1.1}$$

distribuţia reprezentînd variaţia distribuţiei $f(x)$ corespunzător numărului real h ($h \in R$). În consecinţă avem

$$((\Delta f(x))_h, \varphi(x)) = (f(x+h) - f(x), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x-h) - \varphi(x)). \tag{1.2}$$

Deoarece funcţia de bază $\varphi(x)$ este de clasa C^∞, ea este diferenţiabilă şi deci admite descompunerea

$$\varphi(x-h) - \varphi(x) = -h\,\varphi'(x) - h\alpha(x,h) \tag{1.3}$$

în care $\alpha(x,h)$ este tot o funcţie de bază avînd expresia

$$\alpha(x,h) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{-h} - \varphi'(x) & \text{pentru } h \neq 0, \\ 0 & \text{pentru } h = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 2, P.223–233. BUCUREŞTI, 1969

Funcţia $\alpha(x, h)$ definită prin relaţia (1.4) se bucură de proprietatea

$$\lim_{h\to 0} \alpha(x, h) = \alpha(x, 0) = 0 \tag{1.4'}$$

Convergenţa, evident, are loc în sensul spaţiului K.

În baza relaţiilor (1.3) şi (1.4) expresia (1.2) devine

$$((\Delta f(x))_h, \varphi(x)) = (f, -h\,\varphi'(x) + h\,(f(x), -\alpha(x, h)). \tag{1.2'}$$

Observăm că primul termen din membrul drept poate fi scris sub forma

$$(f, -h\,\varphi'(x)) = (h f'(x), \varphi(x)), \tag{1.5}$$

în care $f'(x)$ reprezintă derivata distribuţiei $f(x)$.

În ceea ce priveşte cel de-al doilea termen din membrul drept al expresiei (1.2'), ea defineşte o nouă distribuţie deoarece $\alpha(x, h)$ este o funcţie indefinit derivabilă şi cu suport compact. Această nouă distribuţie o vom nota prin $f_h(x)$ şi este definită de formula

$$(f_h(x), \varphi(x)) = (f(x), -\alpha(x, h)). \tag{1.6}$$

Cînd $h \to 0$, atunci $\alpha(x, h) \to 0$ şi în consecinţă obţinem

$$\lim_{h\to 0} (f_h(x), \varphi(x)) = 0 \tag{1.7}$$

în sensul convergenţei din K' pentru orice $\varphi(x) \in K$. De aici deducem

$$\lim_{h\to 0} f_h(x) = 0. \tag{1.7'}$$

Ţinînd seama acum de relaţiile (1.5) şi (1.6), expresia (1.2') se va scrie

$$((\Delta f(x))_h, \varphi(x)) = (h f'(x) + h f_h(x), \varphi(x)) \tag{1.2''}$$

de unde obţinem relaţia

$$(\Delta f(x))_h = h f'(x) + h f_h(x), \tag{1.8}$$

ceea ce reprezintă o descompunere pentru variaţia distribuţiei $f(x)$ în două distribuţii dintre care prima este liniară în raport cu numărul real h. Descompunerea obţinută (1.8) este analoagă cu condiţia de diferenţiabilitate a unei funcţii, deoarece $f_h \to 0$ cînd h tinde la zero.

De aceea putem spune în baza relaţiei (1.8) că orice distribuţie este diferenţiabilă şi reciproc. În acest fel relaţia (1.8) generalizează condiţia de diferenţiabilitate cunoscută pentru funcţii.

Din cele prezentate este natural ca partea liniară în raport cu h a variaţiei distribuţiei $f(x)$ s-o numim diferenţiala distribuţiei $f(x)$. De aceea prin diferenţiala distribuţiei $f(x)$ înţelegem expresia

$$\mathrm{d}f = h f'(x) \tag{1.9}$$

care pentru h suficient de mic aproximează variaţia distribuţiei $f(x)$.

Considerînd în particular distribuţia de tip funcţie $g(x) = x$, avem

$$\mathrm{d}x = h, \tag{1.10}$$

de unde prin împărţirea expresiilor (1.9) şi (1.10), ceea ce totdeauna este posibil deoarece h este un număr, obţinem

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x). \tag{1.11}$$

Această formulă evident generalizează rezultatul cunoscut că derivata unei funcţii reprezintă cîtul a două diferenţiale.

§2. În baza extinderii noţiunii de diferenţială, respectiv formula (1.8), vom generaliza formula de derivare a distribuţiilor compuse.

Fie $f(u)$ o distribuţie oarecare iar $u(x)$ o funcţie indefinit derivabilă. Atunci , conform relaţiei (1.8), avem

$$\Delta f(u) = \Delta u f'_u + \Delta u \, f_{\Delta u}(u) \tag{2.1}$$

în care f'_u reprezintă derivata distribuţiei $f(u)$, Δu o variaţie oarecare a lui u iar $f_{\Delta u}(u)$ distribuţia definită prin formula :

$$(f_{\Delta u}(u), \varphi(u)) = (f(u), -\alpha(u, \Delta u)) \tag{2.2}$$

şi cu proprietatea că

$$\lim_{\Delta x \to 0} f_{\Delta u}(u) = 0.$$

Funcţia α este cea definită prin relaţia (1.4) şi după cum s-a arătat, este o funcţie de bază în raport cu valorile u.

Dacă înlocuim variabila u cu funcţia indefinit derivabilă $u(x)$, obţinem pe α funcţie de variabila x care va fi tot o funcţie de bază în raport cu x, deoarece $\varphi(x)$ este arbitrar şi deci poate fi astfel ales încît suportul ei să conţină valorile lui $u(x)$.

Notînd cu $h = \Delta x$ o variaţie oarecare a variabilei x şi ţinînd seamă de expresia (2.2), obţinem

$$\lim_{\Delta x \to 0} f_{\Delta u}(u(x)) = 0. \tag{2.3}$$

Împărţind expresia (2.1) la $\Delta x = h$, ceea ce totdeauna este posibil întrucît $h = \Delta x$ este un număr, obţinem

$$\frac{\Delta f(u(x))}{\Delta x} = \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} f'_u + \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} f_{\Delta u}(u(x)). \tag{2.1'}$$

Trecînd la limită în sensul distribuţiilor şi ţinînd seama de (2.3), avem

$$\frac{\mathrm{d}f(u(x))}{\mathrm{d}x} = f'_u \, u'(x) \tag{2.1''}$$

care reprezintă formula de derivare a distribuţiilor compuse. Formula obţinută constituie o generalizare a formulei obişnuite cunoscută.

În mod cu totul analog putem introduce diferenţiala pentru distribuţiile de mai multe variabile şi vom obţine de asemenea o formulă analoagă pentru derivarea distribuţiilor compuse de mai multe variabile.

Pentru ilustrarea formulei (2.1″) vom considera cîteva exemple.

Exemplul 1. Fie $f(x)$ o funcţie de clasa C_x^∞ astfel încît $f'(x) \neq 0$ şi totodată neavînd nici o rădăcină. În acest caz funcţia $f(x)$ sau este pozitivă pe R sau este negativă. Notînd cu $\theta(t)$ funcţia lui Heaviside, putem scrie

$$\theta(\mathrm{f}(x)) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } f(x) \geqslant 0\,;\, x \in R, \\ 0 \text{ pentru } f(x) < 0\,;\, x \in R. \end{cases} \tag{2.4}$$

Derivînd în sensul distribuţiilor obţinem

$$f'(x)\,\delta(f(x) = 0. \tag{2.4'}$$

Deoarece $f'(x) \neq 0$ peste tot, avem

$$\delta(f(x)) = 0. \tag{2.4''}$$

În particular, pentru $f(x) = \mathrm{e}^x$ obţinem

$$\delta(\mathrm{e}^x) = 0. \tag{2.5}$$

Exemplul 2. Considerînd $f(x) = x^2$, atunci putem scrie :

$$\theta(x^2) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x \neq 0 \\ 0 \text{ pentru } x = 0\,; \end{cases} \tag{2.6}$$

derivînd avem

$$2x\,\delta(x^2) = 0 \tag{2.6'}$$

şi deoarece ecuaţia $xT = 0$ are drept soluţie

$$T = c\,\delta(x), \tag{2.7}$$

deducem că $\delta(x^2)$ are expresia

$$\delta(x^2) = c\,\delta(x), \tag{2.8}$$

unde C este o constantă.

Exemplul 3. Pentru $f(x) = x^2 - 1$ avem

$$\theta(x^2 - 1) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x^2 - 1 \geqslant 0 \\ 0 \text{ pentru } x^2 - 1 < 0 \end{cases}$$

care se poate scrie sub forma :

$$\theta(x^2 - 1) = 1 - \theta(x + 1) + \theta(x - 1).$$

În urma derivării obţinem

$$2x\,\delta(x^2 - 1) = \delta(x - 1) - \delta(x + 1) \tag{2.9}$$

şi împărţind cu $2x$, ceea ce este posibil deoarece nu se anulează în punctele 1 şi -1, obţinem

$$\frac{1}{2}\,\delta(x^2 - 1) = \frac{1}{2}\,\delta(x - 1)\,\delta(x + 1). \tag{2.9'}$$

Exemplul 4. Fie $f(x, y) = xy$ iar $\theta(x, y)$ funcţia lui Heaviside în R^2. Putem astfel scrie

$$\theta(xy) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } xy \geqslant 0 \\ 0 \text{ pentru } xy < 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Această relaţie poate fi scrisă sub forma

$$\theta(xy) = \theta(x, y) + \theta(-x, -y). \tag{2.10'}$$

Derivînd obţinem

$$\frac{\partial^2 \theta(xy)}{\partial x \partial y} = \delta(x, y) + \delta(-x, -y) = 2\delta(x, y) \tag{2.11}$$

adică

$$2\delta(x, y) = \delta(xy) + xy\delta'(xy). \tag{2.11'}$$

Vom stabili acum următoarea

TEOREMĂ. *Dacă* $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *sînt funcţii indefinit derivabile avînd singura rădăcină pe* $x_0 (x^\circ_1, x^\circ_2, \ldots, x^\circ_n)$ *şi astfel încît determinantul funcţional* $\left| \dfrac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right|_{x = x_0} \neq 0,$ *atunci are loc egalitatea*

$$\delta(f_1, f_2 \ldots, f_n) = \frac{1}{\left| \dfrac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right|_{x = x_0,}} \delta(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \ldots, x_n - x_n^0). \tag{2.12}$$

În adevăr, putem scrie

$$\int_{R^n} \delta(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n = \varphi(0, 0, \ldots, 0). \tag{2.13}$$

Din substituţia $t_i = f_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, deducem

$$\mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{d}t_n = \left| \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right| \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n. \tag{2.14}$$

În consecinţă relaţia (2.13) devine

$$\int_{R^n} \delta(f_1, f_2, \ldots, f_n) \left| \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right| \varphi(f_1, f_2, \ldots, f_n)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \\ = \varphi(0, 0, \ldots, 0). \tag{2.13'}$$

Notînd

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left| \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right| \varphi(f_1, f_2, \ldots, f_n) \tag{2.14'}$$

şi deoarece este o funcţie de bază, relaţia (2.13′) se va scrie sub forma

$$(2.13'') \quad \int_{R^n} \delta(f_1,f_2,\dots,f_n)\,\psi(x_1\,x_2,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\dots\mathrm{d}x_n = \varphi(0,0,\dots,0).$$

Întrucît pentru $x_1 = x_1^0,\dots,x_n = x_n^0$ avem $f_i = 0$, $(i = 1, 2,\dots, n)$, din (2.14) deducem

$$(2.15) \qquad \varphi(0,0\dots,0) = \frac{\psi(x_1^0, x_2^0,\dots,x_n^0)}{\left|\dfrac{D(f_1,f_2,\dots f_n)}{D(x_1,x_2,\dots,x_n)}\right|_{x=x_0}}$$

În acest fel relaţia (2.13″) se va scrie

$$(2.16) \qquad (\delta(f_1,f_2,\dots,f_n)\,\psi(x_1,x_2,\dots,x_n)) =$$

$$= \frac{1}{\left|\dfrac{D(f_1,f_2,\dots,f_n)}{D(x_1,x_2,\dots,x_n)}\right|_{x=x_0}} (\delta(x-x_0),\,\psi(x))$$

de unde pe baza egalităţii a două distribuţii avem

$$(2.17) \qquad \delta(f_1,f_2,\dots,f_n) =$$

$$= \frac{1}{\left|\dfrac{D(f_1,f_2,\dots,f_n)}{D(x_1,x_2,\dots,x_n)}\right|_{x=x_0}} \delta(x_1 - x_1^0,\, x_2 - x_2^0,\dots,x_n - x_n^0)$$

ceea ce şi demonstrează teorema.

Dacă funcţiile f_i $(i = 1, 2, \dots, n)$, admit un număr oarecare de rădăcini simple, atunci relaţia (2.17) se generalizează şi avem

$$(2.18) \qquad \delta(f_1,f_2,\dots,f_n) = \sum_m \frac{\delta(x - x_m)}{\left|\dfrac{D(f_1,f_2,\dots,f_n)}{D(x_1,x_2,\dots,x_n)}\right|_{x=x_m}}$$

Astfel, spre exemplu, dacă $f_1 = \sin x_1$; $f_2 = \sin x_2$; $f_3 = \sin x_3$, obţinem, conform formulei (2.18), descompunerea

$$(2.19) \quad \delta(\sin x_1, \sin x_2, \sin x_3) = \sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3} \delta(x_1 - n_1\pi,\, x_2 - n_2\pi,\, x_3 - n_3\pi),$$

în care n_1, n_2, n_3 sînt numere întregi.

Să presupunem că $f_1(x_1, x_2) = \prod_1^n (x_1 - a_i)$; $f_2(x_1, x_2) = x_2 - b$.

Atunci, în baza formulei (2.18), putem scrie

$$(2.20) \qquad \delta\left(\prod_1^n (x_1 - a_i),\, x_2 - b\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta(x_1 - a_i,\, x_2 - b)}{\left|\prod\limits_{i \neq J = 1}^{n} (a_i - a_J)\right|}.$$

În particular avem

$$\delta[(x_1 - a_1)(a_1 - a_2), x_2 - b] = \frac{\delta(x_1 - a_1, x_2 - b)}{|a_1 - a_2|} + \frac{\delta(x_1 - a_2, x_2 - b)}{|a_1 - a_2|}. \tag{2.21}$$

Acestei relaţii i se poate da o interpretare mecanică.

Să presupunem că în planul $Ox_2\, x_1$ în punctele $A_1\,(a_1, b)$ şi $A_2\,(a_2, b)$ acţionează forţele paralele de acelaşi sens $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ (fig. 1).

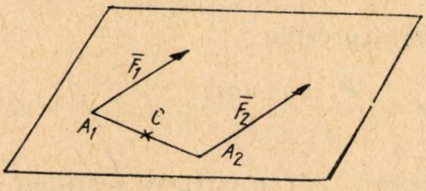


Fig. 1

Notînd cu $\vec{u}^\circ$ versorul celor două forţe, atunci acţiunea fiecărei forţe în parte este echivalentă cu acţiunea sarcinilor $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$ avînd expresiile

$$\begin{aligned} \vec{Q}_1 &= F_1\, \vec{u}^0\, \delta(x_1 - a_1, x_2 - b) \\ \vec{Q}_2 &= F_2\, \vec{u}^0\, \delta(x_1 - a_2, x_2 - b). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Acţiunea rezultantă a celor două forţe este echivalentă cu sarcina $\vec{Q}$ avînd expresia

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = \vec{u}^0\,(F_1\, \delta(x_1 - a_1, x_2 - b) + F_2\, \delta(x_1 - a_2, x_2 - b)). \tag{2.23}$$

Ne vom ocupa acum de exprimarea parantezei din membrul drept. Dacă α_1, α_2 sînt două numere pozitive, atunci avem relaţiile :

$$\begin{aligned} \delta[\alpha_1(x_1 - a_1), x_2 - b] &= \frac{1}{\alpha_1}\, \delta(x_1 - a_1, x_2 - b) \\ \delta[\alpha_2(x_1 - a_2), x_2 - b] &= \frac{1}{\alpha_2}\, \delta(x_1 - a_2, x_2 - b) \end{aligned} \tag{2.24}$$

Să considerăm acum expresia

$$H = F_1\, \delta[\alpha_1(x_1 - a_1), x_2 - b] + F_2\, \delta[\alpha_2(x_1 - a_2), x_2 - b]. \tag{2.25}$$

Conform relaţiilor (2.24), expresia (2.25) devine

$$H = \frac{F_1}{\alpha_1}\, \delta(x_1 - a_1, x_2 - b) + \frac{F_2}{\alpha_2}\, \delta(x_1 - a_2, x_2 - b). \tag{2.25'}$$

Vom determina acum numerele α_1 şi α_2 astfel încît să avem egalitatea

$$\frac{F_1}{\alpha_1} = \frac{F_2}{\alpha_2}. \tag{2.26}$$

Notînd cu $C\ (c,\ b)$ (fig. 1) centrul celor două forțe paralele, observăm că relația (2.26) exprimă egalitatea modulelor momentelor celor două forțe față de punctul C și în consecință α_2 respectiv α_1 exprimă brațele momentelor forțelor F_1 și F_2 față de punctul C.

Deoarece abscisa c a punctului C se determină din relația (2.27)

$$c = \frac{a_1 F_1 + a_2 F_2}{F_1 + F_2}, \tag{2.27}$$

pentru α_1 și α_2 găsim expresiile

$$\alpha_1 = a_2 - c = \frac{F_1 (a_2 - a_1)}{F_1 + F_2}; \quad \alpha_2 = c - a_1 = \frac{F_2 (a_2 - a_1)}{F_1 + F_2}. \tag{2.28}$$

În felul acesta expresia (2.25) în virtutea relațiilor (2.25′) (2.26) și (2.28) se va scrie sub forma

(2.25″)

$$H = \frac{F_1 + F_2}{|a_2 - a_1|}\ \delta\,(x_1 - a_1,\ x_2 - b) + \frac{F_1 + F_2}{|a_2 - a_1|}\ \delta\,(x_1 - a_2,\ x_2 - b),$$

care în baza relației (2.21) devine

$$H = (F_1 + F_2)\ \delta\ [\ (\ x_1 - a_1)\ (x_1 - a_2),\ x_2 - b] \tag{2.25'''}$$

adică am obținut egalitatea

$$\vec{F}_1\ \delta\ [\alpha_1 (x_1 - a_1),\ x_2 - b] + \vec{F}_2\ \delta\ [\alpha_2 (x_1 - a_2),\ x_2 - b] = \tag{2.29}$$

$$= (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\ \delta\ [(x_1 - a_1)\ (x_1 - a_2),\ x_2 - b],$$

unde numerele α_1, α_2 satisfac relația (2.26) și care, după cum am arătat, definește centrul forțelor paralele.

Formula obținută, (2.29), constituie o lege de compunere pentru forțele paralele, însă considerate ca vectori legați. Legea de compunere (2.29) coincide cu (2.23) numai dacă $F_1 = F_2$; $\alpha_2 = \alpha_1 = 1$. Remarcăm de asemenea că deoarece distribuția lui Dirac $\delta\ (x_1,\ x_2)$ este o distribuție pară, în expresia (2.29) numerele α_1, α_2 pot fi considerate și negative, avîndu-se însă grijă ca în relația (2.26) acestea să se ia în valoare absolută. Pentru a avea o exprimare mai generală a formulei (2.29), vom introduce unele notații și anume :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\equiv a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 = 0, \\ \Delta_2 &\equiv a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 = 0, \\ \Delta &\equiv a x_1 + b x_2 + c = 0, \end{aligned} \tag{2.30}$$

unde Δ_1, Δ_2 reprezintă ecuațiile suporturilor celor două forțe paralele și care împreună cu dreapta secantă Δ determină punctele de aplicație $A_1\ (x_1^1,\ x_2^1)$, $A_2\ (x_1^2,\ x_2^2)$ al forțelor.

Putem scrie astfel egalitatea

$$(2.31)\quad F_1\,\delta(\alpha_1\Delta_1,\Delta)+F_2\,\delta(\alpha_2\Delta_2,\Delta)=\frac{F_1}{|\alpha_1|}\,\delta(\Delta_1,\Delta)+\frac{F_2}{|\alpha_2|}\,\delta\,(\Delta_2,\Delta).$$

Pe de altă parte, conform relaţiei (2.18) avem

$$(2.32)\quad \delta(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{\delta(x_1-x_1^1,x_2-x_2^1)}{|a_1b-ab_1|},\ \delta(\Delta_2,\Delta)=\frac{\delta(x_1-x_1^2,\,x_2-x_2^2)}{|a_2b-ab_2|}.$$

Notînd cu K raportul de proporţionalitate al parametrilor directori ai dreptelor paralele Δ_1, Δ_2, anume

$$(2.33)\qquad K=\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2},$$

expresia (2.32) devine

$$2.32')\qquad \delta\,(\Delta_1,\Delta)=\frac{\delta\,(x_1-x_1^1,x_2-x_2^1)}{K\,|\,a_2b-ab_2|}.$$

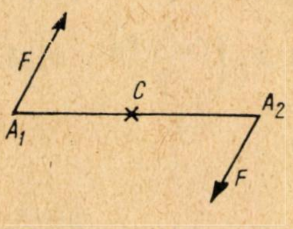
Determinînd pe $|\alpha_1|$ şi $|\alpha_2|$ astfel încît să avem :

$$(2.34)\qquad \frac{F_1}{|\alpha_1|}=\frac{F_2}{|\alpha_2|}$$

şi ţinînd seama de (2.32′), (2.32), expresia (2.31) se va scrie

$$(2.31')\quad F_1\,\delta\left[\frac{\alpha_1}{a_2-a_1}\Delta_1,\Delta\right]+F_2\,\delta\left[\frac{\alpha_2}{a_2-a_1}\Delta_2,\Delta\right]=(F_1+F_2)\,\delta\,(\Delta_1\,\Delta_2,\Delta).$$

Vom determina acum o formulă similară şi pentru compunerea forţelor legate paralele şi egale, însă de sensuri opuse (fig. 2).



F g. 2

Acţiunea celor două forţe este echivalentă cu sarcina :

$$(2.35)\qquad Q=F\,\delta\,(x_1-a_1,\,x_2-b)-F\,\delta\,(x_1-a_2,\,x_2-b).$$

Pe de altă parte avem

$$(2.36)\ \delta[(x_1-a_1)\,(x_1-a_2),\,x_2-b]=\frac{\delta(x_1-a_1,\,x_2-b)}{|a_2-a_1|}+\frac{\delta(x_1-a_2,\,x_2-b)}{|a_2-a_1|}$$

Înmulţind această egalitate cu funcţia $2x_1 - a_1 - a_2$, obţinem

$$(2.37)\qquad (2x_1 - a_1 - a_2)\,\delta\,[(x_1 - a_1)(x_1 - a_2),\ x_2 - b] = $$
$$= \operatorname{sgn}(a_1 - a_2)\,[\delta\,(x_1 - a_1,\ x_2 - b) - \delta\,(x_1 - a_2,\ x_2 - b)].$$

În baza acestei relaţii, expresia (2.35) devine

$$(2.38)\qquad Q = F\delta\,(x_1 - a_1,\ x_2 - b) - F\delta\,(x_1 - a_2,\ x_2 - b) =$$
$$= \operatorname{sgn}(a_1 - a_2)\,F\,(2x_1 - a_1 - a_2)\,\delta\,[(x_1 - a_1)(x_1 - a_2),\ x_2 - b]$$

adică avem formula de compunere

$$(2.39)\qquad F\delta\,(x_1 - a_1,\ x_2 - b) - F\delta\,(x_1 - a_2,\ x_2 - b) =$$
$$= 2F\left(\frac{a_1 + a_2}{2} - x_1\right)\delta[\,(x_1 - a_1)(x_1 - a_2),\ x_2 - b]$$

deoarece am presupus $a_2 > a_1$ conform figurii 2.

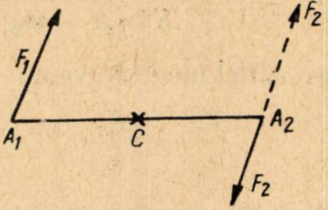


Fig. 3

Sub forma generală, relaţia (2.39) se va scrie

$$(2.40)\qquad F_1\,\delta\left[\frac{\alpha_1}{(a_2 - a_1)^2}\,\Delta_1,\ \Delta\right] - F_2\delta\left[\frac{\alpha_2}{(a_2 - a_1)^2}\,\Delta_2,\ \Delta\right] =$$
$$= 2\,F_1 + F_2\left(\frac{a_1 + a_2}{2} - x_1\right)\delta\,(\Delta_1\,\Delta_2,\ \Delta)$$

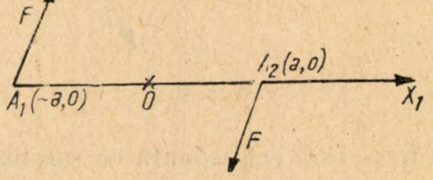


Fig. 4

în care α_1 şi α_2 reprezintă braţele de pîrghie ale forţelor F_2 şi F_1 faţă de centrul C al forţelor paralele considerate însă ca avînd acelaşi sens (fig. 3).

Exemplul 1. Să compunem forţele din figura 4.

Conform relaţiei (2.39) avem

$$(2.41)\quad F\delta(x_1 + a, x_2) - F\delta(x_1 - a, x_2) = -2Fx_1\,\delta(x_1^2 - a^2, x_2).$$

Exemplul 2. Să considerăm forţele paralele egale şi de acelaşi sens cum se arată în figura 5.

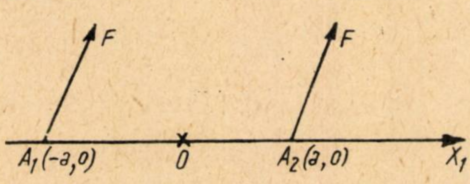


Fig. 5

În conformitate cu formula (2.29) avem

$$(2.42)\quad F\delta(x_1 + a, x_2) + F\delta(x_1 - a, x_2) = 2F\delta(x_1^2 - a^2, x_2)$$

deoarece

$$\alpha_1 = \alpha_2 = a\ (a > 0).$$

Primită la redacţie la 9 martie 1968

Institutul de mine Petroşeni

SUR LA DÉRIVATION DES DISTRIBUTIONS COMPOSÉES ET QUELQUES APPLICATIONS DE CELLES-CI

RÉSUMÉ

Dans cet article on étend la notion de différentielle ainsi que la formule de dérivation des distributions composées.

On établit certaines relations de décomposition pour les distributions en montrant qu'elles correspondent à des vecteurs parallèles ayant le point d'application fixe.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Bouix, *Les fonctions généralisée ou distributions.* Masson, 1964.
2. J. Garsoux, *Espaces vectoriels topologiques et distributions.* Dunod, Paris, 1963.
3. I. M. Guelfand, G. E., Chilov, *Les distributions.* Tome 2, Dunod, Paris, 1964.
4. I. M. Guelfand G. E. Chilov, *Les distributions.* Dunod, Paris, 1962.
5. Romulus Cristescu, *Elemente de analiză funcţională şi introducere în teoria distribuţiilor.* Editura tehnică, Bucureşti, 1966.
6. Romulus Cristescu, Gheorghe Marinescu, *Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor.* Editura Academiei R.P.R., Bucureşti, 1966.
7. L. Schwartz, *Théorie des distributions.* Tome, I, Hermann, Paris, 1957.
8. R. Sikorski, *On substitions in the Dirac delta distribution.* Bulletin de l'académie polonaise des sciences scrie des sciences mathematiques, astronomiques et phisiques. **VIII**, *10* (1960).

CLASIFICAREA GRUPURILOR LUI LIE REALE NEINTEGRABILE CU ŞASE PARAMETRI

DE

I. MATEI

În această lucrare se consideră grupurile lui Lie reale cu şase parametri şi se determină toate structurile neintegrabile. Se arată că există 25 de astfel de structuri, patru dintre ele depinzînd de cîte o constantă şi două depinzînd de cîte două constante arbitrare. Se arată că există şapte structuri de grupuri G_6 perfecte.

Ecuaţiile de structură ale unui grup Lie G_r avînd operatorii transformărilor infinitezimale X_h, $(h = 1, 2, \ldots, r)$, sînt

$$(X_h X_k) = c^s_{hk} X_s \tag{1}$$

în care constantele de structură c^s_{hk} satisfac identităţile lui Lie

$$L^\alpha_{hkl} \equiv c^s_{hk} c^\alpha_{sl} + c^s_{kl} c^\alpha_{sh} + c^s_{lh} c^\alpha_{sk} = 0. \tag{2}$$

Se ştie că se pot asocia grupului tensorii

$$c_h = c^\alpha_{\alpha h} \quad \text{(vectorul de structură)} \tag{3}$$

$$c_{hk} = c^\alpha_{h\beta} c^\beta_{k\alpha} \quad \text{(tensorul pătratic de structură)} \tag{4}$$

$$c_{hkl} = c^\alpha_{h\beta} c^\beta_{k\gamma} c^\gamma_{l\alpha} \quad \text{(tensorul cubic de structură),} \tag{5}$$

care satisfac relaţiile [1]

$$c_\alpha c^\alpha_{hk} = 0 \tag{6}$$

$$c_{h\alpha} c^\alpha_{kl} + c_{k\alpha} c^\alpha_{hl} = 0 \tag{7}$$

$$c_{k\alpha} c^\alpha_{lh} = c_{klh} - c_{khl}. \tag{8}$$

Considerînd un grup G_6 vom distinge două cazuri, după cum vectorul de structură este diferit de zero sau nu.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 2, P. 235–249, BUCUREŞTI, 1969

1. GRUPURI G_6 REALE NEINTEGRABILE CU VECTOR DE STRUCTURĂ DIFERIT DE ZERO

În acest caz putem reduce vectorul de structură la forma canonică

$$c_h = \delta_h^6 \qquad (h = 1, 2, \ldots, 6), \tag{9}$$

şi formulele (6) arată că avem

$$c_{hk}^6 = 0. \tag{10}$$

Rezultă că grupul G_6 admite subgrupul invariant G_5 $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ cu vector de structură nul şi prin urmare pentru ca G_6 să fie neintegrabil, trebuie ca acest subgrup invariant să fie neintegrabil. Se ştie însă [2] că în real există patru structuri de G_5 cu vector de structură nul, neintegrabile.

Două dintre aceste structuri sînt date de ecuaţiile

$$\begin{gathered}(X_1X_2) = \varepsilon X_3, \ (X_2X_3) = X_1, \ (X_3X_1) = X_2 \qquad (\varepsilon = \pm 1)\\ (X_kX_4) = (X_kX_5) = (X_4X_5) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3).\end{gathered} \tag{11}$$

În aceste cazuri ecuaţiile de structură ale grupului G_6 conţin în plus ecuaţiile

$$(X_mX_6) = c_{m6}^s X_s \qquad (m, s = 1, 2, 3, 4, 5). \tag{12}$$

Făcînd schimbarea de operator

$$\overline{X}_6 = X_6 - \varepsilon c_{62}^3 X_1 - c_{63}^1 X_2 - c_{61}^2 X_3 \tag{13}$$

care păstrează forma canonică (9) a vectorului de structură, ne reducem la a avea

$$c_{63}^1 = c_{61}^2 = c_{62}^3 = 0. \tag{14}$$

În continuare, scriind identităţile (2) pentru $l = 6$, deducem

$$\begin{gathered}L_{236}^1 \equiv c_{16}^1 - c_{26}^2 - c_{36}^3 = 0, \quad L_{246}^1 \equiv - c_{46}^3 = 0,\\ L_{316}^2 \equiv - c_{16}^1 + c_{26}^2 - c_{36}^3 = 0, \quad L_{346}^2 \equiv - c_{46}^1 = 0,\\ \varepsilon L_{126}^3 \equiv - c_{16}^1 - c_{26}^2 + c_{36}^3 = 0, \quad L_{146}^3 \equiv - \varepsilon c_{46}^2 = 0,\\ L_{256}^1 \equiv - c_{56}^3 = 0, \ L_{126}^4 \equiv \varepsilon c_{36}^4 = 0, \ L_{126}^5 \equiv \varepsilon c_{36}^5 = 0, \ L_{126}^1 \equiv \varepsilon c_{36}^1 + c_{16}^3 = 0\\ L_{356}^2 \equiv - c_{56}^1 = 0, \ L_{236}^4 \equiv c_{16}^4 = 0, \ L_{236}^5 \equiv c_{16}^5 = 0, \ L_{236}^2 \equiv c_{16}^2 + c_{26}^1 = 0\\ L_{156}^3 \equiv - \varepsilon c_{56}^2 = 0, \ L_{316}^4 \equiv c_{26}^4 = 0, \ L_{316}^5 \equiv c_{26}^5 = 0, \ L_{316}^3 \equiv c_{26}^3 + \varepsilon c_{36}^2 = 0.\end{gathered} \tag{15}$$

Rezultă că ecuaţiile (12) se scriu

$$\begin{gathered}(X_1 X_6) = (X_2 X_6) = (X_3 X_6) = 0\\ (X_4 X_6) = c_{46}^4 X_4 + c_{46}^5 X_5\\ (X_5 X_6) = c_{56}^4 X_4 + c_{56}^5 X_5\end{gathered} \tag{16}$$

în care, ţinînd seama de forma canonică (9) a vectorului de structură, avem

$$c^4_{46} + c^5_{56} = 1 . \tag{17}$$

Schimbînd operatorii X_4, X_5 după formulele

$$\overline{X}_h = c^k_h X_k \qquad (h, k = 4, 5), \tag{18}$$

putem reduce matricea

$$\begin{pmatrix} c^4_{46} & c^5_{46} \\ c^4_{56} & c^5_{56} \end{pmatrix}$$

la una din formele canonice Jordan

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ cu } a + b = 1, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -c \\ c & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ cu } c \neq 0 , \tag{19}$$

corespunzător cărora avem grupurile G_6 neintegrabile

(I)
$$(X_1X_2) = \varepsilon X_3 , \ (X_2X_3) = X_1 , \ (X_3X_1) = X_2 ,$$
$$(X_hX_k) = 0 \ (h = 1, 2, 3 ; \ k = 4, 5, 6) ,$$
$$(X_4X_5) = 0, \ (X_4X_6) = aX_4 , \ (X_5X_6) = (1 - a) X_5 ,$$

(II)
$$(X_1X_2) = \varepsilon X_3 , \ (X_2X_3) = X_1 , \ (X_3X_1) = X_2 ,$$
$$(X_hX_k) = 0 \ (h = 1, 2, 3 ; \ k = 4, 5, 6) ,$$
$$(X_4X_5) = 0, \ (X_4X_6) = \frac{1}{2} X_4 , \ (X_5X_6) = X_4 + \frac{1}{2} X_5 ,$$

(III)
$$(X_1X_2) = \varepsilon X_3 , \ (X_2X_3) = X_1 , \ (X_3X_1) = X_2 ,$$
$$(X_hX_k) = 0 \ (h = 1, 2, 3 ; \ k = 4, 5, 6) ,$$
$$(X_4X_5) = 0 , \ (X_4X_6) = \frac{1}{2} X_4 - cX_5 , \ (X_5X_6) = cX_4 + \frac{1}{2} X_5 .$$

Avem aici şase structuri, cele patru structuri conţinute în (I) şi (III) depinzînd de cîte o constantă. În toate cazurile grupul derivat G_6' este $G_5\,(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$, iar lanţul grupurilor derivate se opreşte la $G_3(X_1, X_2, X_3)$. De asemenea în toate cazurile tensorul pătratic c_{hk} este de rang $\rho = 4$.

Alte două tipuri de grup G_5 cu vector de structură nul neintegrabile au ecuaţiile de structură

$$\begin{aligned} &(X_1X_2) = -X_3, \ (X_4X_1) = \frac{\varepsilon}{2} X_5 , \ (X_5X_1) = \frac{\varepsilon}{2} X_4 , \ (X_4X_5) = 0 , \\ &(X_2X_3) = X_1 , \ (X_4X_2) = \frac{\varepsilon}{2} X_4 , \ (X_5X_2) = -\frac{\varepsilon}{2} X_5 , \\ &(X_3X_1) = X_2 , \ (X_4X_3) = \frac{1}{2} X_5 , \ (X_5X_3) = -\frac{1}{2} X_4 . \end{aligned} \tag{20}$$

În aceste cazuri ecuațiile de structură ale grupului G_6 neintegrabil sînt date de (20) şi (12).

Făcînd schimbarea de operator

$$\bar{X}_6 = X_6 + c_{26}^3 X_1 + c_{36}^1 X_2 + c_{16}^2 X_3 + 2\varepsilon c_{16}^5 X_4 + 2\varepsilon c_{16}^4 X_5 \tag{21}$$

care păstrează forma canonică (9) a vectorului de structură, ne reducem la a avea

$$c_{16}^2 = c_{26}^3 = c_{36}^1 = c_{16}^4 = c_{16}^5 = 0\,. \tag{22}$$

Ținînd seama de (22), identitățile (2) pentru $l = 6$ se scriu

$$\begin{aligned}
&L_{236}^1 \equiv c_{16}^1 - c_{26}^2 - c_{36}^3 = 0\,, \quad L_{316}^2 \equiv -c_{16}^1 + c_{26}^2 - c_{36}^3 = 0\,,\\
&L_{216}^3 \equiv -c_{16}^1 - c_{26}^2 + c_{36}^3 = 0\,, \quad L_{246}^1 \equiv -\frac{\varepsilon}{2} c_{46}^1 - c_{46}^3 = 0\,,\\
&L_{346}^2 \equiv -\frac{1}{2} c_{56}^2 - c_{46}^1 = 0\,, \quad L_{156}^3 \equiv -\frac{\varepsilon}{2} c_{46}^3 + c_{56}^2 = 0\,,\\
&L_{256}^1 \equiv \frac{\varepsilon}{2} c_{56}^1 - c_{56}^3 = 0\,, \quad L_{356}^2 \equiv \frac{1}{2} c_{46}^2 - c_{56}^1 = 0\,,\\
&L_{146}^3 \equiv -\frac{\varepsilon}{2} c_{56}^3 + c_{46}^2 = 0\,, \quad L_{126}^4 \equiv -c_{36}^4 + \frac{\varepsilon}{2} c_{26}^5 = 0\,,\\
&L_{236}^4 \equiv \frac{\varepsilon}{2} c_{36}^4 + \frac{1}{2} c_{26}^4\,, \quad L_{316}^5 \equiv c_{26}^5 - \frac{\varepsilon}{2} c_{36}^4 = 0\,,\\
&L_{126}^5 \equiv -c_{36}^5 + \frac{\varepsilon}{2} c_{26}^4 = 0\,, \quad L_{236}^5 \equiv -\frac{\varepsilon}{2} c_{36}^5 - \frac{1}{2} c_{26}^4 = 0\,,\\
&L_{316}^4 \equiv c_{26}^4 - \frac{\varepsilon}{2} c_{36}^5 = 0\,, \quad L_{126}^1 \equiv c_{16}^3 = 0, \quad L_{236}^2 \equiv c_{26}^1 = 0\,,\\
&L_{316}^3 \equiv -c_{36}^2 = 0\,, \quad L_{146}^4 \equiv -\frac{\varepsilon}{2} c_{56}^4 + \frac{\varepsilon}{2} c_{46}^5 = 0\,,\\
&L_{346}^4 \equiv -\frac{1}{2} c_{56}^4 - \frac{1}{2} c_{46}^5 + \frac{\varepsilon}{2} c_{36}^2 = 0\,,\\
&L_{156}^4 \equiv -\frac{\varepsilon}{2} c_{46}^4 + \frac{\varepsilon}{2} c_{56}^5 + \frac{\varepsilon}{2} c_{16}^1 - \frac{1}{2} c_{16}^3 = 0\,.
\end{aligned} \tag{23}$$

Rezolvînd sistemul de ecuații (23), rezultă grupurile G_6 neintegrabile :

$$\begin{aligned}
&(X_1 X_2) = -X_3\,, \quad (X_4 X_1) = \frac{\varepsilon}{2} X_5\,, \quad (X_5 X_1) = \frac{\varepsilon}{2} X_4\,,\\
&(X_2 X_3) = X_1\,, \quad (X_4 X_2) = \frac{\varepsilon}{2} X_4\,, \quad (X_5 X_2) = -\frac{\varepsilon}{2} X_5\,,\\
&(X_3 X_1) = X_2\,, \quad (X_4 X_3) = \frac{1}{2} X_5\,, \quad (X_5 X_3) = -\frac{1}{2} X_4\,,\\
&(X_6 X_1) = (X_6 X_2) = (X_6 X_3) = (X_4 X_5) = 0\,,\\
&(X_4 X_6) = \frac{1}{2} X_4\,, \quad (X_5 X_6) = \frac{1}{2} X_5\,.
\end{aligned} \tag{IV}$$

2. GRUPURI G_6 REALE NEINTEGRABILE CU VECTOR DE STRUCTURĂ NUL

Vectorul de structură fiind nul, vom reduce tensorul pătratic la formă canonică și anume

(24) $$c_{hk} = \varepsilon_h \delta^h_k .$$

În acest caz ecuațiile (7) și (8) devin

(25) $$\varepsilon_h c^h_{kl} + \varepsilon_k c^k_{hl} = 0 ,$$

(26) $$\varepsilon_k c^k_{lh} = c_{klh} - c_{khl} .$$

Vom distinge mai multe cazuri după rangul ρ al tensorului pătratic.

2.1. TENSORUL PĂTRATIC DE RANG $\rho = 6$

Un astfel de grup G_6 nu poate fi simplu deoarece se știe, după rezultatele lui W. Killing și E. Cartan [3], că un grup simplu este sau cu 14 ; 52 ; 78 ; 133 ; 248 parametri sau aparține uneia din cele patru mari clase de grupuri simple, acestea avînd respectiv

$$l(l+2),\quad l \geqslant 1$$
$$l(2l+1),\quad l \geqslant 2$$
$$l(2l+1),\quad l \geqslant 3$$
$$l(2l-1),\quad l \geqslant 4 \text{ parametri.}$$

Rezultă că un grup G_6 cu tensor pătratic de rang $\rho = 6$ este semisimplu (fără a fi simplu) și se știe că orice astfel de grup este produs de grupuri simple permutabile între ele. Ținînd seama că singurele grupuri G_r $(r < 6)$ simple sînt grupurile G_3 avînd structura

(27) $$(X_1 X_2) = \varepsilon X_3 ,\ (X_2 X_3) = X_1 ,\ (X_3 X_1) = X_2 ,$$

urmează că singurele grupuri G_6 cu tensor pătratic nedegenerat sînt

(V) $$(X_1 X_2) = \varepsilon' X_3 ,\ (X_2 X_3) = X_1 ,\ (X_3 X_1) = X_2 ,$$
$$(X_4 X_5) = \varepsilon'' X_6 ,\ (X_5 X_6) = X_4 ,\ (X_6 X_4) = X_5 ,$$
$$(X_h X_\alpha) = 0\ \ (h = 1, 2, 3 ;\ \alpha = 4, 5, 6),\ (\varepsilon', \varepsilon'' = \pm 1) .$$

Avem aici trei structuri independente (cazurile $\varepsilon' = 1$, $\varepsilon'' = -1$; $\varepsilon' = -1$, $\varepsilon'' = 1$, coincid). Grupul derivat G'_6 coincide în toate cazurile cu grupul G_6, deci aceste grupuri sînt perfecte.

2.2. TENSORUL PĂTRATIC DE RANG $\rho = 5$

Vom arăta că nu există grupuri G_6 cu această proprietate. Să presupunem că ne-am aranjat astfel încît să avem

(28) $$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \neq 0 ,\quad \varepsilon_6 = 0 .$$

În acest caz ecuaţiile (25) pentru $k = 6$ şi $h < 6$ ne dau $c^h_{6l} = 0$ iar pentru $h = k < 6$, $c^h_{hl} = 0$. Vectorul de structură fiind nul, avem încă $c^6_{6l} = 0$.

Rezultă că ecuaţiile de structură ale grupului G_6 sînt de forma

$$(29)\qquad \begin{aligned} &(X_h X_k) = c^s_{hk} X_s + c^6_{hk} X_6 \quad (h, k, s = 1, 2, 3, 4, 5),\\ &(X_h X_6) = 0\,. \end{aligned}$$

Operatorul X_6 defineşte un subgrup G_1 invariant în G_6 iar c^s_{hk} sînt, după cum se ştie, constantele de structură ale unui grup G_5, anume grupul factor G_6/G_1.

Deoarece toate constantele de structură ale grupului G_6, avînd unul din indicii inferiori egal cu 6, sînt nule, rezultă că în ecuaţiile

$$(30)\qquad c_{hk} = c^r_{sh} c^s_{rk} \qquad (h, k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

indicii r, s de sumare pot lua numai valorile mai mici decît 6, deci componentele tensorului pătratic al lui G_5 sînt în acelaşi timp componente ale tensorului pătratic al lui G_6. Pe de altă parte avem

$$(31)\qquad c_{h6} = c^r_{sh} c^s_{r6} = 0\,,$$

prin urmare ar trebui ca grupul factor G_5 să aibă tensorul pătratic de rang $\rho = 5$, ceea ce este imposibil, căci un grup G_5 nu poate fi semisimplu.

2.3. TENSORUL PĂTRATIC DE RANG $\rho = 4$

Fie

$$(32)\qquad \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \neq 0\,, \quad \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0\,.$$

Ecuaţiile (25) dau

$$(33)\qquad c^h_{\alpha l} = 0 \qquad (h = 1, 2, 3, 4\,;\ \alpha = 5, 6).$$

Ecuaţiile de structură ale lui G_6 se scriu

$$(34)\qquad \begin{aligned} &(X_h X_k) = c^s_{hk} X_s + c^\alpha_{hk} X_\alpha\,, && (h, k, s = 1, 2, 3, 4),\\ &(X_h X_\alpha) = c^\beta_{h\alpha} X_\beta\,, && (\alpha, \beta, \gamma = 5, 6),\\ &(X_\alpha X_\beta) = c^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma\,. && \end{aligned}$$

În acest caz operatorii X_5, X_6 determină un subgrup invariant G_2 al lui G_6, iar c^s_{hk} sînt constantele de structură ale unui grup G_4, anume grupul factor G_6/G_2.

Deoarece un grup G_4 nu poate fi perfect, putem să ne reducem la a avea $c^1_{hk} = 0$ şi în acest caz ecuaţiile (34) neconţinînd operatorul X_1, urmează că grupul G_6 admite subgrupul invariant $G_5(X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$. Făcînd o permutare circulară de operatori în G_6, putem presupune deci că acesta admite subgrupul invariant G_5 $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$. Pentru ca G_6 să fie neintegrabil, trebuie ca acest G_5 să fie neintegrabil. Deoarece acest subgrup invariant are vectorul de structură nul, avem de considerat structurile (11) şi (20).

În cazul structurii (11) grupul G_6 are structura dată de (11) şi (16) în care $c^4_{46} + c^5_{56} = 0$ (deoarece vectorul de structură al lui G_6 este nul). În acest caz în locul matricilor (19) avem

$$(35)\qquad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} \text{ cu } c \neq 0.$$

Se observă că trebuie să presupunem $a \neq 0$, căci altfel grupul G_6 ar avea tensor pătratic de rang $\rho = 3$. De asemenea excludem matricea a doua deoarece grupul G_6 corespunzător are tensor pătratic de rang $\rho = 3$. Reducînd a, respectiv c, la unitate prin multiplicarea operatorului X_6, obţinem

$$\begin{aligned} &(\mathrm{VI}) && (X_1X_2) = \varepsilon X_3, \ (X_2X_3) = X_1, \ (X_3X_1) = X_2, \\ &&& (X_hX_\alpha) = 0 \ \ (h = 1, 2, 3\,;\ \alpha = 4, 5, 6), \\ &&& (X_4X_5) = 0, \ (X_4X_6) = X_4, \ (X_5X_6) = -X_5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\mathrm{VII}) && (X_1X_2) = \varepsilon X_3, \ (X_2X_3) = X_1, \ (X_3X_1) = X_2, \\ &&& (X_hX_\alpha) = 0 \ \ (h = 1, 2, 3\,;\ \alpha = 4, 5, 6), \\ &&& (X_4X_5) = 0, \ (X_4X_6) = -X_5, \ (X_5X_6) = X_4. \end{aligned}$$

Avem în aceste formule patru structuri neintegrabile caracterizate prin vector de structură nul şi tensor pătratic de rang $\rho = 4$. În toate aceste cazuri grupul derivat G'_6 este G_5 (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5), lanţul grupurilor derivate oprindu-se la G_3 ($X_1\,X_2\,X_3$).

În cazul structurii (20), ecuaţiile (23) dau $c^4_{46} = c^5_{56} = 0$ (deoarece vectorul de structură al grupului este nul). Obţinem deci structura (IV) în care ultimele două ecuaţii se înlocuiesc prin $(X_4X_6) = (X_5X_6) = 0$. Grupul G_6 este în acest caz cu tensor pătratic de rang $\rho = 3$.

2.4. TENSORUL PĂTRATIC DE RANG $\rho = 3$

Putem considera

$$(36)\qquad \varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3 \neq 0\,, \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0\,.$$

Ţinînd seama de (25) obţinem

$$(37)\qquad c^h_{hk} = 0\,, \quad c^h_{\alpha l} = 0 \quad (h, k = 1, 2, 3\,;\ \alpha = 4, 5, 6)$$

şi structura grupului G_6 se scrie

$$\begin{aligned} (38)\qquad & (X_1X_2) = c^3_{12}X_3 + c^\alpha_{12}X_\alpha, \ (X_hX_\alpha) = c^\beta_{h\alpha}X_\beta && (h = 1, 2, 3), \\ & (X_2X_3) = c^1_{23}X_1 + c^\alpha_{23}X_\alpha, \ (X_\alpha X_\beta) = c^\gamma_{\alpha\beta}X_\gamma, && (\alpha, \beta, \gamma = 4, 5, 6), \\ & (X_3X_1) = c^2_{31}X_2 + c^\alpha_{13}X_\alpha\,. \end{aligned}$$

Vectorul de structură fiind nul avem

$$\begin{gathered} (39)\qquad c^4_{41} + c^5_{51} + c^6_{61} = 0, \ c^4_{42} + c^5_{52} + c^6_{62} = 0, \ c^4_{43} + c^5_{53} + c^6_{63} = 0, \\ c^5_{54} + c^6_{64} = 0, \ c^4_{46} + c^5_{56} = 0. \end{gathered}$$

În acest caz $G_3(X_4, X_5, X_6)$ este subgrup invariant al lui G_6 avînd tensor pătratic nul (componentele acestui tensor fiind aceleaşi din G_6).

Se observă că în cazul $c^1_{23} = 0$, ecuaţiile (25) dau $c^3_{12} = c^2_{31} = 0$ şi grupul G'_6 coincide cu subgrupul invariant $G_3(X_4, X_5, X_6)$ care fiind integrabil, deoarece are tensor pătratic nul, ar rezulta că G_6 este integrabil. Vom presupune deci $c^1_{23} \neq 0$ şi ne putem aranja să avem

$$c^3_{12} = \varepsilon, \quad c^1_{23} = c^2_{31} = 1 \quad (\varepsilon = \pm 1)\,. \tag{40}$$

Subgrupul invariant $G_3(X_4, X_5, X_6)$ avînd tensorul pătratic nul, poate fi adus la una din următoarele forme canonice [4]

1. $(X_4 X_5) = X_6\,, \quad (X_5 X_6) = (X_6 X_4) = 0\,,$
2. $(X_5 X_6) = (X_6 X_4) = (X_4 X_5) = 0\,.$

Să analizăm pe rînd cele două cazuri

Cazul 1. În primul rînd cu transformarea de operatori

$$\overline{X}_1 = X_1 - c^6_{15} X_4 + c^6_{14} X_5\,, \quad \overline{X}_2 = X_2 - c^6_{25} X_4 + c^6_{24} X_5\,,$$
$$\overline{X}_3 = X_3 - c^6_{35} X_4 + c^6_{34} X_5 \tag{41}$$

ne reducem la a avea

$$c^6_{14} = c^6_{24} = c^6_{34} = c^6_{15} = c^6_{25} = c^6_{35} = 0\,. \tag{42}$$

Din identităţile

$$L^6_{145} \equiv -c^4_{41} - c^5_{51} + c^6_{61} = 0\,, \quad L^6_{245} \equiv -c^4_{42} - c^5_{52} + c^6_{62} = 0\,,$$
$$L^6_{345} \equiv -c^4_{43} - c^5_{53} + c^6_{63} = 0 \tag{43}$$

şi ţinînd seama de (39) obţinem

$$c^6_{61} = c^6_{62} = c^6_{63} = 0, \quad c^4_{41} + c^5_{51} = 0, \quad c^4_{42} + c^5_{52} = 0, \quad c^4_{43} + c^5_{53} = 0. \tag{44}$$

Cu ajutorul transformării de operatori

$$\overline{X}_1 = X_1 + c^6_{23} X_6\,, \quad \overline{X}_2 = X_2 + c^6_{31} X_6\,, \quad \overline{X}_3 = X_3 + \varepsilon c^6_{12} X_6 \tag{45}$$

ne reducem apoi la a avea

$$c^6_{12} = c^6_{23} = c^6_{31} = 0. \tag{46}$$

În continuare avem

$$L^6_{146} \equiv -c^5_{61} = 0, \quad L^6_{246} \equiv -c^5_{62} = 0, \quad L^6_{346} \equiv -c^5_{63} = 0$$
$$L^6_{156} \equiv c^4_{61} = 0, \quad L^6_{256} \equiv c^4_{62} = 0, \quad L^6_{356} \equiv c^4_{63} = 0. \tag{47}$$

Ţinînd seama de egalităţile de mai sus avem

$$L^4_{125} \equiv \varepsilon c^4_{35} - 2c^4_{42} c^4_{15} + 2c^4_{41} c^4_{25} = 0$$
$$L^4_{235} \equiv c^4_{15} - 2c^4_{43} c^4_{25} + 2c^4_{42} c^4_{35} = 0$$
$$L^4_{315} \equiv c^4_{25} - 2c^4_{41} c^4_{35} + 2c^4_{43} c^4_{15} = 0 \tag{48}$$

$$\begin{aligned} L^5_{124} &\equiv \varepsilon c^5_{34} - 2c^4_{41} c^5_{24} + 2c^4_{42} c^5_{14} = 0 \\ L^5_{234} &\equiv c^5_{14} - 2c^4_{42} c^5_{34} + 2c^4_{43} c^5_{24} = 0 \\ L^5_{314} &\equiv c^5_{24} - 2c^4_{43} c^5_{14} + 2c^4_{41} c^5_{34} = 0 \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} L^4_{124} &\equiv \varepsilon c^4_{34} - c^4_{15} c^5_{24} + c^4_{25} c^5_{14} = 0 \\ L^4_{234} &\equiv c^4_{14} - c^4_{25} c^5_{34} + c^4_{35} c^5_{24} = 0 \\ L^4_{314} &\equiv c^4_{24} - c^4_{35} c^5_{14} + c^4_{15} c^5_{34} = 0. \end{aligned} \tag{50}$$

Ecuațiile (48) formează un sistem de ecuații omogene în c^4_{15}, c^4_{25}, c^4_{35} și notînd

$$2c^4_{41} = a,\ 2c^4_{42} = b,\ 2c^4_{43} = c, \tag{51}$$

determinantul acestui sistem omogen este

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -b & a & \varepsilon \\ 1 & -c & b \\ c & 1 & -a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + \varepsilon c^2 + \varepsilon. \tag{52}$$

Analog ecuațiile (49) formează un sistem de ecuații omogene în c^5_{14}, c^5_{24}, c^5_{34} avînd determinantul

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b & -a & \varepsilon \\ 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + \varepsilon c^2 + \varepsilon. \tag{53}$$

Dacă $\varepsilon = 1$, avem $\Delta_1 = \Delta_2 \neq 0$ și sistemele de mai sus au numai soluție banală $c^4_{15} = c^4_{25} = c^4_{35} = c^5_{14} = c^5_{24} = c^5_{34} = 0$. Aceeași concluzie o avem în cazul $\varepsilon = -1$, dar $a^2 + b^2 - c^2 - 1 \neq 0$. Ecuațiile (50) dau apoi $c^4_{41} = c^4_{42} = c^4_{43} = 0$. În aceste cazuri avem

$$\begin{aligned} &L^6_{124} \equiv c^6_{21} = 0,\ L^6_{234} \equiv c^5_{32} = 0,\ L^6_{314} \equiv c^5_{13} = 0, \\ &L^6_{125} \equiv c^4_{12} = 0,\ L^6_{235} \equiv c^4_{23} = 0,\ L^6_{315} \equiv c^4_{31} = 0. \end{aligned} \tag{54}$$

Avem astfel grupurile G_6 neintegrabile

$$\begin{aligned} &(X_1X_2) = \varepsilon X_3,\ (X_2X_3) = X_1,\ (X_3X_1) = X_2, \qquad (\varepsilon = \pm 1), \\ &(X_hX_k) = 0,\ (h = 1, 2, 3;\ k = 4, 5, 6), \\ &(X_4X_5) = X_6,\ (X_5X_6) = (X_6X_4) = 0. \end{aligned} \tag{VIII}$$

Pentru aceste două structuri grupul G'_6 este $G_4(X_1, X_2, X_3, X_6)$, iar grupul derivat secund este $G_3(X_1, X_2, X_3)$.

Dacă $\varepsilon = -1$ dar $a^2 + b^2 - c^2 - 1 = 0$, sistemele omogene (48), (49) admit soluțiile

$$\begin{aligned} &c^5_{41} = \lambda(ac + b),\ c^5_{42} = \lambda(bc - a),\ c^5_{43} = \lambda(c^2 + 1) \\ &c^4_{51} = \mu(ac - b),\ c^4_{52} = \mu(bc + a),\ c^4_{53} = \mu(c^2 + 1) \end{aligned} \tag{55}$$

cu care ecuațiile (50) se scriu (sîntem în cazul $\varepsilon = -1$),

$$a[1 + 4\lambda\mu(c^2 + 1)] = b[1 + 4\lambda\mu(c^2 + 1)] = c[1 + 4\lambda\mu(c^2 + 1)] = 0. \tag{56}$$

Deoarece a, b, c nu pot fi toate nule, rezultă că trebuie să avem

$$1 + 4\lambda\mu(c^2 + 1) = 0 \tag{57}$$

şi prin urmare λ şi μ sînt ambele diferite de zero, ceea ce atrage după (55) că c_{53}^4, c_{43}^5 sînt diferite de zero.

Dacă facem schimbarea de operator

$$\overline{X}_4 = \frac{1}{2\lambda}\left(X_4 - \frac{c_{43}^4}{c_{53}^4}X_5\right) \tag{58}$$

ne reducem la a avea

$$c_{43}^4 = 0,\ c_{43}^5 = \frac{1}{2} \tag{59}$$

şi deci

$$c = 0,\ \lambda = \frac{1}{2};\ \mu = -\frac{1}{2}.$$

Schimbînd operatorii X_1, X_2 după formulele

$$\overline{X}_1 = X_1 \cos\omega - X_2 \sin\omega,\ \overline{X}_2 = X_1 \sin\omega + X_2 \cos\omega \tag{60}$$

cu ω soluţie a ecuaţiei

$$a\cos\omega - b\sin\omega = 0, \tag{61}$$

ne reducem la a avea în plus $a = 0$ şi deci $b = \varepsilon$, $(\varepsilon = \pm 1)$.

Rămîn valabile formulele (54) şi deci avem grupurile G_6 neintegrabile

$$\text{(IX)}\quad \begin{aligned}
&(X_1X_2) = -X_3,\ (X_4X_1) = \frac{\varepsilon}{2}X_5,\ (X_5X_1) = \frac{\varepsilon}{2}X_4,\\
&(X_2X_3) = X_1,\ (X_4X_2) = \frac{\varepsilon}{2}X_4,\ (X_5X_2) = -\frac{\varepsilon}{2}X_5,\\
&(X_3X_1) = X_2,\ (X_4X_3) = \frac{1}{2}X_5,\ (X_5X_3) = -\frac{1}{2}X_4,\\
&(X_6X_1) = (X_6X_2) = (X_6X_3) = 0,\ (X_4X_5) = X_6,\ (X_5X_6) = (X_6X_4) = 0.
\end{aligned}$$

Grupul derivat G_6' este $G_6(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$, prin urmare aceste grupuri sînt perfecte.

Cazul 2. În acest caz subgrupul invariant $G_3(X_4, X_5, X_6)$ fiind abelian, dispunem de transformările de operatori de forma

$$\overline{X}_h = c_h^k X_k \qquad (h, k = 4, 5, 6) \tag{62}$$

cu care putem reduce matricea

$$\begin{pmatrix} c_{43}^4 & c_{43}^5 & c_{43}^6 \\ c_{53}^4 & c_{53}^5 & c_{53}^6 \\ c_{63}^4 & c_{63}^5 & c_{63}^6 \end{pmatrix}$$

la una din formele canonice Jordan

$$(63)\qquad 1^\circ.\ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -(a+b) \end{pmatrix},\quad 2^\circ.\ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -2a \end{pmatrix},$$

$$3^\circ.\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad 4^\circ.\ \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & -2a \end{pmatrix}.$$

Pentru a analiza aceste cazuri folosim identitățile (2) ale lui Lie. În condițiile cazului 2 de care ne ocupăm avem

$$L^4_{125} \equiv \varepsilon c^4_{35} - c^4_{15}(c^4_{42} - c^5_{52}) + c^4_{25}(c^4_{41} - c^5_{51}) - c^4_{16}c^6_{25} + c^4_{26}c^6_{15} = 0$$

$$(64)\quad L^4_{235} \equiv c^4_{15} - c^4_{25}(c^4_{43} - c^5_{53}) + c^4_{35}(c^4_{42} - c^5_{52}) - c^4_{26}c^6_{35} + c^4_{36}c^6_{25} = 0$$

$$L^4_{315} \equiv c^4_{25} - c^4_{35}(c^4_{41} - c^5_{51}) + c^4_{15}(c^4_{43} - c^5_{53}) - c^4_{36}c^6_{15} + c^4_{16}c^6_{35} = 0$$

$$L^4_{124} \equiv \varepsilon c^4_{34} - c^4_{15}c^5_{24} + c^4_{25}c^5_{14} - c^4_{16}c^6_{24} + c^4_{26}c^6_{14} = 0$$

$$L^4_{234} \equiv c^4_{14} - c^4_{25}c^5_{34} + c^4_{35}c^5_{24} - c^4_{26}c^6_{34} + c^4_{36}c^6_{24} = 0$$

$$L^4_{314} \equiv c^4_{24} - c^4_{35}c^5_{14} + c^4_{15}c^5_{34} - c^4_{36}c^6_{14} + c^4_{16}c^6_{34} = 0$$

precum și toate ecuațiile ce se obțin din acestea prin permutările indicilor 4, 5, 6.

Să examinăm acum cele patru cazuri din (63). În cele ce urmează indicii h, k iau valorile 1, 2, 3, iar α, β iau valorile 4, 5, 6.

Matricea 1°. Avem

$$(65)\qquad c^\alpha_{\beta 3} = 0,\ (\alpha \neq \beta).$$

Rezultă ecuațiile

$$L^4_{235} \equiv c^4_{15} - c^4_{25}(c^4_{43} - c^5_{53}) = 0,\ L^4_{315} \equiv c^4_{25} + c^4_{15}(c^4_{43} - c^5_{53}) = 0$$

din care deducem $c^4_{15} = c^4_{25} = 0$.

Datorită simetriei se vede că avem

$$(66)\qquad c^\alpha_{\beta 1} = c^\alpha_{\beta 2} = 0.$$

Ținînd seama de (65) și (66), identitățile $L^\alpha_{hk\alpha} = 0$ arată că (65) și (66) sînt valabile și pentru $\alpha = \beta$. Schimbînd apoi operatorii X_1, X_2, X_3 după formulele

$$(67)\qquad \overline{X}_1 = X_1 + c^\alpha_{23}X_\alpha,\ \overline{X}_2 = X_2 + c^\alpha_{31}X_\alpha,\ \varepsilon\overline{X}_3 = \varepsilon X_3 + c^\alpha_{12}X_\alpha$$

ne reducem la a avea $c^\alpha_{23} = c^\alpha_{31} = c^\alpha_{12} = 0$ și deci ecuațiile (38) se scriu

$$(\mathrm{X})\qquad (X_1X_2) = \varepsilon X_3,\ (X_2X_3) = X_1,\ (X_3X_1) = X_2$$

$$(X_hX_\alpha) = (X_\alpha X_\beta) = 0,\ (h = 1, 2, 3;\ \alpha, \beta = 4, 5, 6).$$

Grupul derivat G'_6 pentru aceste două structuri este $G_3(X_1, X_2, X_3)$.

Matricea 2°. Vom arăta că acest caz este imposibil. Într-adevăr, avem

$$(68)\quad c^4_{43} = c^5_{53} = a,\ c^6_{63} = -2a,\ c^4_{53} = 1,\ c^4_{63} = c^6_{43} = c^5_{63} = c^6_{53} = c^5_{43} = 0.$$

Din ecuaţiile

$$L^5_{234} = L^5_{314} = 0,\ L^6_{234} = L^6_{314} = 0,\ L^5_{236} = L^5_{316} = 0$$

rezultă respectiv

(69) $$c^5_{14} = c^5_{24} = 0,\ c^6_{14} = c^6_{24} = 0,\ c^5_{16} = c^5_{26} = 0.$$

Ţinînd seama de (68) şi (69), ecuaţiile $L^6_{235} = L^6_{315} = 0$ dau

(70) $$c^6_{15} = c^6_{25} = 0$$

apoi ecuaţiile $L^\alpha_{hk\alpha} = 0$ dau

(71) $$c^\alpha_{\alpha h} = 0.$$

Cu rezultatele precedente avem $L^4_{125} \equiv \varepsilon c^4_{35} = 0$, ceea ce contrazice ecuaţiile (68).

Matricea 3°. Se arată că şi acest caz este imposibil. Avem

(72) $$c^4_{53} = c^5_{63} = 1,\ c^4_{43} = c^5_{53} = c^6_{63} = c^5_{43} = c^6_{53} = c^4_{63} = c^6_{43} = 0.$$

Ecuaţiile $L^6_{234} = L^6_{314} = 0$ dau

(73) $$c^6_{14} = c^6_{24} = 0,$$

apoi din ecuaţiile $L^5_{234} = L^5_{314} = 0$ obţinem

(74) $$c^5_{14} = c^5_{24} = 0.$$

Ţinînd seama de (72), (73), (74), ecuaţiile $L^4_{234} = L^4_{314} = 0$, $L^5_{235} = L^5_{315} = 0$, $L^6_{235} = L^6_{315} = 0$ dau respectiv

(75) $$c^4_{14} = c^4_{24} = 0,\ c^5_{15} = c^5_{25} = 0,\ c^6_{15} = c^6_{25} = 0$$

cu care rezultă $L^4_{125} \equiv \varepsilon c^4_{35} = 0$, ceea ce contrazice (72).

Matricea 4°. Această matrice este caracterizată prin $b \neq 0$. Ne putem aranja printr-o eventuală schimbare de semn a operatorului X_4 să avem $b > 0$.

Avem

(76) $$c^4_{43} = c^5_{53} = a,\ c^6_{63} = -2a,\ c^4_{53} = b,\ c^5_{43} = -b.$$
$$c^6_{43} = c^6_{53} = c^4_{63} = c^5_{63} = 0.$$

Ecuaţiile $L^4_{236} = L^4_{316} = L^5_{236} = L^5_{316} = 0$, $L^6_{234} = L^6_{314} = L^6_{235} = L^6_{315} = 0$ se scriu respectiv

(77) $$c^4_{16} - 3ac^4_{26} - bc^5_{26} = 0,\ c^5_{16} - 3ac^5_{26} + bc^4_{26} = 0,$$
$$c^4_{26} + 3ac^4_{16} + bc^5_{16} = 0,\ c^5_{26} + 3ac^5_{16} - bc^4_{16} = 0,$$

(78) $$c^6_{14} + 3ac^6_{24} - bc^6_{25} = 0,\ c^6_{15} + 3ac^6_{25} + bc^6_{24} = 0$$
$$c^6_{24} - 3ac^6_{14} + bc^6_{15} = 0,\ c^6_{25} - 3ac^6_{15} - bc^6_{14} = 0.$$

Sistemul (77) este omogen în $c^4_{16}, c^4_{26}, c^5_{16}, c^5_{26}$, iar sistemul (78) omogen în $c^6_{14}, c^6_{24}, c^6_{15}, c^6_{25}$, determinanţii acestor sisteme fiind

(79) $$\Delta_1 = \Delta_2 = (b^2 - 1)^2 + 9a^2(9a^2 + 2b^2 + 2).$$

Dacă $a \neq 0$, atunci $\Delta_1 = \Delta_2 \neq 0$ şi cele două sisteme omogene admit numai soluţia banală

$$c^4_{16} = c^4_{26} = c^5_{16} = c^5_{26} = c^6_{14} = c^6_{24} = c^6_{15} = c^6_{25} = 0 \tag{80}$$

În acest caz avem $L^6_{126} \equiv \varepsilon c^6_{36} = 0$, ceea ce contrazice ipoteza $a \neq 0$. Trebuie să presupunem deci $a = 0$. În acest caz dacă $b \neq 1\ (b > 0)$ avem de asemenea ecuaţiile (80). Din ecuaţiile $L^6_{126} = L^6_{236} = L^6_{316} = 0$ rezultă apoi

$$c^6_{16} = c^6_{26} = c^6_{36} = 0. \tag{81}$$

Dacă facem schimbarea de operatori

$$\overline{X}_1 = X_1 + c^\alpha_{23} X_\alpha,\ \overline{X}_2 = X_2 + c^\alpha_{31} X_\alpha,\ -\overline{X}_3 = -X_3 + c^\alpha_{12} X_\alpha \tag{82}$$

ne reducem la a avea

$$c^6_{23} = c^6_{31} = c^6_{12} = 0. \tag{83}$$

Ţinînd seama de rezultatele precedente, se vede că grupul G_6 admite subgrupul invariant $G_5(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$. Acesta trebuie să aibă una dintre structurile (11), (20). În cazul structurii (11) se obţin structurile (X) iar în cazul structurii (20) se obţin structurile

$$\begin{aligned}
\text{(XI)}\qquad & (X_1X_2) = -X_3,\ (X_4X_1) = \frac{\varepsilon}{2} X_5,\ (X_5X_1) = \frac{\varepsilon}{2} X_4,\\
& (X_2X_3) = X_1,\ (X_4X_2) = \frac{\varepsilon}{2} X_4,\ (X_5X_2) = -\frac{\varepsilon}{2} X_5,\\
& (X_3X_1) = X_2,\ (X_4X_3) = \frac{1}{2} X_5,\ (X_5X_3) = -\frac{1}{2} X_4,\\
& (X_6X_1) = (X_6X_2) = (X_6X_3) = 0,\\
& (X_4X_5) = (X_5X_6) = (X_6\,X_4) = 0.
\end{aligned}$$

Grupul derivat G'_6 coincide în aceste cazuri cu subgrupul invariant G_5.
Dacă $b = 1$, sistemele (77), (78) cu $a = 0$ admit soluţiile

$$\begin{aligned}
& c^4_{61} = c^5_{62} = m,\ c^6_{41} = c^6_{52} = p,\\
& c^4_{62} = -c^5_{61} = n,\ c^6_{42} = -c^6_{51} = q.
\end{aligned} \tag{84}$$

Ecuaţiile

$$L^4_{235} = L^4_{315} = L^5_{234} = L^5_{314} = L^4_{234} = L^4_{314} = L^5_{235} = L^5_{315} = 0$$

se scriu

$$\begin{aligned}
& c^4_{15} - (c^4_{42} - c^5_{52}) = 0,\ c^5_{14} - (c^4_{42} - c^5_{52}) = 0\\
& c^4_{25} + (c^4_{41} - c^5_{51}) = 0,\ c^5_{24} + (c^4_{41} - c^5_{51}) = 0\\
& c^4_{14} - (c^4_{25} + c^5_{24}) = 0,\ c^5_{15} + (c^5_{24} + c^4_{25}) = 0\\
& c^4_{24} + (c^5_{14} + c^4_{15}) = 0,\ c^5_{25} - (c^4_{15} + c^5_{14}) = 0
\end{aligned} \tag{85}$$

şi dau

$$c^4_{15} = c^5_{14} = c^4_{25} = c^5_{24} = c^4_{41} = c^5_{51} = c^4_{42} = c^5_{52} = 0. \tag{86}$$

Deoarece vectorul de structură este nul, avem şi

$$c^6_{61} = c^6_{62} = 0. \tag{87}$$

Avem deci ecuaţiile (76) cu $a = 0$, $b = 1$, (84), (86), (87). Ecuaţiile $L^4_{125} = L^5_{124} = 0$ dau

$$mp + nq + \varepsilon = 0, \quad mq - np = 0. \tag{88}$$

Aceste ecuaţii arată că $m^2 + n^2 \neq 0$. Făcînd schimbarea de operatori

$$\overline{X}_4 = mX_4 - nX_5, \quad \overline{X}_5 = nX_4 + mX_5 \tag{89}$$

ne reducem la a avea

$$p = -\varepsilon, \; q = 0, \; m = 1, \; n = 0. \tag{90}$$

Cu schimbarea de operatori

$$\begin{aligned} \overline{X}_1 &= X_1 + c^4_{23} X_4 + c^4_{23} X_5 \\ \overline{X}_2 &= X_2 + c^4_{31} X_4 + c^5_{31} X_5 \\ \varepsilon\overline{X}_3 &= \varepsilon X_3 + c^4_{12} X_4 + c^5_{12} X_5 + c^6_{12} X_6 \end{aligned} \tag{91}$$

ne reducem la a avea

$$c^4_{12} = c^5_{12} = 0 \tag{92}$$

şi atunci rezultă

$$L^4_{123} \equiv c^6_{23} = 0, \quad L^5_{123} \equiv c^6_{31} = 0. \tag{93}$$

În sfîrşit, cu transformarea de operator

$$\overline{X}_3 = X_3 + \varepsilon c^6_{12} X_6 \tag{94}$$

ne reducem la a avea $c^6_{12} = 0$, iar cu transformarea

$$\overline{X}_1 = X_1 + c^4_{23} X_4 \tag{95}$$

ne reducem la a avea $c^4_{23} = 0$. Rezultă $L^6_{123} \equiv c^5_{31} = 0$ şi avem astfel structurile

$$\begin{aligned} \text{(XII)} \quad & (X_1X_2) = \varepsilon X_3, \; (X_4X_1) = -\varepsilon X_6, \; (X_5X_1) = 0, \; (X_6X_1) = X_4, \\ & (X_2X_3) = X_1 + \lambda X_5, \; (X_4X_2) = 0, \; (X_5X_2) = -\varepsilon X_6, \; (X_6X_2) = X_5, \\ & (X_3X_1) = X_2 + \mu X_4, \; (X_4X_3) = -X_5, \; (X_5X_3) = X_4, \; (X_6X_3) = 0, \\ & (X_4X_5) = (X_5X_6) = (X_6X_4) = 0. \end{aligned}$$

Avem aici două structuri ($\varepsilon = \pm 1$) depinzînd de cîte două constante. Grupurile sînt perfecte deoarece G'_6 coincide cu G_6.

2.5. TENSORUL PĂTRATIC DE RANG $\rho < 3$

În aceste cazuri grupul G_6 este integrabil. Proprietatea este valabilă pentru G_r în general şi rezultă din teorema lui E. Cartan relativă la grupurile integrabile : condiţia necesară şi suficientă ca un grup G_r să fie integrabil este ca tensorul cubic să satisfacă relaţiile

$$c_{klh} - c_{khl} = 0. \tag{96}$$

Dacă $\rho = 0$, aceste relaţii rezultă imediat din (26), deoarece în acest caz avem $\varepsilon_k = 0$.

Dacă $\rho = 1$, avem $\varepsilon_1 \neq 0$, $\varepsilon_\alpha = 0$ $(\alpha = 2, 3, \ldots, r)$. Ecuaţiile (25) dau $c^1_{kl} = 0$ şi apoi ecuaţiile (26) conduc de asemenea [5] la (96).

Să considerăm şi cazul $\rho = 2$. Rezultă $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \neq 0$, $\varepsilon_\alpha = 0$ $(\alpha = 3, 4, \ldots, r)$. Ecuaţiile (25) dau $c^1_{lh} = c^2_{lh} = 0$ şi deci ecuaţiile (26) devin

$$c_{klh} - c_{khl} = \varepsilon_k c^k_{lh} = 0, \tag{97}$$

grupul G_r este şi în acest caz integrabil.

Concluzii. Grupurile lui Lie reale neintegrabile pot fi clasificate în tipurile I—XII, în care sînt conţinute 25 de structuri.

Structurile din I depind de cîte o constantă arbitrară, structurile din III depind de cîte o constantă arbitrară nenulă, iar structurile din XII depind de cîte două constante arbitrare.

Grupurile avînd structurile V, IX, XII sînt grupuri perfecte, există deci 7 structuri de grupuri G_6 perfecte, două dintre ele, anume cele din XII, depinzînd de cîte două constante arbitrare.

Primită la redacţie la 15 martie 1968

Institutul de construcţie
Bucureşti

CLASSIFICATION DES GROUPES DE LIE RÉELS NON INTÉGRABLES À SIX PARAMÈTRES

RÉSUMÉ

Dans cette note on considère les groupes de Lie réels avec six paramètres et on détermine toutes les structures non intégrables. On démontre qu'il existe 25 structures non intégrables dont quatre dépendent d'une constante et deux dépendent de deux constantes arbitraires ; il existe également sept structures de groupes G_6 parfaites.

BIBLIOGRAFIE

1. GH. VRĂNCEANU, *Leçons de Géométrie différentielle.* III, Bucarest, 1964.
2. I. MATEI, *Clasificarea grupurilor lui Lie reale neintegrabile cu cinci parametri.* St. cerc. mat., **20**, *2* (1968).
3. E. CARTAN, *Œuvres complètes.*
4. GH. VRĂNCEANU, *Lecţii de Geometrie diferenţială.* I, Bucureşti, 1962.
5. A. DOBRESCU, *Clasificarea grupurilor lui Lie reale cu patru parametri.* St. cerc. mat., **4** (1953).

MIŞCAREA PLANĂ STAŢIONARĂ CU SUPRAFAŢĂ LIBERĂ PRINTR-O FANTĂ ÎNTR-UN MEDIU POROS OMOGEN

DE

VIOREL POPA

Lucrarea studiază mişcarea plană staţionară liniară într-un mediu poros omogen şi izotrop, printr-o fantă practicată într-un perete vertical, cînd se formează o suprafaţă liberă (fig. 1). Se determină debitul prin fantă, ecuaţiile parametrice ale suprafeţei libere, distribuţia vitezei de filtraţie şi presiunea. La sfîrşit se face o aplicaţie numerică.

1. Mişcările potenţiale plane staţionare ale fluidelor de filtraţie, cu suprafaţă liberă, se pot studia folosind uneori un plan auxiliar introdus prin funcţia lui Jukovski ([1], p. 143 ; [2], p. 201).

Să notăm cu (D_z) domeniul din planul fizic $z = x + iy$, unde are loc mişcarea în mediul poros. Presupunem că mediul poros este omogen şi izotrop, caracterizat prin coeficientul de filtraţie k, mişcarea fiind descrisă de legea lui Darcy ([2], p. 26). Fie (D_f) domeniul mişcării în planul potenţialului complex $f(z) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y)$, iar (D_J) domeniul corespunzător în planul funcţiei lui Jukovski $J(z) = f(z) + ikz$, considerînd sisteme stîngi de axe de coordonate, Oy fiind dirijată după verticala descendentă. Cum $f(z)$ este funcţie analitică, urmează că şi $J = J_1 + iJ_2 = \varphi - ky + i(\psi + kx)$ este analitică. În planul (J), la linia liberă corespunde o porţiune de dreaptă, datorită condiţiei la limită $\varphi - ky =$ constant, care exprimă că presiunea este constantă pe suprafaţa liberă ([1], p. 201).

Vom considera mişcarea al cărei domeniu fizic este dat în figura 1. Fluidul liber ocupă domeniul care are ca frontiere dreptele $x = 0$; $y = 0$; $y = -H$, situat în cadranul trei, iar mediul poros ocupă semiplanul $y > 0$, în care se află pereţii $BC = l$, $C'E'$ care este infinit, fanta fiind $CC' = L - l$, cu $BC' = L$. Presupunem pereţii de grosime neglijabilă, iar l, L şi H sînt cunoscute. N.E. Jukovski a studiat mişcarea unui fluid cînd lipseşte peretele $C'A'$ ([1], p. 144) stabilind şi ecuaţia liniei libere.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 2, P. 251 – 260, BUCUREŞTI, 1969

2. Ne propunem să studiem mişcarea în prezenţa peretelui $C'A'$ cu fanta CC'. În acest scop vom folosi metoda reprezentărilor conforme, utilizată adesea în hidrogazodinamica subterană.

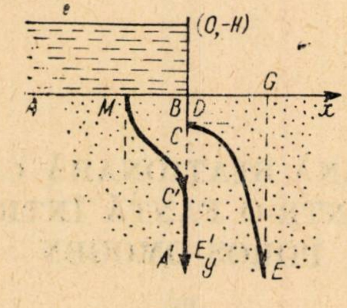


Fig. 1

Pentru funcţiile $f = \varphi + i\psi$ şi $J = J_1 + iJ_2$ avem următoarele condiţii la limită :

— pe AB, suprafaţă de alimentare, $\varphi = -kH$; $J_1 = -kH$;

— pe BCD, linie de curent, $\psi = 0$; $J_2 = 0$;

— pe DE, linie de curent, $\psi = 0$; $J_1 = kh_c$,

unde $h_c =$ const. reprezintă înălţimea de capilaritate ([1], p. 48) şi admitem că nu există curent de fluid prin suprafaţa liberă ([2], p. 48) ;

— pe $C'A'$ sau $C'E'$, linie de curent, $\psi = Q$; $J_2 = Q$, unde prin Q, am notat debitul fluidului prin fantă.

Din condiţiile la limită rezultă că domeniul (D_J) este un dreptunghi. Pe DE, $0 \leqslant J_2 \leqslant Q$, deci pe linia liberă, $x \in \left[0, \frac{Q}{k}\right)$, adică $x = \frac{Q}{k}$ este asimptota sa verticală.

Domeniul (D_f) este prevăzut cu tăietura $A'\ C'\ E'$ (fig. 2). Pe AB, $\psi \in (0, \infty)$, admiţînd că debitul prin suprafaţa de alimentare este infinit ;

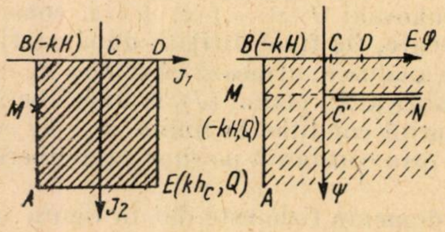


Fig. 2

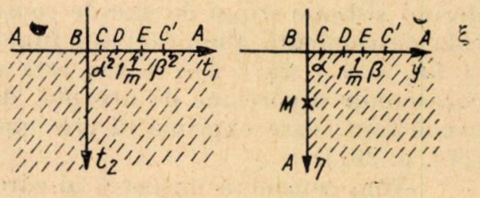


Fig. 3

în D, $\varphi = k(h_c + d)$, unde am notat $d = BD$, din planul (z). Pentru simplificarea notaţiilor, vom însemna punctele ce se corespund în diferite plane, cu aceeaşi literă.

Vom face reprezentarea conformă a domeniilor (J) şi (f) pe semiplanul $t_2 > 0$ al variabilei complexe $t = t_1 + it_2$ (fig. 3).

Aplicînd formula lui Schwarz-Christoffel astfel ca punctelor A, B, C, D, E şi C' din (J) să le corespundă respectiv punctele ∞, 0, α^2, 1, $\frac{1}{m^2}$ şi β^2 în planul (t), obţinem

$$J = M_1 \int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t-1)\left(t-\frac{1}{m^2}\right)}} + N_1 .$$

Prin substituţia :

(1) $$t = \zeta^2$$

trecem la planul variabilei $\zeta = \xi + i\eta$ în care semiplanului din (t) îi corespunde primul cadran în (ζ) şi rezultă

(2) $$J = M \int_0^\zeta \frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-m^2\zeta^2)}} + N = M \cdot F\ (\zeta, m) + N,$$

unde am folosit notaţia clasică $F\ (\zeta, m)$ a integralei eliptice normale de specia întîi a lui Legendre, de modul $m \in (0,1)$. Coeficienţii M şi N sînt constante ce le vom determina folosindu-ne de corespondenţa punctelor omoloage din planele (J) şi (ζ).

În B, $\zeta = 0$; $J = -kH$ şi (2) devine : $-kH = M.\ F\ (0, m) + N$, de unde $N = -kH$; în D, $\zeta = 1$, $J = kh_c$ şi (2) devine $kh_c = M \cdot F\ (1, m) - kH$, de unde $M = k\ (H + h_c) : K\ (m)$.

În E, $\zeta = \frac{1}{m}$, $J = kh_c + iQ$ şi (2) devine $kh_c + iQ = M \cdot F\left(\frac{1}{m}, m\right) - kH$ şi dacă ţinem seama de relaţia cunoscută (ex. [3], p. 344) $F\left(\frac{1}{m}, m\right) = K + iK'$, obţinem pentru debit

(3) $$Q = k(H + h_c) \cdot \frac{K'}{K},$$

unde am folosit notaţiile clasice $K = K\ (m) = F\ (1, m)$ şi $K' = K'\ (m) = F\ (1, m')$ pentru integralele eliptice complete de specia întîi relativ la modulul m, respectiv modulul complementar m' (legaţi prin relaţia $m^2 + m'^2 = 1$).

După înlocuirea lui M şi N, (2) devine

(4) $$J = k(H + h_c)\frac{1}{K} \cdot F(\zeta, m) - kH.$$

Folosind iarăşi formula lui Schwarz-Christoffel pentru f, vom obţine :

$$f = A_1 \int_0^t \frac{t - \beta^2}{\left(t - \frac{1}{m^2}\right)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t + B_1$$

sau, dacă ţinem seama de (1) şi integrăm,

$$f = A\left[2m\zeta + (m^2\beta^2 - 1)\ln\frac{1+m\zeta}{1-m\zeta}\right] + B. \tag{5}$$

Folosindu-ne de corespondenţa punctelor B şi D din planele (ζ) şi (f), vom obţine două relaţii din care va rezulta :

$$A = \frac{k(H + h_c + d)}{2m + (m^2\beta^2 - 1)\ln\frac{1+m}{1-m}}, \quad B = -kH. \tag{6}$$

3. Pentru obţinerea ecuaţiilor parametrice ale liniei libere vom scoate pe z din relaţia $J = f + ikz$. Ţinînd seama de (4) şi (6), vom obţine :

$$ikz = \frac{k(H + h_c)}{K}\cdot F(\zeta, m) - A\left[2m\zeta + (m^2\beta^2 - 1)\ln\frac{1+m\zeta}{1-m\zeta}\right]. \tag{7}$$

Separînd părţile reale şi imaginare, considerînd că $\zeta \in \left[1, \frac{1}{m}\right)$, ecuaţiile parametrice ale liniei libere se vor scrie :

$$\begin{cases} x = \dfrac{H + h_c}{K}\displaystyle\int_1^{\xi}\frac{d\xi}{1\sqrt{(\xi^2-1)(1-m^2\xi^2)}}, \\ y = -(H + h_c) + \dfrac{H + h_c + d}{2m + (m^2\beta^2 - 1)\ln\frac{1+m}{1-m}}\cdot \\ \qquad \cdot\left[2m\xi + (m^2\beta^2 - 1)\cdot\ln\dfrac{1+m\xi}{1-m\xi}\right]. \end{cases} \tag{8}$$

Din aceste ecuaţii deducem că linia liberă porneşte din punctul $D\,(0, d)$ şi că :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_D = 0, \quad \lim_{\xi\to\frac{1}{m}} x = \frac{Q}{k}, \quad \lim_{\xi\to\frac{1}{m}} y = +\infty$$

deci tangenta în D este orizontală iar dreapta $x = Q : k$ este asimptotă verticală la linia liberă.

În particular, cînd fanta devine infinită, punctele C' şi E' se confundă dispărînd la infinit. În acest caz $\beta = \frac{1}{m}$ şi $m \to 0$. Relaţiile (8) devin

$$x = \frac{2(H + h_c)}{\pi}\operatorname{argch}\xi, \quad y = -(H + h_c) + (H + h_c + d)\,\xi$$

Din prima ecuaţie rezultă $\xi = \mathrm{ch}\,\pi x : 2\,(H + h_c)$ şi introducînd-o în cealaltă ecuaţie sîntem conduşi la ecuaţia liniei libere

$$y = -\,(H + h_c) + (H + h_c + d)\cdot \mathrm{ch}\,\frac{\pi x}{2\,(H + h_c)}, \quad x \geqslant 0 \tag{9}$$

asimptota dispare la infinit şi astfel regăsim cazul lui Jukovski ([1], p. 146).

Un alt caz particular obţinem cînd $L = l$; punctele C şi C' trebuie să coincidă şi fanta dispare, peretele $BC'A'$ fiind continuu. În acest caz $\alpha = \frac{1}{m} = 1 = \beta$, deci $m \to 1$; debitul $Q \to 0$, asimptota verticală se confundă cu axa $y'y$, J devine constant şi viteza complexă va fi $w = f'(z) = -\,ik$. Înseamnă că avem o scurgere simplă paralelă cu peretele complet BE'.

Se poate găsi şi o relaţie numai între f şi z. Din (4) obţinem

$$(f + ikz + kH)\,\frac{K'}{Q} = \int_0^{\zeta} \frac{\mathrm{d}\zeta}{0\,\sqrt{(1-\zeta^2)\,(1-m^2\zeta^2)}}$$

şi prin inversiunea integralei eliptice rezultă

$$\zeta = \mathrm{sn}\left[(f + ikz + kH)\,\frac{K'}{Q},\ m\right] = \mathrm{sn}\,(U,\ m) = sn\ U,$$

unde am folosit notaţia clasică sn (U, k) a funcţiei sinus amplitudine de U, a lui Jacobi (de ex. [4], p. 307). Înlocuind în (5) obţinem :

$$f = A\left\{2m\,\mathrm{sn}\,[(f + ikz + kH)\,K' : Q] + (m^2\beta^2 - 1)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\ln\frac{1 + m\,\mathrm{sn}[(f + ikz + kH)\,K' : Q]}{1 - m\,\mathrm{sn}\,[(f + ikz + kH)\,K' : Q]}\right\} - kH.$$

4. Viteza complexă $w\,(z) = u - iv = f'\,(z)$ se poate obţine din relaţia

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta} : \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}$$

şi făcînd calculele vom obţine

$$w = ik : \left[\frac{k\,(H + h_c)}{2AKm^3}\cdot\frac{\sqrt{1 - m^2\zeta^2}}{(\beta^2 - \zeta^2)\sqrt{1 - \zeta^2}} - 1\right]. \tag{10}$$

La infinit şi în E avem $w = -\,ik$; în D şi C' viteza se anulează, $w = 0$ iar în B, $w = +\,ik : \left[\frac{k\,(H + h_c)}{2m^3 AK\beta^2} - 1\right]$.

Cîmpul presiunii ([2], p. 85) este dat de formula :

$$p(x, y) = -\gamma\left[-y + \frac{1}{k}\cdot\varphi(x, y)\right]$$

(O_y fiind dirijată după verticala descendentă) sau, ţinînd seama de (5),

$$p = -\gamma\left\{-y + \frac{A}{k}\left[2m\,\xi + (m^2\beta^2 - 1)\ln\left|\frac{1 + m\zeta}{1 - m\zeta}\right|\right]\right\} + \gamma H \tag{11}$$

Pe linia liberă DE, $p = -\gamma h_c$ iar pe AB, $p = \gamma H$.

În formulele care determină mărimile ce caracterizează mişcarea fluidului au rămas mai mulţi parametrii nedeterminaţi. Ei pot fi determinaţi folosindu-ne de corespondenţa punctelor omoloage din planele amintite mai sus.

Înlocuind $z = iL$ şi $\zeta = \beta$ în (7), obţinem

$$kL = A\left[2\,m\beta + (m^2\beta^2 - 1)\ln\frac{1 + m\beta}{1 - m\beta}\right] - \frac{kQ}{K'}\cdot F(\beta, m).$$

Integrala $F(\beta, m)$ cu $\beta > \frac{1}{m} > 1$ se transformă ([3], p. 345) şi obţinem :

$$F(\beta, m) = 2K + iK' - F\left(\frac{1}{m\beta}, m\right);\ \frac{1}{m\beta} < 1.$$

Dacă vom înlocui şi vom separa părţile reale şi imaginare, sîntem conduşi la relaţiile :

$$A\pi(m^2\beta^2 - 1) = Q \tag{12}$$

$$kL = A\left[2m\,\beta + (m^2\beta^2 - 1)\ln\frac{m\beta + 1}{m\beta - 1}\right] - 2k(H + h_c) + + \frac{Q}{K'}F\left(\frac{1}{m\beta}, m\right). \tag{13}$$

Înlocuind în (7) $z = il$ şi $\zeta = \alpha$, vom obţine

$$kl = A\left[2m\,\alpha + (m^2\beta^2 - 1)\ln\frac{1 + m\alpha}{1 - m\alpha}\right] - \frac{Q}{K'}F(\alpha, m). \tag{14}$$

Ultima relaţie de care mai avem nevoie se obţine punînd condiţia ca viteza în punctul C să devină infinită, ceea ce conduce la relaţia :

$$2m^3AK(\beta^2 - \alpha^2)\cdot\sqrt{1 - \alpha^2} = k(H + h_c)\sqrt{1 - m^2\alpha^2}. \tag{15}$$

Rezolvînd (6) în raport cu d, obţinem :

$$kd = A\left[2m + (m^2\beta^2 - 1)\ln\frac{1 + m}{1 - m}\right] - k(H + h_c). \tag{16}$$

Ecuaţiile (13), (14), (15), (16) formează împreună un sistem de patru ecuaţii cu necunoscutele m, α, β şi d iar mărimile H, h_c, k, l şi L sînt cunoscute, fiind caracteristici fizice ale mişcării. Condiţiile în care se obţin soluţii cu sens fizic sînt date de inegalităţile simultane :

$$0<d<l<L;\quad \frac{k(H+h_c)}{2m^3\beta^2AK}<1 \tag{17}$$

care trebuie să atragă $0<\alpha<1$, $0<m<1<\frac{1}{m}<\beta$; viteza în B este pozitivă dacă ultima inegalitate (17) este satisfăcută.

Prin raţionalizarea ecuaţiei (15) se obţine o ecuaţie de gradul trei în α^2 care are o rădăcină în intervalul (0,1).

Se pot obţine mai uşor soluţii ale sistemului amintit dacă ne dăm valori pentru m şi β şi deducem pe l, L, d etc. deoarece se pot folosi tabele de valori ale integralelor eliptice (de ex. [3]).

5. În planul potenţialului complex f, domeniul mişcării se împarte în două regiuni de către linia de curent $\psi = Q =$ const. adică de semidreapta $MC'E'$. În planul fizic (z) le corespund două regiuni care au ca frontieră comună linia de curent $MC'E'$ sau $MC'A'$, punctul M fiind situat pe AB; fie x_0 abscisa lui M. Fluidul ce se scurge printr-o regiune trece prin fanta CC', iar fluidul ce se scurge prin cealaltă regiune nu trece prin fantă.

Vom nota cu $M(0, \eta_0)$ punctul din planul (ζ) ce corespunde lui $M(x_0, 0)$ din planul (z); în planul (f) corespunde $M(-kH, Q)$.

Dacă înlocuim $f = -kH + iQ$ şi $\zeta = i\eta_0$ în (5), obţinem după simplificări

$$2m\eta_0 + (m^2\beta^2-1)\arg\left(\frac{1+m\eta_0 i}{1-m\eta_0 i}\right) - \pi(m^2\beta^2-1) = 0, \tag{18}$$

unde am notat cu arg ( ), argumentul numărului complex din paranteză. Ecuaţia poate fi scrisă şi sub forma

$$\frac{2m\eta_0}{m^2\beta^2-1} + \operatorname{arctg}\frac{2m\eta_0}{1-m^2\eta_0^2} - \pi = 0 \tag{19}$$

r are o singură soluţie $\eta_0 > 0$.

Ecuaţia liniei de curent se obţine din $\psi = Q$ şi în planul (ζ) ea este

$$A\left[2m\eta + (m^2\beta^2-1)\operatorname{arctg}\frac{2m\eta}{1-m^2(\xi^2+\eta^2)}\right] - Q = 0. \tag{20}$$

Pe porţiunea $C'E'$, $\eta = 0$ şi $\xi > \frac{1}{m}$; ecuaţia (20) este verificată identic. Derivata $\frac{d\eta}{d\xi}$ se anulează în punctele C' şi M ceea ce înseamnă că porţiunea MC' din linia de curent se racordează cu porţiunea $C'A'$ în planul (z) şi că este normală suprafeţei de alimentare AB în M.

Pentru determinarea ecuaţiilor parametrice ale liniei de curent în planul fizic, ne folosim de (7) ţinînd seama de (20); separînd părţile reale şi imaginare, obţinem

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &kx = -Q + \frac{Q}{K'}\operatorname{Im}\{F(\zeta, m)\}\\ &ky = A\left[2m\,\xi + \frac{1}{2}(m^2\beta^2 - 1)\ln\frac{(1+m\xi)^2 + m^2\eta^2}{(1-m\xi)^2 + m^2\eta^2}\right] -\\ &\quad -\frac{Q}{K'}\operatorname{Re}\{F(\zeta, m)\}\\ &A\left[2m\,\eta + (m^2\beta^2 - 1)\arg\left(\frac{1+m\zeta}{1-m\zeta}\right)\right] - Q = 0, \end{aligned}\right.$$

unde am notat prin Re { } şi Im { } partea reală respectiv partea imaginară a expresiei din paranteză.

Funcţiile x şi y depind de un singur parametru dacă ţinem seama că ξ şi η sînt legaţi prin ultima relaţie.

Pe porţiunea $C'A'$ sau $C'E'$ avem $\eta = 0$ şi $\xi > \dfrac{1}{m}$ şi din (21) vom obţine:

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &x = 0\\ &ky = A\left[2m\xi + (m^2\beta^2 - 1)\ln\frac{m\xi + 1}{m\xi - 1}\right] - 2k(H + h_c) + \frac{Q}{K'},\\ &F\left(\frac{1}{m\xi}, m\right). \end{aligned}\right.$$

Pentru a determina pe x_0, înlocuim în (21) $\xi = 0$, $\eta = i\eta_0$ şi obţinem

$$y = 0;\ kx_0 = -Q + \frac{Q}{K'}\cdot\operatorname{Im}\{F(i\eta_0, m)\},$$

unde η_0 este soluţia ecuaţiei (19).

Folosind formula ([4], p. 155):

$$\int_0^u \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}} = \frac{1}{\alpha}\cdot F\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{\beta}, \frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha}\right);$$

$\alpha > \beta > 0$ vom obţine:

$$F(i\eta_0, m) = \frac{i}{m}\int_0^{\eta_0}\frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{\left(\eta^2 + \frac{1}{m^2}\right)(\eta^2 + 1)}} = i\cdot F(\operatorname{arctg}\cdot\eta_0, m').$$

Rezultă pentru x_0 ecuaţia :

$$kx_0 = -Q + \frac{Q}{K'} F(\operatorname{arctg} \eta_0, m') \tag{23}$$

şi deducem că $x_0 < 0$ pentru orice $\eta_0 > 0$.

În particular cînd C şi C' coincid, linia de curent se confundă cu peretele continuu BA' iar în cazul particular cînd C' dispare la infinit, punctul M dispare la $-\infty$, ca şi linia de curent.

6. Ca aplicaţie să luăm $h_c = 0$; $Q = kH = A : 4$. Folosind tabelele de valori ale integralelor eliptice (de ex. [3]), obţinem cu ajutorul lui (3) $m = 0{,}5$, iar din (12), $m^2 \beta^2 - 1 = 1 : 4\pi$.

Vom scrie integralele eliptice sub forma trigonometrică :

$$F(\zeta, m) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}} = F(\varphi, \theta)$$

în care $\zeta = \sin \varphi$ şi $m = \sin \theta$.

Obţinem $m\beta = 1{,}039$; $\beta = 2{,}078$; $K = 1{,}6858$; în B, $w = -1{,}1591\, ik$ şi înlocuind în (15) şi (16), deducem după efectuarea calculelor $\alpha = 0{,}993$; $d = 3{,}3496\, H$ apoi $m\alpha = 0{,}4965$. Mai rezultă $F\left(\frac{1}{m\beta}, m\right) = F(14° 10', 30°)$; $F(\alpha, m) = F(83°10', 30)$.

Înlocuind în (13) şi (14), după efectuarea calculelor vom obţine $l = 3{,}4370\, H$; $L = 7{,}952\, H$; lăţimea fantei $L - l = 4{,}515\, H$ şi $CD = 0{,}0874\, H$. Ecuaţiile (18) şi (23) ne conduc prin rezolvare la rădăcinile lor η_0 respectiv x_0 ; mai întîi găsim $\eta_0 = 0{,}25$ apoi $F(\operatorname{arctg} \eta_0, m') = F(14°, 60°) = 0{,}6239$ şi $x_0 = -0{,}3761\, H$.

Dacă luăm de exemplu $H = 10$ m, obţinem următoarele lungimi măsurate în metri :

$L = 79{,}52$; $l = 34{,}37$; $L - l = 45{,}15$; $CD = 0{,}874$; $MB = 3{,}71$; $BG = 10$.

Debitul prin fantă este $Q = 10\, k$ şi pentru $k = 100$ m/24 ore $= (864)^{-1}$ m/s, de exemplu, vom obţine $Q = 0{,}01157\ \mathrm{m^3/s}$ iar viteza în B este $u = 0$, $v = 115{,}9$ m/24 ore.

Primită la redacţie la 21 ianuarie 1968

PLANE STEADY MOTION WITH FREE SURFACE THROUGH A SLOT IN A POROUS MEDIUM

ABSTRACT

This paper considers the plane steady motion, with free surface, in a homogeneous isotropic porous medium when there is a slit in a vertical wall. The discharge through the slit, the parametric equations of the free surface, the filtration velocity and the pressure are determined. Finally a numerical application is given.

BIBLIOGRAFIE

1. П. Я. Полубяринова-Кочина, *Теория движения грунтовых вод.* Москва, 1952.
2. St. I. Gheorghiţă, *Metode matematice în hidrogazodinamica subterană.* Edit. Academiei, Bucureşti, 1966.
3. Ф. Б. Нельсон-Скорняков, *Фильтрация в однородной среде.* Москва, 1949.
4. I. M. Rijik, I. S. Gradstein, *Tabele de integrale, sume, serii şi produse.* Edit. tehnică, Bucureşti, 1955.

CIURURI ȘI TOPOLOGII ADITIVE (III)

DE

ALEXANDRU GH. RADU

Sînt expuse noțiunile de ciur și topologie aditivă insistîndu-se mai mult asupra ciururilor generate și comportarea lor la schimbarea bazei și se arată corespondența biunivocă ce există între topologiile aditive ale unei $\mathcal{U}$-categorii preaditive mici $\mathcal{C}$ și subcategoriile localizante ale toposului abelian $\overline{\mathcal{C}}$ al prefasciculelor aditive de grupuri abeliene definite pe $\mathcal{C}$.

Sînt date de asemenea cîteva exemple de topologii aditive arătîndu-se că topologia epimorfică a unei categorii aditive este mai puțin fină ca topologia canonică, cele două topologii coincizînd dacă $\mathcal{C}$ este abeliană sau aditivă cu produse fibrate.

1. Fie $\mathcal{C}$ o $\mathcal{U}$-categorie și X un obiect din $\mathcal{C}$.

Obiectul X se numește quarabil în $\mathcal{C}$ dacă există produsul său direct cu oricare alt obiect din $\mathcal{C}$.

Notăm cu $\mathcal{C}/X$ categoria ale cărei obiecte sînt perechi (Y, f), cu Y obiect din $\mathcal{C}$ și $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, și ale cărei morfisme sînt evidente.

$\mathcal{C}/X$ este o $\mathcal{U}$-categorie și se numește categoria obiectelor din $\mathcal{C}$ deasupra lui X sau categoria morfismelor din $\mathcal{C}$ de adresă X.

Morfismul $Y \xrightarrow{f} X$ din $\mathcal{C}$ se numește quarabil (fibrabil) dacă (Y, f) este obiect quarabil în $\mathcal{C}/X$ sau, ceea ce este echivalent, dacă pentru orice morfism $Z \xrightarrow{g} X$ din $\mathcal{C}$ există diagrama carteziană

$$\begin{tikzcd}
Y \times_X Z \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d, "g"] \\
Y \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}$$

Familia $(X_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$ se numește quarabilă dacă fiecare f_i este quarabil.

Evident, $(X, 1_X)$ este obiect final în $\mathcal{C}/X$ și este obiect nul dacă X este obiect inițial în $\mathcal{C}$.

Există un functor fidel

$$j_X : \mathcal{C}/X \to \mathcal{C}, \quad ((Y, f) \rightsquigarrow Y)$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 2, P. 261–277, BUCUREȘTI, 1969

ce comută cu produsele fibrate reprezentabile şi prin urmare păstrează monomorfismele :

Functorul J_x se numeşte functorul sursă şi este un izomorfism de categorii dacă X este obiect final în $\mathcal{C}$.

Faptul că J_x este fidel, este evident şi deoarece un morfism $u : X \to Y$ dintr-o categorie $\mathcal{C}$ este monomorfism dacă şi numai dacă diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "1_X"'] & X \arrow[d, "u"] \\
X \arrow[r, "u"] & Y
\end{tikzcd}$$

este carteziană, rămîne de arătat numai că J_x comută cu produsele fibrate reprezentabile.

Fie în $\mathcal{C}$ diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \underset{Z}{\times} Y_2 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & Y_1 \arrow[d, "m_1"] \arrow[dr, "Y_1"] & \\
Y_2 \arrow[r, "m_2"] \arrow[rr, bend right, "f_2"'] & Z \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}$$

cu pătratul cartezian. Totul va fi terminat dacă vom arăta că $Y_1 \underset{X}{X} Y_2 \xrightarrow{f_1 p_1 = f_2 p_2} X$ este produsul cartezian în $\mathcal{C}/X$ al diagramei

$$\begin{tikzcd}
 & Y_1 \arrow[d, "m_1"] \arrow[dr, "f_1"] & \\
Y_2 \arrow[r, "m_2"] \arrow[rr, bend right, "f_2"'] & Z \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

Fie (Q, g) un obiect din $\mathcal{C}/X$ şi $q_1 : Q \to Y_1$, $q_2 : Q \to Y_2$ astfel ca $f_1 q_1 = g = f_2 q_2$ şi $m_1 q_1 = m_2 q_2$, adică diagrama

$$\begin{tikzcd}
(Q, g) \arrow[r] \arrow[d] & (Y_1, f_1) \arrow[d] \\
(Y_2, f_2) \arrow[r] & (Z, f)
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă în $\mathcal{C}/X$. Din $m_1 q_1 = m_2 q_2$ rezultă existenţa unui morfism unic $\theta : Q \to Y_1 \underset{Z}{\times} Y_2$ în $\mathcal{C}$ aşa ca $p_1 \theta = q_1$ şi $p_2 \theta = q_2$ de unde $f_1 p_1 \theta = g = f_2 p_2 \theta$ şi afirmaţia este dovedită.

Dacă X este obiect quarabil în $\mathcal{C}$, atunci functorul „produs prin X"

$$\pi_x : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/X, \quad (Y \rightsquigarrow (Y \times X \xrightarrow{p_X} X))$$

este un adjunct la dreapta pentru J_x.

Orice morfism $Y \xrightarrow{m} X$ din $\mathcal{C}$ induce un functor

$$j_m : \mathcal{C}/Y \to \mathcal{C}/X, \quad ((Z, g) \to (Z, mg))$$

cu proprietatea că diagrama de categorii şi functori

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}/Y \arrow[rr, "j_m"] \arrow[dr, "j_Y"'] & & \mathcal{C}/X \arrow[dl, "j_X"] \\
& \mathcal{C} &
\end{tikzcd}$$

este comutativă.

Dacă m este morfism quarabil în $\mathcal{C}$, functorul „schimbare de bază"

$$j'_m : \mathcal{C}/X \to \mathcal{C}/Y, \quad ((Z \to X) \rightsquigarrow (Y \underset{X}{\times} Z \to Y))$$

este un adjunct la dreapta pentru J_m şi coincide cu π_Y dacă X este obiect final în $\mathcal{C}$.

Familia $\mathcal{X} = (X_i \xrightarrow{f_i} X)_{i\in I}$ de morfisme din $\mathcal{C}$ se numeşte epimorfică dacă pentru orice obiect Z din $\mathcal{C}$, morfismul canonic

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \to \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Z)$$

este monomorfism în $\mathcal{U}$ — Ens ($=$ $\mathcal{U}$-categoria ale cărei obiecte sînt mulţimile lui $\mathcal{U}$), adică dacă diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, "f_i"] & X \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & Z
\end{tikzcd}$$

este comutativă pentru orice $i \in I$, atunci $g = h$.

Evident, dacă $\mathcal{C}$ are sume directe, familia $\mathcal{X}$ este epimorfică dacă şi numai dacă morfismul canonic

$$\bigoplus_{i\in I} X_i \to X$$

este epimorfism.

Familia $\mathcal{X}$ se numeşte epimorfic universală dacă este o familie epimorfică stabilă la schimbarea bazei, adică dacă morfismele ei sînt quarabile şi dacă, pentru orice morfism $Y \xrightarrow{f} X$ din $\mathcal{C}$, familia

$$(X_i \underset{X}{\times} Y \xrightarrow{f'_i} Y)_{i\in I}$$

este epimorfică.

Familia $\mathcal{X}$ se numeşte epimorfic efectivă dacă diagrama carteziană

$$\begin{tikzcd}
X_i \underset{X}{\times} X_j \arrow[r] \arrow[d] & X_j \arrow[d, "f_j"] \\
X_i \arrow[r, "f_i"] & X
\end{tikzcd}$$

există pentru orice $(i, j) \in I \times I$ şi dacă, pentru orice obiect Z din $\mathcal{C}$, diagrama canonic constituită

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Z) \rightrightarrows \prod_{(i,j)\in I\times I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i \underset{X}{\times} X_j, Z)$$

este exactă în $\mathcal{U}$ — Ens.

Familia $\mathcal{X}$ se numește epimorfic efectiv universală dacă este o familie epimorfic efectivă stabilă la schimbarea bazei, adică dacă morfismele ei sînt quarabile și dacă pentru orice morfism $Y \xrightarrow{f} X$ din $\mathcal{C}$, familia

$$(X_i \underset{X}{\times} Y \xrightarrow{f'_i} Y)_{i \in I}$$

este epimorfic efectivă.

Sînt evidente implicațiile logice

$$\begin{tikzcd}
\text{Epimorfic efectiv universală} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{epimorfic efectivă} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{epimorfic universală} \arrow[r, Rightarrow] & \text{epimorfică}
\end{tikzcd}$$

Dacă familia $\mathcal{X}$ constă dintr-un singur morfism, se obține noțiunea uzuală de epimorfism, epimorfism universal, epimorfism efectiv, epimorfism efectiv universal.

Un morfism $f : X \to Y$ din $\mathcal{C}$ se numește secționabil dacă există un morfism $s : Y \to X$ (nu neapărat unic !) astfel ca $f \cdot s = 1_Y$.

Rezultă *aposteriori* că f este epimorfism.

1.1. Propoziție. *Proprietatea unui morfism de a fi secționabil este stabilă la schimbarea bazei.*

Fie, într-adevăr, în $\mathcal{C}$ diagrama carteziană

$$\begin{tikzcd}
X \underset{Y}{\times} Z \arrow[rr, "f'"] \arrow[dd, "g'"'] & & Z \arrow[dd, "g"] \\
& Z \arrow[ur, "1_Z"] \arrow[dl, "sg"'] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & Y
\end{tikzcd}$$

cu f secționabil. Din proprietatea de universalitate a produsului fibrat rezultă un morfism unic $\theta : Z \to X \underset{Y}{\times} Z$ astfel ca $g' \theta = sg$ și $f' \theta = 1_Z$ adică f' este secționabil.

1.2. Propoziție. *Dacă $f : X \longrightarrow Y$ este un morfism secționabil astfel ca diagrama carteziană*

$$\begin{tikzcd}
X \underset{Y}{\times} X \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

să existe, atunci f este epimorfism efectiv și este epimorfism efectiv universal dacă f este și quarabil.

Demonstrație. Prima afirmație revine la a arăta că diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
X \underset{Y}{\times} X \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

este exactă. Fie $\rho : X \to Z$ cu $\rho p_1 = \rho p_2$.

Evident, $\rho' = \rho \cdot s : Y \to Z$ are proprietatea că $\rho' f = \rho$ căci dacă $\theta : X \to X \underset{Y}{\times} X$ este unicul morfism cu $p_1 \theta = 1_X$ și $p_2 \theta = sf$ $(fs = 1_X)$, atunci $\rho' f = \rho sf = \rho p_2 \theta = \rho p_1 \theta = \rho 1_X = \rho$.

A doua afirmație este evidentă.

1.3. COROLAR. *Orice izomorfism este epimorfism efectiv universal.*

1.4. PROPOZIŢIE. *Orice epimorfism $f : X \to Y$ efectiv care este şi monomorfism, este izomorfism.*

Demonstraţie. Din diagrama comutativă şi exactă

$$\begin{tikzcd} X \underset{Y}{\times} X \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

rezultă $p_1 = p_2$ şi un morfism unic $f' : Y \to X$ aşa ca $f'f = 1_X$. Totul este terminat dacă arătăm că şi $ff' = 1_Y$, fapt ce rezultă din proprietatea de universalitate a conucleului de săgeată dublă.

$$\begin{tikzcd} X \underset{Y}{\times} X \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[dl, dashed, "1_Y ; ff'"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

1.5. COROLAR. *Un monomorfism secţionabil este izomorfism.*

1.6. PROPOZIŢIE. *Familiile epimorfic efectiv universale sînt stabile la compunere, adică dacă*

$$(X_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$$

este o familie epimorfic efectiv universală şi dacă, pentru orice $i \in I$,

$$(X_{j_i} \xrightarrow{f_{j_i}} X_i)_{j_i \in J_i}$$

este o familie epimorfic efectiv universală, atunci familia

$$(X_{j_i} \xrightarrow{f_i \cdot f_{j_i}} X)_{i \in I,\, j_i \in J_i}$$

este epimorfic efectiv universală.

Demonstraţia se poate găsi în [1] sau [3].

1.7. PROPOZIŢIE. *Familiile epimorfic efectiv universale sînt stabile la schimbarea bazei, adică dacă $(X_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$ este o familie epimorfic efectiv universală şi dacă $Y \xrightarrow{g} X$ este un morfism din $\mathcal{C}$, atunci familia*

$$(X_i \underset{X}{\times} Y \xrightarrow{f'_i} Y)_{i \in I}$$

este epimorfic efectiv universală.

Demonstraţia este evidentă prin definiţie.

1.8. PROPOZIŢIE. *Într-o categorie abeliană orice epimorfism este efectiv universal* [3].

2. CIURURI ADITIVE

Fie $\mathcal{C}$ o $\mathcal{U}$-categorie preaditivă mică, $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, $\mathcal{C}/X$ categoria obiectelor din $\mathcal{C}$ deasupra lui X şi $h : \mathcal{C} \longrightarrow \overline{\mathcal{C}}$ imersiunea canonică.

2.1. DEFINIŢIE. Se numeşte ciur aditiv al lui X, sau peste X, orice monomorfism $R \xhookrightarrow{i} h_X$ din $\overline{\mathcal{C}}$.

Întrucît nu vom considera decît ciururi aditive, vom omite adjectivul „aditiv".

Uneori vom abuza de notația $R \overset{i}{\hookrightarrow} X$ sau pur și simplu R pentru ciurul $R \overset{i}{\hookrightarrow} h_X$ al lui X.

A da un ciur $R \overset{i}{\hookrightarrow} h_X$ peste X revine la a da pentru fiecare $Y \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ un subgrup $R(Y)$ al grupului abelian $h_X(Y)$ în așa fel încît incluziunea

$$i(Y) : R(Y) \longrightarrow h_X(Y)$$

să fie functorială în Y, adică pentru orice $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', Y)$ există un morfism de grupuri abeliene

$$R(g) : R(Y) \longrightarrow R(Y')$$

astfel încît diagrama

$$\begin{tikzcd}
R(Y) \arrow[r, "i_Y"] \arrow[d, "R(g)"'] & h_X(Y) \arrow[d, "h_X(g)"] \\
R(Y') \arrow[r, "i_{Y'}"] & h_X(Y')
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă.

Rezultă imediat că $R(X)$ este un ideal drept al inelului cu element unitate $h_X(X)$.

Evident, $h_X \xrightarrow{1_{h_X}} h_X$ este un ciur al lui X și se numește ciurul identitate.

2.2. PROPOZIȚIE. *Pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ există o corespondență biunivocă, ce păstrează incluziunile stricte, între mulțimea ciururilor R peste X și mulțimea subcategoriilor pline nevide $\mathcal{R}$ ale lui $\mathcal{C}/X$ supuse la următoarele două condiții :*

1°. *Dacă (Y, f), (Y, g) sînt obiecte din $\mathcal{R}$, atunci $(Y, f-g)$ este obiect din $\mathcal{R}$.*

2°. *Dacă (Y, f) este obiect din $\mathcal{R}$ și $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', Y)$, atunci (Y', fg) este obiect din $\mathcal{R}$.*

Demonstrație. Fie $R \overset{i}{\hookrightarrow} h_X$ un ciur peste X și $\mathcal{R}$ subcategoria plină a lui $\mathcal{C}/X$ definită de obiectele (Y, f) cu $f \in R(Y)$ sau, ceea ce este echivalent, de obiectele (Y, f) pentru care există o diagramă comutativă (unică !)

$$\begin{tikzcd}
 & h_Y \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "h_f"] \\
R \arrow[r, "i"] & h_X
\end{tikzcd}$$

Evident, $\mathcal{R}$ este nevidă și verifică cele două condiții :

Reciproc, dacă $\mathcal{R}$ este o subcategorie plină nevidă a lui $\mathcal{C}/X$ verificînd cele două condiții, atunci asocierea

$$Y \rightsquigarrow R(Y) = \{Y \xrightarrow{f} X / (Y, f) \text{ obiect din } \mathcal{R}\}$$

definește un obiect $\mathcal{R}$ în $\overline{\mathcal{C}}$ subobiect al lui h_X.

Se arată uşor că cele două corespondenţe sînt una inversă alteia şi păstrează incluziunile stricte.

În această corespondenţă, ciurul identitate se corespunde cu însăşi categoria $\mathcal{C}/X$.

2.3. PROPOZIŢIE. *Orice familie* $\{R_i\}_{i\in I}$ *de ciururi peste* X *posedă o margine inferioară* $\bigcap\limits_i R_i$ *şi o margine superioară* $\bigcup\limits_i R_i$.

Demonstraţie. Pentru orice $Y\in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, $(\bigcap\limits_i R_i)(Y) = \bigcap\limits_i R_i(Y)$, iar $(\bigcup\limits_i R_i)(Y)$ este subgrupul lui $h_X(Y)$ generat de reuniunea $\bigcup\limits_i R_i(X)$ a subgrupurilor $R_i(Y)$, $i\in I$.

2.4. *Observaţie.* Orice element din $(\bigcup\limits_i R_i)(Y)$ este o sumă finită de elemente din $R_i(Y)$, $i\in I$.

2.5. *Observaţie.* Fie $\{\mathcal{R}_i\}_{i\in I}$ familia subcategoriilor pline din $\mathcal{C}/X$ corespunzătoare familiei de ciururi $\{R_i\}_{i\in I}$ peste X.

Evident, ciurului $\bigcap\limits_i R_i$ îi corespunde subcategoria plină $\bigcap\limits_i \mathcal{R}_i$ definită de obiectele $\bigcap\limits_i \mathrm{Ob}(\mathcal{R}_i)$ iar ciurului $\bigcup\limits_i R_i$ îi corespunde subcategoria plină $\bigcup\limits_i \mathcal{R}_i$ definită de obiectele $\bigcup\limits_i \mathrm{Ob}(\mathcal{R}_i)$ la care se mai adaugă obiectele de forma (Y, f) cu $f=f_1+\ldots+f_n$ şi $(Y, f_i)\in \mathrm{Ob}\mathcal{R}_i$, $1\leqslant i\leqslant n$.

2.6. *Ciururi generate.* Dacă $f: Y\longrightarrow X$ este un obiect din $\mathcal{C}/X$, $\mathrm{Im}(h_f)\hookrightarrow h_X$ este un ciur (f) al lui X, numit ciurul principal generat de f. Subcategoria plină a lui $\mathcal{C}/X$ corespunzătoare ciurului (f) este definită de obiectele (Z, g) pentru care există o diagramă comutativă

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Evident, pentru orice $X\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, ciurul identitate este principal, generat de 1_X sau de orice $f\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ secţionabil.

Mai general, dacă $(X_i\xrightarrow{f_i}X)_{i\in I}$ este o familie de obiecte din $\mathcal{C}/X$, reuniunea tuturor ciururilor principale (f_i), $i\in I$, se numeşte ciurul generat de familia dată.

2.7. PROPOZIŢIE. *Dacă* $\mathcal{C}$ *este aditivă,* $R\hookrightarrow h_X$ *un ciur peste* $X\in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ *şi* $\mathcal{R}$ *subcategoria plină a lui* $\mathcal{C}/X$ *corespunzătoare ciurului* R, *atunci* $R = \varinjlim h_{X_\alpha}$, *unde* $(X_\alpha\longrightarrow X)$ *sînt obiectele lui* $\mathcal{R}$.

Demonstraţie. Conform lui [4], 1.3, $R = \varinjlim\limits_{\mathcal{C}/_R} h_{s_R}$ şi prin urmare dacă $h_{X_\alpha}\xrightarrow{\varphi}R$ este un morfism functorial, atunci, după T.Y.-G, există un element $x_\alpha\in R(X_\alpha)$, adică un morfism $x_\alpha: X_\alpha\to X$ cu (X_α, x_α) obiect din $\mathcal{R}$.

Reciproc, dacă $(X_\alpha\xrightarrow{x}X)$ este un obiect din $\mathcal{R}$, adică $x\in R(X_\alpha)$, atunci, conform T.Y.-G, există un morfism functorial $\varphi^x: h_{X_\alpha}\to R$ bine determinat de x.

2.8. Corolar. *În cazul aditiv, orice ciur coincide cu ciurul generat de obiectele subcategoriei pline corespunzătoare.*

2.9. *Schimbarea de bază.* Fie R un ciur peste X, $\mathcal{R}$ subcategoria plină a lui $\mathcal{C}/X$ corespunzătoare ciurului R şi $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$.

Deoarece proprietatea unui morfism de a fi monomorfism este stabilă la schimbarea bazei, rezultă că produsul fibrat (calculat în $\bar{\mathcal{C}}$!)

$$u^{-1}(R) = R \underset{X}{\times} Y$$

este un ciur peste Y numit ciurul obţinut din R prin schimbarea de bază dată de u.

Subcategoria $\mathcal{R}'$ a lui $\mathcal{C}/Y$ corespunzătoare ciurului $u^{-1}(R)$ este definită de obiectele (Z, g) cu proprietatea că (Z, ug) este obiect din $\mathcal{R}$.

Există aşadar în categoria $\mathcal{U}$-categoriilor mici următoarea diagramă carteziană

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}' \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{C}/Y \arrow[d, "j_u"] \\
\mathcal{R} \arrow[r, hook] & \mathcal{C}/X
\end{tikzcd}$$

unde j_u este functorul indus de u.

Dacă se notează cu $\Phi(X)$ mulţimea ciururilor lui X, se arată uşor că asocierea

$$X \rightsquigarrow \Phi(X), \quad X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$$

defineşte un functor

$$\Phi : \mathcal{C}^0 \longrightarrow \mathcal{U} - \mathrm{Ens}.$$

2.10. *Observaţie.* Dacă R este generat de familia quarabilă $(X_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$ de obiecte din $\mathcal{C}/X$, atunci pentru orice schimbare de bază $u : Y \longrightarrow X$, ciurul $u^{-1}(R)$ este generat de familia $(X_i \underset{X}{\times} Y \xrightarrow{f'_i} Y)_{i \in I}$ de obiecte din $\mathcal{C}/Y$.

Într-adevăr, $u^{-1}(R) = R \underset{X}{\times} Y = (\bigcup_i (f_i)) \underset{X}{\times} Y = \bigcup_i ((f_i) \underset{X}{\times} Y) \approx \approx \bigcup_i (f'_i)$ căci $(f'_i) = \mathrm{Im}\,(h_{f'_i}) = \mathrm{Im}\,(h_{f_i}) \underset{X}{\times} Y = (f_i) \underset{X}{\times} Y$.

3. TOPOLOGII ADITIVE

Fie $\mathcal{C}$ o $\mathcal{U}$-categorie preaditivă element al lui $\mathcal{U}$.

3.1. Definiţie. Spunem că pe $\mathcal{C}$ s-a definit o topologie aditivă τ dacă pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ s-a dat o mulţime $\tau(X)$ de ciururi (aditive) ale lui X astfel ca :

T_1. $\tau(X) \neq \emptyset$, pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$.

T_2. Dacă $R \in \tau(X)$, atunci $u^{-1}(R) \in \tau(Y)$ pentru orice $u \in \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$.

T_3. Dacă R, R' sînt ciururi ale lui X cu $R \in \tau(X)$ şi dacă $u^{-1}(R') \in \in \tau(Y)$ pentru orice $u \in R(Y)$, atunci $R' \in \tau(X)$.

Întrucît nu considerăm decît topologii aditive, vom omite adjectivul „aditiv".

Numim ciururile din $\tau(X)$ ciururi acoperitoare sau rafinări ale lui X pentru topologia τ.

3.2. DEFINIŢIE. Cuplul $(\mathcal{C}, \tau)$ format dintr-o $\mathcal{U}$-categorie preaditivă element al lui $\mathcal{U}$ dotată cu o topologie τ se numeşte sit preaditiv.

Dacă $\mathcal{C}$ este aditivă, situl $(\mathcal{C}, \tau)$ se numeşte aditiv.

3.3. PROPOZIŢIE. *Dacă τ este o topologie pe $\mathcal{C}$, axioma T_3 este echivalentă cu următoarele două axiome :*

T_3'. *Dacă $R' \subset R$ este o incluziune de ciururi ale lui X şi dacă $R' \in \tau(X)$, atunci $R \in \tau(X)$.*

T_3''. *Dacă $R' \subset R$ este o incluziune de ciururi ale lui X cu $R \in \tau(X)$ şi dacă $u^{-1}(R') \in \tau(Y)$ pentru orice $u \in R(Y)$, atunci $R' \in \tau(X)$.*

Demonstraţie. Necesitatea. $T_3 \Rightarrow T_3''$. Evident. $T_2 + T_3 \Rightarrow T_3'$ căci pentru orice $u \in R'(Y)$, $u^{-1}(R) = u^{-1}(R') \in \tau(Y)$.

Sufícienţa. ($T_3' + T_3'' \Rightarrow T_3$). Fie R, R' două ciururi peste X cu $R \in \tau(X)$ şi $u^{-1}(R') \in \tau(Y)$ pentru orice $u \in R(Y)$.

Considerăm ciurul lui X, $R_1 = R \cap R'$. Evident, pentru orice $u \in R(Y)$, $u^{-1}(R_1) = u^{-1}(R') \in \tau(Y)$ şi cum $R_1 \subset R$, din axioma T_3'' rezultă $R_1 \in \tau(X)$. Însă $R_1 \subset R'$ şi deci $R' \in \tau(X)$ conform axiomei T_3'.

3.4. COROLAR. *Pentru orice $X \in Ob\mathcal{C}$, mulţimea $\tau(X)$, ordonată prin incluziune, este un filtru, adică verifică condiţiile :*

F_1. $\tau(X) \neq \emptyset$.

F_2. *Dacă $R \subset R'$ şi $R \in \tau(X)$, atunci $R' \in \tau(X)$.*

F_3. *Dacă R', $R'' \in \tau(X)$, atunci $R = R' \cap R'' \in \tau(X)$.*

Deci condiţia F_3 este de verificat. Evident, pentru orice $u \in R'(Y)$, $u^{-1}(R) = u^{-1}(R'') \in \tau(Y)$ şi cum $R \subset R'$, rezultă, din axioma T_3'', că $R \in \tau(X)$.

3.5. *Observaţie.* Axioma T_1 poate fi înlocuită cu axioma T_1'. Pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, ciurul identitate este o rafinare a lui X.

Evident, conform axiomei T_3'.

3.6. Pe categoria $\mathcal{C}$ există cel puţin două topologii : topologia grosieră, adică topologia pentru care $\tau(X)$ constă numai din ciurul identitate şi topologia discretă, adică topologia pentru care $\tau(X)$ constă din toate ciururile lui X, oricare ar fi $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$.

Aşadar, mulţimea $\mathcal{T}$ a topologiilor lui $\mathcal{C}$ nu este vidă. Introducem pe $\mathcal{T}$ următoarea relaţie de ordine parţială : vom spune că topologia τ este mai puţin fină decît topologia τ', sau că τ' este mai fină ca τ, şi vom scrie $\tau \leqslant \tau'$ dacă pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, $\tau(X) \subseteq \tau'(X)$, cu alte cuvinte dacă pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, orice rafinare a sa în topologia τ este o rafinare şi în topologia τ'.

Evident, $\mathcal{T}$ dotată cu această relaţie de ordine parţială are un cel mai mic element (topologia grosieră) şi un cel mai mare element (topologia discretă).

Orice familie $(\tau_i)_{i\in I}$ nevidă de elemente din $\mathcal{T}$ posedă o margine inferioară $\bigcap_i \tau_i$ şi o margine superioară $\bigcup_i \tau_i$ definite de aplicaţiile

$$X \rightsquigarrow \Big(\bigcap_i \tau_i\Big)(X) = \bigcap_i (\tau_i(X)),\quad X\in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$$

respectiv

$$X \rightsquigarrow \Big(\bigcup_i \tau_i\Big)(X) = \bigcup_i (\tau_i(X)),\quad X\in \operatorname{Ob}\mathcal{C},$$

unde $\tau_i(X)$, $i\in I$, sînt rafinările lui X în topologia τ_i.

Dată, pentru fiecare $X\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}$, o mulţime $K(X)\neq\emptyset$ de ciururi ale lui X există totdeauna o topologie pe $\mathcal{C}$ pentru care ciururile din $K(X)$ să fie rafinări ale lui X, de exemplu, topologia discretă.

Mai mult, există o cea mai puţin fină topologie pe $\mathcal{C}$ pentru care ciururile din $K(X)$ să fie rafinări ale lui X. O astfel de topologie se numeşte topologia generată de familia de ciururi $\{K(X)\}\ X\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

3.7. DEFINIŢIE. a) O subcategorie plină $i:\mathcal{A}\to\bar{\mathcal{C}}$ se numeşte deasă dacă pentru orice şir exact din $\bar{\mathcal{C}}$,

$$0\to F'\to F\to F''\to 0,$$

F este obiect din $\mathcal{A}$ dacă şi numai dacă F' şi F'' sînt obiecte din $\mathcal{A}$.

b) O subcategorie deasă pentru care functorul de incluziune comută cu limitele inductive se numeşte subcategorie localizantă.

c) O subcategorie localizantă pentru care functorul de incluziune comută cu limitele proiective se numeşte subcategorie bilocalizantă.

3.8. TEOREMĂ. *Există o corespondenţă biunivocă între topologiile lui $\mathcal{C}$ şi subcategoriile localizante ale lui $\bar{\mathcal{C}}$.*

Demonstraţie. Fie τ o topologie pe $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{A}_\tau$ subcategoria plină a lui $\bar{\mathcal{C}}$ definită de obiectele F cu proprietatea că pentru orice $X\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ şi orice $\alpha: h_X\to F$, $\operatorname{Ker}\alpha\in\tau(X)$. Arătăm că $\mathcal{A}_\tau$ este o subcategorie localizantă a lui $\bar{\mathcal{C}}$.

Fie

$$0\to F'\xrightarrow{j} F\xrightarrow{p} F''\to 0$$

un şir exact în $\bar{\mathcal{C}}$. Dacă F este obiect din $\mathcal{A}_\tau$, atunci şi F', F'' sînt obiecte din A_τ, căci dacă $\alpha: h_X\to F'$, $X\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}$, atunci $\operatorname{Ker}\alpha=\operatorname{Ker} j\alpha\in\tau(X)$, deci F' este obiect din $\mathcal{A}_\tau$ şi la fel dacă $\alpha'': h_X\to F''$, $X\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}$, atunci există $\alpha': h_X\to F$ astfel ca $p\alpha'=\alpha$ şi deci $\operatorname{Ker}\alpha\supset\operatorname{Ker}\alpha'\in\tau(X)$ şi prin urmare $\operatorname{Ker}\alpha\in\tau(X)$, adică F'' este obiect din $\mathcal{A}_\tau$.

Reciproc, presupunem că F', F'' sînt obiecte din $\mathcal{A}_\tau$ şi să arătăm că şi F este obiect din $\mathcal{A}_\tau$.

Fie $\alpha: h_X\to F$, $X\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ şi $R=\operatorname{Ker}\alpha$. Dacă $R''=\operatorname{Ker} p\,\alpha$, atunci, prin ipoteză, $R''\in\tau(X)$ şi evident $R\subset R''$.

Vom arăta că pentru orice $u\in R''(Y)$, $u^{-1}(R)\in\tau(Y)$ şi totul va fi terminat conform axiomei T_3''.

Din $u\in R''(Y)$ rezultă $p\cdot\alpha\cdot h_u=0$ şi prin urmare există $\alpha': h_Y\to F'$ astfel ca $j\,\alpha'=\alpha\, h_u$.

Prin ipoteză însă $R' = \operatorname{Ker} \alpha' \in \tau(Y)$ şi va fi deci suficient să arătăm că $u^{-1}(R) \supset R'$, fapt evident.

Am arătat aşadar că $\mathcal{A}_\tau$ este o subcategorie deasă a lui $\overline{\mathcal{C}}$.

Fie acum $(F_i)_{i \in I}$ o familie de obiecte din $\mathcal{A}_\tau$, $F = \varinjlim\limits_{I} F_i$ (calculată în $\overline{\mathcal{C}}$!) şi $\alpha : h_X \to F$, $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$.

Deoarece functorul $\operatorname{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_X, -)$ comută cu limitele inductive, rezultă existenţa unui $i \in I$ şi a unui $\alpha' : h_X \to F_i$ astfel ca $f_i \cdot \alpha' = \alpha$, unde $f_i : F_i \to F$ este morfismul de structură de indice i.

Din $\operatorname{Ker} \alpha \supset \operatorname{Ker} \alpha' \in \tau(X)$ rezultă că F este un obiect din $\mathcal{A}_\tau$ şi prin urmare $\mathcal{A}_\tau$ este o subcategorie localizantă a lui $\overline{\mathcal{C}}$.

Reciproc, fie $\mathcal{A}$ o subcategorie localizantă a lui $\overline{\mathcal{C}}$ şi pentru orice $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, fie $\tau(X)$ mulţimea ciururilor $R \overset{i}{\hookrightarrow} h_X$ peste X cu proprietatea că h_X/R este obiect din $\mathcal{A}$.

Asocierea

$$X \rightsquigarrow \tau(X)$$

defineşte o topologie pe $\mathcal{C}$.

T'_1. Evident, $h_X \in \tau(X)$ căci $h_X/h_X = 0$ şi 0 este obiect din $\mathcal{A}$ ca fiind limita inductivă a familiei vide de obiecte din $\mathcal{A}$.

T_2. Fie $R \overset{i}{\hookrightarrow} X$ un ciur din $\tau(X)$ şi $u \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$.

Din diagrama comutativă canonic construită

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & u^{-1}(R) \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d, "u"] & Y/u^{-1}(R) \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r, hook] & X \arrow[r] & X/R \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

cu X/R obiect din $\mathcal{A}$ şi θ monomorfism, rezultă $Y/u^{-1}(R)$ obiect din $\mathcal{A}$, adică $u^{-1}(R) \in \tau(Y)$.

T'_3. Fie $R' \subset R$ o incluziune de ciururi peste X cu $R' \in \tau(X)$. Din diagramă comutativă canonic constantă

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R' \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & X/R' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\theta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r, hook] & X \arrow[r] & X/R \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

cu X/R' obiect din $\mathcal{A}$ şi θ epimorfism, rezultă X/R obiect din $\mathcal{A}$, adică $R \in \tau(X)$.

T''_3. Fie $R' \subset R$ o incluziune de ciururi peste X cu $R \in \tau(X)$ şi $u^{-1}(R') \in \tau(Y)$ pentru orice $u \in R(Y)$.

Pentru a arăta că $R' \in \tau(X)$, este suficient să arătăm că R/R' este obiect din $\mathcal{A}$ aşa cum rezultă din şirul exact

$$0 \longrightarrow R/R' \longrightarrow X/R' \longrightarrow X/R \longrightarrow 0$$

cu X/R obiect în $\mathcal{A}$.

Fie $\alpha : h_Y \longrightarrow R/R'$, $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Există un morfism $\beta : h_Y \longrightarrow R$ şi diagrama comutativă canonic constantă

$$\begin{tikzcd}
& & & 0 \arrow[d] & \\
& & & \mathrm{Ker}\,\alpha \arrow[d] & \\
& \beta^{-1}(R') \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[rru, dashed, "\theta"] & & h_Y \arrow[d, "\alpha"] \arrow[ld, dashed, "\beta"'] & \\
0 \arrow[r] & R' \arrow[r] & R \arrow[r] & R/R' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

cu θ monomorfism. Însă $\beta^{-1}(R') \approx (i\beta)^{-1}(R')$, unde $i : R \hookrightarrow X$ este monomorfismul canonic.

Prin ipoteză însă $(i\beta)^{-1}(R') \in \tau(Y)$ şi din axioma T_3' rezultă $\mathrm{Ker}\,\alpha \in \tau(Y)$, adică R/R' este obiect din $\mathcal{A}$.

Se arată uşor că cele două corespondenţe stabilite sînt una inversă alteia.

3.9. *Exemple de topologii.* A) Fie A un inel cu element unitate a cărei mulţime subiacentă este element din $\mathcal{U}$ şi fie $\mathcal{C}$, $\mathcal{U}$-categoria preaditivă cu un singur obiect corespunzătoare.

$\mathcal{U}$-categoria $\overline{\mathcal{C}}$ coincide cu categoria Mod A a A-modulelor drepte unitare iar imersiunea canonică $h : \mathcal{C} \to \overline{\mathcal{C}}$ înzestrează pe A cu structura sa canonică de A-modul drept unitar.

A da o topologie pe $\mathcal{C}$ revine la a da o familie $F \neq \emptyset$ de ideale drepte ale inelului A ce îndeplinesc următoarele condiţii :

A_1. Dacă $\underline{a} \in F$ şi $x \in A$, atunci $(\underline{a} : x) = \{y \in A / xy \in \underline{a}\} \in F$

A_2. Dacă $\underline{a} \in F$ şi $\underline{b}$ este un ideal drept al inelului A astfel ca pentru orice $x \in a$, $(\underline{b} : x) \in F$, atunci $\underline{b} \in F$.

Rezultă imediat că F este un filtru, relativ la ordinea parţială dată de incluziune.

Dacă $\underline{a}$ este un ideal bilateral idempotent $(\underline{a}^2 = \underline{a})$ al inelului A, atunci mulţimea F a tuturor idealelor drepte din A care conţin pe $\underline{a}$ defineşte o topologie pe $\mathcal{C}$. Mulţimea $\{\underline{a}\}$ este o bază pentru filtru F.

Evident, $F \neq \emptyset$ căci $\underline{a} \in F$.

A_1. Fie $\underline{b} \in F$ şi $x \in A$. Din $\underline{a} \subseteq \underline{b}$ şi $\underline{a}.x \subset \underline{a} \subseteq \underline{b}$ rezultă $\underline{a} \subseteq (\underline{b} : x)$ adică $(\underline{b} : x) \in F$.

A_2. Fie $\underline{b} \in F$ şi $\underline{c}$ un ideal drept din A cu proprietatea că pentru orice $x \in \underline{b}$, $(\underline{c} : x) \in F$ adică $\underline{a} \subset (\underline{c} : x)$.

Deoarece $\underline{a}^2 = \underline{a}$, pentru orice $y \in \underline{a}$ există egalitatea :

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i,\ x_i,\ y_i \in \underline{a} \subset b,\ 0 \leqslant i \leqslant n$$

de unde rezultă

$$\underline{a} \subset (\underline{c} : x_i),\ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Cum $y_1, \ldots, y_n \in \underline{a}$, obţinem $y \in \underline{c}$, adică $a \subseteq \underline{c}$ şi deci $c \in F$.

Fie $\mathcal{F}$ subcategoria localizantă a lui Mod A asociată lui F. Subcategoria $\mathcal{F}$ este bilocalizantă.

Epimorfismul canonic

$$u : A \longrightarrow A/\underline{a}$$

induce functorul deplin fidel

$$u_* : \text{Mod } (A/\underline{a}) \longrightarrow \text{Mod } A$$

care permite să identificăm, pînă la o echivalenţă de categorii, pe Mod $(A/\underline{a})$ cu $\mathcal{F}$.

Fie M un obiect din $\mathcal{F}$. Introducem pe M o structură de $A/\underline{a}$-modul drept unitar în mod canonic

$$x \cdot \hat{a} = \widehat{xa}, \quad x \in M, \quad \hat{a} \in A/a.$$

Această operaţie este bine definită căci dacă

$$\varphi^x : A \longrightarrow M, \ (a \rightsquigarrow xa)$$

este morfismul din Mod A corespunzător lui x, atunci $\underline{a} \subset \text{Ker } \varphi^x$.

Reciproc, fie M un $A/\underline{a}$-modul, $\varphi : A \longrightarrow u_*(M)$ un morfism din Mod A şi $x = \varphi(1)$. Există atunci şirul exact

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \varphi \longrightarrow A \longrightarrow xA \longrightarrow 0$$

cu $\underline{a} \subset \text{Ker } \varphi$ adică $u_*(M)$ este un obiect din $\mathcal{F}$.

Evident, $\mathcal{F}$ este bilocalizantă căci o limită proiectivă de $A/\underline{a}$-module este un $A/\underline{a}$-modul.

B. Fie $(Q_i)_{i \in I}$ mulţimea obiectelor injective din Mod A şi $\mathcal{F}$ subcategoria plină a lui Mod A definită de obiectele A cu proprietatea $\text{Hom}_A(M, Q_i) = 0$, $i \in I$.

Evident, $\mathcal{F}$ este o subcategorie localizantă şi fie F topologia lui A asociată lui $\mathcal{F}$.

Mulţimea F coincide cu mulţimea idealelor drepte a din A cu proprietatea

$$(*) \qquad \text{Hom}_A(A, Q_i) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A((\underline{a} : x), Q_i), \ i \in I, \ x \in A.$$

Dacă $\underline{a} \in F$, din $\text{Hom}_A(A/\underline{a}, Q_i) = 0$, $i \in I$ şi diagrama comutativă şi exactă

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \underline{a} \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & A/\underline{a} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \underline{a} : x \arrow[r] & A \arrow[r] & A/\underline{a} : x \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & & 0 &
\end{tikzcd}$$

rezultă $\text{Hom}_A(A/\underline{a} : x, Q_i) = 0$, $i \in I$ şi deci izomorfismul (*).

Reciproca este evidentă, căci este suficient să luăm $x = 1$ în izomorfismul (*).

Evident, F este cea mai fină topologie pe A cu proprietatea :

$$\mathrm{Hom}_A(A, Q_i) \approx \mathrm{Hom}_A(\underline{a}, Q_i), \quad i \in I, \quad \underline{a} \in F.$$

C. Fie A un domeniu de integritate a cărei mulţime subiacentă este un element din $\mathcal{U}$.

Mulţimea F a idealelor nenule din A defineşte o topologie pe A pentru care subcategoria localizantă asociată constă din toate A-modulele drepte unitare cu torsiune.

D. Fie $\mathcal{C}$ o $\mathcal{U}$-categorie preaditivă mică, $\mathcal{D}$ o $\mathcal{U}$-categorie aditivă şi $T : \overline{\mathcal{C}} \to \mathcal{D}$ un functor covariant aditiv ce comută cu limitele inductive şi cu limitele proiective finite. Notăm cu τ_T topologia lui $\mathcal{C}$ asociată subcategoriei localizante Ker T a lui $\overline{\mathcal{C}}$. Cu alte cuvinte, pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, mulţimea $\tau_T(X)$ constă din toate ciururile $R \overset{i}{\hookrightarrow} X$ peste X cu proprietatea că $T(i)$ este izomorfism în $\mathcal{D}$.

E. *Topologia epimorfică.* Considerăm pentru fiecare $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ mulţimea Cov (X) a tuturor familiilor epimorfic efectiv universale de adresă X.

Evident, pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, Cov $(X) \neq \emptyset$ căci conţine cel puţin familia $\{1_X\}$.

Pentru fiecare $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ notăm cu $\mathcal{E}(X)$ mulţimea ciururilor peste X generate de elementele lui Cov (X) şi cu $E(X)$ mulţimea ciururilor lui X care conţin cel puţin un ciur din $\mathcal{E}(X)$.

Asocierea

$$X \rightsquigarrow E(X), \quad X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$$

defineşte o topologie E pe $\mathcal{C}$ numită topologia epimorfică a lui $\mathcal{C}$ şi nu este alta decît cea generată de familia de ciururi $\{\mathcal{E}(X)\}\ X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.

T_1. Este evidentă căci $\emptyset \neq \mathcal{E}(X) \subset E(X)$, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.

T_2. Fie $R \in E(X)$ şi $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$. Evident, $u^{-1}(R) \in E(Y)$ căci dacă R conţine ciurul generat de familia $(X_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(X)$, atunci $u^{-1}(R)$ conţine ciurul generat de familia

$$(X_i \times_X Y \xrightarrow{f'_i} Y)_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(Y).$$

T_3. Fie $R \in E(X)$, R' un ciur peste X cu proprietatea că pentru orice $u \in R(Y)$, $u^{-1}(R') \in E(Y)$.

În particular, dacă R conţine ciurul generat de familia $(X_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(X)$, atunci $f_i^{-1}(R') \in E(X_i)$, $i \in I$, adică pentru orice $i \in I$ există o familie $(X_{i_j} \xrightarrow{f_{ij}} X_i)_{i_j \in I_i} \in \mathrm{Cov}(X_i)$ care generează un ciur conţinut în $f_i^{-1}(R')$. Dar atunci

$$(X_{i_j} \xrightarrow{f_i \cdot f_{ij}} X)_{i_j \in \amalg I_i}$$

este o familie din Cov (X) ce generează un ciur conţinut în R' şi deci $R' \in E(X)$.

Evident, ciururile lui $\mathcal{E}(X)$ sînt rafinări ale lui X în topologia E şi E este cea mai puţin fină topologie pe $\mathcal{C}$ cu această proprietate cum uşor rezultă din T'_3.

Observaţia 1. În demonstraţia faptului că asocierea

$$X \rightsquigarrow E(X), \quad X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$$

defineşte pe $\mathcal{C}$ o topologie nu a intervenit explicit proprietatea elementelor din Cov (X) de a fi familie epimorfic efectiv universale; această proprietate intervine însă la a arăta stabilitatea la compunere a unor astfel de familii ([3]).

Putem aşadar presupune că asocierea

$$X \rightsquigarrow \mathrm{Cov}(X), \quad X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$$

verifică următoarele condiţii:

a) Cov $(X) \neq \emptyset$, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.
b) Orice element din Cov (X) este quarabil.
c) Stabilitatea la schimbarea bazei.
d) Stabilitatea la compunere.

În acest caz se spune că asocierea

$$X \rightsquigarrow \mathrm{Cov}(X), \quad X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$$

defineşte pe $\mathcal{C}$ o pretopologie iar asocierea

$$X \rightsquigarrow E(X), \quad X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$$

se numeşte topologia definită de această pretopologie.

Observaţia 2. Pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $\mathcal{E}(X)$ este o bază a filtrului $E(X)$ stabilă la schimbarea bazei, adică pentru orice $R \in \mathcal{E}(X)$ şi orice $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, $u^{-1}(R) \in \mathcal{E}(Y)$.

F. *Topologia canonică.* Fie $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i \in I}$ o familie de obiecte din $\overline{\mathcal{C}}$ şi pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, fie $\tau(X)$ mulţimea ciururilor R peste X cu proprietatea că pentru orice $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ şi orice $F_i \in \mathcal{F}$, aplicaţia canonică

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_Y, F_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(u^{-1}(R), F_i)$$

este izomorfism în $\mathcal{U}$ — Ab.

Asocierea

$$X \rightsquigarrow \tau(X), \quad X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$$

defineşte pe $\mathcal{C}$ o topologie, fiind cea mai fină cu proprietatea că pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ şi orice $R \in \tau(X)$, aplicaţia canonică

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_X, F_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(R, F_i), \, i \in I$$

este izomorfism în $\mathcal{U}$ — Ab.

În particular, dacă $\mathcal{F}$ constă din toate obiectele reprezentabile din $\overline{\mathcal{C}}$, topologia corespunzătoare se numeşte topologia canonică.

Pentru fiecare $i \in I$, fie Q_i anvelopa injectivă a lui F_i, $\mathcal{A}$ subcategoria, evident localizantă, a lui $\overline{\mathcal{C}}$ definită de obiectele G din $\overline{\mathcal{C}}$ cu proprietatea că $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(G, Q_i) = 0$ pentru orice $i \in I$ şi τ_1 topologia lui $\mathcal{C}$ corespunzătoare lui $\mathcal{A}$. Prima parte a afirmaţiei va fi dovedită dacă vom arăta că pentru orice obiect X din $\mathcal{C}$, $\tau(X) = \tau_1(X)$.

Fie $R \in \tau_1(X)$. Cum τ_1 este o topologie, rezultă că, pentru orice $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, $u^{-1}(R) \in \tau_1(Y)$ şi din definiţia lui τ_1 rezultă că $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h(Y)/u^{-1}(R'), Q_i) = 0$ şi prin urmare $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_Y/u^{-1}(R), F_i) = 0$ pentru orice $i \in I$, cu alte cuvinte aplicaţia canonică

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_Y, F_i) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(u^{-1}(R), F_i)$$

este monomorfism în $\mathcal{U}$-Ab pentru orice $i \in I$.

Fie acum $f : u^{-1}(R) \to F_i$ şi $F_i \xrightarrow{j} Q_i$ incluziunea canonică care este un monomorfism retractabil, adică există $j' : Q_i \to F_i$ cu $j' j = 1_{F_i}$.

Din izomorfismul

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_Y, Q_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(u^{-1}(R), Q_i)$$

rezultă $\theta : h_Y \to Q_i$ astfel ca $u^{-1}(R) \to h_Y \to Q_i = u^{-1}(R) \to F_i \to Q_i$. Evident, $\psi(j'.\theta) = f$ şi deci ψ este şi epimorfism, adică izomorfism şi deci $\tau_1(X) \subseteq \tau(X)$ pentru orice obiect X din $\mathcal{C}$.

Incluziunea inversă este evidentă ca şi afirmaţia relativ la fineţe.

Fie $(\mathcal{C}, \tau)$ un sit preaditiv element al lui $\mathcal{U}$ şi $(X_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$ o familie de obiecte din $\mathcal{C}/X$.

Vom spune că familia dată este acoperitoare în topologia τ dacă ciurul generat de ea este o rafinare a lui X.

De exemplu, orice familie este acoperitoare în topologia discretă, orice familie epimorfic efectiv universală este acoperitoare în topologia epimorfică, orice epimorfism secţionabil este acoperitor în orice topologie.

Familia $(X_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$ de morfisme quarabile din $\mathcal{U}$-categoria aditivă mică $\mathcal{C}$ este acoperitoare în topologia canonică dacă şi numai dacă este epimorfic efectiv universală.

Presupunem familia $(X_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$ epimorfic efectiv universală. Există aşadar în $\mathcal{U} - \mathrm{Ab}$ diagrama exactă

$$h_Z(X) \longrightarrow \prod_{i \in I} h_Z(X_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j) \in I \times I} h_Z(X_i \underset{X}{\times} X_j), \; Z \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$$

adică $h_Z(X) = \lim\limits_{\substack{\longleftarrow \\ I}} h_Z(X_i)$ sau mai exact, $h_Z(X)$ este limita proiectivă a functorului $h_Z(-)$ definit pe categoria discretă ale cărei obiecte sînt diagrame de forma $X_{\alpha} \underset{\substack{X \\ \downarrow \\ X_{\beta}}}{\times} X_{\beta} \to X_{\alpha}$, $(\alpha, \beta) \in I \times I$ şi cu valori în $\mathcal{U} - \mathrm{Ab}$.

Fie R ciurul generat de familia $(f_i)_{i \in I}$.

Evident, $R = \varinjlim\limits_{I} h_{X_i}$ căci R este limita inductivă a prefasciculelor reprezentabile h_{X_α} cu $(X_\alpha \to X)$ obiect din $\mathcal{R}$ ([4], 1.3) şi familia $(X_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$ este cofinală în $\mathcal{R}$.

Pentru a arăta că R este acoperitor în topologia canonică, este suficient să arătăm că pentru orice $Z \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ aplicaţia canonică

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(h_X, h_Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(R, h_Z)$$

este un izomorfism în $\mathcal{U}$ — Ab, fapt evident.

Reciproca este imediată. Din cele demonstrate rezultă că topologia epimorfică a unei categorii aditive este mai puţin fină ca topologia canonică. Dacă categoria este abeliană sau aditivă şi cu produse fibrate, atunci cele două topologii coincid.

Primită la redacţie la 25 iunie 1968.

Institutul de matematică al Academiei Republicii
Socialiste România, Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

CRIBLES ET TOPOLOGIES ADDITIVES

RÉSUMÉ

On expose les notions de crible et de topologie additive.

On donne aussi quelques exemples des topologies additives en montrant que la topologie épimorphique d'une catégorie additive est moins fine que la topologie canonique, les deux topologies coïncident si $\mathcal{C}$ est abélienne ou additive aux produits fibrés.

BIBLIOGRAFIE

1. Demazure Michel, *Topologies et faisceaux*. Séminaire de Géométrie algébrique, 1963, Fascicule 1, exposé IV.
2. Ouzilou R., *Faisceaux additifs*, Lyon, 1966, Tom 3, Fasc. 3.
3. Constantin Anghel, *Familii epimorfice şi topologia canonică*. St. cerc. mat., **19**, *6* (1967).
4. Alexandru Gh. Radu, *Toposul abelian al prefasciculelor aditive de grupuri abeliene peste o categorie preaditivă mică*. St. cerc. mat. **21**, *1* (1969).
5. Roos Jan. Eric, C. R. Acad. Sc. Paris, **259**, 969—972.

TOPOSUL ABELIAN AL FASCICULELOR ADITIVE DE GRUPURI ABELIENE PESTE UN SIT PREADITIV MIC (IV)

DE

ALEXANDRU GH. RADU

Grație corespondenței biunivoce ce există între topologiile aditive ale unei categorii preaditive mici $\mathcal{C}$ și subcategoriile localizante ale toposului abelian al prefasciculelor aditive de grupuri abeliene definite pe $\mathcal{C}$, descriem categoria fasciculelor ca o categorie de localizare arătînd că functorul fascicul asociat coincide, în afara unui izomorfism functorial, cu functorul de localizare.

Fie $(\mathcal{C}, \tau)$ un sit preaditiv element al lui $\mathcal{U}$ și $h : \mathcal{C} \to \overline{\mathcal{C}}$ imersiunea canonică a lui $\mathcal{C}$ în categoria $\mathcal{U}$-prefasciculelor de grupuri abeliene definite pe $\mathcal{C}$.

1. Definiție. Obiectul F din $\overline{\mathcal{C}}$ se numește prefascicul separat (fascicul) în topologia τ dacă pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ și orice $R \in \tau(X)$ aplicația canonică

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_X, F) \to \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(R, F)$$

este o injecție (bijecție) în $\mathcal{U} - \mathrm{Ab}$.

Evident, orice prefascicul este fascicul în topologia grosieră și orice prefascicul reprezentabil este fascicul în topologia canonică care este cea mai fină topologie cu proprietatea că orice prefascicul reprezentabil este fascicul: orice fascicul este prefascicul separat și reciproc, dacă este în plus obiect injectiv în $\overline{\mathcal{C}}$.

2. *Observație*. Dacă pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, $B(X)$ este o bază a filtrului $\tau(X)$, atunci F este prefascicul separat în topologia τ dacă și numai dacă aplicația (*) este injectivă pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ și orice $R \in B(X)$. Demonstrația este imediată.

De exemplu, un A-modul M este prefascicul separat în topologia lui A definită de un ideal bilateral idempotent $\underline{a}$ dacă și numai dacă $\mathrm{Hom}_A(A/\underline{a}, M) = 0$.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 2, P. 279–285, BUCUREȘTI, 1969

3. PROPOZIȚIE. *Pentru un șir exact din* $\overline{\mathcal{C}}$

$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0$$

sînt adevărate următoarele afirmații :

a) *Dacă* F', F'' *sînt fascicule (prefascicule separate), atunci* F *este fascicul (prefascicul separat).*

b) *Dacă* F' *este fascicul și* F *este prefascicul separat, atunci* F'' *este prefascicul separat.*

Demonstrație. Se aplică lema serpentinei următoarei diagrame cu liniile exacte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_x, F') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_x, F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_x, F'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(R, F') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(R, F) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(R, F'') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

unde

$$(R \hookrightarrow X) \in \tau(X), \; X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}.$$

4. *Observație.* Dacă $(\mathcal{C}, \tau)$ este un sit aditiv, atunci obiectul F din $\overline{\mathcal{C}}$ este prefascicul separat (fascicul) în topologia τ dacă și numai dacă pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ și orice $R \in \tau(X)$, aplicația canonică

$$F(X) \to \varprojlim_{\mathcal{C}/R} F(X_\alpha)$$

este injectivă (bijectivă). Demonstrația este imediată căci

$$R = \varinjlim_{\mathcal{C}/R} h \cdot s_R \; ([2],\ 1.3).$$

5. PROPOZIȚIE. *Dacă* $(\mathcal{C}, \tau)$ *este un sit aditiv și dacă, pentru orice* $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, $B(X)$ *este o bază a filtrului* $\tau(X)$ *stabilă la schimbarea bazei, atunci obiectul* F *din* $\overline{\mathcal{C}}$ *este fascicul în topologia* τ *dacă și numai dacă aplicația* (*) *este bijectivă pentru orice* $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ *și orice* $R \in B(X)$.

Demonstrație. Dacă $R \in \tau(X)$, există $R' \in B(X)$ astfel ca $R' \subset R$. Fie $R = \varinjlim_{\mathcal{C}/R} h_{X_\alpha}$ și diagramele carteziene

$$\begin{tikzcd}
R' \times_R X_\alpha \arrow[r] \arrow[d] & X_\alpha \arrow[d] \\
R' \arrow[r] & R
\end{tikzcd}$$

cu $R' \times_R X_\alpha \simeq R' \times_X X_\alpha \in B(X)$.

Prin ipoteză există izomorfismele canonice

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_{X_\alpha}, F) \overset{\sim}{\to} \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(R' \times_R X_\alpha, F)$$

şi prin urmare izomorfismul

$$\varinjlim_{\alpha} (\mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(h_{X_\alpha}, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(R' \times_R X_\alpha, F))$$

care este egal cu morfismul canonic

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(R, F) \to \mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(R', F)$$

căci

$$R' \to R = \varinjlim_{\alpha} (R' \times_R X_\alpha \to X_\alpha).$$

Totul este terminat dacă se ţine seama de diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(R, F) \arrow[dr, "\sim"] & \\
\mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(h_X, F) \arrow[ur] \arrow[rr, "\sim"] & & \mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(R', F)
\end{tikzcd}$$

Reciproca este evidentă.

În particular dacă topologia τ a lui $\mathcal{C}$ este generată de pretopologia Cov, atunci F este fascicul în topologia τ dacă şi numai dacă pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ şi orice ciur R al lui X generat de o familie $(X_i \xrightarrow{f_i} X)_{i\in I} \in \mathrm{Cov}\,(X)$, aplicaţia (*) este bijectivă. Deoarece $R = \varinjlim_{i\in I} h_{X_i}$, rezultă că F este fascicul în topologia τ dacă şi numai dacă diagrama canonic construită

$$F(X) \xrightarrow{k} \prod_{i\in I} F(X_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j)\in I\times I} F(X_i \times_X X_j)$$

este exactă. Obiectul F este prefascicul separat în topologia τ dacă şi numai dacă k este monomorfism.

6. Notăm cu $\mathcal{C}^{\sim}_{\tau}$ subcategoria plină a lui $\bar{\mathcal{C}}$ ale cărei obiecte sînt fascicule în topologia τ.

$\mathcal{C}^{\sim}_{\tau}$ este o $\mathcal{U}$-categorie numită categoria $\mathcal{U}$-fasciculelor de grupuri abeliene definite pe $\mathcal{C}$ relativ la topologia τ sau simplu categoria fasciculelor aditive definite pe $\mathcal{C}$ relativ la topologia τ.

Vom arăta în cele ce urmează că functorul incluziune $i : \mathcal{C}^{\sim}_{\tau} \to \bar{\mathcal{C}}$ are un adjunct la stînga $a : \mathcal{C}^{\sim}_{\tau} \to \bar{\mathcal{C}}$ ce comută cu limitele proiective finite. Functorul a se va numi functorul ,,fascicul asociat''.

Fie $\mathcal{A}_\tau$ subcategoria localizantă a lui $\bar{\mathcal{C}}$ asociată topologiei τ, $\bar{\mathcal{C}}/A_\tau$ categoria cît a lui $\bar{\mathcal{C}}$ prin A_τ şi $T : \bar{\mathcal{C}} \to \bar{\mathcal{C}}/A_\tau$ functorul canonic. Functorul T este covariant, aditiv, comută cu limitele proiective finite şi are un adjunct la dreapta S deplin fidel ([5]).

Fie $\Psi : 1_{\bar{\mathcal{C}}} \to ST$ şi $\Phi : TS \to 1_{\bar{\mathcal{C}}/A_\tau}$ săgeţile de adjuncţie, una cvasiinversă alteia. Deoarece S este deplin fidel, Φ este izomorfism functorial.

Dacă $u \in \mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(F, G)$, $T(u) = 0$ dacă şi numai dacă $\mathrm{Im}(u)$ este un obiect din A_τ ([5]).

La fel, $T(u)$ este monomorfism (epimorfism, izomorfism) dacă şi numai dacă Ker (u) (Coker u, Ker u şi Coker u) sînt obiecte din A_τ ([5]).

7. Propoziţie. *Pentru un obiect F din $\bar{\mathcal{C}}$ următoarele afirmaţii sînt echivalente* :

i) *F este obiect din A_τ.*

ii) $T(F) = 0$.

iii) $\mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(F, SG) = 0$ *pentru orice obiect G din $\bar{\mathcal{C}}/A_\tau$.*

Demonstraţie. i) $\Leftrightarrow$ *ii*) căci $1_{T(F)} = T(1_F) = 0$ dacă şi numai dacă Im $(1_F) = F$ este obiect din A_τ.

ii) $\Rightarrow$ iii) in izomorfismul de adjuncţie.

iii) $\Rightarrow$ ii) căci $\Psi_F = 0$ şi deci $T(\Psi_F) = 0$ căci T este aditiv.

Însă $1_{T(F)} = \Phi_{T(F)} \cdot T(\Psi_F) = 0$ şi deci $T(F) = 0$.

8. Corolar. *Pentru orice obiect F din $\bar{\mathcal{C}}$ există un subobiect maximal $e(F)$ din A_τ.*

Demonstraţie. Este suficient să luăm $e(F) = \mathrm{Ker}\, \Psi_F$

Asocierea

$$F \rightsquigarrow e(F),$$

defineşte un functor

$$e : \bar{\mathcal{C}} \to \mathcal{A}_\tau$$

adjunct la dreapta pentru functorul incluziune

$$\mathcal{A}_\tau \to \bar{\mathcal{C}}.$$

Evident, $e(e(F)) = e(F)$ pentru orice obiect F din $\bar{\mathcal{C}}$, şi din adjuncţie rezultă că functorul e este exact la stînga.

Asocierea

$$F \rightsquigarrow F/e(F)$$

defineşte un functor exact la dreapta

$$\bar{e} : \bar{\mathcal{C}} \to \bar{\mathcal{C}}$$

subfunctor al functorului ST cu proprietatea că $e(\bar{e}(F)) = 0$ pentru orice obiect F din $\bar{\mathcal{C}}$.

Functorul $\bar{e}$ se numeşte functorul „prefascicul separat asociat" graţie următoarei propoziţii.

9. Propoziţie. *Dacă $(\mathcal{C}, \tau)$ este un sit aditiv şi F un obiect din $\bar{\mathcal{C}}$, următoarele afirmaţii sînt echivalente* :

i) *F este prefascicul separat în topologia τ.*

ii) $\mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(F', F) = 0$ *pentru orice obiect F' din A_τ.*

iii) $e(F) = 0$, *sau, ceea ce este echivalent, Ψ_F este monomorfism.*

iii)' *F nu are subobiecte nenule din A_τ.*

Demonstrație. i) ⇒ ii). Deoarece F' este obiect din A_τ, pentru orice $u : h_X \to F'$, $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ $(\mathrm{Ker}\, u \xrightarrow{i} h_X) \in \tau(X)$, deci există monomorfismul canonic

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(h_X, F') \xrightarrow{\theta} \mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(\mathrm{Ker}\, u, F').$$

Dacă $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(F', F)$, atunci $\alpha u i = \theta(\alpha u) = 0$, de unde $\alpha u = 0$ pentru orice $u \in \mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(h_x, F')$.

Cum $F' = \varinjlim\limits_{\mathcal{C}/F'} h_X$, rezultă $\alpha = 0$.

ii) ⇒ iii) ⇔ iii)' ⇒ i. Evident.

10. PROPOZIȚIE. *Următoarele afirmații sînt echivalente :*

i) *O limită inductivă filtrată de prefascicule separate este un prefascicul separat.*

ii) *Functorul e comută cu limitele inductive filtrate.*

Demonstrație. i) ⇒ ii). Fie $(G_\iota, g_{\iota j})_{i\in I}$ un sistem inductiv filtrat de obiecte din $\bar{\mathcal{C}}$. Deoarece $\bar{\mathcal{C}}$ este cu limite inductive filtrate exacte,

$$\varinjlim_I (G_i/e(G_i)) = \varinjlim_I (G_i/\varinjlim_I (e(G_i)))$$

este prefascicul separat și cum A_τ este închisă la limite inductive, rezultă $e(\varinjlim\limits_I G_i) = \varinjlim\limits_I e(G_i)$

ii) ⇒ i). Fie $(G_i, g_{ij})_{i\in I}$ un sistem inductiv filtrat de prefascicule separate. Din propoziția precedentă rezultă că pentru orice $i \in I$, $e(G_i) = 0$ și deci, conform ipotezei, $e(\varinjlim\limits_I G_i) = \varinjlim\limits_I e(G_i) = 0$ adică $\varinjlim\limits_I G_i$ este prefascicul separat conform aceleeași propoziții.

11. DEFINIȚIE. Obiectul F din $\bar{\mathcal{C}}$ se numește A_τ-închis dacă morfismul de adjuncție $\Psi_F : F \to STF$ este izomorfism.

Deoarece S este deplin fidel, putem identifica (pînă la o echivalență de categorii) pe $\bar{\mathcal{C}}/A_\tau$ cu subcategoria plină a lui $\bar{\mathcal{C}}$ definită de obiecte A_τ-închise.

12. PROPOZIȚIE. *Pentru un obiect F din $\bar{\mathcal{C}}$ următoarele afirmații sînt echivalente :*

i) *F este A_τ-inclus.*

ii) *F este fascicul în topologia τ.*

Demonstrație. i) ⇒ ii). Dacă R este o rafinare a lui X în topologia τ, există șirul de izomorfisme canonice

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(h_X, F) \simeq \mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(h_X, STF) \simeq \mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}/\mathcal{A}_\tau}(Th_X, TF) \simeq$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}/\mathcal{A}_\tau}(TR, TF) \simeq \mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(R, STF) \simeq \mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(R, F)$$

căci $\Psi_F : F \to STF$ este izomorfism și X/R este obiect din A_τ deci $T(X/R) = 0$.

ii) $\Rightarrow$ i). Deoarece $\Phi_{T(F)} \cdot T(\Psi_F) = 1_{T(F)}$ şi $\Phi_{T(F)}$ este izomorfism, rezultă $T(\Psi_F)$ izomorfism, adică Ker Ψ_F şi Coker Ψ_F sînt obiecte din A_τ. Cum orice fascicul este *afortiori* prefascicul separat, Ker $\Psi_F = 0$.

Evident, şirul exact

$$0 \to F \to STF \to \text{Coker } \Psi_F \to 0$$

este cu scindare şi prin urmare Coker $\Psi_F = 0$ căci STF este fascicul conform primei implicaţii.

Aşadar este dovedit că Ψ_F este izomorfism.

13. Corolar. *Obiectul F' este din A_τ dacă și numai* $\text{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(F', F) = 0$ *pentru orice fascicul F.*

14. Corolar. *Obiectul F din $\overline{\mathcal{C}}$ este fascicul dacă și numai dacă pentru orice obiect G din $\overline{\mathcal{C}}$, aplicaţia canonică*

$$\text{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(G,\ F) \to \text{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}/\mathcal{A}_\tau}(TG,\ TF)$$

este bijectivă.

15. Corolar. *O limită inductivă de fascicule calculată în $\overline{\mathcal{C}}$ este încă un fascicul dacă și numai dacă functorul $S : \overline{\mathcal{C}}/A_\tau \to \overline{\mathcal{C}}$ comută cu limitele inductive.*

16. Functorul fascicul asociat a, adjunct la stînga al functorului de incluziune $i : \mathcal{C}^{\sim}_{\tau} \to \mathcal{C}$ coincide, în afara unui izomorfism functorial, cu functorul T. Evident, functorul a comută cu limitele proiective finite fiindcă T are această proprietate. Deoarece $\mathcal{C}^{\sim}_{\tau}$ este echivalentă cu $\overline{\mathcal{C}}/A_\tau$, rezultă că $\mathcal{C}^{\sim}$ este un topos abelian.

Primită la redacţie la 25 iunie 1968

Institutul de matematică al Academiei Republicii
Socialiste România, Str. M. Eminescu nr. 47,
Bucureşti

TOPOS ABÉLIEN DES FAISCEAUX ADDITIFS DES GROUPES ABÉLIENS SUR UN PETIT SITE PRÉADDITIF

RÉSUMÉ

Grâce à la correspondance biunivoque qui existe entre les topologies additives d'une petite catégorie préadditive $\mathcal{C}$ et les sous-catégories localisantes du topos abélien des préfaisceaux additifs des groupes abéliens définis sur $\mathcal{C}$, nous décrivons la catégorie des faisceaux comme une catégorie de localisation en montrant que le foncteur «faisceau associé» coïncide, à un isomorphisme fonctoriel près, au foncteur de localisation.

BIBLIOGRAFIE

1. ALEXANDRU GH. RADU, *Ciururi şi topologii aditive*. St. cerc. mat., **21** (1969).
2. ALEXANDRU GH. RADU, *Toposul abelian al prefasciculelor aditive de grupuri abeliene peste o categorie preaditivă mică*. St. cerc. mat. **21**, *1* (1969).
3. R. OUZILOU, *Faisceaux additifs*. Lyon, **3**, fasc. 3 (1966).
4. L. GRUSSON, *Sites additifs*. Bull. Soc. Math. France, **90**, (1966).
5. P. GABRIEL, *Des catégories abéliennes*. Bull. Soc. Math. France, **91** (1962).

GRUPURILE DE OLONOMIE ALE SPAŢIILOR A_5

DE

CONSTANTIN F. RADU

În această lucrare sînt determinate grupurile de olonomie omogene ale spaţiului cu conexiune afină cu 5 dimensiuni.

Fie A_n un spaţiu cu conexiune afină raportat la sistemul de congruenţe $ds^a = \lambda_i^a dx^i$. Notînd cu γ_{bc}^a componentele conexiunii afine din A_n în raport cu sistemul de congruenţe (λ), atunci componentele conexiunii infinitezimale sînt date prin relaţia :

$$ds_b^a = \gamma_{bc}^a ds^c.$$

Atît formele ds^a cît şi formele ds_b^a satisfac ecuaţiile de structură a spaţiului cu conexiune afină A_n :

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta s^a = [ds^b,\ ds_b^a], \\ \Delta s_b^a = [ds_b^c, ds_c^a] + \gamma_{bcd}^a [ds^c,\ ds^d], \qquad (c<d). \end{cases}$$

Să considerăm ecuaţiile transportului paralel în spaţiul A_n pentru un vector contravariant de componente V^i :

$$(2)\qquad \frac{dv^a}{dt} = \frac{ds_b^a}{dt} v^b,$$

unde $v^a = \lambda_i^a V^i$ sînt componentele vectorului considerat faţă de sistemul de congruenţe (λ).

Prin integrarea sistemului (2) se obţine grupul de olonomie omogen al spaţiului A_n. Cu studiul grupurilor de olonomie omogene ale spaţiului A_n pentru $n = 2$ s-au ocupat A. Liber şi Gh. Vrănceanu, iar pentru $n = 3,4$, M. Stoka. În această lucrare vom considera $n = 5$ determinînd concret grupurile de olonomie omogene ale spaţiului afin cu 5 dimensiuni.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 2, P. 287-356, BUCUREŞTI, 1969

Dacă $n = 5$, sistemul (2) devine :

$$(2')\quad \begin{cases} \dfrac{dv^1}{dt} = \dfrac{ds_1^1}{dt}\, v^1 + \dfrac{ds_2^1}{dt}\, v^2 + \dfrac{ds_3^1}{dt}\, v^3 + \dfrac{ds_4^1}{dt}\, v^4 + \dfrac{ds_5^1}{dt}\, v^5, \\[2mm] \dfrac{dv^2}{dt} = \dfrac{ds_1^2}{dt}\, v^1 + \dfrac{ds_2^2}{dt}\, v^2 + \dfrac{ds_3^2}{dt}\, v^3 + \dfrac{ds_4^2}{dt}\, v^4 + \dfrac{ds_5^2}{dt}\, v^5, \\[2mm] \dfrac{dv^3}{dt} = \dfrac{ds_1^3}{dt}\, v^1 + \dfrac{ds_2^3}{dt}\, v^2 + \dfrac{ds_3^3}{dt}\, v^3 + \dfrac{ds_4^3}{dt}\, v^4 + \dfrac{ds_5^3}{dt}\, v^5, \\[2mm] \dfrac{dv^4}{dt} = \dfrac{ds_1^4}{dt}\, v^1 + \dfrac{ds_2^4}{dt}\, v^2 + \dfrac{ds_3^4}{dt}\, v^3 + \dfrac{ds_4^4}{dt}\, v^4 + \dfrac{ds_5^4}{dt}\, v^5, \\[2mm] \dfrac{dv^5}{dt} = \dfrac{ds_1^5}{dt}\, v^1 + \dfrac{ds_2^5}{dt}\, v^2 + \dfrac{ds_3^5}{dt}\, v^3 + \dfrac{ds_4^5}{dt}\, v^4 + \dfrac{ds_5^5}{dt}\, v^5. \end{cases}$$

Vom presupune în primul caz că $ds_2^1 = ds_3^1 = ds_4^1 = ds_5^1 = 0$. Atunci prima ecuaţie (2′) devine : $\dfrac{dv^1}{dt} = \dfrac{ds_1^1}{dt}\, v^1$ care are integrala generală de forma $v^1 = c^1 e^{\int_0^t ds_1^1}$.

Înlocuim valoarea găsită pentru v^1 în celelalte ecuaţii (2′) şi obţinem :

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dv^2}{dt} = \dfrac{ds_2^2}{dt}\, v^2 + \dfrac{ds_3^2}{dt}\, v^3 + \dfrac{ds_4^2}{dt}\, v^4 + \dfrac{ds_5^2}{dt}\, v^5 + c^1\, e^{\int_0^t ds_1^1}\, \dfrac{ds_1^2}{dt}, \\[2mm] \dfrac{dv^3}{dt} = \dfrac{ds_2^3}{dt}\, v^2 + \dfrac{ds_3^3}{dt}\, v^3 + \dfrac{ds_4^3}{dt}\, v^4 + \dfrac{ds_5^3}{dt}\, v^5 + c^1\, e^{\int_0^t ds_1^1}\, \dfrac{ds_1^3}{dt}, \\[2mm] \dfrac{dv^4}{dt} = \dfrac{ds_2^4}{dt}\, v^2 + \dfrac{ds_3^4}{dt}\, v^3 + \dfrac{ds_4^4}{dt}\, v^4 + \dfrac{ds_5^4}{dt}\, v^5 + c^1\, e^{\int_0^t ds_1^1}\, \dfrac{ds_1^4}{dt}, \\[2mm] \dfrac{dv^5}{dt} = \dfrac{ds_2^5}{dt}\, v^2 + \dfrac{ds_3^5}{dt}\, v^3 + \dfrac{ds_4^5}{dt}\, v^4 + \dfrac{ds_5^5}{dt}\, v^5 + c^1\, e^{\int_0^t ds_1^1}\, \dfrac{ds_1^5}{dt}. \end{cases}$$

Dacă $ds_3^2 = ds_4^2 = ds_5^2 = 0$, prima ecuaţie (3) prin integrare dă soluţia :

$$v^2 = e^{\int_0^t ds_2^2} \left[c^1 \int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_2^2)}\, ds_1^2 + c^2 \right]$$

care introdusă în următoarele ecuaţii (3) ne dă :

$$
(3') \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v^3}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\, v^3 + \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\, v^4 + \frac{\mathrm{d}s_5^3}{\mathrm{d}t}\, v^5 + c^1\, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1}\, \frac{\mathrm{d}s_1^3}{\mathrm{d}t} + \\
&\quad + \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_2^2} \left[c^1 \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)} \mathrm{d}s_1^2 + c^2\right] \frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}, \\
\frac{\mathrm{d}v^4}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\, v^3 + \frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\, v^4 + \frac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}\, v^5 + c^1\, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1}\, \frac{\mathrm{d}s_1^4}{\mathrm{d}t} + \\
&\quad + \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_2^2} \left[c^1 \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)} \mathrm{d}s_1^2 + c^2\right] \frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}, \\
\frac{\mathrm{d}v^5}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}\, v^3 + \frac{\mathrm{d}s_4^5}{\mathrm{d}t}\, v^4 + \frac{\mathrm{d}s_5^5}{\mathrm{d}t}\, v^5 + c^1\, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1}\, \frac{\mathrm{d}s_1^5}{\mathrm{d}t} + \\
&\quad + \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_2^2} \left[c^1 \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)} \mathrm{d}s_1^2 + c^2\right] \frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t},
\end{aligned}
\right.
$$

Dacă $\mathrm{d}s_4^3 = \mathrm{d}s_5^3 = 0$, prima ecuaţie (3′) are soluţia :

$$
\begin{aligned}
v^3 = \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_3^3} \Biggl(c^1 \Biggl[\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_3^3)} \Biggl(\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)}\, \mathrm{d}s_1^2\Biggr) \mathrm{d}s_2^3 + \\
+ \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_3^3)}\, \mathrm{d}s_1^3\Biggr] + c^2 \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_3^3)}\, \mathrm{d}s_2^3 + c^3\Biggr)
\end{aligned}
$$

iar dacă şi $\mathrm{d}s_5^4 = 0$, a doua ecuaţie (3′) prin introducerea expresiei găsite pentru v^3 ne dă :

$$
\begin{aligned}
v^4 = \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_4^4} \Biggl\{c^1 \Biggl[\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_3^3 - \mathrm{d}s_4^4)} \Biggl(\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_3^3)} \Biggl(\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)} \mathrm{d}s_1^2\Biggr) \mathrm{d}s_2^3 + \\
+ \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_3^3)} \mathrm{d}s_1^3\Biggr) \mathrm{d}s_3^4 + \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_4^4)} \Biggl(\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)}\, \mathrm{d}s_1^2\Biggr) \mathrm{d}s_2^4 + \\
+ \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_4^4)}\, \mathrm{d}s_1^4\Biggr] + c^2 \Biggl[\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_3^3 - \mathrm{d}s_4^4)} \Biggl(\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_3^3)} \mathrm{d}s_2^3\Biggr) \mathrm{d}s_3^4 + \\
+ \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_4^4)} \mathrm{d}s_2^4\Biggr] + c^3 \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_3^3 - \mathrm{d}s_4^4)} \mathrm{d}s_3^4 + c^4\Biggr\}.
\end{aligned}
$$

Înlocuind pe v^3 şi v^4 astfel găsiţi în ultima ecuaţie (3′), găsim valoarea lui v^5:

$$\begin{aligned}
v^5 = {} & e^{\int_0^t ds_5^5}\biggl\{c^1\biggl[\int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1-ds_5^5)}ds_1^5+\int_0^t e^{\int_0^t (ds_2^2-ds_5^5)}\biggl(\int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1-ds_2^2)}\, ds_1^2\biggr)ds_2^5+\\
&+\int_0^t e^{\int_0^t (ds_3^3-ds_5^5)}\biggl(\int_0^t e^{\int_0^t (ds_2^2-ds_3^3)}\biggl(\int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1-ds_2^2)}ds_1^2\biggr)ds_2^3\biggr)ds_3^5+\\
&+\int_0^t e^{\int_0^t (ds_4^4-ds_5^5)}\biggl(\int_0^t e^{\int_0^t (ds_3^3-ds_4^4)}\biggl(\int_0^t e^{\int_0^t (ds_2^2-ds_3^3)}\biggl(\int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1-ds_2^2)}ds_1^2\biggr)ds_2^3+\\
&+\int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1-ds_3^3)}\, ds_1^3\biggr)\, ds_3^4\biggr)\, ds_4^5\biggr]+c^2\biggl[\int_0^t e^{\int_0^t (ds_2^2-ds_5^5)}\, ds_2^5+\\
&+\int_0^t e^{\int_0^t (ds_3^3-ds_5^5)}\biggl(\int_0^t e^{\int_0^t (ds_2^2-ds_3^3)}\, ds_2^3\biggr)ds_3^5+\int_0^t e^{\int_0^t (ds_4^4-ds_5^5)}\biggl(\int_0^t e^{\int_0^t (ds_3^3-ds_4^4)}\times\\
&\times\biggl(\int_0^t e^{\int_0^t (ds_2^2-ds_3^3)}\, ds_2^3\biggr)ds_3^4+\int_0^t e^{\int_0^t (ds_2^2-ds_4^4)}\, ds_2^4\biggr)ds_4^5\biggr]+\\
&+c^3\biggl[\int_0^t e^{\int_0^t (ds_4^4-ds_5^5)}\biggl(\int_0^t e^{\int_0^t (ds_3^3-ds_4^4)}\, ds_3^4\biggr)ds_4^5+\int_0^t e^{\int_0^t (ds_3^3-ds_5^5)}\, ds_3^5\biggr]+\\
&+c^4\biggl[\int_0^t e^{\int_0^t (ds_4^4-ds_5^5)}\, ds_4^5\biggr]+c^5\biggr\}.
\end{aligned}$$

Urmează că grupul de olonomie omogen al spaţiului A_5 este:

$$\left\{\begin{aligned}
v'^1 &= \alpha\, v^1,\\
v'^2 &= \beta_1\, \beta_2 v^1 + \beta_1 v^2,\\
v'^3 &= \gamma_1\gamma_2 v^1 + \gamma_1\gamma_3 v^2 + \gamma_1 v^3,\\
v'^4 &= \delta_1\delta_2 v^1 + \delta_1\delta_3\, v^2 + \delta_1\delta_4\, v^3 + \delta_1\, v^4,\\
v'^5 &= \varepsilon_1\varepsilon_2 v^1 + \varepsilon_1\varepsilon_3 v^2 + \varepsilon_1\varepsilon_4 v^3 + \varepsilon_1\varepsilon_5 v^4 + \varepsilon_1 v^5.
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

În formulele (4) am considerat că v^a sînt componentele vectorului în punctul P faţă de sistemul de congruenţe (λ) iar v'^a componentele faţă de acelaşi sistem (λ) după ce s-a parcurs prin transport paralel o curbă închisă C.

Aşadar am notat:

$$\alpha = e^{\int_C ds_1^1},\ \beta_1 = e^{\int_C ds_2^2},\ \beta_2 = \int_C e^{\int_0^t (ds_1^1-ds_2^2)},\ \gamma_1 = e^{\int_C ds_3^3},$$

$$\begin{aligned}
\gamma_2 = {} & \int_C e^{\int_0^t (ds_2^2-ds_3^3)}\biggl(\int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1-ds_2^2)}\, ds_1^2\biggr)ds_2^3+\\
&+\int_C e^{\int_0^t (ds_1^1-ds_3^3)}\, ds_1^3,\ \gamma_3 = \int_C e^{\int_0^t (ds_2^2-ds_3^3)}\, ds_2^3,
\end{aligned}$$

$$\delta_1 = e^{\int_C \mathrm{d}s_4^4},\ \delta_2 = \int_C e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_3^3 - \mathrm{d}s_4^4)} \left[\int_0^t e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_3^3)} \left(\int_0^t e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)} \mathrm{d}s_1^2\right) \mathrm{d}s_2^3 +\right.$$

$$\left. + \int_0^t e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_3^3)} \mathrm{d}s_1^3\right] \mathrm{d}s_3^4 + \int_C e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_4^4)} \times$$

$$\times \left[\int_0^t e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)} \mathrm{d}s_1^2\right] \mathrm{d}s_2^4 + \int_C e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_4^4)} \mathrm{d}s_1^4,$$

$$\delta_3 = \int_C e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_3^3 - \mathrm{d}s_4^4)} \left[\int_0 e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_3^3)} \mathrm{d}s_2^3\right] \mathrm{d}s_3^4 + \int_C e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_4^4)} \mathrm{d}s_2^4,$$

$$\delta_4 = \int_C e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_3^3 - \mathrm{d}s_4^4)} \mathrm{d}s_3^4$$

$$\varepsilon_1 = e^{\int_C \mathrm{d}s_5^5},\ \varepsilon_2 = \int_C e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_5^5)} \mathrm{d}s_1^5 + \int_C e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_5^5)} \left(\int_0^t e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)} \mathrm{d}s_1^2\right) \mathrm{d}s_2^5 +$$

$$+ \int_C e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_3^3 - \mathrm{d}s_5^5)} \left(\int_0^t e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_3^3)} \left(\int_0^t e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)} \mathrm{d}s_1^2\right) \mathrm{d}s_2^3\right) \mathrm{d}s_3^5 +$$

$$+ \int_C e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_4^4 - \mathrm{d}s_5^5)} \left(\int_0^t e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_3^3 - \mathrm{d}s_4^4)} \left(\int_0^t e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_3^3)} \left(\int_0^t e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)} \mathrm{d}s_1^2\right) \mathrm{d}s_2^3 +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^t e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_3^3)} \mathrm{d}s_1^3\right) \mathrm{d}s_3^4\right) \mathrm{d}s_4^5,$$

$$\varepsilon_3 = \int_C e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_5^5)} \mathrm{d}s_2^5 + \int_C e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_3^3 - \mathrm{d}s_5^5)} \left(\int_0^t e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_3^3)} \mathrm{d}s_2^3\right) \mathrm{d}s_3^5 +$$

$$+ \int_C e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_4^4 - \mathrm{d}s_5^5)} \left(\int_0^t e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_3^3 - \mathrm{d}s_4^4)} \left(\int_0^t e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_4^4)} \mathrm{d}s_2^3\right) \mathrm{d}s_3^4 +\right.$$

$$\left. + \int_0^t e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_4^4)} \mathrm{d}s_2^4\right) \mathrm{d}s_4^5,$$

$$\varepsilon_4 = \int_C e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_4^4 - \mathrm{d}s_5^5)} \left(\int_0^t e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_3^3 - \mathrm{d}s_4^4)} \mathrm{d}s_3^4\right) \mathrm{d}s_4^5 + \int_C e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_3^3 - \mathrm{d}s_5^5)} \mathrm{d}s_3^5,$$

$$\varepsilon_5 = \int_C e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_4^4 - \mathrm{d}s_5^5)} \mathrm{d}s_4^5,$$

Deci în cazul $\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_4^1 = \mathrm{d}s_5^1 = \mathrm{d}s_3^2 = \mathrm{d}s_4^2 = \mathrm{d}s_5^2 = \mathrm{d}s_4^3 = \mathrm{d}s_5^3 = \mathrm{d}s_5^4 = 0$, spaţiul A_5 are drept grup omogen de olonomie grupul (4) sau un subgrup al acestuia. Varietăţile invariante ale grupului (4) sînt evident :

$$v^1 = 0,\ v^1 = v^2 = 0,\ v^1 = v^2 = v^3 = 0,\ v^1 = v^2 = v^3 = v^4 = 0.$$

Ţinînd cont de exprimarea componentelor conexiunii spaţiului A_5 prin relaţiile : $\mathrm{d}s_b^a = \Gamma_{bc}^a \, \mathrm{d}x^c$, Γ_{bc}^a fiind componentele conexiunii spaţiului

A_5 în raport cu un sistem de coordonate relaţiile : $\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_4^1 = \mathrm{d}s_5^1 = \mathrm{d}s_3^2 = \mathrm{d}s_4^2 = \mathrm{d}s_5^2 = \mathrm{d}s_4^3 = \mathrm{d}s_5^3 = \mathrm{d}s_5^4 = 0$ conduc la :

$$\Gamma_{2i}^1 = \Gamma_{3i}^1 = \Gamma_{4i}^1 = \Gamma_{5i}^1 = \Gamma_{3i}^2 = \Gamma_{4i}^2 = \Gamma_{5i}^2 = \Gamma_{4i}^3 = \Gamma_{5i}^3 = \Gamma_{5i}^4 = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, 5).$$

În concluzie spaţiile cu conexiunea afină A_5 pentru care avem :

$$\Gamma_{2i}^1 = \Gamma_{3i}^1 = \Gamma_{4i}^1 = \Gamma_{5i}^1 = \Gamma_{3i}^2 = \Gamma_{4i}^2 = \Gamma_{5i}^2 = \Gamma_{4i}^3 = \Gamma_{5i}^3 = \Gamma_{5i}^4 = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, 5)$$

au ca grup omogen de olonomie grupul (4) sau un subgrup al acestuia. Se procedează analog pentru cazul cînd $\mathrm{d}s_5^4 \neq 0$ şi $\mathrm{d}s_4^5 = 0$ şi anume se integrează ultima ecuaţie (3′) iar rezultatul se înlocuieşte în precedenta.

Să presupunem acum că : $\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_4^1 = \mathrm{d}s_5^1 = \mathrm{d}s_3^2 = \mathrm{d}s_4^2 = \mathrm{d}s_5^2 = \mathrm{d}s_4^3 = \mathrm{d}s_5^3 = 0$ iar $\mathrm{d}s_5^4 \neq 0$ şi $\mathrm{d}s_4^5 \neq 0$. În asemenea caz din ecuaţia a doua (3′) avem

$$v^5 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}v^4}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t} - c^1 \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1} \dfrac{\mathrm{d}s_1^4}{\mathrm{d}t} - \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_2^2} \left[c^1 \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)} \mathrm{d}s_1^2 + c^2 \right] \dfrac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}} -$$

$$- \frac{c^1 \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_3^3} \left[\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_3^3)} \left(\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)} \mathrm{d}s_1^2 \right) \mathrm{d}s_2^3 \right] \dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}} -$$

$$- \frac{\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_3^3} \left[c^1 \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_3^3)} \mathrm{d}s_1^3 + c^2 \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_3^3)} \mathrm{d}s_2^3 + c^3 \right] \dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}} .$$

Înlocuind această valoare a lui v^5 în a treia ecuaţie (3′), obţinem

$$\begin{aligned} (5) \quad \frac{\mathrm{d}^2 v^4}{\mathrm{d}t^2} - p_1 \frac{\mathrm{d}v^4}{\mathrm{d}t} - p_2 v^4 = c^1 \Bigg[& p_3 \, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1} + p_4 \, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_2^2} \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)} \mathrm{d}s_1^2 + \\ & + p_5 \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_3^3} \left(\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_3^3)} \left(\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)} \mathrm{d}s_1^2 \right) \mathrm{d}s_2^3 + \right. \\ & \left. + \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_3^3)} \mathrm{d}s_1^3 \right) \Bigg] + c^2 \left[p_4 \, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_2^2} + p_5 \, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_3^3} \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_3^3)} \mathrm{d}s_2^3 \right] + \\ & + c^3 \, p_5 \, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_3^3} , \end{aligned}$$

unde am notat cu p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, cantităţile :

$$p_1 = \frac{\mathrm{d}(s_4^4 + s_5^5)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t},$$

$$p_2 = \frac{\mathrm{d}^2 s_4^4}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^5}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_5^5}{\mathrm{d}t},$$

$$p_3 = \frac{\mathrm{d}^2 s_1^4}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}s_1^4}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}(s_1^1 - s_5^5)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_1^4}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_1^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_1^5}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t},$$

$$p_4 = \frac{\mathrm{d}^2 s_2^4}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}(s_2^2 - s_5^5)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t},$$

$$p_5 = \frac{\mathrm{d}^2 s_3^4}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}(s_3^3 - s_5^5)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}.$$

Ecuaţia (5) are soluţia generală :

$$v^4 = c^1 \Bigg[\lambda_0\, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1} + \mu_0\, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_2^2} \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)}\, \mathrm{d}s_1^2 + \nu_0\, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_3^3} \times$$

$$\times \Bigg(\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_3^3)} \Bigg(\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)}\, \mathrm{d}s_1^2\Bigg) \mathrm{d}s_2^3 + \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_3^3)}\, \mathrm{d}s_1^3\Bigg)\Bigg] +$$

$$+ c^2 \Bigg[\mu_0 \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_2^2} + \nu_0\, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_3^3} \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_3^3)}\, \mathrm{d}s_2^3\Bigg] + c^3 \nu_0\, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_3^3} + c^4 \Phi_1 + c^5 \Phi_2,$$

Φ_1, Φ_2, sînt două soluţii independente ale ecuaţiei omogene

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}t^2} - p_1 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} - p_2 \Phi = 0$$

iar λ_0, μ_0, ν_0 reprezintă o soluţie particulară a sistemului :

$$\frac{\mathrm{d}^2\lambda_0}{\mathrm{d}t^2} + \left(2\,\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} - p_1\right)\frac{\mathrm{d}\lambda_0}{\mathrm{d}t} + 2\,\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\mu_0}{\mathrm{d}t} + 2\,\frac{\mathrm{d}s_1^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\nu_0}{\mathrm{d}t} + \lambda_0 \Bigg[\frac{\mathrm{d}^2 s_1^1}{\mathrm{d}t^2} +$$

$$+ \left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)^2 - p_1 \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} - p_2\Bigg] + \mu_0 \left[\frac{\mathrm{d}^2 s_1^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}(s_1^1 + s_2^2)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t} - p_1 \frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\right] +$$

$$+ \nu_0\left[\frac{\mathrm{d}^2 s_1^3}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}(s_1^1 + s_3^3)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_1^3}{\mathrm{d}t} - p_1 \frac{\mathrm{d}s_1^3}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\right] = p_3,$$

$$\frac{d^2\mu_0}{dt^2}+\left(2\frac{ds_2^2}{dt}-p_1\right)\frac{d\mu_0}{dt}+\mu_0\left[\frac{d^2s_2^2}{dt^2}+\left(\frac{ds_2^2}{dt}\right)^2-p_1\frac{ds_2^2}{dt}-p_2\right]+$$

$$+\nu_0\left[\frac{d^2s_2^3}{dt^2}+\frac{d(s_2^2+s_3^3)}{dt}\frac{ds_2^3}{dt}-p_1\frac{ds_2^3}{dt}\right]+2\frac{ds_2^3}{dt}\frac{d\nu_0}{dt}=p_4,$$

$$\frac{d^2\nu_0}{dt^2}+2\frac{ds_3^3}{dt}\frac{d\nu_0}{dt}+\left[\frac{d^2s_3^3}{dt^2}+\left(\frac{ds_3^3}{dt}\right)^2-p_1\frac{ds_3^3}{dt}-p_2\right]\nu_0=p_5.$$

Folosind expresia găsită pentru v^4, obţinem din a doua ecuaţie (3′) in continuare :

$$v^5=c^1\left\{\frac{e^{\int_0^t ds_1^1}\left[\frac{d\lambda_0}{dt}+\lambda_0\frac{d(s_1^1-s_4^4)}{dt}+\mu_0\frac{ds_1^2}{dt}+\nu_0\frac{ds_1^3}{dt}-\frac{ds_1^4}{dt}\right]+}{\frac{ds_5^4}{dt}}\right.$$

$$\frac{+e^{\int_0^t ds_2^2}\int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1-ds_2^2)}\,ds_1^2\left[\frac{d\mu_0}{dt}+\mu_0\frac{d(s_2^2-s_4^4)}{dt}+\nu_0\frac{ds_2^3}{dt}-\frac{ds_2^4}{dt}\right]}{\frac{ds_5^4}{dt}}+$$

$$+\frac{e^{\int_0^t ds_3^3}\left[\int_0^t e^{\int_0^t (ds_2^2-ds_3^3)}\left(\int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1-ds_2^2)}\,ds_1^2\right)ds_2^3+\int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1-ds_3^3)}\,ds_1^3\right]\times}{\frac{ds_5^4}{dt}}$$

$$\left.\times\left[\frac{d\nu_0}{dt}+\nu_0\frac{d(s_3^3-s_4^4)}{dt}-\frac{ds_3^4}{dt}\right]\right\}+$$

$$+c^2\frac{e^{\int_0^t ds_2^2}\left[\frac{d\mu_0}{dt}+\frac{d(s_2^2-s_4^4)}{dt}\mu_0+\nu_0\frac{ds_2^3}{dt}-\frac{ds_2^4}{dt}\right]}{\frac{ds_5^4}{dt}}+$$

$$+\frac{e^{\int_0^t ds_3^3}\int_0^t e^{\int_0^t (ds_2^2-ds_3^3)}\,ds_2^3\left[\frac{d\nu_0}{dt}+\nu_0\frac{d(s_3^3-s_4^4)}{dt}-\frac{ds_3^4}{dt}\right]}{\frac{ds_5^4}{dt}}+$$

$$+c^3\frac{e^{\int_0^t ds_3^3}\left[\frac{d\nu_0}{dt}+\nu_0\frac{d(s_3^3-s_4^4)}{dt}-\frac{ds_3^4}{dt}\right]}{\frac{ds_5^4}{dt}}+$$

$$+c^4\frac{\frac{d\Phi_1}{dt}-\frac{ds_4^4}{dt}\Phi_1}{\frac{ds_5^4}{dt}}+c^5\frac{\frac{d\Phi_2}{dt}-\frac{ds_4^4}{dt}\cdot\Phi_2}{\frac{ds_5^4}{dt}}-.$$

Vom presupune că funcţiile λ_0, μ_0, ν_0, Φ_1, Φ_2 satisfac condiţiile iniţiale $\lambda_0(0) = \mu_0(0) = \nu_0(0) = \Phi_2(0) = 0$, $\Phi_1(0) = 1$

$$\left(\frac{d\lambda_0}{dt}\right)_0 = \left(\frac{ds_1^4}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{d\mu_0}{dt}\right)_0 = \left(\frac{ds_2^4}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{d\nu_0}{dt}\right)_0 = \left(\frac{ds_3^4}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{d\Phi_1}{dt}\right)_0 =$$

$$= \left(\frac{ds_4^4}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{d\Phi_2}{dt}\right)_0 = \left(\frac{ds_5^4}{dt}\right)_0$$

iar punctul $P(t)$ parcurge o curbă închisă C.

De asemenea notăm

$$\alpha = e^{\int_C ds_1^1}, \quad \beta_1 = e^{\int_C ds_2^2}, \quad \beta_2 = \int_C e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_2^2)} ds_1^2, \quad \gamma_1 = e^{\int_C ds_3^3}$$

$$\gamma_2 = \int_C e^{\int_0^t (ds_2^2 - ds_3^3)} \left[\int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_2^2)} ds_1^2\right] ds_2^3 + \int_C e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_3^3)} ds_1^3,$$

$$\gamma_3 = \int_C e^{\int_0^t (ds_2^2 - ds_3^3)} \cdot ds_2^3,$$

$$\delta_1 = \lambda_0\alpha + \mu_0 \beta_1 \beta_2 + \nu_0 \gamma_1 \gamma_2, \; \delta_2 = \mu_0 \beta_1 + \nu_0 \gamma_1 \gamma_3, \; \delta_3 = \nu_0, \; \delta_4 = \Phi_1, \delta_5 = \Phi_2$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\alpha\left(\frac{d\lambda_0}{dt} + \lambda_0 \frac{d(s_1^1 - s_4^4)}{dt} + \mu_0 \frac{ds_1^2}{dt} + \nu_0 \frac{ds_1^3}{dt} - \frac{ds_1^4}{dt}\right) +}{\frac{ds_5^4}{dt}}$$

$$\frac{+ \beta_1\beta_2\left(\frac{d\mu_0}{dt} + \mu_0 \frac{d(s_2^2 - s_4^4)}{dt} + \nu_0 \frac{ds_2^3}{dt} - \frac{ds_2^4}{dt}\right) + \gamma_1\gamma_2\left(\frac{d\nu_0}{dt} + \nu_0 \frac{d(s_3^3 - s_4^4)}{dt} - \frac{ds_3^4}{dt}\right)}{\frac{ds_5^4}{dt}}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\beta_1\left(\frac{d\mu_0}{dt} + \mu_0 \frac{d(s_2^2 - s_4^4)}{dt} + \nu_0 \frac{ds_2^3}{dt} - \frac{ds_2^4}{dt}\right) +}{\frac{ds_5^4}{dt}}$$

$$\frac{+ \gamma_1\gamma_3\left(\frac{d\nu_0}{dt} + \nu_0 \cdot \frac{d(s_3^3 - s_4^4)}{dt} - \frac{ds_3^4}{dt}\right)}{\frac{ds_5^4}{dt}},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\gamma_1\left(\dfrac{\mathrm{d}\nu_0}{\mathrm{d}t} + \nu_0\dfrac{\mathrm{d}(s_3^3 - s_4^4)}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}}, \quad \varepsilon_4 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\Phi_1}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}},$$

$$\varepsilon_5 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\Phi_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}}.$$

În aceste condiţii grupul omogen de olomonie al spaţiului A_5 va fi :

$$(6) \quad \begin{cases} v'^1 = \alpha v^1, \\ v'^2 = \beta_1 \beta_2 v^1 + \beta_1 v^2, \\ v'^3 = \gamma_1\gamma_2 v^1 + \gamma_1\gamma_3 v^2 + \gamma_1 v^3, \\ v'^4 = \delta_1 v^1 + \delta_2 v^2 + \delta_3 v^3 + \delta_4 v^4 + \delta_5 v^5, \\ v'^5 = \varepsilon_1 v^1 + \varepsilon_2 v^2 + \varepsilon_3 v^3 + \varepsilon_4 v^4 + \varepsilon_5 v^5. \end{cases}$$

În concluzie dacă $\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_4^1 = \mathrm{d}s_5^1 = \mathrm{d}s_3^2 = \mathrm{d}s_4^2 = \mathrm{d}s_5^2 = \mathrm{d}s_4^3 = \mathrm{d}s_5^3 = 0$, $\mathrm{d}s_5^4 \neq 0$, $\mathrm{d}s_4^5 \neq 0$, spaţiul A_5 are drept grup omogen de olonomie grupul (6) sau un subgrup al său.

Varietăţile invariante din spaţiul A_5 în raport cu grupul (6) sînt :

$$v^1 = 0, \; v^1 = v^2 = 0, \; v^1 = v^2 = v^3 = 0.$$

În sistemul de coordonate ales condiţiile precedente se scriu

$$\Gamma_{2i}^1 = \Gamma_{3i}^1 = \Gamma_{4i}^1 = \Gamma_{5i}^1 = \Gamma_{3i}^2 = \Gamma_{4i}^2 = \Gamma_{5i}^2 = \Gamma_{4i}^3 = \Gamma_{5i}^3 = 0, \; i = 1, \ldots, 5$$

$$\sum_{i=1}^{5} (\Gamma_{5i}^4)^2 \neq 0, \; \sum_{i=1}^{5} (\Gamma_{4i}^5)^2 \neq 0.$$

În continuare vom considera cazul :

$$(7) \quad \begin{cases} \mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_4^1 = \mathrm{d}s_5^1 = 0, \\ (\mathrm{d}s_3^2)^2 + (\mathrm{d}s_4^2)^2 + (\mathrm{d}s_5^2)^2 \neq 0, (\mathrm{d}s_2^3)^2 + (\mathrm{d}s_4^3)^2 + (\mathrm{d}s_5^3)^2 \neq 0, \\ (\mathrm{d}s_2^4)^2 + (\mathrm{d}s_3^4)^2 + (\mathrm{d}s_5^4)^2 \neq 0, (\mathrm{d}s_2^5)^2 + (\mathrm{d}s_3^5)^2 + (\mathrm{d}s_4^5)^2 \neq 0. \end{cases}$$

Mai întîi vom presupune subcazul I al relaţiilor (7) :

$$\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_4^1 = \mathrm{d}s_5^1 = \mathrm{d}s_4^2 = \mathrm{d}s_5^2 = \mathrm{d}s_4^3 = \mathrm{d}s_5^3 = 0, \; \mathrm{d}s_3^2 \neq 0, \; \mathrm{d}s_2^3 \neq 0,$$

Din prima ecuaţie (3) avem :

$$(8) \quad v^3 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t} v^2 - c^1 \, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1} \dfrac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}$$

care înlocuită în a doua ecuaţie (3) conduce la ecuaţia :

$$\frac{\mathrm{d}^2v^2}{\mathrm{d}t^2}-p_1\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}-p_2\,v^2=c^1\,\mathrm{e}^{\int_0^t\mathrm{d}s_1^1}\;p_3, \tag{8'}$$

unde am notat

$$p_1=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}(s_2^2+s_3^3)}{\mathrm{d}t},$$

$$p_2=\frac{\mathrm{d}^2s_2^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t},$$

$$p_3=\frac{\mathrm{d}^2s_1^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}(s_1^1-s_3^3)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_1^3}{\mathrm{d}t}.$$

Ecuaţia (8′) are soluţia generală

$$v^2=c^1\,\mathrm{e}^{\int_0^t\mathrm{d}s_1^1}\;\Phi_1+c^2\;\Phi_2+c^3\Phi_3,$$

unde Φ_1 este o soluţie particulară a ecuaţiei :

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}t^2}+\left(2\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}-p_1\right)\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}+\left[\frac{\mathrm{d}^2s_1^1}{\mathrm{d}t^2}+\left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)^2-(p_1+p_2)\right]\Phi=p_3$$

iar Φ_2, Φ_3 soluţii independente ale ecuaţiei omogene :

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}t^2}-p_1\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}-p_2\,\Phi=0.$$

Înlocuind valoarea lui v^2 în ecuaţia (8) obţinem :

$$v^3=c^1\,\frac{\mathrm{e}^{\int_0^t\mathrm{d}s_1^1}\left[\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}(s_1^1-s_2^2)}{\mathrm{d}t}\Phi_1-\dfrac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\right]}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}+$$

$$+\,c^2\,\frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}-\Phi_2\dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}+c^3\,\frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t}-\Phi_3\dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}.$$

Ţinînd seama de expresiile găsite pentru v^1, v^2, v^3 şi înlocuindu-le în ultimele ecuaţii (3) găsim :

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}v^4}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\;v^4=c^1\;\mathrm{e}^{\int_0^t\mathrm{d}s_1^1}\;q_1+c^2\;q_2+c^3q_3+\frac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}\;v^5,\\&\frac{\mathrm{d}v^5}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}s_5^5}{\mathrm{d}t}\,v^5=c^1\;\mathrm{e}^{\int_0^t\mathrm{d}s_1^1}r_1+c^2\;r_2+c^3\;r_3+\frac{\mathrm{d}s_4^5}{\mathrm{d}t}\,v^4,\end{aligned}\right. \tag{3''}$$

unde

$$q_1 = \frac{ds_1^4}{dt} + \frac{ds_2^4}{dt}\,\Phi_1 + \frac{\dfrac{ds_3^4}{dt}\left[\dfrac{d\Phi_1}{dt} + \dfrac{d(s_1^1 - s_2^2)}{dt}\;\Phi_1 - \dfrac{ds_1^2}{dt}\right]}{\dfrac{ds_3^2}{dt}},$$

$$q_2 = \frac{ds_2^4}{dt}\,\Phi_2 + \frac{\dfrac{ds_3^4}{dt}\left[\dfrac{d\Phi_2}{dt} - \Phi_2\,\dfrac{ds_2^2}{dt}\right]}{\dfrac{ds_3^2}{dt}},$$

$$q_3 = \frac{ds_2^4}{dt}\,\Phi_3 + \frac{\dfrac{ds_3^4}{dt}\left[\dfrac{d\Phi_3}{dt} - \Phi_3\,\dfrac{ds_2^2}{dt}\right]}{\dfrac{ds_3^2}{dt}},$$

$$r_1 = \frac{ds_1^5}{dt} + \frac{ds_2^5}{dt}\Phi_1 + \frac{\dfrac{ds_3^5}{dt}\left[\dfrac{d\Phi_1}{dt} + \dfrac{d(s_1^1 - s_2^2)}{dt}\;\Phi_1 - \dfrac{ds_1^2}{dt}\right]}{\dfrac{ds_3^2}{dt}},$$

$$r_2 = \frac{ds_2^5}{dt}\,\Phi_2 + \frac{\dfrac{ds_3^5}{dt}\left[\dfrac{d\Phi_2}{dt} - \Phi_2\,\dfrac{ds_2^2}{dt}\right]}{\dfrac{ds_3^2}{dt}},$$

$$r_3 = \frac{ds_2^5}{dt}\,\Phi_3 + \frac{\dfrac{ds_3^5}{dt}\left[\dfrac{d\Phi_3}{dt} - \Phi_3\,\dfrac{ds_2^2}{dt}\right]}{\dfrac{ds_3^2}{dt}}.$$

Dacă $ds_5^4 = 0$, atunci prima din ultimele ecuații (3″) de mai sus devine :

$$\frac{dv^4}{dt} - \frac{ds_4^4}{dt}\;v^4 = c^1\,e^{\int_0^t ds_1^1}\;q_1 + c^2\;q_2 + c^3\,q_3$$

avînd soluția generală

$$v^4 = c^1\,e^{\int_0^t ds_4^4}\int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_4^4)}\;q_1\;dt + c^2\;e^{\int_0^t ds_4^4}\int_0^t e^{-\int_0^t ds_4^4}\,q_2\,dt +$$

$$+ c^3\;e^{\int_0^t ds_4^4}\int_0^t e^{-\int_0^t ds_4^4}\;q_3\;dt + c^4\;e^{\int_0^t ds_4^4}$$

care înlocuită în ultima ecuaţie (3″) ne dă :

$$\frac{\mathrm{d}v^5}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_5^5}{\mathrm{d}t} v^5 = c^1 \left(\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1} r_1 + \frac{\mathrm{d}s_4^5}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_4^4} \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_4^4)} q_1 \,\mathrm{d}t \right) +$$

$$+ c^2 \left(r_2 + \frac{\mathrm{d}s_4^5}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_4^4} \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4} q_2 \,\mathrm{d}t \right) +$$

$$+ c^3 \left(r_3 + \frac{\mathrm{d}s_4^5}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_4^4} \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4} q_3 \,\mathrm{d}t \right) + c^4 \frac{\mathrm{d}s_4^5}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_4^4},$$

ecuaţie care prin integrare conduce la :

$$v^5 = c^1 \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_5^5} \left(\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_5^5)} r_1 \,\mathrm{d}t + \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_4^4 - \mathrm{d}s_5^5)} \left(\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_4^4)} q_1 \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s_4^5 \right) +$$

$$+ c^2 \cdot \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_5^5} \left(\int_0^t r_2 \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_5^5} \mathrm{d}t + \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_4^4 - \mathrm{d}s_5^5)} \left(\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4} q_2 \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s_4^5 \right) +$$

$$+ c^3 \cdot \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_5^5} \left(\int_0^t r_3 \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_5^5} \mathrm{d}t + \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_4^4 - \mathrm{d}s_5^5)} \left(\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4} q_3 \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s_4^5 \right) +$$

$$+ c^4 \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_5^5} \left(\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_4^4 - \mathrm{d}s_5^5)} \mathrm{d}s_4^5 \right) + c^5 \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_5^5}.$$

Presupunînd că funcţiile Φ_1, Φ_2, Φ_3 satisfac condiţiile iniţiale

$$\Phi_1(0) = \Phi_3(0) = 0, \; \Phi_2(0) = 1 \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} \right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t} \right)_0 .$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} \right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t} \right)_0, \; \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t} \right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} \right)_0 .$$

Dacă notăm cu

$$\alpha = \mathrm{e}^{\int_C \mathrm{d}s_1^1}, \; \beta_1 = \Phi_1, \; \beta_2 = \Phi_2, \; \beta_3 = \Phi_3,$$

$$\gamma_1 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}(s_1^1 - s_2^2)}{\mathrm{d}t} \Phi_1 - \dfrac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}, \; \gamma_2 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} - \Phi_2 \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}, \gamma_3 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t} - \Phi_3 \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}$$

$$\delta_1 = \int_C \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_4^4)} q_1 \mathrm{d}t, \; \delta_2 = \int_C \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4} q_2 \,\mathrm{d}t, \; \delta_3 = \int_C \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4} q_3 \mathrm{d}t, \; \delta_4 = \mathrm{e}^{\int_C \mathrm{d}s_4^4},$$

$$\varepsilon_1 = \int_C \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_5^5)} r_1 \,\mathrm{d}t + \int_C \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_4^4 - \mathrm{d}s_5^5)} \left(\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_4^4)} q_1 \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s_4^5,$$

$$\varepsilon_2 = \int_C r_2 \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_5^5} \mathrm{d}t + \int_C \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_4^4 - \mathrm{d}s_5^5)} \left(\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4} q_2 \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s_4^5,$$

$$\varepsilon_3 = \int_C r_3 \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_5^5} \mathrm{d}t + \int_C \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_4^4 - \mathrm{d}s_5^5)} \left(\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4} q_3 \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s_4^5,$$

$$\varepsilon_4 = \int_C \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_4^4 - \mathrm{d}s_5^5)} \mathrm{d}s_4^5,$$

$$\varepsilon_5 = \mathrm{e}^{\int_C \mathrm{d}s_5^5},$$

unde punctul $P(t)$ parcurge curba închisă C, atunci grupul de olonomie omogen al spaţiului A_5 este :

$$(9) \quad \begin{cases} v'^1 = \alpha v^1, \\ v'^2 = \alpha \beta_1 v^1 + \beta_2 v^2 + \beta_3 v^3, \\ v'^3 = \alpha \gamma_1 v^1 + \gamma_2 v^2 + \gamma_3 v^3, \\ v'^4 = \delta_4 \delta_1 v^1 + \delta_4 \delta_2 v^2 + \delta_4 \delta_3 v^3 + \delta_4 v^4, \\ v'^5 = \varepsilon_5 \varepsilon_1 v^1 + \varepsilon_5 \varepsilon_2 v^2 + \varepsilon_5 \varepsilon_3 v^3 + \varepsilon_5 \varepsilon_4 v^4 + \varepsilon_5 v^5. \end{cases}$$

Aşadar în cazul cînd $\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_4^1 = \mathrm{d}s_5^1 = \mathrm{d}s_4^2 = \mathrm{d}s_5^2 = \mathrm{d}s_4^3 = \mathrm{d}s_5^3 = \mathrm{d}s_5^4 = 0$, iar $\mathrm{d}s_3^2 \neq 0$, $\mathrm{d}s_2^3 \neq 0$, $\mathrm{d}s_4^5 \neq 0$, spaţiul A_5 are drept grup omogen de olonomie grupul (9) sau un subgrup al său, iar drept varietăţi invariante :

$$v^1 = 0, \quad v^1 = v^2 = v^3 = 0.$$

În sistemul de coordonate ales, condiţiile de mai sus se scriu astfel :

$$\Gamma_{2i}^1 = \Gamma_{3i}^1 = \Gamma_{4i}^1 = \Gamma_{5i}^1 = \Gamma_{4i}^2 = \Gamma_{5i}^2 = \Gamma_{4i}^3 = \Gamma_{5i}^3 = \Gamma_{5i}^4 = 0$$

pentru $i = 1, 2, 3, 4, 5$ şi $\sum_{i=1}^{5} (\Gamma_{3i}^2)^2 \neq 0$, $\sum_{i=1}^{5} (\Gamma_{2i}^3)^2 \neq 0$, $\sum_{i=1}^{5} (\Gamma_{4i}^5)^2 \neq 0$.

Dacă însă $\mathrm{d}s_4^5 = 0$ şi $\mathrm{d}s_5^4 \neq 0$, atunci în mod analog din ultima ecuaţie (3″) rămîne :

$$\frac{\mathrm{d}v^5}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_5^5}{\mathrm{d}t} v^5 = c^1 \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1} r_1 + c^2 r_2 + c^3 r_3$$

cu soluţia generală

$$v^5 = c^1 e^{\int_0^t \mathrm{d}s_5^5} \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_5^5)} r_1 \, \mathrm{d}t + c^2 \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_5^5} \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_5^5} r_2 \, \mathrm{d}t +$$
$$+ c^3 \cdot \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_5^5} \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_5^5} r_3 \, \mathrm{d}t + c^4 \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_5^5}$$

care înlocuită în prima ecuaţie (3″) conduce la :

$$v^4 = \mathrm{c}^1 \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_4^4} \left(\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_4^4)} q_1 \, \mathrm{d}t + \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_5^5 - \mathrm{d}s_4^4)} \left(\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_5^5)} r_1 \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s_5^4 \right) +$$

$$+ c^2 e^{\int_0^t ds_4^4} \left(\int_0^t e^{-\int_0^t ds_4^4} q_2 \, dt + \int_0^t e^{\int_0^t (ds_5^5 - ds_4^4)} \left(\int_0^t e^{-\int_0^t ds_5^5} r_2 \cdot dt \right) ds_5^4 \right) +$$

$$+ c^3 e^{\int_0^t ds_4^4} \left(\int_0^t e^{-\int_0^t ds_4^4} q_3 \, dt + \int_0^t e^{\int_0^t (ds_5^5 - ds_4^4)} \left(\int_0^t e^{-\int_0^t ds_5^5} r_3 \, dt \right) ds_5^4 \right) +$$

$$+ c^4 e^{\int_0^t ds_4^4} \int_0^t e^{\int_0^t (ds_5^5 - ds_4^4)} ds_5^4 + c^5 e^{\int_0^t ds_4^4} .$$

Notînd cu

$$\alpha = e^{\int_C ds_1^1}, \ \beta_1, = \Phi_1, \ \beta_2, = \Phi_2, \ \beta_3 = \Phi_3,$$

$$\gamma_1 = \frac{\dfrac{d\Phi_1}{dt} + \dfrac{d(s_1^1 - s_2^2)}{dt} - \dfrac{ds_1^2}{dt}}{\dfrac{ds_3^2}{dt}},$$

$$\gamma_2 = \frac{\dfrac{d\Phi_2}{dt} - \Phi_2 \dfrac{ds_2^2}{dt}}{\dfrac{ds_3^2}{dt}}, \ \gamma_3 = \frac{\dfrac{d\Phi_3}{dt} - \Phi_3 \dfrac{ds_2^2}{dt}}{\dfrac{ds_3^2}{dt}},$$

$$\eta_1 = \int_C e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_4^4)} q_1 \, dt + \int_C e^{\int_0^t (ds_5^5 - ds_4^4)} \left(\int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_5^5)} r_1 \, dt \right) ds_5^4,$$

$$\eta_2 = \int_C e^{-\int_0^t ds_4^4} q_2 \, dt + \int_C e^{\int_0^t (ds_5^5 - ds_4^4)} \left(\int_C e^{-\int_0^t ds_5^5} r_2 \, dt \right) ds_5^4,$$

$$\eta_3 = \int_C e^{-\int_0^t ds_4^4} q_3 \, dt + \int_C e^{\int_0^t (ds_5^5 - ds_4^4)} \left(\int_0^t e^{-\int_0^t ds_5^5} r_3 \, dt \right) ds_5^4,$$

$$\eta_4 = \int_C e^{\int_0^t (ds_5^5 - ds_4^4)} ds_5^4, \ \eta_5 = e^{\int_C ds_4^4}$$

$$\zeta_1 = \int_C e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_5^5)} r_1 \, dt, \ \zeta_2 = \int_C e^{-\int_0^t ds_5^5} r_2 \, dt, \ \zeta_3 =$$

$$= \int_C e^{-\int_0^t ds_5^5} r_3 \, dt, \ \zeta_4 = e^{\int_C ds_5^5},$$

unde punctul $P(t)$ se mişcă pe curba închisă C, atunci grupul omogen de olonomie al spaţiului A_5 va fi :

$$(10) \qquad \begin{cases} v'^1 = \alpha v^1, \\ v'^2 = \alpha \beta_1 v^1 + \beta_2 v^2 + \beta_3 v^3, \\ v'^3 = \alpha \gamma_1 v^1 + \gamma_2 v^2 + \gamma_3 v^3, \\ v'^4 = \eta_5 \eta_1 v^1 + \eta_5 \eta_2 v^2 + \eta_5 \eta_3 v^3 + \eta_5 \eta_4 v^4 + \eta_5 v^5, \\ v'^5 = \zeta_4 \zeta_1 v^1 + \zeta_4 \zeta_2 v^2 + \zeta_4 \zeta_3 v^3 + \zeta_4 v^4. \end{cases}$$

Deci dacă $\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_4^1 = \mathrm{d}s_5^1 = \mathrm{d}s_4^2 = \mathrm{d}s_5^2 = \mathrm{d}s_4^3 = \mathrm{d}s_5^3 = \mathrm{d}s_4^5 = 0$ iar $\mathrm{d}s_3^2 \neq 0$, $\mathrm{d}s_2^3 \neq 0$, $\mathrm{d}s_5^4 \neq 0$, grupul de olonomie omogenă al spațiului A_5 este (10).

În sistemul de coordonate ales, condițiile de sus devin:

$$\Gamma^1_{2i} = \Gamma^1_{3i} = \Gamma^1_{4i} = \Gamma^1_{5i} = \Gamma^2_{4i} = \Gamma^2_{5i} = \Gamma^3_{4i} = \Gamma^3_{5i} = \Gamma^5_{4i} = 0,$$

$$(i = 1, \dots, 5),\ \sum_{i=1}^{5} (\Gamma^2_{3i})^2 \neq 0,\ \sum_{i=1}^{5} (\Gamma^3_{2i})^2 = 0,\ \sum_{i=1}^{5} (\Gamma^4_{5i})^2 \neq 0.$$

Să considerăm acum subcazul II al relațiilor (7):

$\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_4^1 = \mathrm{d}s_5^1 = \mathrm{d}s_4^2 = \mathrm{d}s_5^2 = \mathrm{d}s_2^3 = \mathrm{d}s_5^3 = 0$ și $\mathrm{d}s_3^2 \neq 0$, $\mathrm{d}s_4^3 \neq 0$,

Din prima ecuație (3) avem

$$v^3 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\, v^2 - c^1\, e^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1}\, \dfrac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}$$

care înlocuită în următoarea conduce la ecuația:

$$\frac{\mathrm{d}^2v^2}{\mathrm{d}t^2} - p_1 \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - p_2 v^2 = \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\, \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\, v^4 + \mathrm{c}^1\, e^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1}\, p_3,$$

unde

$$p_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\,(s_2^2 + s_3^3)}{\mathrm{d}t},$$

$$p_2 = \frac{\mathrm{d}^2 s_2^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\, \frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\, \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t},$$

$$p_3 = \frac{\mathrm{d}^2 s_1^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\,(s_1^1 - s_3^3)}{\mathrm{d}t}\, \frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\, \frac{\mathrm{d}s_1^3}{\mathrm{d}t}.$$

deoarece $\dfrac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t} \neq 0$, ultima ecuație se mai scrie:

$$v^4 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2v^2}{\mathrm{d}t^2} - p_1 \dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - p_2\, v^2 - \mathrm{c}^1\, e^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1}\, p_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\, \dfrac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}}.$$

Înlocuind v^3 și v^4 în a treia ecuație (3), obținem:

$$\frac{\mathrm{d}^3v^2}{\mathrm{d}t^3} - q_1 \frac{\mathrm{d}^2v^2}{\mathrm{d}t^2} - q_2 \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - q_3\, v^2 = c^1\, e^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1}\, q_4 +$$

$$+ \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\, \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\, \frac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}\, v^5, \tag{11}$$

unde

$$q_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \left[\left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} \right)^2 \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t} \right] + \frac{\mathrm{d}\,(s_2^2 + s_3^3 + s_4^4)}{\mathrm{d}t},$$

$$q_2 = \frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t} - p_1 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t} \right) + \frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t} \right) + p_2 + \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t},$$

$$q_3 = \frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t} - p_2 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t} \right) + \frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t} \right) + \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t},$$

$$q_4 = \frac{\mathrm{d}p_3}{\mathrm{d}t} - p_3 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t} \right) + \frac{\mathrm{d}\,(s_1^1 + s_4^4)}{\mathrm{d}t} \right) +$$

$$+ \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_1^4}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t} \right).$$

Dacă $\mathrm{d}s_5^4 = 0$, atunci (11) devine

$$\frac{\mathrm{d}^3 v^2}{\mathrm{d}t^3} - q_1 \frac{\mathrm{d}^2 v^2}{\mathrm{d}t^2} - q_2 \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - \mathrm{q}_3\, v^2 = c^1\, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1}\, q_4.$$

Notăm cu Φ_2, Φ_3, Φ_4 trei soluţii independente ale ecuaţiei omogene :

$$\frac{\mathrm{d}^3\Phi}{\mathrm{d}t^3} - q_1 \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}t^2} - q_2 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} - q_3 \Phi = 0$$

şi cu Φ_1 o soluţie particulară a ecuaţiei

$$\frac{\mathrm{d}^3\Phi_1}{\mathrm{d}t^3} + \left(3 \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} - q_1 \right) \frac{\mathrm{d}^2\Phi_1}{\mathrm{d}t^2} + \left[3 \frac{\mathrm{d}^2 s_1^1}{\mathrm{d}t^2} + 3 \left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} \right)^2 - 2q_1 \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} - q_2 \right] \frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} +$$

$$+ \left[\frac{\mathrm{d}^3 s_1^1}{\mathrm{d}t^3} + 3 \frac{\mathrm{d}^2 s_1^1}{\mathrm{d}t^2} \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} \right)^3 - q_1 \left(\frac{\mathrm{d}^2 s_1^1}{\mathrm{d}t^2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} \right)^2 \right) - q_2 \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} - q_3 \right] \Phi_1 = q_4.$$

Soluţia generală a ecuaţiei (11) va fi în acest caz :

$$v^2 = c^1\, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1}\, \Phi_1 + c^2\, \Phi_2 + c^3\, \Phi_3 + c^4\, \Phi_4.$$

Înlocuind pe v^2 în ecuațiile care dau pe v^3 și v^4, obținem

$$v^3 = c^1\, e^{\int_0^t ds_1^1}\, \frac{\dfrac{d\Phi_1}{dt} + \dfrac{d(s_1^1 - s_2^2)}{dt}\,\Phi_1 - \dfrac{ds_1^2}{dt}}{\dfrac{ds_3^2}{dt}} + c^2\, \frac{\dfrac{d\Phi_2}{dt} - \Phi_2\,\dfrac{ds_2^2}{dt}}{\dfrac{ds_3^2}{dt}} +$$

$$+ c^3\, \frac{\dfrac{d\Phi_3}{dt} - \Phi_3\,\dfrac{ds_2^2}{dt}}{\dfrac{ds_3^2}{dt}} + c^4\, \frac{\dfrac{d\Phi_4}{dt} - \Phi_4\,\dfrac{ds_2^2}{dt}}{\dfrac{ds_3^2}{dt}},$$

iar

$$v^4 = c^1\, e^{\int_0^t ds_1^1}.$$

$$\cdot\, \frac{\dfrac{d^2\Phi_1}{dt^2} + \left(2\,\dfrac{ds_1^1}{dt} - p_1\right)\dfrac{d\Phi_1}{dt} + \left[\dfrac{d^2 s_1^1}{dt^2} + \left(\dfrac{ds_1^1}{dt}\right)^2 - p_1\,\dfrac{ds_1^1}{dt} - p_2\right]\Phi_1 - p_3}{\dfrac{ds_3^2}{dt}\,\dfrac{ds_4^3}{dt}} +$$

$$+ c^2\, \frac{\dfrac{d^2\Phi_2}{dt^2} - p_1\,\dfrac{d\Phi_2}{dt} - p_2\,\Phi_2}{\dfrac{ds_3^2}{dt}\,\dfrac{ds_4^3}{dt}} + c^3\, \frac{\dfrac{d^2\Phi_3}{dt^2} - p_1\,\dfrac{d\Phi_3}{dt} - p_2\Phi_3}{\dfrac{ds_3^2}{dt}\,\dfrac{ds_4^3}{dt}} +$$

$$+ c^4\, \frac{\dfrac{d^2\Phi_4}{dt^2} - p_1\,\dfrac{d\Phi_4}{dt} - p_2\,\Phi_4}{\dfrac{ds_3^2}{dt}\,\dfrac{ds_4^3}{dt}}.$$

Înlocuind în ultima ecuație (3) valorile căpătate pentru v^2, v^3, v^4, obținem prin integrare :

$$v^5 = c^1 e^{\int_0^t ds_5^5} \left(\int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_5^5)} ds_1^5 + \int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_5^5)} \cdot \Phi_1\, ds_2^5 + \right.$$

$$\left. + \int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_5^5)}\, \gamma_1\, ds_3^5 + \int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_5^5)}\, \delta_1\, ds_4^5\right) +$$

$$+ c^2\, e^{\int_0^t ds_5^5} \left(\int_0^t e^{-\int_0^t ds_5^5}\, \Phi_2\, ds_2^5 + \int_0^t e^{-\int_0^t ds_5^5}\, \gamma_2\, ds_3^5 + \int_0^t e^{-\int_0^t ds_5^5}\, \delta_2\, ds_4^5\right) +$$

$$+ c^3\, e^{\int_0^t ds_5^5} \left(\int_0^t e^{-\int_0^t ds_5^5}\, \Phi_3\, ds_2^5 + \int_0^t e^{-\int_0^t ds_5^5}\, \gamma_3\, ds_3^5 + \int_0^t e^{-\int_0^t ds_5^5}\, \delta_3\, ds_4^5\right) +$$

$$+ c^4 e^{\int_0^t ds_5^5} \left(\int_0^t e^{-\int_0^t ds_5^5} \Phi_4 \, ds_2^5 + \int_0^t e^{-\int_0^t ds_5^5} \gamma_4 \, ds_3^5 + \right.$$

$$\left. + \int_0^t e^{-\int_0^t ds_5^5} \delta_4 \, ds_4^5 \right) + c^5 e^{\int_0^t ds_5^5},$$

unde am notat

$$\alpha = e^{\int c \, ds_1^1}, \ \beta_1 = \Phi_1, \ \beta_2 = \Phi_2, \ \beta_3 = \Phi_3, \ \beta_4 = \Phi_4,$$

$$\gamma_1 = \frac{\dfrac{d\Phi_1}{dt} + \dfrac{d(s_1^1 - s_2^2)}{dt} \Phi_1 - \dfrac{ds_1^2}{dt}}{\dfrac{ds_3^2}{dt}}, \ \gamma_2 = \frac{\dfrac{d\Phi_2}{dt} - \dfrac{ds_2^2}{dt} \Phi_2}{\dfrac{ds_3^2}{dt}},$$

$$\gamma_3 = \frac{\dfrac{d\Phi_3}{dt} - \dfrac{ds_2^2}{dt} \Phi_3}{\dfrac{ds_3^2}{dt}},$$

$$\gamma_4 = \frac{\dfrac{d\Phi_4}{dt} - \dfrac{ds_2^2}{dt} \Phi_4}{\dfrac{ds_3^2}{dt}},$$

$$\delta_1 = \frac{\dfrac{d^2\Phi_1}{dt^2} + \left(2 \dfrac{ds_1^1}{dt} - p_1\right) \dfrac{d\Phi_1}{dt} + \left[\dfrac{d^2 s_1^1}{dt^2} + \left(\dfrac{ds_1^1}{dt}\right)^2 - p_1 \dfrac{ds_1^1}{dt} - p_2\right] \Phi_1 - p_3}{\dfrac{ds_3^2}{dt} \cdot \dfrac{ds_4^3}{dt}},$$

$$\delta_2 = \frac{\dfrac{d^2\Phi_2}{dt^2} - p_1 \dfrac{d\Phi_2}{dt} - p_2 \Phi_2}{\dfrac{ds_3^2}{dt} \dfrac{ds_4^3}{dt}}, \ \delta_3 = \frac{\dfrac{d^2\Phi_3}{dt^2} - p_1 \dfrac{d\Phi_3}{dt} - p_2 \Phi_3}{\dfrac{ds_3^2}{dt} \dfrac{ds_4^3}{dt}},$$

$$\delta_4 = \frac{\dfrac{d^2\Phi_4}{dt^2} - p_1 \dfrac{d\Phi_4}{dt} - p_2 \Phi_4}{\dfrac{ds_3^2}{dt} \dfrac{ds_4^3}{dt}},$$

iar funcţiile Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 satisfac condiţiile iniţiale:

$$\Phi_1(0) = \Phi_3(0) = \Phi_4(0) = 0, \ \Phi_2(0) = 1,$$

$$\left(\frac{d\Phi_1}{dt}\right)_0 = \left(\frac{ds_1^2}{dt}\right)_0, \left(\frac{d\Phi_2}{dt}\right)_0 = \left(\frac{ds_2^2}{dt}\right)_0, \left(\frac{d\Phi_3}{dt}\right)_0 = \left(\frac{ds_3^2}{dt}\right)_0, \left(\frac{d\Phi_4}{dt}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 \Phi_1}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = \left(p_1 - 2\,\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)_0 \left(\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\right)_0 + (p_3)_0, \quad \left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_2}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = (p_1)_0 \left(\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\right)_0 + (p_2)_0,$$

$$\left(\frac{(\mathrm{d}^2\Phi_3}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = (p_1)_0 \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right)_0, \quad \left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_4}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right)_0 \left(\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\right)_0.$$

Notînd încă cu :

$$\varepsilon_1 = \int_C e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_5^5)}\, \mathrm{d}s_1^5 + \int_C e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_5^5)} \cdot \beta_1\, \mathrm{d}s_2^5 +$$

$$+ \int_C e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_5^5)}\, \gamma_1\, \mathrm{d}s_3^5 + \int_C e^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_5^5)}\, \delta_1\, \mathrm{d}s_4^5.$$

$$\varepsilon_2 = \int_C e^{-\int_0^t \mathrm{d}s_5^5}\, \beta_2\, \mathrm{d}s_2^5 + \int_C e^{-\int_0^t \mathrm{d}s_5^5}\, \gamma_2\, \mathrm{d}s_3^5 + \int_C e^{-\int_0^t \mathrm{d}s_5^5}\, \delta_2\, \mathrm{d}s_4^5,$$

$$\varepsilon_3 = \int_C e^{-\int_0^t \mathrm{d}s_5^5}\, \beta_3\, \mathrm{d}s_2^5 + \int_C e^{-\int_0^t \mathrm{d}s_5^5}\, \gamma_3\, \mathrm{d}s_3^5 + \int_C e^{-\int_0^t \mathrm{d}s_5^5}\, \delta_3\, \mathrm{d}s_4^5,$$

$$\varepsilon_4 = \int_C e^{-\int_0^t \mathrm{d}s_5^5}\, \beta_4\, \mathrm{d}s_2^5 + \int_C e^{-\int_0^t \mathrm{d}s_5^5}\, \gamma_4\, \mathrm{d}s_3^5 + \int_C e^{-\int_0^t \mathrm{d}s_5^5}\, \delta_4\, \mathrm{d}s_4^5,$$

$$\varepsilon_5 = e^{\int_C \mathrm{d}s_5^5},$$

unde $P(t)$ parcurge curba C închisă şi oarecare, atunci grupul omogen de olonomie al spaţiului A_5 este :

$$(12) \qquad \left|\begin{aligned} v'^1 &= \alpha v^1, \\ v'^2 &= \alpha\beta_1 v^1 + \beta_2\, v^2 + \beta_3\, v^3 + \beta_4\, v^4, \\ v'^3 &= \alpha\gamma_1 v^1 + \gamma_2\, v^2 + \gamma_3\, v^3 + \gamma_4\, v^4, \\ v'^4 &= \alpha\delta_1 v_1 + \delta_2\, v^2 + \delta_3 v^3 + \delta_4\, v^4, \\ v'^5 &= \varepsilon_5 \varepsilon_1 v^1 + \varepsilon_5 \varepsilon_2 \cdot v^2 + \varepsilon_5 \varepsilon_3\, v^3 + \varepsilon_5 \varepsilon_4\, v^4 + \varepsilon_5 v^5. \end{aligned}\right.$$

Deci dacă $\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_4^1 = \mathrm{d}s_5^1 = \mathrm{d}s_4^2 = \mathrm{d}s_5^2 = \mathrm{d}s_2^3 = \mathrm{d}s_5^3 = \mathrm{d}s_5^4 = 0$ iar $\mathrm{d}s_3^2 \neq 0$, $\mathrm{d}s_4^3 \neq 0$, iar $(\mathrm{d}s_2^4)^2 + (\mathrm{d}s_3^4)^2 \neq 0$ şi $(\mathrm{d}s_2^5)^2 + (\mathrm{d}s_3^5)^2 + (\mathrm{d}s_4^5)^2 \neq 0$, atunci grupul omogen de olonomie al spaţiului A_5 este (12) sau un subgrup al său avînd drept varietăţi invariante :

$$v^1 = 0, \; v^1 = v^2 = v^3 = v^4 = 0.$$

În sistemul de coordonate ales, condiţiile de mai sus se scriu :

$$\Gamma_{2i}^1 = \Gamma_{3i}^1 = \Gamma_{4i}^1 = \Gamma_{5i}^1 = \Gamma_{4i}^2 = \Gamma_{5i}^2 = \Gamma_{2i}^3 = \Gamma_{5i}^3 = \Gamma_{5i}^4 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

$$\sum_{i=1}^{5} (\Gamma_{3i}^2)^2 \neq 0, \; \sum_{i=1}^{5} (\Gamma_{4i}^3)^2 \neq 0, \; \sum_{i=1}^{5} [(\Gamma_{2i}^4)^2 + (\Gamma_{3i}^4)^2] \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{5} [(\Gamma_{2i}^5)^2 + (\Gamma_{3i}^5)^2 + (\Gamma_{4i}^5)^2] \neq 0.$$

Vom presupune acum că în relaţia (11) $ds_5^4 \neq 0$, deci $ds_2^1 = ds_3^1 = ds_4^1 = ds_5^1 = ds_4^2 = ds_5^2 = ds_2^3 = ds_5^3 = 0$, iar $ds_3^2 \neq 0$, $ds_4^3 \neq 0$, $ds_5^4 \neq 0$. În baza acestei presupuneri, din (11) rezultă că

$$v^5 = \frac{\dfrac{d^3v^2}{dt^3} - q_1\dfrac{d^2v^2}{dt^2} - q_2\dfrac{dv^2}{dt} - q_3v^2 - c^1 e^{\int_0^t ds_1^1} q_4}{\dfrac{ds_3^2}{dt}\ \dfrac{ds_4^3}{dt}\ \dfrac{ds_5^4}{dt}}$$

pe care o înlocuim în ultima ecuaţie (3) împreună cu valorile anterioare pentru v^3, v^4

$$\frac{d^4v^2}{dt^4} - r_1\frac{d^3v^2}{dt^3} - r_2\frac{d^2v^2}{dt^2} - r_3\frac{dv^2}{dt} - r_4v^2 = c^1 e^{\int_0^t ds_1^1} r_5, \tag{13}$$

unde

$$r_1 = \frac{d}{dt}\ln\left(\frac{ds_3^2}{dt}\ \frac{ds_4^3}{dt}\ \frac{ds_5^4}{dt}\right) + \frac{ds_5^5}{dt},$$

$$r_2 = \frac{dq_1}{dt} - q_1\left(\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{ds_3^2}{dt}\ \frac{ds_4^3}{dt}\ \frac{ds_5^4}{dt}\right) + \frac{ds_5^5}{dt}\right) + q_2 + \frac{ds_5^4}{dt}\ \frac{ds_4^5}{dt},$$

$$r_3 = \frac{dq_2}{dt} - q_2\left(\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{ds_3^2}{dt}\ \frac{ds_4^3}{dt}\ \frac{ds_5^4}{dt}\right) + \frac{ds_5^5}{dt}\right) + q_3 -$$

$$- p_1\frac{ds_5^4}{dt}\ \frac{ds_4^5}{dt} + \frac{ds_5^4}{dt}\ \frac{ds_3^5}{dt}\ \frac{ds_4^3}{dt},$$

$$r_4 = \frac{dq_3}{dt} - q_3\left(\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{ds_3^2}{dt}\ \frac{ds_4^3}{dt}\ \frac{ds_5^4}{dt}\right) + \frac{ds_5^5}{dt}\right) - p_2\frac{ds_5^4}{dt}\ \frac{ds_4^5}{dt} -$$

$$- \frac{ds_5^4}{dt}\ \frac{ds_4^3}{dt}\left(\frac{ds_2^5}{dt}\ \frac{ds_3^2}{dt} + \frac{ds_3^5}{dt}\ \frac{ds_2^2}{dt}\right),$$

$$r_5 = \frac{dq_4}{dt} - q_4\left(\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{ds_3^2}{dt}\ \frac{ds_4^3}{dt}\ \frac{ds_5^4}{dt}\right) + \frac{ds_5^5}{dt}\right) - p_3\frac{ds_5^4}{dt}\ \frac{ds_4^5}{dt} +$$

$$+ \frac{ds_5^4}{dt}\ \frac{ds_4^3}{dt}\left(\frac{ds_1^5}{dt}\ \frac{ds_3^2}{dt} - \frac{ds_3^5}{dt}\ \frac{ds_1^2}{dt}\right).$$

Notăm cu Φ_2, Φ_3, Φ_4, Φ_5 patru soluţii independente ale ecuaţiei omogene :

$$\frac{d^4\Phi}{dt^4} - r_1\frac{d^3\Phi}{dt^3} - r_2\frac{d^2\Phi}{dt^2} - r_3\frac{d\Phi}{dt} - r_4\Phi = 0$$

şi cu Φ_1 o soluţie particulară a ecuaţiei :

$$\frac{d^4\Phi}{dt^4} + \left(3\,\frac{ds_1^1}{dt} - r_1\right)\frac{d^3\Phi}{dt^3} + \left[6\,\frac{d^2s_1^1}{dt^2} + 6\left(\frac{ds_1^1}{dt}\right)^2 - 3\,\frac{ds_1^1}{dt}\,r_1 - r_2\right]\frac{d^2\Phi}{dt^2} +$$

$$+\left[4\,\frac{d^3s_1^1}{dt^3} + 12\,\frac{d^2s_1^1}{dt^2}\,\frac{ds_1^1}{dt} + 3\,\frac{d^2s_1^1}{dt^2} - 3\,r_1\left(\frac{d^2s_1^1}{dt^2} + \left(\frac{ds_1^1}{dt}\right)^2\right) +\right.$$

$$\left. + 4\left(\frac{ds_1^1}{dt}\right)^3 - 2\,\frac{ds_1^1}{dt}\,r_2 - r_3\right]\frac{d\Phi}{dt} +$$

$$+\left[\frac{d^4s_1^1}{dt^4} + \frac{d^3s_1^1}{dt^3}\left(4\,\frac{ds_1^1}{dt} - r_1\right) + \frac{d^2s_1^1}{dt^2}\left(3\,\frac{d^2s_1^1}{dt^2} + 6\left(\frac{ds_1^1}{dt}\right)^2 - 3\,\frac{ds_1^1}{dt}\,r_1 - r_2\right) +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{ds_1^1}{dt}\right)^4 - \left(\frac{ds_1^1}{dt}\right)^3 r_1 - \left(\frac{ds_1^1}{dt}\right)^2 r_2 - \left(\frac{ds_1^1}{dt}\right) r_3 - r_4\right]\Phi = r_5 .$$

Soluţia generală a ecuaţiei (13) este deci

$$v^2 = c^1\, e^{\int_0^t ds_1^1}\,\Phi_1 + c^2\,\Phi_2 + c^3\,\Phi_3 + c^4\,\Phi_4 .$$

Înlocuind această valoare a lui v^2 în expresiile anterioare pentru v^3, v^4, v^5, obţinem :

$$v^3 = c^1\cdot e^{\int_0^t ds_1^1}\cdot\frac{\dfrac{d\Phi_1}{dt} + \dfrac{d\,(s_1^1 - s_2^2)}{dt}\,\Phi_1 - \dfrac{ds_1^2}{dt}}{\dfrac{ds_3^2}{dt}} + c^2\,\frac{\dfrac{d\Phi_2}{dt} - \dfrac{ds_2^2}{dt}\,\Phi_2}{\dfrac{ds_3^2}{dt}} +$$

$$+ c^3\,\frac{\dfrac{d\Phi_3}{dt} - \dfrac{ds_2^2}{dt}\,\Phi_3}{\dfrac{ds_3^2}{dt}} + c^4\,\frac{\dfrac{d\Phi_4}{dt} - \dfrac{ds_2^2}{dt}\,\Phi_4}{\dfrac{ds_3^2}{dt}} + c^5\,\frac{\dfrac{d\Phi_5}{dt} - \dfrac{ds_2^2}{dt}\,\Phi_5}{\dfrac{ds_3^2}{dt}} ,$$

$$v^4 = c^1\, e^{\int_0^t ds_1^1} \,.$$

$$\cdot\,\frac{\dfrac{d^2\Phi_1}{dt^2} + \dfrac{d\Phi_1}{dt}\left(2\,\dfrac{ds_1^1}{dt} - p_1\right) + \Phi_1\left(\dfrac{d^2s_1^1}{dt^2} + \left(\dfrac{ds_1^1}{dt}\right)^2 - p_1\,\dfrac{ds_1^1}{dt} - p_2\right) - p_3}{\dfrac{ds_3^2}{dt}\;\dfrac{ds_4^3}{dt}} +$$

$$+ c^2\,\frac{\dfrac{d^2\Phi_2}{dt^2} - p_1\,\dfrac{d\Phi_2}{dt} - p_2\Phi_2}{\dfrac{ds_3^2}{dt}\;\dfrac{ds_4^3}{dt}} + c^3\,\frac{\dfrac{d^2\Phi_3}{dt^2} - p_1\,\dfrac{d\Phi_3}{dt} - p_2\Phi_3}{\dfrac{ds_3^2}{dt}\;\dfrac{ds_4^3}{dt}} +$$

$$+c^4\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_4}{\mathrm{d}t^2}-p_1\dfrac{\mathrm{d}\Phi_4}{\mathrm{d}t}-p_2\Phi_4}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\;\dfrac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}}+c^5\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_5}{\mathrm{d}t^2}-p_1\dfrac{\mathrm{d}\Phi_5}{\mathrm{d}t}-p_2\Phi_5}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\;\dfrac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}},$$

$$v^5=c^1\,\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1}\left[\frac{\dfrac{\mathrm{d}^3\Phi_1}{\mathrm{d}t^3}+\left(3\dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}-q_1\right)\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_1}{\mathrm{d}t^2}+\left(3\left(\dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)^2+3\dfrac{\mathrm{d}^2s_1^1}{\mathrm{d}t^2}-2q_1\dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}-q_2\right)\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t}+}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}}\right.$$

$$\left.+\frac{+\left(\left(\dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)^3+\dfrac{\mathrm{d}^3s_1^1}{\mathrm{d}t^3}-q_1\left(\dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)^2-q_1\dfrac{d^2s_1^1}{\mathrm{d}t^2}-q_2\dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}-q_3\right)\Phi_1}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}}-\frac{q_4}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}}\right]+$$

$$+c^2\frac{\dfrac{\mathrm{d}^3\Phi_2}{\mathrm{d}t^3}-q_1\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_2}{\mathrm{d}t^2}-q_2\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}-q_3\Phi_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}}+$$

$$+c^3\frac{\dfrac{\mathrm{d}^3\Phi_3}{\mathrm{d}t^3}-q_1\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_3}{\mathrm{d}t^2}-q_2\dfrac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t}-q_3\Phi_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}}+$$

$$+c^4\frac{\dfrac{\mathrm{d}^3\Phi_4}{\mathrm{d}t^3}-q_1\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_4}{\mathrm{d}t^2}-q_2\dfrac{\mathrm{d}\Phi_4}{\mathrm{d}t}-q_3\Phi_4}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}}+$$

$$+c^5\frac{\dfrac{\mathrm{d}^3\Phi_5}{\mathrm{d}t^3}-q_1\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_5}{\mathrm{d}t^2}-q_2\dfrac{\mathrm{d}\Phi_5}{\mathrm{d}t}-q_3\Phi_5}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}}.$$

Vom presupune că funcţiile Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4, Φ_5 cît şi derivatele de ordin 1, 2, 3 satisfac condiţiile iniţiale :

$$\Phi_1(0)=\Phi_3(0)=\Phi_4(0)=\Phi_5(0)=0,\quad \Phi_2(0)=1$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t}\right)_0=\left(\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\right)_0,\ \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}\right)_0=\left(\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\right)_0,\ \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t}\right)_0=\left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right)_0,\ \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_4}{\mathrm{d}t}\right)_0=0,\ \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_5}{\mathrm{d}t}\right)_0=0$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_1}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = \left(p_1 - 2\,\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)_0 \left(\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\right)_0 + (p_3)_0, \left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_2}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = \left(p_1\,\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\right)_0 + (p_2)_0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_3}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = \left(p_1 \cdot \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right)_0$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_4}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right)_0 \left(\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\right)_0, \left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_5}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = 0, \left(\frac{\mathrm{d}^3\Phi_1}{\mathrm{d}t^3}\right)_0 = \left(q_1 - 3\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)_0 \cdot$$

$$\cdot \left[\left(p_1 - 2\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)_0 \left(\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\right)_0 + (p_3)_0\right] - \left[3\left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)_0^2 + 3\left(\frac{\mathrm{d}^2s_1^1}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 - 2\,(q_1)_0 \cdot\right.$$

$$\left.\cdot \left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)_0 - (q_2)_0\right] \left(\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\right)_0$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^3\Phi_2}{\mathrm{d}t^3}\right)_0 = (q_1)_0 \left[(p_1)_0 \left(\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\right)_0 + (p_2)_0\right] + (q_2)_0 \left(\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\right)_0 + (q_3)_0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^3\Phi_3}{\mathrm{d}t^3}\right)_0 = (q_1)_0\,(p_1)_0 \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right)_0 + (q_2)_0 \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right)_0, \left(\frac{\mathrm{d}^3\Phi_4}{\mathrm{d}t^3}\right)_0 =$$

$$= (q_1)_0 \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right)_0 \left(\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\right)_0, \left(\frac{\mathrm{d}^3\Phi_5}{\mathrm{d}t^3}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}\right)_0$$

şi notăm cu

$$\alpha = \mathrm{e}\int c^{\mathrm{d}s_1^1}, \ \beta_1 = \Phi_1, \quad \beta_2 = \Phi_2, \quad \beta_3 = \Phi_3, \quad \beta_4 = \Phi_4, \quad \beta_5 = \Phi_5,$$

$$\gamma_1 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}\,(s_1^1 - s_2^2)}{\mathrm{d}t}\,\Phi_1 - \dfrac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}, \ \gamma_2 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\Phi_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},$$

$$\gamma_3 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\Phi_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}, \ \gamma_4 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_4}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\Phi_4}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}, \ \gamma_5 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_5}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\Phi_5}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},$$

$$\delta_1 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_1}{\mathrm{d}t^2} + \left(2\dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} - p_1\right)\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} + \left[\dfrac{\mathrm{d}^2s_1^1}{\mathrm{d}t^2} + \left(\dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)^2 - p_1\,\dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} - p_2\right]\Phi_1 - p_3,}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}},$$

$$\delta_2 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_2}{\mathrm{d}t^2} - p_1\,\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} - p_2\Phi_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}}, \ \delta_3 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_3}{\mathrm{d}t^2} - p_1\,\dfrac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t} - p_2\,\Phi_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}},$$

$$\delta_4 = \frac{\dfrac{d^2\Phi_4}{dt^2} - p_1 \dfrac{d\Phi_4}{dt} - p_2\,\Phi_4}{\dfrac{ds_3^2}{dt}\ \dfrac{ds_4^3}{dt}}, \quad \delta_5 = \frac{\dfrac{d^2\Phi_5}{dt^2} - p_1 \dfrac{d\Phi_5}{dt} - p_2\,\Phi_5}{\dfrac{ds_3^2}{dt}\ \dfrac{ds_4^3}{dt}},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\dfrac{d^3\Phi_1}{dt^3} + \left(3\,\dfrac{ds_1^1}{dt} - q_1\right)\dfrac{d^2\Phi_1}{dt^2} + \left[3\,\dfrac{d^2s_1^1}{dt^2} + 3\left(\dfrac{ds_1^1}{dt}\right)^2 - 2q_1\,\dfrac{ds_1^1}{dt} - q_2\right]\dfrac{d\Phi_1}{dt}}{\dfrac{ds_5^4}{dt}} +$$

$$+ \frac{\left[\dfrac{d^3s_1^1}{dt^3} + \left(\dfrac{ds_1^1}{dt}\right)^3 - q_1\,\dfrac{d^2s_1^1}{dt} - q_1\left(\dfrac{ds_1^1}{dt}\right)^2 - q_2\,\dfrac{ds_1^1}{dt} - q_3\right]\Phi_1 - q_4}{\dfrac{ds_5^4}{dt}}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\dfrac{d^3\Phi_2}{dt^3} - q_1\,\dfrac{d^2\Phi_2}{dt^2} - q_2\,\dfrac{d\Phi_2}{dt} - q_3\,\Phi_2}{\dfrac{ds_5^4}{dt}},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\dfrac{d^3\Phi_3}{dt^3} - q_1\,\dfrac{d^2\Phi_3}{dt^2} - q_2\,\dfrac{d\Phi_3}{dt} - q_3\Phi_3}{\dfrac{ds_5^4}{dt}},$$

$$\varepsilon_4 = \frac{\dfrac{d^3\Phi_4}{dt^3} - q_1\,\dfrac{d^2\Phi_4}{dt^2} - q_2\,\dfrac{d\Phi_4}{dt} - q_3\,\Phi_4}{\dfrac{ds_5^4}{dt}},$$

$$\varepsilon_5 = \frac{\dfrac{d^3\Phi_5}{dt^3} - q_1\,\dfrac{d^2\Phi_5}{dt^2} - q_2\,\dfrac{d\Phi_5}{dt} - q_3\,\Phi_5}{\dfrac{ds_5^4}{dt}},$$

unde punctul $P\,(t)$ parcurge curba închisă oarecare C.

În asemenea condiţii grupul omogen de olonomie este:

$$(14)\qquad \begin{cases} v'^1 = \alpha v^1 \\ v'^2 = \alpha\beta_1\,v^1 + \beta_2\,v^2 + \beta_3\,v^3 + \beta_4\,v^4 + \beta_5\,v^5, \\ v'^3 = \alpha\gamma_1\,v^1 + \gamma_2\,v^2 + \gamma_3\,v^3 + \gamma_4\,v^4 + \gamma_5\,v^5, \\ v'^4 = \alpha\delta_1\,v^1 + \delta_2\,v^2 + \delta_3\,v^3 + \delta_4\,v^4 + \delta_5\,v^5, \\ v'^5 = \alpha\varepsilon_1\,v^1 + \varepsilon_2 v^2 + \varepsilon_3\,v^3 + \varepsilon_4\,v^4 + \varepsilon_5\,v^5, \end{cases}$$

ale cărui varietăţi invariante sînt $v^1 = 0$.

Deci dacă

$$\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_4^1 = \mathrm{d}s_5^1 = \mathrm{d}s_4^2 = \mathrm{d}s_5^2 = \mathrm{d}s_2^3 = \mathrm{d}s_5^3 = 0$$

iar

$$\mathrm{d}s_3^2 \neq 0, \quad \mathrm{d}s_4^3 \neq 0, \quad \mathrm{d}s_5^4 \neq 0, \quad (\mathrm{d}s_2^5)^2 + (\mathrm{d}s_3^5)^2 + (\mathrm{d}s_4^5)^2 \neq 0,$$

atunci grupul de olonomie al spaţiului A_5 este dat de (14).

În sistemul de coordonate condiţiile de mai sus se scriu :

$$\Gamma_{2i}^1 = \Gamma_{3i}^1 = \Gamma_{4i}^1 = \Gamma_{5i}^1 = \Gamma_{4i}^2 = \Gamma_{5i}^2 = \Gamma_{2i}^3 = \Gamma_{5i}^3 = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, 5), \quad \sum_{i=1}^{5} (\Gamma_{3i}^2)^2 \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{5} (\Gamma_{4i}^3)^2 \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{5} (\Gamma_{5i}^4)^2 \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{5} [(\Gamma_{2i}^5)^2 + (\Gamma_{3i}^5)^2 + (\Gamma_{4i}^5)^2] \neq 0.$$

Vom considera acum subcazul III al relaţiilor (7) :

$$\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_4^1 = \mathrm{d}s_5^1 = \mathrm{d}s_4^2 = \mathrm{d}s_5^2 = \mathrm{d}s_2^3 = \mathrm{d}s_4^3 = 0, \qquad \mathrm{d}s_5^3 \neq 0.$$

Din a doua relaţie (7) deducem că neapărat şi $\mathrm{d}s_3^2 \neq 0$.

Deoarece $\mathrm{d}s_3^2 \neq 0$, $v^3 = \dfrac{\dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\, v^2 - c^1\, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1} \dfrac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}$ pe care o înlocuim în a doua ecuaţie (3) şi obţinem :

$$\frac{\mathrm{d}^2 v^2}{\mathrm{d}t^2} - p_1 \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - p_2\, v^2 = c^1\, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1} p_3 + \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_5^3}{\mathrm{d}t}\, v^5,$$

unde am notat :

$$p_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\,(s_2^2 + s_3^3)}{\mathrm{d}t},$$

$$p_2 = \frac{\mathrm{d}^2 s_2^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t} \right),$$

$$p_3 = \frac{\mathrm{d}^2 s_1^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t} \right) + \frac{\mathrm{d}s_1^3}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t},$$

Din ultima ecuaţie scoatem pe v^5 :

$$v^5 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 v^2}{\mathrm{d}t^2} - p_1 \dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - p_2 v^2 - c^1 \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1} p_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} \dfrac{\mathrm{d}s_5^3}{\mathrm{d}t}}$$

pe care o înlocuim în ultima ecuaţie (3) şi avem

$$(15) \qquad \frac{\mathrm{d}^3 v^2}{\mathrm{d}t^3} - q_1 \frac{\mathrm{d}^2 v^2}{\mathrm{d}t^2} - q_2 \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - q_3 v^2 = c^1 \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1} q_4 + \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_5^3}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_4^5}{\mathrm{d}t} v^4,$$

unde

$$q_1 = \frac{\mathrm{d} \ln \left(\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} \dfrac{\mathrm{d}s_5^3}{\mathrm{d}t} \right)}{\mathrm{d}t} + p_1 + \frac{\mathrm{d}s_5^5}{\mathrm{d}t},$$

$$q_2 = \frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t} - p_1 \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_5^3}{\mathrm{d}t} \right) + \frac{\mathrm{d}s_5^5}{\mathrm{d}t} \right] + \frac{\mathrm{d}s_5^3}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t},$$

$$q_3 = \frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t} - p_2 \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_5^3}{\mathrm{d}t} \right) + \frac{\mathrm{d}s_5^5}{\mathrm{d}t} \right] + \frac{\mathrm{d}s_5^3}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t} \right),$$

$$q_4 = \frac{\mathrm{d}p_3}{\mathrm{d}t} - p_3 \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_5^3}{\mathrm{d}t} \right) + \frac{\mathrm{d}s_5^5}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} \right] + \frac{\mathrm{d}s_5^3}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_1^5}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t} \right).$$

Mai întîi presupunem că $\mathrm{d}s_4^5 = 0$. Atunci ecuaţia (15) devine

$$\frac{\mathrm{d}^3 v^2}{\mathrm{d}t^3} - q_1 \frac{\mathrm{d}^2 v^2}{\mathrm{d}t^2} - q_2 \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - q_3 v^2 = c^1 \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1} q_4.$$

Să notăm cu Φ_2, Φ_3, Φ_4 trei soluţii independente ale ecuaţiei omogene

$$\frac{\mathrm{d}^3 \Phi}{\mathrm{d}t^3} - q_1 \frac{\mathrm{d}^2 \Phi}{\mathrm{d}t^2} - q_2 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} - q_3 \Phi = 0$$

şi cu Φ_1 o soluţie particulară a ecuaţiei

$$\frac{\mathrm{d}^3 \Phi_1}{\mathrm{d}t^3} + \left(3 \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} - q_1 \right) \frac{\mathrm{d}^2 \Phi_1}{\mathrm{d}t^2} + \left[3 \frac{\mathrm{d}^2 s_1^1}{\mathrm{d}t^2} + 3 \left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} \right)^2 - 2q_1 \cdot \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} - q_2 \right] \frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} +$$

$$+ \left[\frac{\mathrm{d}^3 s_1^1}{\mathrm{d}t^3} + 3 \frac{\mathrm{d}^2 s_1^1}{\mathrm{d}t^2} \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} \right)^3 - q_1 \frac{\mathrm{d}^2 s_1^1}{\mathrm{d}t^2} - q_1 \left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} \right)^2 - q_2 \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} - q_3 \right] \Phi_1 = q_4.$$

Rezultă că soluţia generală a ecuaţiei (15) este :

$$v^2 = c^1 \, e^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1} \, \Phi_1 + c^2 \Phi_2 + c^3 \Phi_3 + c^4 \Phi_4.$$

Înlocuind această valoare în expresiile ce dau explicit pe v^3 și v^5, obținem :

$$v^3 = c^1 \, e^{\int_0^t ds_1^1} \frac{\dfrac{d\Phi_1}{dt} + \dfrac{d\,(s_1^1 - s_2^2)}{dt}\Phi_1 - \dfrac{ds_1^2}{dt}}{\dfrac{ds_3^2}{dt}} + c^2 \frac{\dfrac{d\Phi_2}{dt} - \dfrac{ds_2^2}{dt}\Phi_2}{\dfrac{ds_3^2}{dt}} +$$

$$+ c^3 \frac{\dfrac{d\Phi_3}{dt} - \dfrac{ds_2^2}{dt}\Phi_3}{\dfrac{ds_3^2}{dt}} + c^4 \frac{\dfrac{d\Phi_4}{dt} - \dfrac{ds_2^2}{dt}\Phi_4}{\dfrac{ds_3^2}{dt}},$$

$$v^5 = c^1 \, e^{\int_0^t ds_1^1} \left\{ \frac{\dfrac{d^2\Phi_1}{dt^2} + \left(2\,\dfrac{ds_1^1}{dt} - p_1\right)\dfrac{d\Phi_1}{dt}}{\dfrac{ds_3^2}{dt}\,\dfrac{ds_5^3}{dt}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left[\dfrac{d^2 s_1^1}{dt^2} + \left(\dfrac{ds_1^1}{dt}\right)^2 - p_1\,\dfrac{ds_1^1}{dt} - p_2 - p_3\right]\Phi_1}{\dfrac{ds_3^2}{dt}\,\dfrac{ds_5^3}{dt}} \right\} + c^2 \frac{\dfrac{d^2\Phi_2}{dt^2} - p_1\,\dfrac{d\Phi_2}{dt} - p_2\,\Phi_2}{\dfrac{ds_3^2}{dt}\,\dfrac{ds_5^3}{dt}} +$$

$$+ c^3 \frac{\dfrac{d^2\Phi_3}{dt^2} - p_1\,\dfrac{d\Phi_3}{dt} - p_2\,\Phi_3}{\dfrac{ds_3^2}{dt}\,\dfrac{ds_5^3}{dt}} + c^4 \frac{\dfrac{d^2\Phi_4}{dt^2} - p_1\,\dfrac{d\Phi_4}{dt} - p_2\,\Phi_4}{\dfrac{ds_3^2}{dt}\,\dfrac{ds_5^3}{dt}}.$$

Înlocuind v^2, v^3, v^5 în a treia ecuație (3) și integrînd obținem :

$$v^4 = c^1 \, e^{\int_0^t ds_4^4} \left(\int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_4^4)} \, ds_1^4 + \int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_4^4)} \beta_1 \, ds_2^4 + \right.$$

$$\left. + \int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_4^4)} \gamma_1 \, ds_3^4 + \int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_4^4)} \varepsilon_1 \, ds_5^4 \right) +$$

$$+ c^2 \, e^{\int_0^t ds_4^4} \left(\int_0^t e^{-\int_0^t ds_4^4} \beta_2 \, ds_2^4 + \int_0^t e^{-\int_0^t ds_4^4} \gamma_2 \, ds_3^4 + \int_0^t e^{-\int_0^t ds_4^4} \varepsilon_2 \, ds_5^4 \right) +$$

$$+ c^3 \, e^{\int_0^t ds_4^4} \left(\int_0^t e^{-\int_0^t ds_4^4} \beta_3 \, ds_2^4 + \int_0^t e^{-\int_0^t ds_4^4} \gamma_3 \, ds_3^4 + \int_0^t e^{-\int_0^t ds_4^4} \varepsilon_3 \, ds_5^4 \right) +$$

$$+ c^4 \, e^{\int_0^t ds_4^4} \left(\int_0^t e^{-\int_0^t ds_4^4} \beta_4 \, ds_2^4 + \int_0^t e^{-\int_0^t ds_4^4} \gamma_4 \, ds_3^4 + \int_0^t e^{-\int_0^t ds_4^4} \varepsilon_4 \, ds_5^4 \right) +$$

$$+ c^5 \, e^{\int_0^t ds_4^4},$$

unde am notat cu $\alpha = e^{\int_C ds_1^1}$, $\beta_1 = \Phi_1$, $\beta_2 = \Phi_2$, $\beta_3 = \Phi_3$, $\beta_4 = \Phi_4$,

$$\gamma_1 = \frac{\dfrac{d\Phi_1}{dt} + \dfrac{d\,(s_1^1 - s_2^2)}{dt}\,\Phi_1 - \dfrac{ds_1^2}{dt}}{\dfrac{ds_3^2}{dt}}, \quad \gamma_2 = \frac{\dfrac{d\Phi_2}{dt} - \Phi_2\,\dfrac{ds_2^2}{dt}}{\dfrac{ds_3^2}{dt}},$$

$$\gamma_3 = \frac{\dfrac{d\Phi_3}{dt} - \Phi_3\,\dfrac{ds_2^2}{dt}}{\dfrac{ds_3^2}{dt}}, \quad \gamma_4 = \frac{\dfrac{d\Phi_4}{dt} - \Phi_4\,\dfrac{ds_2^2}{dt}}{\dfrac{ds_3^2}{dt}},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\dfrac{d^2\Phi_1}{dt^2} + \left(2\,\dfrac{ds_1^1}{dt} - p_1\right)\dfrac{d\Phi_1}{dt}}{\dfrac{ds_3^2}{dt}\,\dfrac{ds_5^3}{dt}} +$$

$$+ \frac{\left[\dfrac{d^2 s_1^1}{dt^2} + \left(\dfrac{ds_1^1}{dt}\right)^2 - p_1\,\dfrac{ds_1^1}{dt} - p_2\,\dfrac{ds_1^1}{dt} - p_2 - p_3\right]\Phi_1}{\dfrac{ds_3^2}{dt}\,\dfrac{ds_5^3}{dt}},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\dfrac{d^2\Phi_2}{dt^2} - p_1\,\dfrac{d\Phi_2}{dt} - p_2\,\Phi_2}{\dfrac{ds_3^2}{dt}\,\dfrac{ds_5^3}{dt}}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\dfrac{d^2\Phi_3}{dt^2} - p_1\,\dfrac{d\Phi_3}{dt} - p_2\,\Phi_3}{\dfrac{ds_3^2}{dt}\,\dfrac{ds_5^3}{dt}},$$

$$\varepsilon_4 = \frac{\dfrac{d^2\Phi_4}{dt^2} - p_1\,\dfrac{d\Phi_4}{dt} - p_2\,\Phi_4}{\dfrac{ds_3^2}{dt}\,\dfrac{ds_5^3}{dt}},$$

$$\delta_1 = \int_C e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_4^4)}\, ds_1^4 + \int_C e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_4^4)}\,\beta_1\, ds_2^4 +$$

$$+ \int_C e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_4^4)}\,\gamma_1\, ds_3^4 + \int_C e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_4^4)}\,\varepsilon_1\, ds_5^4,$$

$$\delta_2 = \int_C e^{-\int_0^t ds_4^4}\,\beta_2\, ds_2^4 + \int_C e^{-\int_0^t ds_4^4}\,\gamma_2\, ds_3^4 + \int_C e^{-\int_0^t ds_4^4}\,\varepsilon_2 ds_5^4,$$

$$\delta_3 = \int_C e^{-\int_0^t ds_4^4}\,\beta_3\, ds_2^4 + \int_C e^{-\int_0^t ds_4^4}\,\gamma_3 ds_3^4 + \int_C e^{-\int_0^t ds_4^4}\,\varepsilon_3 ds_5^4,$$

$$\delta_4 = \int_C e^{-\int_0^t ds_4^4} \beta_4 \, ds_2^4 + \int_C e^{-\int_0^t ds_4^4} \gamma_4 \, ds_3^4 + \int_C e^{-\int_0^t ds_4^4} \varepsilon_4 \, ds_5^4,$$

$$\delta_5 = e^{\int_C ds_4^4},$$

unde puncul $P\,(t)$ parcurge curba închisă C.

Grupul de olonomie omogen al spaţiului A_5 este :

$$(16) \qquad \begin{cases} v'^1 = \alpha \cdot v^1, \\ v'^2 = \alpha\beta_1 v^1 + \beta_2 v^2 + \beta_3 v^3 + \beta_4 v^4, \\ v'^3 = \alpha\gamma_1 v^1 + \gamma_2 v^2 + \gamma_3 v^3 + \gamma_4 v^4, \\ v'^4 = \delta_5\delta_1 v^1 + \delta_5\delta_2 v^2 + \delta_5\delta_3 v^3 + \delta_5\delta_4 v^4 + \delta_5 v^5, \\ v'^5 = \alpha\varepsilon_1 v^1 + \varepsilon_2 v^2 + \varepsilon_3 v^3 + \varepsilon_4 v^4 \end{cases}$$

ce admite ca varietăţi invariante $v^1 = 0$. Deci în cazul

$$ds_2^1 = ds_3^1 = ds_4^1 = ds_5^1 = ds_4^2 = ds_5^2 = ds_2^3 = ds_4^3 = ds_4^5 = 0$$

$$ds_3^2 \neq 0, \quad ds_5^3 \neq 0,$$

$$(ds_2^4)^2 + (ds_3^4)^2 + (ds_5^4)^2 \neq 0 \quad \text{şi} \quad (ds_2^5)^2 + (ds_3^5)^2 \neq 0$$

grupul omogen de olonomie al spaţiului A_5 este (16). Relaţiile de mai sus se mai scriu într-un sistem de coordonate astfel :

$$\Gamma_{2i}^1 = \Gamma_{3i}^1 = \Gamma_{4i}^1 = \Gamma_{5i}^1 = \Gamma_{4i}^2 = \Gamma_{5i}^2 = \Gamma_{2i}^3 = \Gamma_{4i}^3 = \Gamma_{4i}^5 = 0,$$

$$(i = 1, 2, 3, 4, 5), \quad \sum_{i=1}^{5} (\Gamma_{3i}^2)^2 \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{5} (\Gamma_{5i}^3)^2 \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{5} [(\Gamma_{2i}^4)^2 + (\Gamma_{3i}^4)^2 + (\Gamma_{5i}^4)^2] \neq 0 \quad \text{şi} \quad \sum_{i=1}^{5} [(\Gamma_{2i}^5)^2 + (\Gamma_{3i}^5)^2] \neq 0.$$

Dacă însă $ds_4^5 \neq 0$ în condiţiile de mai sus, atunci din (15) urmează

$$(15') \qquad v^4 = \frac{\dfrac{d^3 v^2}{dt^3} - q_1 \dfrac{d^2 v^2}{dt^2} - q_2 \dfrac{dv^2}{dt} - q_3 v^2 - c^1 e^{\int_0^t ds_1^1} q_4}{\dfrac{ds_3^2}{dt} \dfrac{ds_5^3}{dt} \dfrac{ds_4^5}{dt}}$$

pe care o înlocuim în a treia ecuaţie (3) :

$$(17) \qquad \begin{aligned} &\frac{d^4 v^2}{dt^4} - r_1 \frac{d^3 v^2}{dt^3} - r_2 \frac{d^2 v^2}{dt^2} - r_3 \frac{dv^2}{dt} - r_4 v^2 = \\ &= c^1 e^{\int_0^t ds_1^1} r_5 + \frac{ds_3^2}{dt} \frac{ds_5^3}{dt} \frac{ds_4^5}{dt} \frac{ds_5^4}{dt} v^5, \end{aligned}$$

unde r_1, r_2, r_3, r_4 sînt expresii ce se obţin analog cu $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, q_4$ precedenţi. Notînd cu $\Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5$ patru soluţii independente ale ecuaţiei omogene

$$\frac{d^4\Phi}{dt^4} - r_1\frac{d^3\Phi}{dt^3} - r_2\frac{d^2\Phi}{dt^2} - r_3\frac{d\Phi}{dt} - r_4\Phi = 0$$

iar cu Φ_1 o soluţie particulară ce o căutăm de forma membrului drept, adică $c^1\, e^{\int_0^t ds_1^1}\,\Phi_1$ pentru ecuaţia neomogenă în ipoteza că $\frac{ds_5^4}{dt} = 0$, va rezulta că soluţia generală e de forma :

$$v^2 = c^1 e^{\int_0^t ds_1^1}\,\Phi_1 + c^2\Phi_2 + c^3\Phi_3 + c^4\Phi_4 + c^5\Phi_5.$$

Înlocuind expresia găsită pentru v^2 în expresiile lui v^3 şi v^4 de mai sus, se găseşte, după ce facem toate notaţiile convenabile :

$$v^3 = c^1 e^{\int_0^t ds_1^1}\,\gamma_1 + c^2\gamma_2 + c^3\gamma_3 + c^4\gamma_4 + c^5\gamma_5,$$

$$v^4 = c^1 e^{\int_0^t ds_1^1}\,\delta_1 + c^2\delta_2 + c^3\delta_3 + c^4\delta_4 + c^5\delta_5.$$

Expresia lui v^5 se găseşte înlocuind v^2, v^3 găsiţi mai sus în ecuaţia

$$\frac{dv^3}{dt} = \frac{ds_2^3}{dt}v^2 + \frac{ds_3^3}{dt}v^3 + \frac{ds_5^3}{dt}v^5 + c^1\, e^{\int_0^t ds_1^1}\frac{ds_1^3}{dt}$$

care ne dă

$$v^5 = c^1\, e^{\int_0^t ds_1^1}\,\varepsilon_1 + c^2\varepsilon_2 + c^3\varepsilon_3 + c^4\varepsilon_4 + c^5\varepsilon_5.$$

Dacă notăm

$$\alpha = e^{\int_C ds_1^1} \quad \text{şi} \quad \beta_1 = \Phi_1,\ \beta_2 = \Phi_2,\ \beta_3 = \Phi_3,\ \beta_4 = \Phi_4,\ \beta_5 = \Phi_5,$$

în acest caz grupul de olonomie omogen al spaţiului A_5 este :

$$(18)\quad \begin{cases} v'^1 = \alpha v^1 \\ v'^2 = \alpha\beta_1 v^1 + \beta_2 v^2 + \beta_3 v^3 + \beta_4 v^4 + \beta_5 v^5 \\ v'^3 = \alpha\gamma_1 v^1 + \gamma_2 v^2 + \gamma_3 v^3 + \gamma_4 v^4 + \gamma_5 v^5 \\ v'^4 = \alpha\delta_1 v^1 + \delta_2 v^2 + \delta_3 v^3 + \delta_4 v^4 + \delta_5 v^5 \\ v'^5 = \alpha\varepsilon_1 v^1 + \varepsilon_2 v^2 + \varepsilon_3 v^3 + \varepsilon_4 v^4 + \varepsilon_5 v^5 \end{cases}$$

cu varietăţile invariante $v^1 = 0$. Acest grup l-am mai găsit prin relaţiile (14). Evident, parametrii grupului (18) nu sînt aceeaşi ca valoare cu cei din (14).

Deci dacă

$$ds_2^1 = ds_3^1 = ds_4^1 = ds_5^1 = ds_4^2 = ds_5^2 = ds_2^3 = ds_4^3 = ds_5^4 = 0$$

şi

$$\mathrm{d}s^2_3 \neq 0, \quad \mathrm{d}s^3_5 \neq 0, \quad \mathrm{d}s^5_4 \neq 0,$$

atunci regăsim grupul (14).

În cazul cînd

$$\mathrm{d}s^1_2 = \mathrm{d}s^1_3 = \mathrm{d}s^1_4 = \mathrm{d}s^1_5 = \mathrm{d}s^2_4 = \mathrm{d}s^2_5 = \mathrm{d}s^3_2 = \mathrm{d}s^3_4 = 0$$

iar

$$\mathrm{d}s^2_3 \neq 0, \quad \mathrm{d}s^3_5 \neq 0, \quad \mathrm{d}s^5_4 \neq 0, \quad \mathrm{d}s^4_5 \neq 0,$$

atunci procedăm astfel:

Scoatem valoarea lui v^5 din (17):

$$v^5 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^4v^2}{\mathrm{d}t^4} - r_1\dfrac{\mathrm{d}^3v^2}{\mathrm{d}t^3} - r_2\dfrac{\mathrm{d}^2v^2}{\mathrm{d}t^2} - r_3\dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - r_4 v^2 - c^1 e^{\int_0^t \mathrm{d}s^1_1} r_5}{\dfrac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s^3_5}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s^5_4}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s^4_5}{\mathrm{d}t}}$$

şi o înlocuim o dată cu expresiile precedente pentru v^3 şi v^4 din (8), (15′) în a treia ecuaţie (3) pe care o integrăm. Fiind pînă la urmă o ecuaţie de forma ecuaţiei (17), însă cu alţi coeficienţi, vom avea

$$v^2 = c^1 e^{\int_0^t \mathrm{d}s^1_1} \Phi'_1 + c^2\Phi'_2 + c^3\Phi'_3 + c^4\Phi'_4 + c^5\Phi'_5,$$

unde Φ'_1 este soluţia ecuaţiei neomogene iar Φ'_2, Φ'_3, Φ'_4, Φ'_5 sînt patru soluţii independente ale ecuaţiei omogene.

În concluzie ajungem la un grup de olonomie de acelaşi tip cu (18), în cazul cînd

$$\mathrm{d}s^1_2 = \mathrm{d}s^1_3 = \mathrm{d}s^1_4 = \mathrm{d}s^1_5 = \mathrm{d}s^2_4 = \mathrm{d}s^2_5 = \mathrm{d}s^3_4 = 0$$

$$\mathrm{d}s^2_3 \neq 0, \quad \mathrm{d}s^3_5 \neq 0, \quad \mathrm{d}s^4_5 \neq 0.$$

Rezultate analoge cu cele de pînă aici se obţin dacă

$$\mathrm{d}s^1_2 = \mathrm{d}s^1_3 = \mathrm{d}s^1_4 = \mathrm{d}s^1_5 = 0$$

şi dacă oricare două din formele $\mathrm{d}s^2_3$, $\mathrm{d}s^2_4$, d^2_5 şi oricare două din formele $\mathrm{d}s^3_2$, $\mathrm{d}s^3_4$, $\mathrm{d}s^3_5$ sînt nule, sau oricare două din $\mathrm{d}s^2_3$, $\mathrm{d}s^2_4$, $\mathrm{d}s^2_5$ şi oricare două din $\mathrm{d}s^4_2$, $\mathrm{d}s^4_3$, $\mathrm{d}s^4_5$ sau oricare două din $\mathrm{d}s^2_3$, $\mathrm{d}s^2_4$, $\mathrm{d}s^2_5$ şi oricare două din $\mathrm{d}s^5_2$, $\mathrm{d}s^5_3$, $\mathrm{d}s^5_4$ sînt nule ş.a.m.d. celelalte combinaţii.

Analog dacă toate patru formele $\mathrm{d}s^2_1$, $\mathrm{d}s^2_3$, $\mathrm{d}s^2_4$, $\mathrm{d}s^2_5$ sau $\mathrm{d}s^3_1$, $\mathrm{d}s^3_2$, $\mathrm{d}s^3_4$, $\mathrm{d}s^3_5$ sau $\mathrm{d}s^4_1$, $\mathrm{d}s^4_2$, $\mathrm{d}s^4_3$, $\mathrm{d}s^4_5$ sau $\mathrm{d}s^5_1$, $\mathrm{d}s^5_2$, $\mathrm{d}s^5_3$ $\mathrm{d}s^5_4$ sînt nule. Ne vom ocupa de cazul:

$$\mathrm{d}s^1_2 = \mathrm{d}s^1_3 = \mathrm{d}s^1_4 = \mathrm{d}s^1_5 = 0 \text{ şi toţi } \mathrm{d}s^k_h \neq 0 \quad (k \neq h = 2, 3, 4, 5).$$

Din prima ecuaţie (3) avem:

$$v^3 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s^2_2}{\mathrm{d}t}v^2 - \dfrac{\mathrm{d}s^2_4}{\mathrm{d}t}v^4 - \dfrac{\mathrm{d}s^2_5}{\mathrm{d}t}v^5 - c^1 e^{\int_0^t \mathrm{d}s^1_1}\dfrac{\mathrm{d}s^2_1}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t}}$$

care înlocuită în a doua ecuaţie (3) conduce la :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 v^2}{\mathrm{d}t^2} - \left(\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 s_3^2}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}s_5^2}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} \right) \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - \\
&- \Bigg[\frac{\mathrm{d}^2 s_2^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_5^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t} - \\
&- \frac{\dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2 s_3^2}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}s_5^2}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t} \right)}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} \Bigg] v^2 - \\
&- c^1 \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1} \Bigg[\frac{\mathrm{d}^2 s_1^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_1^3}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_1^4}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_5^2}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}s_1^5}{\mathrm{d}t} - \\
&- \frac{\dfrac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2 s_3^2}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}s_5^2}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t} \right)}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} \Bigg] = \\
&= v^4 \Bigg[\frac{\mathrm{d}^2 s_4^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_5^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^5}{\mathrm{d}t} - \\
&- \frac{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2 s_3^2}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}s_5^2}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t} \right)}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} \Bigg] + \\
&+ \Bigg[\frac{\mathrm{d}^2 s_5^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_5^3}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_5^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_5^5}{\mathrm{d}t} - \\
&- \frac{\dfrac{\mathrm{d}s_5^2}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2 s_3^2}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}s_5^2}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t} \right)}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} \Bigg] v^5 .
\end{aligned}
$$

Dacă

$$(19)\quad \left|\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2s_4^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}s_5^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_4^5}{\mathrm{d}t}\right)=\\ &\qquad=\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2s_3^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}s_5^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}\right)\\ &\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2s_5^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^3}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}s_5^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^5}{\mathrm{d}t}\right)=\\ &\qquad=\frac{\mathrm{d}s_5^2}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2s_3^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}s_5^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}\right), \end{aligned}\right.$$

atunci v^2 satisface o ecuaţie diferenţială de tipul :

$$\frac{\mathrm{d}^2v^2}{\mathrm{d}t^2}-p_1\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}-p_2v^2=p_3\,c^1\,e^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1},$$

unde p_1, p_2, p_3, au expresii uşor de observat. Coeficienţii lui v^4 şi v^5 din membrul II se notează respectiv p_4 şi p'_4

Aşadar ne aflăm în acelaşi caz cu formula (8′) şi deci vom regăsi grupul (9).

Dacă numai una din relaţiile (19) are loc, atunci ne aflăm în cazul :

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2v^2}{\mathrm{d}t^2}-p_1\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}-p_2v^2=p_3c^1\,e^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1}+p_4v^4+p'_4v^5 \text{ cu } (p_4)^2+(p'_4)^2\neq 0\right.$$

Presupunînd că $p'_4=0$, $p_4\neq 0$, avem

$$v^4=\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2v^2}{\mathrm{d}t^2}-p_1\dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}-p_2\,v^2-p_3\,c^1\,e^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1}}{p_4}$$

care înlocuită împreună cu v^3 în a treia ecuaţie (3), conduce la o ecuaţie de forma :

$$\frac{\mathrm{d}^3v^2}{\mathrm{d}t^3}-q_1\frac{\mathrm{d}^2v^2}{\mathrm{d}t^2}-q_2\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}-q_3\,v^2=c^1\,e^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1}\,q_4+p_4\frac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}\,v^5,$$

ecuaţie din care scoatem

$$v^5=\frac{\dfrac{\mathrm{d}^3v^2}{\mathrm{d}t^3}-q_1\dfrac{\mathrm{d}^2v^2}{\mathrm{d}t^2}-q_2\dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}-q_3\,v^2-c^1\,q_4\,e^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1}}{p_4\dfrac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}}$$

care înlocuită, împreună cu v^3, v^4, în ultima ecuaţie (3), ne dă o ecuaţie de ordinul patru de forma :

$$\frac{\mathrm{d}^4 v^2}{\mathrm{d}t^4} - r_1 \frac{\mathrm{d}^3 v^2}{\mathrm{d}t^3} - r_2 \frac{\mathrm{d}^2 v^2}{\mathrm{d}t^2} - r_3 \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - r_4\, v^2 = c^1\, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1} r_5,$$

ecuaţie asemănătoare cu (13) şi deci grupul de olonomie va fi de tipul (14).

În cazul că $p'_4 \neq 0$ şi $p_4 = 0$ se procedează analog ca mai sus, scoţînd valoarea lui v^5 şi înlocuind-o în ultima ecuaţie (3) se ajunge că v^2 satisface o ecuaţie diferenţială de ordin patru de aceeaşi formă cu cea de mai sus. Deci se regăseşte şi în acest caz grupul de olonomie (14) sau un subgrup al său. Dacă atît $p'_4 \neq 0$ cît şi $p_4 \neq 0$ simultan, atunci v^2 satisface o ecuaţie de tipul

$$\frac{\mathrm{d}^2 v^2}{\mathrm{d}t^2} - p_1 \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - p_2\, v^2 = p_3\, c^1\, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1} + p_4 v^4 + p'_4 v^5,$$

ecuaţie din care putem scoate valorile lui v^4 sau v^5. Scoţînd de exemplu pe v^4, avem

$$v^4 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 v^2}{\mathrm{d}t^2} - p_1 \dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - p_2\, v^2 - p_3\, c^1\, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1} - p'_4\, v^5}{p_4}$$

care înlocuită în a treia ecuaţie (3) la care se adaugă şi ultima, ajungem la o ecuaţie de ordin trei de forma (11), respectiv de forma (15) şi deci în unul sau altul din cazuri regăsim grupurile de olonomie (12) şi (16) sau subgrupuri ale lor.

În concluzie, dacă $\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_4^1 = \mathrm{d}s_5^1 = 0$ iar $\mathrm{d}s_k^h \neq 0$ ($h \neq k = 2, 3, 4, 5$), spaţiul A_5 are drept grup omogen de olonomie grupul (9), sau (14), sau (12), sau (16) sau subgrupuri ale acestora. Într-un sistem de coordonate condiţiile precedente se scriu :

$$\Gamma_{2i}^1 = \Gamma_{3i}^1 = \Gamma_{4i}^1 = \Gamma_{5i}^1 = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

$$\sum_{i=1}^{5} (\Gamma_{ki}^h)^2 \neq 0 \qquad (h, k = 2, 3, 4, 5,\ k \neq h).$$

Rezultate analoage se obţin dacă $\mathrm{d}s_1^2 = \mathrm{d}s_3^2 = \mathrm{d}s_4^2 = \mathrm{d}s_5^2 = 0$ sau $\mathrm{d}s_1^3 = \mathrm{d}s_2^3 = \mathrm{d}s_4^3 = \mathrm{d}s_5^3 = 0$ sau $\mathrm{d}s_1^4 = \mathrm{d}s_2^4 = \mathrm{d}s_3^4 = \mathrm{d}s_5^4 = 0$ sau $\mathrm{d}s_1^5 = \mathrm{d}s_2^5 = \mathrm{d}s_3^5 = \mathrm{d}s_4^5 = 0$.

Să considerăm acum cazul :

$$(20) \quad \begin{cases} (\mathrm{d}s_2^1)^2 + (\mathrm{d}s_3^1)^2 + (\mathrm{d}s_4^1)^2 + (\mathrm{d}s_5^1)^2 \neq 0, \\ (\mathrm{d}s_1^2)^2 + (\mathrm{d}s_3^2)^2 + (\mathrm{d}s_4^2)^2 + (\mathrm{d}s_5^2)^2 \neq 0, \\ (\mathrm{d}s_1^3)^2 + (\mathrm{d}s_2^3)^2 + (\mathrm{d}s_4^3)^2 + (\mathrm{d}s_5^3)^2 \neq 0, \\ (\mathrm{d}s_1^4)^2 + (\mathrm{d}s_2^4)^2 + (\mathrm{d}s_3^4)^2 + (\mathrm{d}s_5^4)^2 \neq 0, \\ (\mathrm{d}s_1^5)^2 + (\mathrm{d}s_2^5)^2 + (\mathrm{d}s_3^5)^2 + (\mathrm{d}s_4^5)^2 \neq 0. \end{cases}$$

Mai întîi presupunem $ds_2^1 = ds_3^1 = ds_4^1 = 0$; rezultă $ds_5^1 \neq 0$. Atunci din prima ecuaţie (2′) avem

$$v^5 = \frac{\dfrac{dv^1}{dt} - \dfrac{ds_1^1}{dt} v^1}{\dfrac{ds_5^1}{dt}}$$

care înlocuită în celelalte ecuaţii (2′) ne dă :

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned}
&\frac{ds_5^1}{dt}\frac{dv^2}{dt} - \frac{ds_5^2}{dt}\frac{dv^1}{dt} = \left(\frac{ds_1^2}{dt}\frac{ds_5^1}{dt} - \frac{ds_1^1}{dt}\frac{ds_5^2}{dt}\right) v^1 + \\
&\qquad + \frac{ds_2^2}{dt}\frac{ds_5^1}{dt} v^2 + \frac{ds_3^2}{dt}\frac{ds_5^1}{dt} v^3 + \frac{ds_4^2}{dt}\frac{ds_5^1}{dt} v^4 \\
&\frac{ds_5^1}{dt}\frac{dv^3}{dt} - \frac{ds_5^3}{dt}\frac{dv^1}{dt} = \left(\frac{ds_1^3}{dt}\frac{ds_5^1}{dt} - \frac{ds_1^1}{dt}\frac{ds_5^3}{dt}\right) v^1 + \\
&\qquad + \frac{ds_2^3}{dt}\frac{ds_5^1}{dt} v^2 + \frac{ds_3^3}{dt}\frac{ds_5^1}{dt} v^3 + \frac{ds_4^3}{dt}\frac{ds_5^1}{dt} v^4 \\
&\frac{ds_5^1}{dt}\frac{dv^4}{dt} - \frac{ds_5^4}{dt}\frac{dv^1}{dt} = \left(\frac{ds_1^4}{dt}\frac{ds_5^1}{dt} - \frac{ds_1^1}{dt}\frac{ds_5^4}{dt}\right) v^1 + \\
&\qquad + \frac{ds_2^4}{dt}\frac{ds_5^1}{dt} v^2 + \frac{ds_3^4}{dt}\frac{ds_5^1}{dt} v^3 + \frac{ds_4^4}{dt}\frac{ds_5^1}{dt} v^4 \\
&\frac{d^2v^1}{dt^2} - \left[\frac{d(s_1^1 + s_5^5)}{dt} + \frac{d}{dt}\ln\frac{ds_5^1}{dt}\right]\frac{dv^1}{dt} = \\
&\qquad = \left[\frac{d^2s_1^1}{dt^2} - \frac{ds_1^1}{dt}\frac{d}{dt}\ln\frac{ds_5^1}{dt} + \frac{ds_1^5}{dt}\frac{ds_5^1}{dt} - \frac{ds_1^1}{dt}\frac{ds_5^5}{dt}\right] v^1 + \\
&\qquad + \frac{ds_5^1}{dt}\frac{ds_2^5}{dt} v^2 + \frac{ds_5^1}{dt}\frac{ds_3^5}{dt} v^3 + \frac{ds_5^1}{dt}\frac{ds_4^5}{dt} v^4.
\end{aligned} \right.$$

Dacă $ds_2^5 = ds_3^5 = ds_4^5 = 0$, ultima ecuaţie (21) se reduce la o ecuaţie omogenă de forma $\dfrac{d^2v^1}{dt^2} - p_1 \dfrac{dv^1}{dt} - p_2\, v^1 = 0$, cu soluţia generală de forma :

$$v^1 = c^1\, \Phi_1 + c^5\, \Phi_2$$

care înlocuită în expresia lui v^5 conduce la

$$v^5 = c^1 \frac{\dfrac{d\Phi_1}{dt} - \dfrac{ds_1^1}{dt}\Phi_1}{\dfrac{ds_5^1}{dt}} + c^5 \frac{\dfrac{d\Phi_2}{dt} - \dfrac{ds_1^1}{dt}\Phi_2}{\dfrac{ds_5^1}{dt}}.$$

Înlocuind pe v^1 în (21) obținem

$$\tag{21'}\left\{\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,v^2 + \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,v^3 + \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,v^4 + \\
&\quad + c^1\left[\frac{\mathrm{d}s_5^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^2}{\mathrm{d}t}\right)\Phi_1\right] + \\
&\quad + c^5\left[\frac{\mathrm{d}s_5^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^2}{\mathrm{d}t}\right)\Phi_2\right], \\
\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}v^3}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,v^2 + \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,v^4 + \\
&\quad + c^1\left[\frac{\mathrm{d}s_5^3}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\mathrm{d}s_1^3}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^3}{\mathrm{d}t}\right)\Phi_1\right] + \\
&\quad + c^5\left[\frac{\mathrm{d}s_5^3}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\mathrm{d}s_1^3}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^3}{\mathrm{d}t}\right)\Phi_2\right], \\
\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}v^4}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,v^2 + \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,v^3 + \frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,v^4 + \\
&\quad + c^1\left[\frac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\mathrm{d}s_1^4}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}\right)\Phi_1\right] + \\
&\quad + c^5\left[\frac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\mathrm{d}s_1^4}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}\right)\Phi_2\right],
\end{aligned}\right.$$

iar dacă

$$\mathrm{d}s_3^2 = \mathrm{d}s_4^2 = \mathrm{d}s_2^3 = \mathrm{d}s_4^3 = \mathrm{d}s_2^4 = \mathrm{d}s_3^4 = 0$$

rezultă :

$$v^2 = \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_2^2}\left[c^1\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_2^2}\,p_1\,\mathrm{d}t + c^5\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_2^2}\,p_2\,\mathrm{d}t + c^2\right],$$

$$v^3 = \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_3^3}\left[c^1\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_3^3}\,q_1\,\mathrm{d}t + c^5\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_3^3}\,q_2\,\mathrm{d}t + c^3\right],$$

$$v^4 = \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}\left[c^1\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}\,r_1\,\mathrm{d}t + c^5\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}\,r_2\,\mathrm{d}t + c^4\right],$$

unde am notat

$$\left\{\begin{aligned} p_j &= \frac{\dfrac{\mathrm{d}s_5^2}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}\Phi_j}{\mathrm{d}t}+\left(\dfrac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}-\dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_5^2}{\mathrm{d}t}\right)\Phi_j}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}}, \\ q_j &= \frac{\dfrac{\mathrm{d}s_5^3}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}\Phi_j}{\mathrm{d}t}+\left(\dfrac{\mathrm{d}s_1^3}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}-\dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_5^3}{\mathrm{d}t}\right)\Phi_j}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}} \\ r_j &= \frac{\dfrac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}\Phi_j}{\mathrm{d}t}+\left(\dfrac{\mathrm{d}s_1^4}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}-\dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}\right)\Phi_j}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}} \end{aligned}\right.$$

$$\text{cu } (j = 1,\ 2)$$

Presupunînd că funcţiile Φ_1, Φ_2 satisfac condiţiile :

$$\Phi_1(0) = 1,\ \Phi_2(0) = 0 \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)_0,\ \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\right)_0$$

şi notînd cu

$$\alpha_1 = \Phi_1,\ \alpha_5 = \Phi_2,\ \beta_1 = \int_C e^{-\int_0^t \mathrm{d}s_2^2}\ p_1\ \mathrm{d}t,\ \beta_2 = e^{\int_C \mathrm{d}s_2^2},$$

$$\beta_5 = \int_C e^{-\int_0^t \mathrm{d}s_2^2}\ p_2\ \mathrm{d}t,\ \gamma_3 = e^{\int_C \mathrm{d}s_3^3},$$

$$\gamma_1 = \int_C e^{-\int_0^t \mathrm{d}s_3^3}\ q_1\ \mathrm{d}t,\ \gamma_5 = \int_C e^{-\int_0^t \mathrm{d}s_3^3}\ q_2\ \mathrm{d}t;\ \delta_1 = \int_C e^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}\ r_1\ \mathrm{d}t,$$

$$\delta_4 = e^{\int_C \mathrm{d}s_4^4},\ \delta_5 = \int_C e^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4} r_2\,\mathrm{d}t,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\ \Phi_1}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}}, \qquad \varepsilon_5 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\ \Phi_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}},$$

unde punctul $P(t)$ parcurge o curbă închisă oarecare C, atunci grupul omogen de olonomie al spaţiului A_5 este:

$$(22)\qquad \begin{cases} v'^1 = \alpha_1 v^1 + \alpha_5 v^5, \\ v'^2 = \beta_1\beta_2 v^1 + \beta_2 v^2 + \beta_2\beta_5 v^5, \\ v'^3 = \gamma_1\gamma_3 v^1 + \gamma_3 v^3 + \gamma_3\gamma_5 v^5, \\ v'^4 = \delta_1\delta_4 v^1 + \delta_4 v^4 + \delta_4\delta_5 v^5, \\ v'^5 = \varepsilon_1\ v^1 + \varepsilon_5 v^5. \end{cases}$$

Deci dacă

$$\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_4^1 = \mathrm{d}s_3^2 = \mathrm{d}s_4^2 = \mathrm{d}s_2^3 = \mathrm{d}s_4^3 = \mathrm{d}s_2^4 = \mathrm{d}s_3^4 = \mathrm{d}s_2^5 = \mathrm{d}s_3^5 = \mathrm{d}s_4^5 = 0$$

şi

$$\mathrm{d}s_5^1 \neq 0,\ \mathrm{d}s_1^5 \neq 0,\ (\mathrm{d}s_1^2)^2 + (\mathrm{d}s_5^2)^2 \neq 0,\ (\mathrm{d}s_1^3)^2 + (\mathrm{d}s_5^3)^2 \neq 0,\ (\mathrm{d}s_1^4)^2 + (\mathrm{d}s_5^4)^2 \neq 0$$

spaţiul A_5 are drept grup omogen de olonomie grupul (22) sau un subgrup al acestuia. În sistemul de coordonate ales condiţiile de mai sus se scriu:

$$\Gamma_{2i}^1 = \Gamma_{3i}^1 = \Gamma_{4i}^1 = \Gamma_{3i}^2 = \Gamma_{4i}^2 = \Gamma_{2i}^3 = \Gamma_{4i}^3 = \Gamma_{2i}^4 = \Gamma_{3i}^4 = \Gamma_{2i}^5 = \Gamma_{3i}^5 = \Gamma_{4i}^5 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{5} (\Gamma_{5i}^1)^2 \neq 0,\ \sum_{i=1}^{5} (\Gamma_{1i}^5)^2 \neq 0,\ \sum_{i=1}^{5} [(\Gamma_{1i}^2)^2 + (\Gamma_{5i}^2)^2] \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{5} [(\Gamma_{1i}^3)^2 + (\Gamma_{5i}^3)^2] \neq 0,\quad \sum_{i=1}^{5} [(\Gamma_{1i}^4)^2 + (\Gamma_{5i}^4)^2] \neq 0.$$

S-ar putea însă ca $(\mathrm{d}s_3^2)^2 + (\mathrm{d}s_4^2)^2 \neq 0$ sau $(\mathrm{d}s_2^3)^2 + (\mathrm{d}s_4^3)^2 \neq 0$, sau $(\mathrm{d}s_2^4)^2 + (\mathrm{d}s_3^4)^2 \neq 0$.

Vom considera mai întîi cazul I cînd $\mathrm{d}s_4^2 = 0$. Atunci $\mathrm{d}s_3^2 \neq 0$, iar v^3 din prima ecuaţie (21′) are expresia:

$$(22')\qquad v^3 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t} v^2 - (c^1 p_1 + c^5 p_2)}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}$$

care înlocuită în următoarea ecuaţie (21′) conduce la

$$\frac{\mathrm{d}^2 v^2}{\mathrm{d}t^2} - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}r} + \frac{\mathrm{d}(s_2^2 + s_3^3)}{\mathrm{d}t}\right]\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - \left[\frac{\mathrm{d}^2 s_2^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} +\right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right] v^2 = \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t} v^4 + c^1\left[\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t} - p_1\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right) +\right.$$

$$\left. + q_1 \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right] + c^5\left[\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t} - p_2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right) + q_2 \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right]$$

Dacă $\mathrm{d}s_4^3 = 0$, notînd cu Φ_2' și Φ_3 două soluții independente ale ecuației omogene:

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}t^2} - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(s_2^2 + s_3^3)}{\mathrm{d}t}\right]\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} - \left[\frac{\mathrm{d}^2 s_2^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right]\Phi = 0$$

și cu Φ_{0j} o soluție particulară a ecuației

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}t^2} - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(s_2^2 + s_3^3)}{\mathrm{d}t}\right]\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} - \left[\frac{\mathrm{d}^2 s_2^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right]\Phi = \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} - p_j\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right) + q_j\,\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}$$

cu $j = 1, 2$, obținem soluția generală a ecuației de mai sus

$$v^2 = c'\,\Phi_{01} + c^2\,\Phi_2' + c^3\,\Phi_3 + c^5\,\Phi_{02}$$

iar v^3 va avea deci expresia:

$$v^3 = c^1\,\frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{01}}{\mathrm{d}t} - \Phi_{01}\,\dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t} - p_1}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} + c^2\,\frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2'}{\mathrm{d}t} - \Phi_2'\,\dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} +$$

$$+ c^3\,\frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t} - \Phi_3\,\dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} + c^4\,\frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{02}}{\mathrm{d}t} - \Phi_{02}\,\dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t} - p_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}$$

Înlocuind valorile lui v^2 și v^3 în a treia ecuație (21′), obținem:

$$\frac{\mathrm{d}v^4}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\,v^4 = \frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}\,(c^1\,\Phi_{01} + c^2\,\Phi_2' + c^3\,\Phi_3 + c^5\Phi_{02}) +$$

$$+ \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\,(c^1\gamma_1 + c^2\gamma_2 + c^3\gamma_3 + c^5\gamma_5) + c^1 r_1 + c^5 r_2\,,$$

ecuație cu soluția generală:

$$v^4 = \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}\left[c^1\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}\left(\frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}\,\beta_1 + \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\,\gamma_1 + r_1\right)\mathrm{d}t + \right.$$

$$+ c^2\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}\left(\frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}\,\beta_2 + \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\,\gamma_2\right)\mathrm{d}t + c^3\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}\left(\frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}\,\beta_3 + \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\,\gamma_3\right)\mathrm{d}t +$$

$$\left. + c^5\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}\left(\frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}\,\beta_5 + \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\,\gamma_5 + r_2\right)\mathrm{d}t + c^4\right],$$

unde am notat

$$\alpha_1 = \Phi_1\,,\;\; \alpha_5 = \Phi_2,\;\; \beta_1 = \Phi_{01},\;\; \beta_2 = \Phi_2',\;\; \beta_3 = \Phi_3,\;\; \beta_5 = \Phi_{02},$$

$$\gamma_1 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\Phi_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},\quad \gamma_3 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\Phi_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},\quad \gamma_5 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{02}}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\Phi_{02} - p_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},$$

$$\delta_1 = \int_C \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}\left(\frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}\cdot\beta_1 + \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\cdot\gamma_1 + r_1\right)\mathrm{d}t\,,$$

$$\delta_2 = \int_C \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}\left(\frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}\,\beta_2 + \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\,\gamma_2\right)\mathrm{d}t,$$

$$\delta_3 = \int_C \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}\left(\frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}\beta_3 + \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\,\gamma_3\right)\mathrm{d}t,\qquad \delta_4 = \mathrm{e}^{\int_C \mathrm{d}s_4^4},$$

$$\delta_5 = \int_C \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}\left(\frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}\,\beta_5 + \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\,\gamma_5 + r_2\right)\mathrm{d}t\,,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\,\Phi_1}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}},\qquad \varepsilon_5 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\,\Phi_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}}$$

şi condiţiile iniţiale pentru funcţiile Φ_1, Φ_2, Φ_2', Φ_3, Φ_{01}, Φ_{02},

$$\Phi_{01}(0) = \Phi_{02}(0) = \Phi_2(0) = \Phi_3(0) = 0,\;\; \Phi_1(0) = \Phi_2'(0) = 1$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)_0,\;\; \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\right)_0,\;\; \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_{01}}{\mathrm{d}t}\right)_0 = (p_1)_0\,,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Phi_{02}}{\mathrm{d}t}\right)_0 = (p_2)_0\,,\;\; \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_2'}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\right)_0,\;\; \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right)_0.$$

În aceste condiţii grupul de olonomie al spaţiului A_5 este :

$$\text{(23)}\qquad \begin{cases} v'^1 = \alpha_1\, v^1 + \alpha_5\, v^5\,, \\ v'^2 = \beta_1\, v^1 + \beta_2\, v^2 + \beta_3\, v^3 + \beta_5\, v^5\,, \\ v'^3 = \gamma_1\, v^1 + \gamma_2\, v^2 + \gamma_3\, v^3 + \gamma_5\, v^5\,, \\ v'^4 = \delta_4\delta_1\, v^1 + \delta_4\delta_2\, v^2 + \delta_4\delta_3\, v^3 + \delta_4\, v^4 + \delta_4\delta_5\, v^5\,, \\ v'^5 = \varepsilon_1\, v^1 + \varepsilon_5\, v^5\,. \end{cases}$$

Aşadar atunci cînd

$$\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_4^1 = \mathrm{d}s_4^2 = \mathrm{d}s_4^3 = \mathrm{d}s_2^5 = \mathrm{d}s_3^5 = \mathrm{d}s_4^5 = 0,$$

$$\mathrm{d}s_3^2 \neq 0,\;\; \mathrm{d}s_5^1 \neq 0,\;\; \mathrm{d}s_1^5 \neq 0,\;\; (\mathrm{d}s_1^3)^2 + (\mathrm{d}s_2^3)^2 + (\mathrm{d}s_5^3)^2 \neq 0,\;\; (\mathrm{d}s_1^4)^2 +$$

$$+ (\mathrm{d}s_2^4)^2 + (\mathrm{d}s_3^4)^2 + (\mathrm{d}s_5^4)^2 \neq 0$$

grupul omogen de olonomie al spaţiului A_5 este (23) sau un subgrup al acestuia. Condiţiile de mai sus se scriu în raport cu sistemul de coordonate din A_5 :

$$\Gamma^1_{2i} = \Gamma^1_{3i} = \Gamma^1_{4i} = \Gamma^2_{4i} = \Gamma^3_{4i} = \Gamma^5_{2i} = \Gamma^5_{3i} = \Gamma^5_{4i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

$$\sum_{i=1}^{5} (\Gamma^1_{5i})^2 \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{5} (\Gamma^2_{3i})^2 \neq 0$$

$$\sum_{i=1}^{5} [(\Gamma^3_{1i})^2 + (\Gamma^3_{2i})^2 + (\Gamma^3_{5i})^2] \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{5} [(\Gamma^4_{1i})^2 + (\Gamma^4_{2i})^2 + (\Gamma^4_{3i})^2 + (\Gamma^4_{5i})^2 \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{5} (\Gamma^5_{1i})^2 \neq 0.$$

Dacă însă în condiţiile de mai sus $\mathrm{d}s^3_4 \neq 0$, atunci din (21′) avem

$$v^4 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 v^2}{\mathrm{d}t^2} - s_1 \dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - s_2\, v^2 - (c^1\, s_3 + c^5\, s_4)}{\dfrac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t}\, \dfrac{\mathrm{d}s^3_4}{\mathrm{d}t}}, \tag{23′}$$

unde

$$s_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\,(s^2_2 + s^3_3)}{\mathrm{d}t},$$

$$s_2 = \frac{\mathrm{d}^2 s^2_2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s^2_2}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s^3_3}{\mathrm{d}t} \right) + \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t}\, \frac{\mathrm{d}s^3_2}{\mathrm{d}t},$$

$$s_3 = \frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t} - p_1 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s^3_3}{\mathrm{d}t} \right) + q_1 \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t},$$

$$s_4 = \frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t} - p_2 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s^3_3}{\mathrm{d}t} \right) + q_2 \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t}.$$

Înlocuind pe v^4 în a treia ecuaţie (21′), obţinem :

$$\frac{\mathrm{d}^3 v^2}{\mathrm{d}t^3} - l_1 \frac{\mathrm{d}^2 v^2}{\mathrm{d}t^2} - l_2 \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - l_3\, v^2 = c^1\, l_4 + c^5\, l_5,$$

unde am notat :

$$l_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \left(\frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t}\, \frac{\mathrm{d}s^3_4}{\mathrm{d}t} \right) + \frac{\mathrm{d}s^4_4}{\mathrm{d}t} + s_1,$$

$$l_2 = \frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}t} - s_1 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \left(\frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t}\, \frac{\mathrm{d}s^3_4}{\mathrm{d}t} \right) + \frac{\mathrm{d}s^4_4}{\mathrm{d}t} \right) + s_2,$$

$$l_3 = \frac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}t} - s_2 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \left(\frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t}\, \frac{\mathrm{d}s^3_4}{\mathrm{d}t} \right) + \frac{\mathrm{d}s^4_4}{\mathrm{d}t} \right) + \frac{\mathrm{d}s^3_4}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t}\, \frac{\mathrm{d}s^4_2}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s^2_2}{\mathrm{d}t}\, \frac{\mathrm{d}s^4_3}{\mathrm{d}t} \right),$$

$$l_4 = \frac{\mathrm{d}s_3}{\mathrm{d}t} - s_3\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\left(r_1\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} - p_1\frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$l_5 = \frac{\mathrm{d}s_4}{\mathrm{d}t} - s_4\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\left(r_2\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} - p_2\frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\right).$$

Notăm cu Φ_2', Φ_3, Φ_4 trei soluţii independente ale ecuaţiei

$$\frac{\mathrm{d}^3\Phi}{\mathrm{d}t^3} - l_1\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}t^2} - l_2\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} - l_3\,\Phi = 0$$

şi cu Φ_{01}, Φ_{02} soluţiile particulare ale ecuaţiilor :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^3\,\Phi_{01}}{\mathrm{d}t^3} - l_1\frac{\mathrm{d}^2\,\Phi_{01}}{\mathrm{d}t^2} - l_2\frac{\mathrm{d}\Phi_{01}}{\mathrm{d}t} - l_3\cdot\Phi_{01} = l_4,\\ &\frac{\mathrm{d}^3\,\Phi_{02}}{\mathrm{d}t^3} - l_1\frac{\mathrm{d}^2\,\Phi_{02}}{\mathrm{d}t^2} - l_2\frac{\mathrm{d}\Phi_{02}}{\mathrm{d}t} - l_3\cdot\Phi_{02} = l_5 \end{aligned}\right.$$

şi atunci soluţia generală a ecuaţiei de mai sus este :

$$v^2 = c^1\,\Phi_{01} + c^2\Phi_2' + c^3\Phi_3 + c^4\Phi_4 + c^5\Phi_{02}$$

care înlocuită în expresiile (22′), (23′) ale lui v^3 şi v^4 conduce la

$$v^3 = c^1\frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{01}}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\Phi_{01} - p_1}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} + c^2\frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2'}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\Phi_2'}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} +$$

$$+ c^3\frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\Phi_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} + c^4\frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_4}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\Phi_4}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} + c^5\frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{02}}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\Phi_{02} - p_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},$$

$$v^4 = c^1\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\,\Phi_{01}}{\mathrm{d}t^2} - s_1\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{01}}{\mathrm{d}t} - s_2\,\Phi_{01} - s_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}} + c^2\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_2'}{\mathrm{d}t^2} - s_1\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2'}{\mathrm{d}t} - s_2\,\Phi_2'}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}} +$$

$$+ c^3\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_3}{\mathrm{d}t^2} - s_1\dfrac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t} - s_2\cdot\Phi_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}} + c^4\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_4}{\mathrm{d}t^2} - s_1\dfrac{\mathrm{d}\Phi_4}{\mathrm{d}t} - s_2\,\Phi_4}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}} +$$

$$+ c^5\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\,\Phi_{02}}{\mathrm{d}t^2} - s_1\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{02}}{\mathrm{d}t} - s_2\Phi_{02} - s_4}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}}.$$

Presupunînd că funcţiile Φ_1, Φ_2, Φ_2', Φ_3, Φ_4, Φ_{01}, Φ_{02}, satisfac condiţiile iniţiale :

$$\Phi_{01}(0) = \Phi_{02}(0) = \Phi_2(0) = \Phi_3(0) = \Phi_4(0) = 0, \qquad \Phi_1(0) = \Phi_2'(0) = 1$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Phi_{01}}{\mathrm{d}t}\right)_0 = (p_1)_0, \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_{02}}{\mathrm{d}t}\right)_0 = (p_2), \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)_0, \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}\right)_0 =$$

$$= \left(\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\right)_0, \left(\frac{\mathrm{d}\Phi'_2}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\right)_0, \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right)_0, \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_4}{\mathrm{d}t_0}\right)_0 = 0, \left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_{01}}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 =$$

$$= (s_1)_0(p_1)_0 + (s_3)_0, \left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_{02}}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = (s_2)_0(p_2)_0 + (s_4)_0, \left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_2'}{\mathrm{d}t}\right)_0 =$$

$$= (s_1)_0\left(\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\right)_0 + (s_2)_0$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_3}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = (s_1)_0\left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right)_0, \left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_4}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right)_0\left(\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\right)_0$$

şi notînd cu

$$\alpha_1 = \Phi_1, \quad \alpha_5 = \Phi_2, \quad \beta_1 = \Phi_{01}, \quad \beta_2 = \Phi_2', \quad \beta_3 = \Phi_3, \quad \beta_4 = \Phi_4, \quad \beta_5 = \Phi_{02},$$

$$\gamma_1 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{01}}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\Phi_{01} - p_1}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}$$

$$\gamma_2 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2'}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\Phi_2'}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}, \quad \gamma_3 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\Phi_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},$$

$$\gamma_4 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_4}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\Phi_4}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}, \quad \gamma_5 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{02}}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\Phi_{02} - p_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},$$

$$\delta_1 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_{01}}{\mathrm{d}t^2} - s_1\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{01}}{\mathrm{d}t} - s_2\Phi_{01} - s_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}}, \quad \delta_2 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_2'}{\mathrm{d}t^2} - s_1\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2'}{\mathrm{d}t} - s_2\Phi_2'}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}},$$

$$\delta_3 = \frac{\dfrac{d^2\Phi_3}{dt^2} - s_1 \dfrac{d\Phi_3}{dt} - s_2\,\Phi_3}{\dfrac{ds_3^2}{dt}\;\dfrac{ds_4^3}{dt}}, \quad \delta_4 = \frac{\dfrac{d^2\Phi_4}{dt^2} - s_1 \dfrac{d\Phi_4}{dt} - s_2\,\Phi_4}{\dfrac{ds_3^2}{dt}\;\dfrac{ds_4^3}{dt}}, \quad \delta_5 =$$

$$= \frac{\dfrac{d^2\Phi_{02}}{dt^2} - s_1 \dfrac{d\Phi_{02}}{dt} - s_2\Phi_{02} - s_4}{\dfrac{ds_3^2}{dt}\;\dfrac{ds_4^3}{dt}}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\dfrac{d\Phi_1}{dt} - \dfrac{ds_1^1}{dt}\,\Phi_1}{\dfrac{ds_5^1}{dt}}, \quad \varepsilon_5 = \frac{\dfrac{d\Phi_2}{dt} - \dfrac{ds_1^1}{dt}\,\Phi_2}{\dfrac{ds_5^1}{dt}}$$

grupul de olonomie omogen pentru A_5 va fi :

$$(24)\qquad \begin{cases} v'^1 = \alpha_1\, v^1 + \alpha_5\, v^5, \\ v'^2 = \beta_1\, v^1 + \beta_2\, v^2 + \beta_3\, v^3 + \beta_4\, v^4 + \beta_5\, v^5, \\ v'^3 = \gamma_1\, v^1 + \gamma_2\, v^2 + \gamma_3\, v^3 + \gamma_4\, v^4 + \gamma_5\, v^5, \\ v'^4 = \delta_1\, v^1 + \delta_2\, v^2 + \delta_3\, v^3 + \delta_4\, v^4 + \delta_5\, v^5, \\ v'^5 = \varepsilon_1\, v^1 + \varepsilon_5\, v^5 \end{cases}$$

ale cărui varietăţi invariante sînt : $v^1 = v^5 = 0$. Deci dacă

$$ds_2^1 = ds_3^1 = ds_4^1 = ds_4^2 = ds_2^5 = ds_3^5 = ds_4^5 = 0,$$

iar

$$ds_3^2 \neq 0,\; ds_4^3 \neq 0,\; ds_5^1 \neq 0 \;\; ds_1^5 \neq 0,\; (ds_1^4)^2 + (ds_2^4)^2 + (ds_3^4)^2 + (ds_5^4)^2 \neq 0,$$

$$(ds_1^3)^2 + (ds_2^3)^2 + (ds_4^3)^2 + (ds_5^3)^2 \neq 0,$$

grupul de olonomie al spaţiului A_5 este (24) sau un subgrup al acestuia. În sistemul de coordonate ales în A_5, condiţiile de mai sus devin :

$$\Gamma_{2i}^1 = \Gamma_{3i}^1 = \Gamma_{4i}^1 = \Gamma_{4i}^2 = \Gamma_{2i}^5 = \Gamma_{3i}^5 = \Gamma_{4i}^5 = 0$$

$$(i = 1, 2, 3, 4, 5),\; \sum_{i=1}^{5} (\Gamma_{5i}^1)^2 \neq 0,\; \sum_{i=1}^{5} (\Gamma_{3i}^2) \neq 0,\; \sum_{i=1}^{5} (\Gamma_{4i}^3)^2 \neq 0,\; \sum_{i=1}^{5} (\Gamma_{1i}^5)^2 \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{5} [(\Gamma_{1i}^3)^2 + (\Gamma_{2i}^3)^2 + (\Gamma_{4i}^3)^2 + (\Gamma_{5i}^3)^2] \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{5} [(\Gamma_{1i}^4)^2 + (\Gamma_{2i}^4)^2 + (\Gamma_{3i}^4)^2 + (\Gamma_{5i}^4)^2] \neq 0.$$

Vom considera cazul II cînd $\mathrm{d}s_4^2 \neq 0$ şi $\mathrm{d}s_3^2 = 0$ şi de asemenea

$\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_4^1 = \mathrm{d}s_2^5 = \mathrm{d}s_3^5 = \mathrm{d}s_4^5 = 0$ iar $\mathrm{d}s_5^1 \neq 0$, $\mathrm{d}s_1^5 \neq 0$.

Şi în aceste condiţii vom avea de făcut pe rînd presupunerile $\mathrm{d}s_3^4 = 0$ sau $\mathrm{d}s_3^4 \neq 0$. În baza condiţiilor de mai sus avem din prima ecuaţie (21′) :

$$v^4 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\, v^2 - (c^1\, p_1 + c^5\, p_2)}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}} \tag{24′}$$

care înlocuită în ultima ecuaţie (21′) dă :

$$\frac{\mathrm{d}^2v^2}{\mathrm{d}t^2} - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\,(s_2^2 + s_4^4)}{\mathrm{d}t}\right]\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - \left(\frac{\mathrm{d}^2\, s_2^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t} + \right.$$
$$\left. + \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\right) v^2 = \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\, v^3 + c^1\left[\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t} - p_1\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\right) + r_1\,\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\right] + c^5\left[\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t} - p_2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\right) + r_2\,\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\right]. \tag{25}$$

Dacă $\mathrm{d}s_3^4 = 0$, atunci notînd cu Φ_2', Φ_3 două soluţii independente ale ecuaţiei :

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\Phi}{\mathrm{d}t^2} - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\,(s_2^2 + s_4^4)}{\mathrm{d}t}\right]\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} - \left(\frac{\mathrm{d}^2\, s_2^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t} + \right.$$
$$\left. + \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\right)\Phi = 0$$

şi cu Φ_{0j} $(j = 1, 2)$ o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene :

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}t^2} - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\,(s_2^2 + s_4^4)}{\mathrm{d}t}\right]\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} - \left(\frac{\mathrm{d}^2 s_2^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t} + \right.$$
$$\left. + \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\right)\Phi = \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} - p_j\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\right) + r_j\,\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t} \quad (j = 1,\ 2)$$

soluţia generală va avea forma :

$$v^2 = c^1\,\Phi_{01} + c^2\,\Phi_2' + c^3\,\Phi_3 + c^5\,\Phi_{02}$$

Înlocuind-o în expresia lui v^4, obţinem prin derivare :

$$v^4 = c^1 \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{01}}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\Phi_{01} - p_1}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}} + c^2 \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2'}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\Phi_2'}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}} +$$

$$+ c^3 \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\Phi_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}} + c^5 \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{02}}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\Phi_{02} - p_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}}$$

Înlocuind pe v^2 şi v^4 în a doua ecuaţie (21′), obţinem pe v^3 prin integrare :

$$v^3 = e^{\int_0^t \mathrm{d}s_3^3} \left[c^1 \int_0^t e^{-\int_0^t \mathrm{d}s_3^3} \left(\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\,\beta_1 + \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\,\delta_1 + q_1 \right) \mathrm{d}t + \right.$$

$$+ c^2 \int_0^t e^{-\int_0^t \mathrm{d}s_3^3} \left(\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\,\beta_2 + \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\,\delta_2 \right) \mathrm{d}t + c^3 \int_0^t e^{-\int_0^t \mathrm{d}s_3^3} \left(\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\,\beta_3 + \right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\,\delta_3 \right) \mathrm{d}t + c^5 \int_0^t e^{-\int_0^t \mathrm{d}s_3^3} \left(\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\,\beta_5 + \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\,\delta_5 + q_2 \right) \mathrm{d}t + c^4 \,,$$

unde am notat cu :

$$\alpha_1 = \Phi_1,\ \alpha_5 = \Phi_2,\ \beta_1 = \Phi_{01},\ \beta_2 = \Phi_2',\ \beta_3 = \Phi_3,\ \beta_5 = \Phi_{02},$$

$$\gamma_1 = \int_C e^{-\int_0^t \mathrm{d}s_3^3} \left(\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\,\beta_1 + \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\,\delta_1 + q_1 \right) \mathrm{d}t,$$

$$\gamma_2 = \int_C e^{-\int_0^t \mathrm{d}s_3^3} \left(\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\,\beta_2 + \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\,\delta_2 \right) \mathrm{d}t,$$

$$\gamma_3 = \int_C e^{-\int_0^t \mathrm{d}s_3^3} \left(\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\,\beta_3 + \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\,\delta_3 \right) \mathrm{d}t,\ \gamma_4 = e^{\int_C \mathrm{d}s_3^3},$$

$$\gamma_5 = \int_C e^{-\int_0^t \mathrm{d}s_3^3} \left(\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\,\beta_5 + \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\,\delta_5 + q_2 \right) \mathrm{d}t,$$

$$\delta_1 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{01}}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\Phi_{01} - p_1}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}},\quad \delta_2 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2'}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\Phi_2'}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}},$$

$$\delta_3 = \frac{\dfrac{d\Phi_3}{dt} - \dfrac{ds_2^2}{dt}\,\Phi_3}{\dfrac{ds_4^2}{dt}}, \quad \delta_5 = \frac{\dfrac{d\Phi_{02}}{dt} - \dfrac{ds_2^2}{dt}\cdot\Phi_{02} - p_2}{\dfrac{ds_4^2}{dt}},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\dfrac{d\Phi_1}{dt} - \dfrac{ds_1^1}{dt}\,\Phi_1}{\dfrac{ds_5^1}{dt}}, \quad \varepsilon_5 = \frac{\dfrac{d\Phi_2}{dt} - \dfrac{ds_1^1}{dt}\,\Phi_2}{\dfrac{ds_5^1}{dt}},$$

unde punctul $P(t)$ parcurge curba închisă C oarecare iar funcţiile Φ_{01} Φ_{02}, Φ_1, Φ_2, Φ'_2, Φ_3 satisfac condiţiile :

$$\Phi_{01}(0) = \Phi_{02}(0) = \Phi_2(0) = \Phi_3(0) = 0, \quad \Phi_1(0) = \Phi'_2(0) = 1$$

$$\left(\frac{d\Phi_{01}}{dt}\right)_0 = (p_1)_0, \ \left(\frac{d\Phi_{02}}{dt}\right)_0 = (p_2)_0, \ \left(\frac{d\Phi_1}{dt}\right)_0 = \left(\frac{ds_1^1}{dt}\right)_0, \ \left(\frac{d\Phi_2}{dt}\right)_0 =$$

$$= \left(\frac{ds_5^1}{dt}\right)_0, \ \left(\frac{d\Phi'_2}{dt}\right)_0 = \left(\frac{ds_2^2}{dt}\right)_0, \ \left(\frac{d\Phi_3}{dt}\right)_0 = \left(\frac{ds_4^2}{dt}\right)_0.$$

În acest caz grupul omogen de olonomie al spaţiului A_5 este :

$$(26) \quad \begin{cases} v'^1 = \alpha_1 v^1 + \alpha_5 v^5, \\ v'^2 = \beta_1 v^1 + \beta_2 v^2 + \beta_3 v^3 + \beta_5 v^5, \\ v'^3 = \gamma_4\gamma_1 v^1 + \gamma_4\gamma_2 v^2 + \gamma_4\gamma_3 v^3 + \gamma_4 v^4 + \gamma_4\gamma_5 v^5, \\ v'^4 = \delta_1 v^1 + \delta_2 v^2 + \delta_3 v^3 + \delta_5 v^5, \\ v'^5 = \varepsilon_1 v^1 + \varepsilon_5 v^5. \end{cases}$$

Deci dacă

$$ds_2^1 = ds_3^1 = ds_4^1 = ds_3^2 = ds_3^4 = ds_2^5 = ds_3^5 = ds_4^5 = 0$$

iar $ds_4^2 \neq 0$, $ds_5^1 \neq 0$, $ds_1^5 \neq 0$, $(ds_1^4)^2 + (ds_2^4)^2 + (ds_5^4)^2 \neq 0$, $(ds_1^3)^2 +$
$+ (ds_2^3)^2 + (ds_4^3)^2 + (ds_5^3)^2 \neq 0,$

atunci grupul omogen de olonomie al spaţiului A_5 este (26) sau un subgrup al acestuia. Varietăţile invariante ale grupului (26) sînt $v^1 = v^5 = 0$.

În coordonate condiţiile de mai sus se scriu :

$$\Gamma^1_{2i} = \Gamma^1_{3i} = \Gamma^1_{4i} = \Gamma^2_{3i} = \Gamma^4_{3i} = \Gamma^5_{2i} = \Gamma^5_{3i} = \Gamma^5_{4i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

$$\sum_{i=1}^{5} (\Gamma^1_{5i})^2 \neq 0, \ \sum_{i=1}^{5} (\Gamma^2_{4i})^2 \neq 0, \ \sum_{i=1}^{5} (\Gamma^5_{1i})^2 \neq 0, \ \sum_{i=1}^{5} [(\Gamma^4_{1i})^2 + (\Gamma^4_{2i})^2 + (\Gamma^4_{5i})^2] \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{5} [(\Gamma^3_{1i})^2 + (\Gamma^3_{2i})^2 + (\Gamma^3_{4i})^2 + (\Gamma^3_{5i})^2] \neq 0.$$

Dacă însă

$$\mathrm{d}s_3^4 \neq 0, \quad \mathrm{d}s_4^2 \neq 0, \quad \mathrm{d}s_5^1 \neq 0, \quad \mathrm{d}s_1^5 \neq 0,$$

$$\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_4^1 = \mathrm{d}s_3^2 = \mathrm{d}s_3^4 = \mathrm{d}s_2^5 = \mathrm{d}s_3^5 = \mathrm{d}s_4^5 = 0,$$

atunci scoatem valoarea lui v^3 din (25) și avem :

$$v^3 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 v^2}{\mathrm{d}t^2} - s_1 \dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - s_2 v^2 - (c^1 s_3 + c^5 s_4)}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t} \dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}}, \tag{26'}$$

unde am notat :

$$s_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(s_2^2 + s_4^4)}{\mathrm{d}t},$$

$$s_2 = \frac{\mathrm{d}^2 s_2^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t},$$

$$s_3 = \frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t} - p_1\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\right) + r_1 \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t},$$

$$s_4 = \frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t} - p_2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\right) + r_2 \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}.$$

Înlocuind pe v^3 și v^4 din (24′), (26′) în a doua ecuație (21′), obținem o ecuație de ordinul trei :

$$\frac{\mathrm{d}^3 v^2}{\mathrm{d}t^3} - l_1 \frac{\mathrm{d}^2 v^2}{\mathrm{d}t^2} - l_2 \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - l_3 v^2 = c^1 l_4 + c^5 l_5,$$

unde

$$l_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln\left(\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t} + s_1,$$

$$l_2 = \frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}t} - s_1\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln\left(\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right) + s_2,$$

$$l_3 = \frac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}t} - s_2 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln\left(\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$l_4 = \frac{\mathrm{d}s_3}{\mathrm{d}t} - s_3 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln\left(\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t} \left(r_1 \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t} - p_1 \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$l_5 = \frac{\mathrm{d}s_4}{\mathrm{d}t} - s_4 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln\left(\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\left(r_2 \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t} - p_2 \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\right).$$

Dacă notăm cu Φ_2', Φ_3, Φ_4 soluţiile independente ale ecuaţiei omogene :

$$\frac{\mathrm{d}^3\Phi}{\mathrm{d}t^3} - l_1 \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}t^2} - l_2 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} - l_3\Phi = 0$$

iar cu Φ_{01}, Φ_{02} soluţiile particulare ale ecuaţiilor

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^3\Phi_{01}}{\mathrm{d}t^3} - l_1 \dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_{01}}{\mathrm{d}t^2} - l_2 \dfrac{\mathrm{d}\Phi_{01}}{\mathrm{d}t} - l_3\,\Phi_{01} = l_4\,, \\ \dfrac{\mathrm{d}^3\Phi_{02}}{\mathrm{d}t^3} - l_1 \dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_{02}}{\mathrm{d}t^2} - l_2 \dfrac{\mathrm{d}\Phi_{02}}{\mathrm{d}t} - l_3\,\Phi_{02} = l_5\,, \end{cases}$$

atunci soluţia generală a ecuaţiei de ordin trei este :

$$v^2 = c^1\,\Phi_{01} + c^2\,\Phi_2' + c^3\,\Phi_3 + c^4\,\Phi_4 + c^5\,\Phi_{02}$$

iar

$$v^3 = c^1 \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_{01}}{\mathrm{d}t^2} - s_1 \dfrac{\mathrm{d}\Phi_{01}}{\mathrm{d}t} - s_2\,\Phi_{01} - s_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\;\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}} +$$

$$+ c^2 \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_2'}{\mathrm{d}t^2} - s_1 \dfrac{\mathrm{d}\Phi_2'}{\mathrm{d}t} - s_2\,\Phi_2'}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\;\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}} + c^3 \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_3}{\mathrm{d}t^2} - s_1 \dfrac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t} - s_2\,\Phi_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\;\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}} +$$

$$+ c^4 \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_4}{\mathrm{d}t^2} - s_1 \dfrac{\mathrm{d}\Phi_4}{\mathrm{d}t} - s_2\Phi_4}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\;\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}} + c^5 \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_{02}}{\mathrm{d}t^2} - s_1 \dfrac{\mathrm{d}\Phi_{02}}{\mathrm{d}t} - s_2\,\Phi_{02} - s_4}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\;\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}}\,,$$

$$v^4 = c^1 \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{01}}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\Phi_{01} - p_1}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}} + c^2 \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2'}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\Phi_2'}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}} +$$

$$+ c^3 \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\Phi_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}} + c^4 \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_4}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\Phi_4}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}} + c^5 \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{02}}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\Phi_{02} - p_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}}\,.$$

Presupunînd că $\Phi_{01}(0) = \Phi_{02}(0) = \Phi_2(0) = \Phi_3(0) = \Phi_4(0) = 0$ iar $\Phi_1(0) = \Phi_2'(0) = 1$,

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Phi_{01}}{\mathrm{d}t}\right)_0 = (p_1)_0, \quad \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_{02}}{\mathrm{d}t}\right)_0 = (p_2)_0, \quad \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)_0, \quad \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\right)_0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Phi_2'}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\right)_0, \quad \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_4}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\right)_0, \quad \left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_{01}}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = (s_1)_0\,(p_1)_0 + (s_3)_0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_{02}}{\mathrm{d}t^2}\right) = (s_1)_0\,(p_2)_0 + (s_4)_0, \quad \left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_2'}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = (s_1)_0\left(\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\right)_0 + (s_2)_0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_3}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\right)_0\left(\frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\right)_0, \quad \left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_4}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = (s_1)_0\left(\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\right)_0$$

şi notînd cu

$$\alpha_1 = \Phi_1, \quad \alpha_5 = \Phi_2, \quad \beta_1 = \Phi_{01}, \quad \beta_2 = \Phi_2', \quad \beta_3 = \Phi_3, \quad \beta_4 = \Phi_4, \quad \beta_5 = \Phi_{02},$$

$$\gamma_1 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_{01}}{\mathrm{d}t^2} - s_1\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{01}}{\mathrm{d}t} - s_2\Phi_{01} - s_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}}, \quad \gamma_2 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_2'}{\mathrm{d}t^2} - s_1\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2'}{\mathrm{d}t} - s_2\Phi_2'}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}},$$

$$\gamma_3 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_3}{\mathrm{d}t^2} - s_1\dfrac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t} - s_2\Phi_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}}, \quad \gamma_4 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_4}{\mathrm{d}t^2} - s_1\dfrac{\mathrm{d}\Phi_4}{\mathrm{d}t} - s_2\Phi_4}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}},$$

$$\gamma_5 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_{02}}{\mathrm{d}t^2} - s_1\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{02}}{\mathrm{d}t} - s_2\Phi_{02} - s_4}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}}, \quad \delta_1 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{01}}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\Phi_{01} - p_1}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}},$$

$$\delta_2 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2'}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\Phi_2'}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}}, \quad \delta_3 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\Phi_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}},$$

$$\delta_4 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_4}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\Phi_4}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}}, \quad \delta_5 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{02}}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\Phi_{02} - p_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\Phi_1}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}},$$

$$\varepsilon_5 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\Phi_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}},$$

grupul de olonomie al spaţiului A_5 este în acest caz :

$$(27)\qquad \begin{cases} v'^1 = \alpha_1 v^1 + \alpha_5 v^5, \\ v'^2 = \beta_1 v^1 + \beta_2 v^2 + \beta_3 v^3 + \beta_4 v^4 + \beta_5 v^5, \\ v'^3 = \gamma_1 v^1 + \gamma_2 v^2 + \gamma_3 v^3 + \gamma_4 v^4 + \gamma_5 v^5, \\ v'^4 = \delta_1 v^1 + \delta_2 v^2 + \delta_3 v^3 + \delta_4 v^4 + \delta_5 v^5, \\ v'^5 = \varepsilon_1 v^1 + \varepsilon^5 v^5 \end{cases}$$

sau un subgrup al acestuia avînd drept varietate invariantă $v^1 = v^5 = 0$.

Deci dacă :

$$ds^1_2 = ds^1_3 = ds^1_4 = ds^2_3 = ds^5_2 = ds^5_3 = ds^5_4 = 0$$

iar

$$ds^2_4 \neq 0,\ ds^4_3 \neq 0,\ ds^1_5 \neq 0,\ ds^5_1 \neq 0,\ (ds^3_1)^2 + (ds^3_2)^2 + (ds^3_4)^2 + (ds^3_5)^2 \neq 0,$$

$$(ds^4_1)^2 + (ds^4_2)^2 + (ds^4_3)^2 + (ds^4_5) \neq 0,$$

grupul omogen de olonomie al spaţiului A_5 este (27) sau un subgrup al acestuia. În sistemul de coordonate ales, condiţiile de mai sus devin :

$$\Gamma^1_{2i} = \Gamma^1_{3i} = \Gamma^1_{4i} = \Gamma^2_{3i} = \Gamma^5_{2i} = \Gamma^5_{3i} = \Gamma^5_{4i} = 0 \ (i = 1, \dots 5),$$

$$\sum_{i=1}^{5} (\Gamma^2_{4i})^2 \neq 0,\ \sum_{i=1}^{5} (\Gamma^4_{3i})^2 \neq 0,\ \sum_{i=1}^{5} (\Gamma^5_{1i})^2 \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{5} (\Gamma^1_{5i})^2 \neq 0,\ \sum_{i=1}^{5} [(\Gamma^3_{1i})^2 + (\Gamma^3_{2i})^2 + (\Gamma^3_{4i})^2 + (\Gamma^3_{5i})^2] \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{5} [(\Gamma^4_{1i})^2 + (\Gamma^4_{2i})^2 + (\Gamma^4_{3i})^2 + (\Gamma^4_{5i})^2] \neq 0.$$

Vom considera cazul III cînd $ds^2_3 \neq 0$, $ds^2_4 \neq 0$, iar

$$ds^1_2 = ds^1_3 = ds^1_4 = ds^5_2 = ds^5_3 = ds^5_4 = 0 \text{ şi } ds^1_5 \neq 0,\ ds^5_1 \neq 0.$$

Din prima ecuaţie (21′) avem :

$$(27')\qquad v^3 = \frac{\dfrac{dv^2}{dt} - \dfrac{ds^2_2}{dt} v^2 \dfrac{ds^2_4}{dt} v^4 - (c^1 p_1 + c^5 p_2)}{\dfrac{ds^2_3}{dt}}$$

care înlocuită în următoarea ecuaţie (21′) conduce la :

$$\frac{d^2v^2}{dt^2} - \left[\frac{d}{dt} \ln \frac{ds^2_3}{dt} + \frac{d\,(s^2_2 + s^3_3)}{dt}\right] \frac{dv^2}{dt^2} - \left[\frac{d^2 s^2_2}{dt^2} - \frac{ds^2_2}{dt} \left(\frac{d}{dt} \ln \frac{ds^2_3}{dt} + \frac{ds^3_3}{dt}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{ds^2_3}{dt} \frac{ds^3_2}{dt}\right] v^2 = \frac{ds^2_4}{dt} \frac{dv^4}{dt} + \left[\frac{d^2 s^2_4}{dt^2} - \frac{ds^2_4}{dt} \left(\frac{d}{dt} \ln \frac{ds^2_3}{dt} + \frac{ds^3_3}{dt}\right) + \right.$$

$$+\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\Bigg]\,v^4+c^1\left[\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}-p_1\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right)+q_1\,\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right]+$$

$$+\,c^5\left[\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}-p_2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right)+q_2\,\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right].$$

Înlocuind în această ecuaţie valoarea lui $\frac{\mathrm{d}v^4}{\mathrm{d}t}$ dată de relația :

$$\frac{\mathrm{d}v^4}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}\,v^2+\frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\,\frac{\dfrac{dv^2}{\mathrm{d}t}-\dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,v^2-\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\,v^4-(c^1\,p_1+c^5\,p_2)}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}+$$

$$+\frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\,v^4+c^1\,r_1+c^5\,r_2$$

obţinută din ultima ecuaţie (21′) în care am înlocuit valoarea lui v^3, avem :

$$\text{(28)}\qquad \frac{\mathrm{d}^2v^2}{\mathrm{d}t^2}-\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}+\frac{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\;\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}+\frac{\mathrm{d}(s_2^2+s_3^3)}{\mathrm{d}t}\right]\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}-$$

$$-\left[\frac{\mathrm{d}^2s_2^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}+\frac{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\;\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}+\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\right]v^2=$$

$$=\left[\frac{\mathrm{d}^2s_4^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}+\frac{\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}+\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right]v^4+$$

$$+\,c^1\left[\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}-p_1\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}+\frac{\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\;\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}+\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right)+q_1\,\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}+r_1\,\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\right]+$$

$$+\,c^5\left[\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}-p_2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}+\frac{\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\;\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}+\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right)+q_2\,\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}+r_2\,\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\right].$$

Dacă :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s_4^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\ \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} + \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\ \frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\ \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\ \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t} = 0,$$

atunci notăm cu Φ_2', Φ_3 două soluții independente ale ecuației omogene :

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}t^2} - l_1\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} - l_2\,\Phi = 0,$$

iar cu Φ_{01}, Φ_{02} două soluții particulare ale ecuațiilor :

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi_{01}}{\mathrm{d}t^2} - l_1\frac{\mathrm{d}\Phi_{01}}{\mathrm{d}t} - l_2\,\Phi_{01} = l_3,\quad \frac{\mathrm{d}^2\Phi_{02}}{\mathrm{d}t^2} - l_1\frac{\mathrm{d}\Phi_{02}}{\mathrm{d}t} - l_2\Phi_{02} = l_4,$$

unde am notat

$$l_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\ \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} + \frac{\mathrm{d}(s_2^2 + s_3^3)}{\mathrm{d}t},$$

$$l_2 = \frac{\mathrm{d}^2 s_2^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\ \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} + \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\ \frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}\ \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}$$

$$l_3 = \frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t} - p_1\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\ \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} + \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right) + q_1\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} + r_1\frac{\mathrm{d}s_4^2}{},$$

$$l_4 = \frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t} - p_2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\ \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} + \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right) + q_2\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} + r_2\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}.$$

Soluția generală a ecuației (28) va fi de forma :

$$v^2 = c^1\Phi_{01} + c^2\Phi_2' + c^3\Phi_3 + c^5\Phi_{02}$$

care înlocuită în expresia precedentă (27′) a lui v^3 ne dă :

$$v^3 = \frac{c^1\frac{\mathrm{d}\Phi_{01}}{\mathrm{d}t} + c^2\frac{\mathrm{d}\Phi_2'}{\mathrm{d}t} + c^3\frac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t} + c^5\frac{\mathrm{d}\Phi_{02}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}v^4 - (c^1 p_1 + c^5 p_2)}{\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}$$

pe care la rîndul ei o înlocuim în ultima ecuaţie (21'), împreună cu v^2.

Vom obţine o ecuaţie liniară diferenţială pe care o integrăm şi aflăm v^4 de forma :

$$v^4 = c^1\,\delta_1\delta_4 + c^2\,\delta_2\delta_4 + c^3\,\delta_3\delta_4 + c^4\,\delta_4 + c^5\,\delta_5\delta_4$$

iar v^3 are expresia :

$$v^3 = c^1\gamma_1 + c^2\gamma_2 + c^3\gamma_3 + c^4\gamma_4 + c^5\gamma_5,$$

unde am notat :

$$\gamma_1 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{01}}{\mathrm{d}t} - \delta_1\delta_4\dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t} - p_1}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},\ \gamma_2 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2'}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\delta_2\delta_4}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},\ \gamma_3 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\delta_3\delta_4}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},$$

$$\gamma_4 = \frac{-\dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\delta_4}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},\ \gamma_5 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{02}}{\mathrm{d}t} - \delta_4\delta_5\dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t} - p_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}$$

$$\delta_4 = \mathrm{e}^{\int_C \mathrm{d}s_4^4},\ \delta_1 = \int_C \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}\left(\frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}\,\beta_1 + \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\,\gamma_1 + r_1\right)\mathrm{d}t,$$

$$\delta_2 = \int_C \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}\left(\frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}\,\beta_2 + \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\,\gamma_2\right)\mathrm{d}t,\ \delta_3 = \int_C \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}\left(\frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}\,\beta_3 + \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\,\gamma_3\right)\mathrm{d}t,$$

$$\delta_5 = \int_C \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}\left(\frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}\,\beta_5 + \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\,\gamma_5 + r_2\right)\mathrm{d}t,$$

$$\alpha_1 = \Phi_1,\ \alpha_5 = \Phi_2,\ \beta_1 = \Phi_{01},\ \beta_2 = \Phi_2',\ \beta_3 = \Phi_3,\ \beta_5 = \Phi_{02}$$

şi unde punctul $P\,(t)$ parcurge curba închisă C oarecare.

În aceste condiţii, grupul omogen de olonomie al spaţiului A_5 este :

$$(29)\quad \begin{cases} v'^1 = \alpha_1 v^1 + \alpha_5 v^5 \\ v'^2 = \beta_1 v^1 + \beta_2 v^2 + \beta_3 v^3 + \beta_5 v^5, \\ v'^3 = \gamma_1 v^1 + \gamma_2 v^2 + \gamma_3 v^3 + \gamma_4 v^4 + \gamma_5 v^5, \\ v'^4 = \delta_4\delta_1 v^1 + \delta_4\delta_2 v^2 + \delta_4\delta_3 v^3 + \delta_4 v^4 + \delta_4\delta_5 v^5, \\ v'^5 = \varepsilon_1 v^1 + \varepsilon_5 v^5 \end{cases}$$

ε_1, ε_5 au aceleaşi expresii ca în cazurile precedente, funcţiile Φ_{01}, Φ_{02}, Φ_1, Φ_2, Φ_2', Φ_3 satisfac în plus condiţiile :

$$\Phi_{01}(0) = \Phi_{02}(0) = \Phi_2(0) = \Phi_3(0) = 0, \quad \Phi_1(0) = \Phi_2'(0) = 1$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Phi_{01}}{\mathrm{d}t}\right)_0 = (\delta_1\,\delta_4)_0\left(\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\right)_0 + (p_1)_0, \quad \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_{02}}{\mathrm{d}t}\right)_0 = (\delta_4\delta_5)_0\left(\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\right)_0 + (p_2)_0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)_0 \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\right)_0, \quad \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_2'}{\mathrm{d}t}\right)_0 = (\delta_2\delta_4)_0\left(\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\right)_0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\right)_0 (\delta_3\delta_4)_0 + \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right)_0 .$$

Dacă însă

$$\frac{\mathrm{d}^2 s_4^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\;\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} + \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right) +$$

$$+ \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\;\frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\;\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\;\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t} \neq 0,$$

atunci scoatem din ecuaţia (28) valoarea lui v^4 şi o înlocuim în expresia (27′) a lui v^3. În felul acesta avem scoase ambele expresii ale lui v^3 şi v^4 în funcţie de v^2, pe care le înlocuim în ultima ecuaţie (21′). Se obţine astfel o ecuaţie diferenţială de ordinul trei în v^2 de forma :

$$\frac{\mathrm{d}^3 v^2}{\mathrm{d}t^3} - l_1'\,\frac{\mathrm{d}^2 v^2}{\mathrm{d}t^2} - l_2'\,\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - l_3'\,v^2 = c^1\,l_4' + c^5\,l_5' .$$

Notînd cu Φ_{01}, Φ_{02} două soluţii particulare ale ecuaţiilor :

$$\frac{\mathrm{d}^3\Phi_{01}}{\mathrm{d}t^3} - l_1'\,\frac{\mathrm{d}^2\Phi_{01}}{\mathrm{d}t^2} - l_2'\,\frac{\mathrm{d}\Phi_{01}}{\mathrm{d}t} - l_3'\,\Phi_{01} = l_4'$$

şi

$$\frac{\mathrm{d}^3\Phi_{02}}{\mathrm{d}t^3} - l_1'\,\frac{\mathrm{d}^2\Phi_{02}}{\mathrm{d}t^2} - l_2'\,\frac{\mathrm{d}\Phi_{02}}{\mathrm{d}t} - l_3'\,\Phi_{02} = l_5'$$

iar cu Φ_2', Φ_3, Φ_4 trei soluţii independente ale ecuaţiei omogene :

$$\frac{\mathrm{d}^3\Phi}{\mathrm{d}t^3} - l_1'\,\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}t^2} - l_2'\,\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} - l_3'\,\Phi = 0$$

soluţia generală va fi de forma :

$$v^2 = c^1\Phi_{01} + c^2\Phi_2' + c^3\,\Phi_3 + c^4\,\Phi_4 + c_5\,\Phi_{02}$$

iar

$$v^3 = c^1\,\gamma_1 + c^2\,\gamma_2 + c^3\,\gamma_3 + c^4\,\gamma_4 + c^5\,\gamma_5$$

$$v^4 = c^1\,\delta_1 + c^2\,\delta_2 + c^3\,\delta_3 + c^4\,\delta_4 + c^5\,\delta_5$$

unde $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5$, au expresii analoge celor anterioare şi uşor de observat. Rezultă că în acest caz grupul de olonomie are forma:

$$(30)\quad \begin{cases} v'^1 = \alpha_1 v^1 + \alpha_5 v^5 \\ v'^2 = \beta_1 v^1 + \beta_2 v^2 + \beta_3 v^3 + \beta_4 v^4 + \beta_5 v^5, \\ v'^3 = \gamma_1 v^1 + \gamma_2 v^2 + \gamma_3 v^3 + \gamma_4 v^4 + \gamma_5 v^5, \\ v'^4 = \delta_1 v^1 + \delta_2 v^2 + \delta_3 v^3 + \delta_4 v^4 + \delta_5 v^5, \\ v'^5 = \varepsilon_1 v^1 + \varepsilon_5 v^5 \end{cases}$$

cu varietate invariantă $v^1 = v^5 = 0$.

Observăm că grupul (30) coincide cu (24) şi (27) iar (23), (26), (29) sînt subgrupuri ale acestora avînd în comun varietăţile invariante $v^1 = v^5 = 0$.

Putem spune deci că, atunci cînd:

$$\begin{cases} \mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_4^1 = \mathrm{d}s_2^5 = \mathrm{d}s_3^5 = \mathrm{d}s_4^5 = 0 \\ (\mathrm{d}s_3^2)^2 + (\mathrm{d}s_4^2)^2 \neq 0, \quad \mathrm{d}s_5^1 \neq 0 \\ \mathrm{d}s_1^5 \neq 0, \quad (\mathrm{d}s_1^3)^2 + (\mathrm{d}s_2^3)^2 + (\mathrm{d}s_4^3)^2 + (\mathrm{d}s_5^3)^2 \neq 0, \\ (\mathrm{d}s_1^4)^2 + (\mathrm{d}s_2^4)^2 + (\mathrm{d}s_3^4)^2 + (\mathrm{d}s_5^4)^2 \neq 0, \end{cases}$$

grupul omogen de olonomie al spaţiului A_5 coincide cu (30) sau cu subgrupuri ale acestuia (23), (26), (29).

Aceste condiţii în sistemul de coordonate ales în spaţiul A_5 se scriu:

$$\Gamma_{2i}^1 = \Gamma_{3i}^1 = \Gamma_{4i}^1 = \Gamma_{2i}^5 = \Gamma_{3i}^5 = \Gamma_{4i}^5 = 0, \quad (i = 1, \ldots, 5),$$

$$\sum_{i=1}^{5} (\Gamma_{5i}^1)^2 \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{5} [(\Gamma_{3i}^2)^2 + (\Gamma_{4i}^2)^2] \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{5} (\Gamma_{1i}^5)^2 \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{5} [(\Gamma_{1i}^3)^2 + (\Gamma_{2i}^3)^2 + (\Gamma_{4i}^3)^2 + (\Gamma_{5i}^3)^2] \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{5} [(\Gamma_{1i}^4)^2 + (\Gamma_{2i}^4)^2 + (\Gamma_{3i}^4)^2 + (\Gamma_{5i}^4)^2] \neq 0.$$

Rezultate analoage se obţin dacă $(\mathrm{d}s_2^3)^2 + (\mathrm{d}s_4^3)^2 \neq 0$ sau $(\mathrm{d}s_2^4)^2 + (\mathrm{d}s_3^4)^2 \neq 0$.

Să presupunem acum că:

$$\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_4^1 = 0, \quad (\mathrm{d}s_2^5)^2 + (\mathrm{d}s_3^5)^2 + (\mathrm{d}s_4^5)^2 \neq 0,$$

atunci din (20) rezultă $\mathrm{d}s^1_5 \neq 0$, și măcar unul dintre $\mathrm{d}s^5_2$, $\mathrm{d}s^5_3$, $\mathrm{d}s^5_4$, este nenul. Deci, din ultima ecuație (21) presupunînd că $\mathrm{d}s^5_2 \neq 0$, avem :

$$
\begin{aligned}
v^2 = {} & \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 v^1}{\mathrm{d}t^2} - \left[\dfrac{\mathrm{d}\,(s^1_1 + s^5_5)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\dfrac{\mathrm{d}s^1_5}{\mathrm{d}t}\right]\dfrac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s^1_5}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s^5_2}{\mathrm{d}t}} - \\
& - \frac{\left[\dfrac{\mathrm{d}^2 s^1_1}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\mathrm{d}s^1_1}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\dfrac{\mathrm{d}s^1_5}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}s^5_5}{\mathrm{d}t}\right) + \dfrac{\mathrm{d}s^1_5}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s^5_1}{\mathrm{d}t}\right] v^1}{\dfrac{\mathrm{d}s^1_5}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s^5_2}{\mathrm{d}t}} - \\
& - \frac{\dfrac{\mathrm{d}s^1_5}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s^5_3}{\mathrm{d}t}\,v^3 + \dfrac{\mathrm{d}s^1_5}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s^5_4}{\mathrm{d}t}\,v^4}{\dfrac{\mathrm{d}s^1_5}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s^5_2}{\mathrm{d}t}}.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

În ipoteza că $\mathrm{d}s^5_2 \neq 0$ și $\mathrm{d}s^5_4 = 0$, vom înlocui expresia de mai sus a lui v^2 în prima ecuație (21) și obținem ecuația :

$$
\frac{\mathrm{d}^3 v^1}{\mathrm{d}t^3} - q_1\,\frac{\mathrm{d}^2 v^1}{\mathrm{d}t^2} - q_2\,\frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}t} - q_3\,v^1 = q_4\,v^3 + q_5\,v^4,
$$

unde am notat cu

$$
q_1 = \frac{\mathrm{d}\,(s^1_1 + s^2_2 + s^5_5)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left[\left(\frac{\mathrm{d}s^1_5}{\mathrm{d}t}\right)^2\frac{\mathrm{d}s^5_2}{\mathrm{d}t}\right] + \frac{\dfrac{\mathrm{d}s^5_3}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s^3_2}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s^5_2}{\mathrm{d}t}},
$$

$$
\begin{aligned}
q_2 = {} & \frac{\mathrm{d}^2\,(2s^1_1 + s^5_5)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\ln\frac{\mathrm{d}s^1_5}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s^1_1}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s^1_5}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s^5_5}{\mathrm{d}t}\right) + \\
& + \frac{\mathrm{d}s^1_5}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s^5_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s^3_5}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s^5_3}{\mathrm{d}t} - \left[\frac{\mathrm{d}\,(s^1_1 + s^5_5)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s^1_5}{\mathrm{d}t}\right] \times \\
& \times \left[\frac{\mathrm{d}^2 s^2_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left(\frac{\mathrm{d}s^1_5}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s^5_2}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\dfrac{\mathrm{d}s^5_3}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s^3_2}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s^5_2}{\mathrm{d}t}}\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_3 = {} & \frac{\mathrm{d}^3 s^1_1}{\mathrm{d}t^3} - \frac{\mathrm{d}^2 s^1_1}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s^1_5}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s^5_5}{\mathrm{d}t}\right) - \frac{\mathrm{d}s^1_1}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\ln\frac{\mathrm{d}s^1_5}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2 s^5_5}{\mathrm{d}t^2}\right) + \\
& + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s^1_5}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s^5_1}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}s^5_3}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s^3_1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s^1_5}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s^1_1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s^3_5}{\mathrm{d}t}\right) +
\end{aligned}
$$

$$+\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^2}{\mathrm{d}t}\right)-\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left(\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{\dfrac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}+\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{\mathrm{d}^2s_1^1}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}s_5^5}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_1^5}{\mathrm{d}t}\right],$$

$$q_4=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}-$$

$$-\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{d}\,(s_2^2-s_3^3)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left(\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{\dfrac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}\right],$$

$$q_5=\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}\right).$$

Avem de făcut mai multe presupuneri : sau $q_4 = 0$ și $q_5 = 0$ sau $q_4 \neq 0$ și $q_5 = 0$ sau $q_4 = 0$ și $q_5 \neq 0$, sau $q_4 \neq 0$ și $q_5 \neq 0$.

Dacă $q_4 = q_5 = 0$, ecuația de mai sus este omogenă și notînd cu Φ_1, Φ_2, Φ_3 trei soluții independente ale ecuației omogene :

$$\frac{\mathrm{d}^3\Phi}{\mathrm{d}t^3}-q_1\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}t^2}-q_2\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}-q_3\Phi=0$$

soluția generală va fi de forma :

$$v^1=c^1\,\Phi_1+c^2\,\Phi_2+c^3\,\Phi_3.$$

Înlocuind pe v^1 în expresia precedentă a lui v^2 obținem :

$$v^2=\frac{c^k\,\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_k}{\mathrm{d}t^2}-\left[\dfrac{\mathrm{d}\,(s_1^1+s_5^5)}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\right]c^k\,\dfrac{\mathrm{d}\Phi_k}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}-$$

$$-\frac{\left[\dfrac{\mathrm{d}^2s_1^1}{\mathrm{d}t^2}-\dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}s_5^5}{\mathrm{d}t}\right)+\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_1^5}{\mathrm{d}t}\right]c^k\,\Phi_k+\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}\,v^3}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}$$

care înlocuită împreună cu v^1 în a doua ecuație (21) conduce la :

$$\frac{\mathrm{d}v^3}{\mathrm{d}t}-\frac{\dfrac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}-\dfrac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}\,v^3=$$

$$= \frac{\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\ \frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}} \left\{ c^k \frac{\mathrm{d}^2\Phi_k}{\mathrm{d}t^2} - \left[\frac{\mathrm{d}\,(s_1^1 + s_5^5)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t} \right] c^k \frac{\mathrm{d}\Phi_k}{\mathrm{d}t} - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{\mathrm{d}^2 s_1^1}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_5^5}{\mathrm{d}t} \right) + \frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\ \frac{\mathrm{d}s_1^5}{\mathrm{d}t} \right] c^k \Phi_k \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}} \left\{ \frac{\mathrm{d}s_5^3}{\mathrm{d}t}\ c^k\ \frac{\mathrm{d}\Phi_k}{\mathrm{d}t} + \left[\frac{\mathrm{d}s_1^3}{\mathrm{d}t}\ \frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\ \frac{\mathrm{d}s_5^3}{\mathrm{d}t} \right] c^k\ \Phi_k \right\} + \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t} v^4.$$

În aceste expresii se sumează după $k = 1, 2, 3$.

Dacă $\mathrm{d}s_4^3 = 0$, atunci ecuaţia aceasta se integrează, fiind liniară în v^3, iar prin integrare se obţine :

$$v^3 = \mathrm{e}^{\int_0^t \frac{\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\ \frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\ \frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}} \mathrm{d}t} \left(c^k \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t \frac{\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\ \frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\ \frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}} \mathrm{d}t} r_k \,\mathrm{d}t + c^4 \right)$$

(unde se sumează după $k = 1, 2, 3$) iar

$$r_k = \frac{\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}} \left\{ \frac{\mathrm{d}^2\Phi_k}{\mathrm{d}t^2} - \left[\frac{\mathrm{d}\,(s_1^1 + s_5^5)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t} \right] \frac{\mathrm{d}\Phi_k}{\mathrm{d}t} - \right.$$

$$\left. - \Phi_k \left[\frac{\mathrm{d}^2 s_1^1}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_5^5}{\mathrm{d}t} \right) + \frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\ \frac{\mathrm{d}s_1^5}{\mathrm{d}t} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}} \left[\frac{\mathrm{d}s_5^3}{\mathrm{d}t}\ \frac{\mathrm{d}\Phi_k}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\mathrm{d}s_1^3}{\mathrm{d}t}\ \frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\ \frac{\mathrm{d}s_5^3}{\mathrm{d}t} \right) \Phi_k \right] \quad (k = 1, 2, 3)$$

şi deci înlocuind pe v^3 astfel obţinut în expresia lui v^2, obţinem

$$v^2 = c^k s_k - c^4 \frac{\frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}} \cdot \mathrm{e}^{\int_0^t \frac{\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}} \mathrm{d}t}. \quad \text{(sumare după } k = 1, 2, 3)$$

unde am notat

$$s_k = \frac{\frac{\mathrm{d}^2\Phi_k}{\mathrm{d}t^2} - \left[\frac{\mathrm{d}\,(s_1^1+s_5^5)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\right]\frac{\mathrm{d}\Phi_k}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^2}{\mathrm{d}t}} -$$

$$- \frac{\left[\frac{\mathrm{d}^2 s_1^1}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_5^5}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_1^5}{\mathrm{d}t}\right]\Phi_k}{\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}} -$$

$$- \frac{\frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}\, \mathrm{e}^{\int_0^t \frac{\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}\mathrm{d}t} \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t \frac{\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}\mathrm{d}t}\, r_k\,\mathrm{d}t.$$

Pentru a obţine v^4, înlocuim valorile lui v^1, v^2, v^3 în a treia ecuaţie (21) pe care o integrăm. Avem:

$$\frac{\mathrm{d}v^4}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\,v^4 = c^k\, l_k \text{ (sumare după k = 1, 2, 3)},$$

unde

$$l_k = \frac{\frac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}}\,\frac{\mathrm{d}\Phi_k}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}}\left(\frac{\mathrm{d}s_1^4}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}\right)\Phi_k + \frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}\,s_k +$$

$$+ \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{e}^{\int_0^t \frac{\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}\mathrm{d}t} \left(\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t \frac{\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}\mathrm{d}t}\, r_k\,\mathrm{d}t\right) +$$

$$+ c^4\,\mathrm{e}^{\int_0^t \frac{\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}} \left(\frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$v^4 = \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}\left[c^k\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4} l_k\,\mathrm{d}t + c^4\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t \frac{\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}\mathrm{d}t}\,\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}\right) + c^5\right], \qquad \text{(sumare } k = 1, 2, 3)$$

iar

$$v^5 = c^k \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_k}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\Phi_k}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}} \quad \text{(sumare după } k = 1, 2, 3\text{)}.$$

Pentru a face o simplificare a coeficienţilor ce intervin în special în expresia lui v^2, vom face în spaţiul A_5 o transformare T, nedegenerată a vectorilor v^1, v^2, v^3, v^4, v^5, în u^1, u^2, u^3, u^4, u^5 matricea transformării fiind nedegenerată :

$$(T)\left\{\begin{aligned} u^1 &= v^1 \\ u^2 &= v^2 + \frac{\dfrac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}} v^3 \quad \text{matricea fiind} \\ u^3 &= v^5 \\ u^4 &= v^3 \\ u^5 &= v^4 \end{aligned}\right. \quad \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}s_2^5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\| .$$

În acest fel grupul de olonomie omogen al spaţiului A_5 este :

$$(32) \quad \left\{\begin{aligned} u'^1 &= \alpha_1 u^1 + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3, \\ u'^2 &= \beta_1 u^1 + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3, \\ u'^3 &= \gamma_1 u^1 + \gamma_2 u^2 + \gamma_3 u^3, \\ u'^4 &= \delta_4\delta_1 u^1 + \delta_4\delta_2 u^2 + \delta_4\delta_3 u^3 + \delta_4 u^4, \\ u'^5 &= \varepsilon_5\varepsilon_1 u^1 + \varepsilon_5\varepsilon_2 u^2 + \varepsilon_5\varepsilon_3 u^3 + \varepsilon_5\varepsilon_4 u^4 + \varepsilon_5 u^5, \end{aligned}\right.$$

unde s-a notat cu $\alpha_k = \Phi_k$,

$$\beta_k = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_k}{\mathrm{d}t^2} - \left[\dfrac{\mathrm{d}\,(s_1^1 + s_5^5)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\right]\dfrac{\mathrm{d}\Phi_k}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}} - \frac{\left[\dfrac{\mathrm{d}^2 s_1^1}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}s_5^5}{\mathrm{d}t}\right) + \dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_1^5}{\mathrm{d}t}\right]\Phi_k}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}$$

$$\gamma_k = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_k}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\Phi_k}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}}, \quad \delta_k = \mathrm{e}^{\displaystyle\int_C \frac{\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}\mathrm{d}t} \int_C \mathrm{e}^{\displaystyle\int_0^t \frac{\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}\mathrm{d}t} ,$$

$$\delta_4 = e^{\int_C \frac{\frac{ds_3^3}{dt}\frac{ds_2^5}{dt} - \frac{ds_2^3}{dt}\frac{ds_3^5}{dt}}{\frac{ds_2^5}{dt}} dt}, \quad \varepsilon_k = \int_C e^{-\int_0^t dt_4^4} l_k\, dt, \qquad (k = 1, 2, 3)$$

$$\varepsilon_4 = \int_C e^{\int_0^t \frac{\frac{ds_3^3}{dt}\frac{ds_2^5}{dt} - \frac{ds_2^3}{dt}\frac{ds_3^5}{dt} - \frac{ds_2^5}{dt}\frac{ds_4^4}{dt}}{\frac{ds_2^5}{dt}} dt} \left(\frac{ds_3^4}{dt} - \frac{ds_2^4}{dt}\frac{ds_3^5}{dt}\right) dt$$

$$\varepsilon_5 = e^{\int_C ds_4^4},$$

unde $P\,(t)$ parcurge o curbă închisă oarecare C.

De asemenea pentru funcțiile Φ_1, Φ_2, Φ_3 sînt satisfăcute condițiile :

$$\Phi_1(0) = 1,\ \Phi_2(0) = \Phi_3(0) = 0,\ \left(\frac{d\Phi_1}{dt}\right)_0 = \left(\frac{ds_1^1}{dt}\right)_0,\ \left(\frac{d\Phi_2}{dt}\right)_0 = 0,\ \left(\frac{d\Phi_3}{dt}\right)_0 = \left(\frac{ds_5^1}{dt}\right)_0,$$

$$\left(\frac{d^2\Phi_1}{dt^2}\right)_0 = \left(\frac{d^2 s_1^1}{dt^2}\right)_0 + \left(\frac{ds_1^1}{dt}\right)_0^2 + \left(\frac{ds_5^1}{dt}\right)_0 \left(\frac{ds_1^5}{dt}\right)_0,$$

$$\left(\frac{d^2\Phi_2}{dt^2}\right)_0 = \left(\frac{ds_5^1}{dt}\right)_0 \left(\frac{ds_2^5}{dt}\right)_0,\quad \left(\frac{d^2\Phi_3}{dt^2}\right)_0 = \left[\frac{d\,(s_1^1 + s_5^5)}{dt} + \frac{d}{dt} \ln \frac{ds_5^1}{dt}\right]_0 \left(\frac{ds_5^1}{dt}\right)_0.$$

Deci dacă $ds_2^1 = ds_3^1 = ds_4^1 = ds_4^3 = ds_4^5 = 0$ iar $ds_5^1 \neq 0$, $ds_2^5 \neq 0$, $(ds_1^2)^2 + (ds_3^2)^2 + (ds_4^2)^2 + (ds_5^2)^2 \neq 0$, $(ds_1^3)^2 + (ds_2^3)^2 + (ds_5^3)^2 \neq 0$, $(ds_1^4)^2 + (ds_2^4)^2 + (ds_3^4)^2 + (ds_5^4)^2 \neq 0$, $q_4 = q_5 = 0$, atunci grupul de olonomie omogen al spațiului A_5 este (32). Dacă însă $q_4 \neq 0$, $q_5 = 0$ simultan, atunci scoțînd valoarea lui v^3 :

$$v^3 = \frac{\frac{d^3 v^1}{dt^3} - q_1 \frac{d^2\, dv^1}{dt^2} - q_2 \frac{dv^1}{dt} - q_3 v^1}{q_4}$$

și înlocuind în (31) obținem

$$v^2 = -\frac{\frac{ds_3^5}{dt}}{q_4 \frac{ds_2^5}{dt}} \frac{d^3 v^1}{dt^3} + \frac{q_1 \frac{ds_5^1}{dt}\frac{ds_3^5}{dt} + q_4}{q_4 \frac{ds_5^1}{dt}\frac{ds_2^5}{dt}} \frac{d^2 v^1}{dt^2} +$$

$$+ \frac{q_2 \frac{ds_5^1}{dt}\frac{ds_3^5}{dt} - q_4 \frac{d}{dt}\left(s_1^1 + s_5^5 + \ln \frac{ds_5^1}{dt}\right)}{q_4 \frac{ds_5^1}{dt}\frac{ds_2^5}{dt}} \frac{dv^1}{dt} +$$

$$+\frac{q_3\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}-q_4\left[\frac{\mathrm{d}^2s_1^1}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(s_5^5+\ln\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_1^5}{\mathrm{d}t}\right]}{q_4\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}v^1.$$

Înlocuind acum v^2, v^3 obținuți în a doua ecuație (21) și ținînd cont că $\mathrm{d}s_4^3=0$, avem :

$$\frac{\mathrm{d}^4v^1}{\mathrm{d}t^4}-r_1\frac{\mathrm{d}^3v^1}{\mathrm{d}t^3}-r_2\frac{\mathrm{d}^2v^1}{\mathrm{d}t^2}-r_3\frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}t}-r_4v^1=0,$$

unde

$$r_1=q_1+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln q_4-\frac{\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}},\ r_2=\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}-\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln q_4+\right.$$

$$\left.+\frac{q_1\left(\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}\right)}{\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}+\frac{q_4\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}\right],$$

$$r_3=\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}-q_2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln q_4+\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}-\frac{\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}\right)-\frac{q_4\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(s_1^1+s_5^5+\ln\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\right)}{\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}$$

$$r_4=\frac{\mathrm{d}q_3}{\mathrm{d}t}-q_3\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln q_4+\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}-\frac{\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}\right)+$$

$$+q_4\left[\frac{\frac{\mathrm{d}s_5^3}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}s_1^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_5^3}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2s_1^1}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(s_5^5+\ln\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_1^5}{\mathrm{d}t}\right)}{\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}\right].$$

Notînd cu Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 patru soluţii independente ale ecuaţiei omogene :

$$\frac{d^4\Phi}{dt^4} - r_1 \frac{d^3\Phi}{dt^3} - r_2 \frac{d^2\Phi}{dt^2} - r_3 \frac{d\Phi}{dt} - r_4 \Phi = 0,$$

atunci soluţia generală are forma :

$$v^1 = c^1 \Phi_1 + c^2 \Phi_2 + c^3 \Phi_3 + c^4 \Phi_4 .$$

Înlocuind pe v^1 în expresia lui v^3 şi v^2, obţinem :

$$v^3 = \frac{c^k \left[\frac{d^3\Phi_k}{dt^3} - q_1 \frac{d^2\Phi_k}{dt^2} - q_2 \frac{d\Phi_k}{dt} - q_3 \Phi_k\right]}{q_4} \quad (\text{sumare } k = 1, 2, 3, 4),$$

$$v^2 = \frac{c^k \frac{d^2\Phi_k}{dt^2} - \left[\frac{d(s_1^1 + s_5^5)}{dt} + \frac{d}{dt} \ln \frac{ds_5^1}{dt}\right] c^k \cdot \frac{d\Phi_k}{dt} -}{\frac{ds_5^1}{dt} \frac{ds_2^5}{dt}}$$

$$\frac{-\left[\frac{d^2 s_1^1}{dt^2} - \frac{ds_1^1}{dt} \left(\frac{d}{dt} \ln \frac{ds_5^1}{dt} + \frac{ds_5^5}{dt}\right) + \frac{ds_5^1}{dt} \frac{ds_1^5}{dt}\right] c^k \Phi_k}{\frac{ds_5^1}{dt} \frac{ds_2^5}{dt}} -$$

$$- \frac{\frac{ds_3^5}{dt}}{\frac{ds_2^5}{dt}} \frac{c^k \left[\frac{d^3\Phi_k}{dt^3} - q_1 \frac{d^2\Phi_k}{dt^2} - q_2 \frac{d\Phi_k}{dt} - q_3 \Phi_k\right]}{q_4}, \quad (\text{sumare } k = 1, 2, 3, 4).$$

Pentru a obţine pe v^4, se înlocuiesc v^1, v^2, v^3 în ecuaţia a treia (21) şi integrăm ecuaţia liniară. Obţinem :

$$\frac{dv^4}{dt} - \frac{ds_4^4}{ds} v^4 = \frac{ds_5^4}{dt} \frac{c^k}{\frac{ds_5^1}{dt}} \frac{d\Phi_k}{dt} + \frac{\frac{ds_1^4}{dt} \frac{ds_5^1}{dt} - \frac{ds_1^1}{dt} \frac{ds_5^4}{dt}}{\frac{ds_5^1}{dt}} c^k \Phi_k +$$

$$+ \frac{ds_2^4}{dt} c^k \beta_k + \frac{ds_3^4}{dt} c^k \gamma_k$$

$$v^4 = e^{\int_0^t ds_4^4} \left[c^k \int_0^t e^{-\int_0^t ds_4^4} \left(\frac{\frac{ds_5^4}{dt}}{\frac{ds_5^1}{dt}} \frac{d\Phi_k}{dt} + \frac{\frac{ds_1^4}{dt} \frac{ds_5^1}{dt} - \frac{ds_1^1}{dt} \frac{ds_5^4}{dt}}{\frac{ds_5^1}{dt}} \Phi_k + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{ds_2^4}{dt} \beta_k + \frac{ds_3^4}{dt} \gamma_k \right) dt + c^5 \right], \quad (\text{sumare } k = 1, 2, 3, 4)$$

unde am notat

$$\alpha_k = \Phi_k, \quad \gamma_k = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^3\Phi_k}{\mathrm{d}t^3} - q_1 \dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_k}{\mathrm{d}t^2} - q_2 \dfrac{\mathrm{d}\Phi_k}{\mathrm{d}t} - q_3 \Phi_k}{q_4},$$

$$\beta_k = -\frac{\dfrac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}} \frac{\mathrm{d}^3\Phi_k}{\mathrm{d}t^3} + \left(\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t} \dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}} + \frac{q_1}{q_4} \frac{\dfrac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}} \right) \frac{\mathrm{d}^2\Phi_k}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{q_2}{q_4} \frac{\dfrac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\dfrac{\mathrm{d}(s_1^1 + s_5^5)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t} \dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}} \right) \frac{\mathrm{d}\Phi_k}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{q_3}{q_4} \frac{\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 s_1^1}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}s_5^5}{\mathrm{d}t} \right) + \dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t} \dfrac{\mathrm{d}s_1^5}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t} \dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}} \right) \Phi_k,$$

$$\varepsilon_k = \int_C \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4} \left(\frac{\dfrac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}} \frac{\mathrm{d}\Phi_k}{\mathrm{d}t} + \frac{\dfrac{\mathrm{d}s_1^4}{\mathrm{d}t} \dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} \dfrac{\mathrm{d}s_5^4}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}} \Phi_k + \right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t} \beta_k + \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t} \gamma_k \right) \mathrm{d}t, \quad \varepsilon_5 = \mathrm{e}^{\int_C \mathrm{d}s_4^4}, \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

$$\delta_k = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_k}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} \Phi_k}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}}.$$

Presupunem că funcţiile Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 satisfac condiţiile

$$\Phi_1(0) = 1, \ \Phi_2(0) = \Phi_3(0) = \Phi_4(0) = 0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)_0, \ \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}\right)_0 = 0, \ \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t}\right)_0 = 0, \ \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_4}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\right)_0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^3\Phi_1}{\mathrm{d}t^3}\right)_0 = (q_1)_0 \left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_1}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 + (q_2)_0 \left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)_0 + (q_3)_0, \ \left(\frac{\mathrm{d}^3\Phi_2}{\mathrm{d}t^3}\right)_0 =$$

$$= (q_1)_0\left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_2}{\mathrm{d}t^2}\right)_0, \quad \left(\frac{\mathrm{d}^3\Phi_3}{\mathrm{d}t^3}\right)_0 = (q_1)_0\left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_3}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 + (q_4)_0$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^3\Phi_4}{\mathrm{d}t^3}\right)_0 = (q_1)_0\left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_4}{\mathrm{d}t^2}\right)_0, \quad -\left(\frac{\dfrac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}\right)_0\left(\frac{\mathrm{d}^3\Phi_1}{\mathrm{d}t^3}\right)_0 + \left(\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\;\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}\right)_0 +$$

$$+\left(\frac{q_1}{q_4}\right)_0\left(\frac{\dfrac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}\right)_0\left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_1}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 + \left(\frac{q_2}{q_4}\;\frac{\dfrac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}} - \frac{\dfrac{\mathrm{d}(s_1^1+s_5^5)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\;\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}\right)_0\left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)_0 +$$

$$+\left(\frac{q_3}{q_4}\;\frac{\dfrac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}} - \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2s_1^1}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}s_5^5}{\mathrm{d}t}\right) + \dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\;\dfrac{\mathrm{d}s_1^5}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\;\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}\right)_0 = 0,$$

$$-\left(\frac{\dfrac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}\right)_0\left(\frac{\mathrm{d}^3\Phi_2}{\mathrm{d}t^3}\right)_0 + \left(\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\;\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}} + \frac{q_1}{q_4}\;\frac{\dfrac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}\right)_0\left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_2}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = 1,$$

$$-\left(\frac{\dfrac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}\right)_0\left(\frac{\mathrm{d}^3\Phi_j}{\mathrm{d}t^3}\right)_0 + \left(\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}s_5^1}{\mathrm{d}t}\;\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}} + \frac{q_1}{q_4}\;\frac{\dfrac{\mathrm{d}s_3^5}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^5}{\mathrm{d}t}}\right)_0\left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_j}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = 0 \quad (j = 3,\ 4).$$

În aceste condiții grupul de olonomie omogen al spațiului A_5 este :

$$(33)\qquad \begin{cases} u'^1 = \alpha_1 u^1 + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4, \\ u'^2 = \beta_1 u^1 + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4, \\ u'^3 = \gamma_1 u^1 + \gamma_2 u^2 + \gamma_3 u^3 + \gamma_4 u^4, \\ u'^4 = \delta_1 u^1 + \delta_2 u^2 + \delta_3 u^3 + \delta_4 u^4, \\ u'^5 = \varepsilon_5\varepsilon_1 u^1 + \varepsilon_5\varepsilon_2 u^2 + \varepsilon_5\varepsilon_3 u^3 + \varepsilon_5\varepsilon_4 u^4 + \varepsilon_5 u^5 \end{cases}$$

În prealabil obținem $v^1 = c^k\alpha_k$, $v^2 = c^k\beta_k$, $v^3 = c^k\gamma_k$, $v^4 = c^k\varepsilon_k + c^5\varepsilon_5$, $v^5 = c^k\delta_k$ (sumare după $k = 1, 2, 3, 4$). Făcînd transformarea nedegenerată care duce vectorii $(v^1, v^2, v^3, v^4, v^5)$ în vectorii $(u^1, u^2, u^3, u^4, u^5)$ și anume : $u^1 = v^1$, $u^2 = v^2$, $u^3 = v^3$, $u^4 = v^5$, $u^5 = v^4$ obținem tocmai grupul (33) care are drept varietăți invariante :

$$u^1 = u^2 = u^3 = u^4 = 0.$$

Deci dacă

$$\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_4^1 = \mathrm{d}s_4^3 = \mathrm{d}s_4^5 = 0$$

iar

$$\mathrm{d}s_5^1 \neq 0,\ \mathrm{d}s_2^5 \neq 0,\ (\mathrm{d}s_1^2)^2 + (\mathrm{d}s_3^2)^2 + (\mathrm{d}s_4^2)^2 + (\mathrm{d}s_5^2)^2 \neq 0,\ (\mathrm{d}s_1^3)^2 + (\mathrm{d}s_2^3)^2 + \\ + (\mathrm{d}s_5^3)^2 \neq 0,\ (\mathrm{d}s_1^4)^2 + (\mathrm{d}s_2^4)^2 + (\mathrm{d}s_3^4)^2 + (\mathrm{d}s_5^4)^2 \neq 0,\ q_4 \neq 0,\ q_5 = 0,$$

grupul omogen de olonomie al spaţiului A_5 este (33) sau un subgrup al acestuia.

Ne rămîn de studiat în continuare cazurile $q_4 = 0$, $q_5 \neq 0$ sau $q_4 \neq 0$, $q_5 \neq 0$.

În cazul $q_5 \neq 0$, $q_4 = 0$ vom proceda astfel :

Valoarea lui

$$(33') \qquad v^4 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^3 v^1}{\mathrm{d}t^3} - q_1 \dfrac{\mathrm{d}^2 v^1}{\mathrm{d}t^2} - q_2 \dfrac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}t} - q_3 \cdot v^1}{q_5}$$

se va înlocui împreună cu valoarea lui v^2 dat de (31) în a treia ecuaţie (21). Se va obţine o ecuaţie diferenţială de ordin patru de forma :

$$\frac{\mathrm{d}^4 v^1}{\mathrm{d}t^4} - r_1 \frac{\mathrm{d}^3 v^1}{\mathrm{d}t^3} - r_2 \frac{\mathrm{d}^2 v^1}{\mathrm{d}t^2} - r_3 \frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}t} - r_4 v^1 = r_5 v^3.$$

Aici se pot întîmpla două cazuri : $r_5 = 0$ sau $r_5 \neq 0$. În primul caz $r_5 = 0$ ecuaţia de mai sus are soluţia generală de forma $v^1 = c^k \Phi_k (k = 1, \ldots, 4)$, unde Φ_k reprezintă soluţiile independente în număr de patru ale ecuaţiei

$$\frac{\mathrm{d}^4 \Phi}{\mathrm{d}t^4} - r_1 \frac{\mathrm{d}^3 \Phi}{\mathrm{d}t^3} - r_2 \frac{\mathrm{d}^2 \Phi}{\mathrm{d}t^2} - r_3 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} - r_4 \Phi = 0.$$

Înlocuind expresia lui v^1 în aceea care-l dă pe v^4, obţinem

$$v^4 = \frac{c_k \left[\dfrac{\mathrm{d}^3 \Phi_k}{\mathrm{d}t^3} - q_1 \dfrac{\mathrm{d}^2 \Phi_k}{\mathrm{d}t^2} - q_2 \dfrac{\mathrm{d}\Phi_k}{\mathrm{d}t} - q_3 \Phi_k \right]}{q_5}$$

deci în altă notare :

$$v^4 = c^k \delta_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Înlocuind expresiile lui $v^1 = c^k \Phi_k$, $v^4 = c^k \delta_k$, v^2 din ecuaţia (31), în a doua ecuaţie (21), obţinem o ecuaţie liniară de ordinul întîi în v^3 pe care o integrăm găsind astfel v^3 de forma : $v^3 = c^i \varepsilon_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$. În sfîrşit, înlocuim în (31) expresiile lui v^1 şi v^3, ţinînd cont că $\mathrm{d}s_4^5 = 0$, la fel şi în expresia lui v^5 din prima ecuaţie (2′), obţinem :

$$v^2 = c^i \beta_i \ (i = 1, \ldots, 5) \text{ iar } v^5 = c^k \gamma_k \ (k = 1, \ldots, 4).$$

Făcînd în spațiul A_5 o transformare care duce vectorii $(v^1, v^2, v^3, v^4, v^5)$ în $(u^1, u^2, u^3, u^4, u^5)$ de tipul $u^1 = v^1$, $u^2 = v^2$, $u^3 = v^5$, $u^4 = v^4$, $u^5 = v^3$, putem scrie că grupul de olonomie este următorul

$$(34)\qquad \begin{cases} u'^1 = \alpha_k u^k & \\ u'^2 = \beta_k u^k & (k = 1, \dots, 4) \\ u'^3 = \gamma_k u^k & \\ u'^4 = \delta_k u^k & \\ u'^5 = \varepsilon_i u^i & (i = 1, \dots, 5). \end{cases}$$

Dacă $r_5 \neq 0$, atunci scoatem

$$v^3 = \frac{\dfrac{d^4v^1}{dt^4} - r_1\dfrac{d^3v^1}{dt^3} - r_2\dfrac{d^2v^1}{dt^2} - r_3\dfrac{dv^1}{dt} - r_4 v^1}{r_5}$$

și o înlocuim împreună cu expresiile lui v^2 și v^4 din (31), (33′) în a doua ecuație (21).

Se obține o ecuație omogenă de ordinul cinci de forma :

$$\frac{d^5v^1}{dt^5} - l_1\frac{d^4v^1}{dt^4} - l_2\frac{d^3v^1}{dt^3} - l_3\frac{d^2v^1}{dt^2} - l_4\frac{dv^1}{dt} - l_5 v^1 = 0.$$

Notînd cu $\Phi_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ cinci soluții liniar independente ale ecuației :

$$\frac{d^5\Phi}{dt^5} - l_1\frac{d^4\Phi}{dt^4} - l_2\frac{d^3\Phi}{dt^3} - l_3\frac{d^2\Phi}{dt^2} - l_4\frac{d\Phi}{dt} - l_5\Phi = 0,$$

soluția generală va fi de forma $v^1 = c^i\Phi_i$ $(i = 1, \dots, 5)$.

Rezultă imediat că $v^3 = c^i\gamma_i$, $v^4 = c^i\delta_i$, $v^5 = c^i\varepsilon_i$, $v^2 = c^i\beta_i$

Așadar în acest caz grupul omogen de olonomie al spațiului A_5 este de forma :

$$(35)\qquad \begin{cases} v'^1 = \alpha_i v^i & \\ v'^2 = \beta_i v^i & \\ v'^3 = \gamma_i v^i & (i = 1, 2, 3, 4, 5) \\ v'^4 = \delta_i v^i & \\ v'^5 = \varepsilon_i v^i. & \end{cases}$$

În altă notație, (35) devine (35′), $v'^i = a^i_j \cdot v^j$ $(i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$

În cazul ultim $q_4 \neq 0$, $q_5 \neq 0$, se obține un grup de tip (35) sau un subgrup al acestuia.

Deci dacă $ds^1_2 = ds^1_3 = ds^1_4 = 0$, $ds^5_2 \neq 0$, $ds^5_4 = 0$, $(ds^5_2)^2 + (ds^5_3)^2 \neq 0$, și $(ds^2_1)^2 + (ds^2_3)^2 + (ds^2_4)^2 + (ds^2_5)^2 \neq 0$, $(ds^3_1)^2 + (ds^3_2)^2 + (ds^3_4)^2 + (ds^3_5)^2 \neq 0$, $(ds^4_1)^2 + (ds^4_2)^2 + (ds^4_3)^2 + (ds^4_5)^2 \neq 0$, grupul omogen de olonomie al spațiului A_5 este sau (35′) sau (34) sau (33) sau (32) sau subgrupuri ale acestora după cum q_4, q_5 sînt nule sau verifică relația : $(q_4)^2 + (q_5)^2 \neq 0$.

Analog se procedează pentru cazurile $(\mathrm{d}s_3^5)^2 + (\mathrm{d}s_4^5)^2 \neq 0$ sau $(\mathrm{d}s_2^5)^2 + (\mathrm{d}s_4^5)^2 = 0$.

Rezultate analoge se obțin dacă oricare trei din formele $\mathrm{d}s_2^1$, $\mathrm{d}s_3^1$, $\mathrm{d}s_4^1$, $\mathrm{d}s_5^1$ sau $\mathrm{d}s_1^2$, $\mathrm{d}s_3^2$, $\mathrm{d}s_4^2$, $\mathrm{d}s_5^2$ sau $\mathrm{d}s_1^3$ $\mathrm{d}s_2^3$, $\mathrm{d}s_4^3$ $\mathrm{d}s_5^3$ sau $\mathrm{d}s_1^4$, $\mathrm{d}s_2^4$, $\mathrm{d}s_3^4$, $\mathrm{d}s_5^4$ sau $\mathrm{d}s_1^5$, $\mathrm{d}s_2^5$, $\mathrm{d}s_3^5$, $\mathrm{d}s_4^5$ sînt nule.

Dacă oricare patru din ele sînt nule, se obține (14) sau subgrupuri de tip (9), (10), (12), (14), (18). Dacă toate formele $\mathrm{d}s_l^k$ $(k \neq l = 1, 2, 3, 4, 5)$, sînt diferite de zero, se obțin grupuri de tip (35).

Primită la redacție la 1 noiembrie 1967

Institutul Politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București, Strada Polizu nr. 1

GROUPES D'HOLONOMIE DES ESPACES EN CONNEXION AFFINE AVEC 5 DIMENSIONS

RÉSUMÉ

Dans l'ouvrage sont déterminés les groupes d'holonomie homogène des espaces en connexion affine A_5.

Soit A_n — un espace à connexion affine rapporté au système de congruences :

$$\mathrm{d}s^a = \lambda_i^a \,\mathrm{d}x^i. \tag{1}$$

En notant avec γ_{bc}^a les composantes de la connexion affine de A_n en rapport avec le système de congruences (λ) — les composantes de la connexion infinitésimale sont données alors par la relation :

$$\mathrm{d}s_b^a = \gamma_{bc}^a \,\mathrm{d}s^c. \tag{2}$$

Les équations de transport parallèle d'un vecteur V^i de A_n sont :

$$\frac{\mathrm{d}v^a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s_b^a}{\mathrm{d}t} v^b, \text{ où } v^a = \lambda_i^a V^i \tag{3}$$

sont les composantes du vecteur face ou le système de congruences (λ).

En y intégrant le système (2) nous obtenons le groupe d'holonomie homogène de l'espace A_n.

Nous considérons $n = 5$, en déterminant concrètement les groupes d'holonomies homogènes de l'espace A_5.

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Vrănceanu, *Lecții de geometrie diferențială*. vol. III, București, 1964.
2. M. Stoka, *Grupurile de olonomie ale spațiilor A_3*. St. cerc. mat. **18** (1966).
3. M. Stoka, *Grupurile de olonomie ale spațiilor A_4*. St. cerc. mat. **19** (1967).

ASUPRA BAZELOR p-APROPIATE DE O BAZĂ ORTONORMALĂ ÎN SPAȚII HILBERT

DE

NICOLAE I. TIȚĂ
(Brașov)

În spaţiul Hilbert H se consideră bazele biortogonale $\{\psi_j\}$ şi $\{\chi_j\}$
Ţinînd cont de [1] şi [4] se arată că dacă $\{\psi_j\}$ este p-apropiată de o bază ortonormală, atunci şi $\{\chi_j\}$ este p-apropiată de o bază ortonormală ($p \geqslant 2$) şi $\{\chi_j\}$ este p-bază pentru $p < 2$.
Dacă $\sum \|\psi_j - g_j\|^p < \infty$ şi $\{\psi_j\}$ este o bază echivalentă cu o bază ortonormală, iar $\{g_j\}$ este ω-liniar independent, atunci $\{g_j\}$ este echivalentă cu o bază ortonormală.

1. Se consideră spaţiul Hilbert separabil H şi algebra $\mathcal{K}(H)$ a operatorilor liniari şi mărginiţi ($A : H \to H$). În această algebră considerăm idealul $\mathfrak{S}_\infty$ (operatorii complet continui) şi $\mathfrak{S}_p$ (idealul operatorilor de clasă p)1).

Fie $\{\varphi_j\}$ şi $\{\psi_j\}$ două şiruri de elemente din H. Vom spune că sînt p-apropiate dacă $\sum\limits_1^\infty \|\varphi_j - \psi_j\|^p < \infty$.

În cazul în care $\{\psi_j\}$ este o bază ortonormală a lui H, atunci orice bază $\{\psi_j\}$ care verifică relaţia de mai sus se numeşte bază p-apropiată de ortonormală. În cazul $p = 2$ se obţin bazele pătratic apropiate (baze Bari în terminologia lui Krein [2]).

Fie $A \in \mathcal{K}(H)$ un operator inversabil; atunci şirul $\{\psi_j\} = \{A\varphi_j\}$ ($\{\varphi_j\}$ bază ortonormală) este o bază, denumită bază echivalentă cu ortonormala (baza Riesz în terminologia lui Bari).

În lucrarea [1] se extind unele rezultate de la bazele Bari pentru bazele p-apropiate de ortonormală.

---

1) $A \in \mathfrak{S}_p$ dacă $\sum\limits_j s_j^p(A) < \infty$, unde $s_j(A) = \lambda_j (AA^*)^{\frac{1}{2}}$, $(0 < p < \infty)$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 2, P. 357—360, BUCUREȘTI, 1969

În lucrarea de față se vor face alte extensiuni de la $p = 2$ pentru p oarecare.

În considerațiile ce le vom face vom folosi următoarele rezultate remarcabile din lucrarea [3]:

Fie $A \in \mathfrak{S}_\infty$ şi $\{\varphi_j\}$ o bază ortonormală a lui H. Există următoarele relații:

$$\sum_j |A\varphi_j|^p \leqslant \sum_j s_j^p(A)\ (p \geqslant 2) \text{ şi } \sum |A\varphi_j|^p \geqslant \sum s_j^p(A) \quad (0 < p \leqslant 2)$$

Dacă $A \in \sigma_p$ şi $\{\psi_j\}$ este un şir ω-liniar independent[2] astfel ca $\psi_j = (I + A)\varphi_j$ ($\{\varphi_j\}$ bază ortonormală), atunci $\{\psi_j\}$ este o bază Riesz, care este denumită în [1] p-bază.

Între p-bază şi bazele p-apropiate de ortonormală se poate stabili o legătură interesantă ca o extensiune a unei teoreme referitoare la bazele Bari [1].

2. Vom spune că şirurile $\{\varphi_j\}$ şi $\{\chi_j\}$ din H sînt biortogonale dacă $(\varphi_i, \chi_j) = \delta_{ij}$.

Se ştie că orice şir biortogonal cu o bază echivalentă cu ortonormala este o bază echivalentă cu ortonormala.

Vom stabili aici următoarea teoremă

TEOREMA 1. *Orice şir $\{g_j\}$, ω-liniar independent şi p-apropiat de şirul $\{\psi_j\}$ echivalent cu o bază ortonormală, este bază echivalentă cu ortonormala* $(0 < p \leqslant 2)$.

Demonstrație. Fie A operatorul liniar şi mărginit care transformă baza ortonormală $\{\varphi_j\}$ în $\{\psi_j\}$.

Se defineşte operatorul T astfel

$$T\Big(\sum_j C_j\varphi_j\Big) = \sum_j C_j(\psi_j - g_j), \quad \Big(\sum_g |C_j|^2 < \infty\Big).$$

Ținînd seama că:

$$\sum s_j^p(T) \leqslant \sum |T\varphi_j|^p = \sum \|\psi_j - g_j\|^p < \infty,$$

rezultă că $T \in \mathfrak{S}_p$ $(0 < p \leqslant 2)$, deci este mărginit.

Ecuația $(A - T)\varphi = 0$ admite numai soluția banală

În adevăr, dacă am avea $A\varphi = T\varphi$, din relația

$$(A - T)\varphi = \sum_j (\varphi, \varphi_j)\psi_j - \sum_j (\varphi, \varphi_j)(\psi_j - g_j) = \sum_j (\varphi, \varphi_j) g_j \text{ rezultă}$$

$$\sum_j (\varphi, \varphi_j) g_j = 0.$$

Dar $\{g_j\}$ fiind ω — liniar independent, rezultă $\varphi = 0$.

Deci $(A - T)$ este inversabil şi cum $g_j = (A - T)\varphi_j$, rezultă afirmația făcută.

Observație. Sistemul $\{A^{-1} g_j\}$ este o p-bază $(0 < p \leqslant 2)$ deoarece

$$A^{-1} g_j = (I + T_1)\varphi_j, \; T_1 = A^{-1} T \in \mathfrak{S}_p.$$

Vom arăta acuma cum proprietatea de p-apropiere de ortonormală a unei baze se transmite şi la baza biortogonală.

---

[2] Se poate vedea [2].

TEOREMA 2. *Dacă baza* $\{\psi_j\}$ *este p-apropiată de ortonormală* $(p \geqslant 2)$, *atunci și baza* $\{\chi_j\}$, *biortogonală cu ea, este p-apropiată de ortonormală și mai mult,* $\{\chi_j\}$ *și* $\{\psi_j\}$ *sînt p-apropiate.*

Demonstrație. Fie $I + T$ operator inversabil $(T \in \mathfrak{S}_p)$ astfel ca: $(I + T)\,\varphi_j = \psi_j$.

Rezultă:

$$(\varphi_k, (I + T^*)\,\chi_j) = ((I + T)\,\varphi_k, \chi_j) = (\psi_k, \chi_j) = \delta_{kj}.$$

Deci

$$\varphi_j = (I + T^*)\,\chi_j.$$

Operatorul $T_1 = (I + T^*)^{-1} - I \in \mathfrak{S}_p$ (deoarece acesta este ideal) și deci

$$\sum_j \|\chi_j - \varphi_j\|^p = \sum_j |T_1\,\varphi_j|^p \leqslant \sum_j s_j^p(T_1) < \infty.$$

Ținînd seama că:

$$\sum_j \|\chi_j - \psi_j\|^p \leqslant 2^p \left(\sum_j \|\chi_j - \varphi_j\|^p + \sum_j \|\varphi_j - \psi_j\|^p\right)$$

rezultă și partea a doua.

Observație. În enunț se consideră χ_j bază biortogonală, dar se știe [4] că orice șir biortogonal cu o bază în H este bază a lui H.

Pentru $0 < p \leqslant 2$ se obține un rezultat ceva mai slab.

TEOREMA 3. *Fie* $\{\psi_j\}$ *o bază p-apropiată de ortonormală* $(p < 2)$ *și* $\{\chi_j\}$ *biortogonal cu* $\{\psi_j\}$. *Atunci* $\{\chi_j\}$ *este o p-bază.*

Demonstrație. Fie operatorul inversabil $I + T$ astfel ca:

$\psi_j = (I + T)\,\varphi_j$, $\{\varphi_j\}$ — bază ortonormală.

Rezultă

$$\sum_j s_j^p(T) \leqslant \sum_j |T\,\varphi_j|^p = \sum_j \|\psi_j - \varphi_j\|^p < \infty.$$

Deci $T \in \mathfrak{S}_p$ și în concluzie $\{\psi_j\}$ este o p-bază.

Mai departe se consideră

$$(\psi_j, \chi_k) = ((I + T)\,\varphi_j, \chi_k) = (\varphi_j, (I + T^*)\,\chi_k) = \delta_{jk}.$$

Deci:

$\varphi_k = (I + T^*)\,\chi_k$ sau $\chi_k = (I + T_1)\,\varphi_k$ cu $T_1 = (I + T^*)^{-1} - I \in \mathfrak{S}_p$.

Se observă din cele două cazuri că dacă $\{\psi_j\}$ este p-bază, atunci și $\{\chi_j\}$ este p-bază; dar nu orice p-bază este p-apropiată de ortonormală, ci numai pentru $p \geqslant 2$.

Primită la redacție la 31 mai 1968

ON THE BASES WHICH ARE *P*-NEAR TO AN ORTHONORMAL BASE IN HILBERT SPACES

SUMMARY

In the Hilbert space H, the biorthogonal bases $\{\psi_j\}$ and $\{\chi_i\}$ are considered. Taking into accont [1] and [4] it is shown that if $\{\psi_j\}$ is p-near to an orthonormal base, then $\{\chi_i\}$ is p-near to anorthonormal base ($p \geqslant 2$) too and $\{\chi_j\}$ is p-base for $p < 2$.

If $\sum \|\psi_j - g_j\|^p < \infty$ and $\{\psi_j\}$ is a base equivalent to an orthonormal base and $\{g_j\}$ is ω-linear independent, then $\{g_j\}$ is equivalent to an orthonormal base.

BIBLIOGRAFIE

1. В. А. ПРИГОРСКИЙ, *О некоторых классах базисов Гильбертова пространства*. У М Н вып., *5* (1965).
2. М. Г. КРЕЙН, *О базисах Вари пространства Гильберта* У.М.Н. 12 вып., *3* (1957).
3. И. Т. ГОХБЕРГ и А. С. МАРКУС, *Изв. АН Молдавской ССР*, *5*, 103–108 (1962).
4. И. Т. ГОХБЕРГ и М. Г. КРЕЙН, *Введение в теорию линейных несамосопряженных*. Оп. Москва, 1965.

ASUPRA PUNCTELOR SINGULARE ALE UNEI APLICAȚII CONTINUE

DE

IONEL ȚEVY

Se situează într-un cadru mai general noţiunile de punct şi valoare singulară ale unei aplicaţii continue, aflate în [2] şi [3], şi se stabileşte o legătură între acestea şi noţiunea de slabă continuitate din [4].

În lucrările [2] şi [3], prof. S. Stoilow introduce, ca o generalizare firească a noţiunii de punct de extremum pentru funcţiile reale, noţiunile de punct şi valoare singulară ale unei aplicaţii $F : R^n \to R^m$.

În cele ce urmează încercăm să transpunem aceste noţiuni într-un cadru mai general şi să stabilim o legătură între acestea şi noţiunea de slabă continuitate din [4], prin generalizări ale unor rezultate din [5]. În încheiere vom da, în legătură cu cele anterioare, o teoremă de existenţă a funcţiilor implicite.

Fie X şi Y două spaţii Hausdorff, compacte şi cu bază numărabilă, în care punctele sînt mulţimi închise, dar nu sînt mulţimi deschise. Cu acestea vom aminti cîteva rezultate, necesare, din [4].

TEOREMA 0.1. *Fie* (K_n) *un şir de compacte din* X. *Şirul* (K_n) *este convergent către mulţimea* K, *în sensul din* [*6*], *dacă şi numai dacă* :

1° *oricare ar fi şirul* (x_n), *cu* $x_n \in K_n$, *punctele sale de acumulare se află în* K ;

2° *oricare ar fi punctul* $x_0 \in K$, *există un şir* (x_n), *cu* $x_n \in K_n$, *convergent către* x_0.

LEMA 0.1. *Condiţia 2° a teoremei anterioare este echivalentă cu* :

2'° *oricare ar fi* $x_0 \in K$ *şi oricare ar fi vecinătatea sa* U, *există un* N *astfel încît pentru orice* $n > N$, $K_n \cap U \neq \emptyset$.

LEMA 0.2. *Un punct* $x \in X$ *aparţine mulţimii* K *dacă şi numai dacă îndeplineşte condiţia 2° a teoremei precedente.*

De aici rezultă că mulţimea K este şi ea compactă.

Fie o funcţie $f : X \to \mathcal{P}(X)$.

Definiţia 0.1. Funcţia f se zice slab continuă în punctul $x_0 \in X$, dacă:

1° există o vecinătate U a lui x_0, astfel încît pentru orice $x \in U$, mulţimea $f(x)$ este compactă în Y;

2° pentru orice şir (x_n) de puncte din U, cu $x_n \to x_0$, există o mulţime rară $H \subseteq f(x_0)$ (eventual vidă), astfel încît $f(x_n) \to f(x_0) - H$, în sensul teoremei 0.1.

Definiţia 0.2. Fie G_1 şi G_2 două deschise din X, cu $G_1 \subseteq G_2$. Vom numi interval deschis în mulţimea părţilor compacte ale lui X şi vom nota $I(G_1, G_2)$, mulţimea părţilor compacte $A \subseteq X$ cu proprietatea că $G_1 \cap A \neq \emptyset$ şi $A \subset G_2$, dacă $G_1 \neq \emptyset$ şi $A \subset G_2$, dacă $G_1 = \emptyset$.

În cele ce vor urma, spaţiile topologice vor avea proprietăţile enunţate în acest paragraf.

§ 1. În [4], § 5, am introdus pe $\mathcal{P}(X)$ o topologie, bazată pe definiţia 0.2, pentru care funcţiile continue erau slab continue în sensul definiţiei 0.1 şi reciproc. Vom numi această topologie, topologia slabă pe mulţimea părţilor compacte ale lui X.

Vom introduce pe $\mathcal{P}(X)$ o topologie în care convergenţa mulţimilor compacte să fie dată de teorema 0.1.

Definiţia 1. Fie K o mulţime compactă din X. Numim vecinătatea lui K, o mulţime V de părţi compacte din X cu proprietatea că există un interval $I(G_1, G_2)$ astfel încît $K \in I(G_1, G_2) \subseteq V$.

Se verifică cu uşurinţă că definiţia de mai sus determină, într-adevăr familia vecinătăţilor mulţimii K.

Are loc

Teorema 1. *Şirul de compacte (K_n) converge către mulţimea compactă K, în sensul teoremei 0.1, dacă şi numai dacă pentru orice vecinătate V a mulţimii K există un N, astfel încît pentru orice $n > N$, $K_n \in V$.*

Demonstraţie. Fără a restrînge generalitatea, putem considera, în locul vecinătăţilor oarecare, numai intervale deschise.

Fie $I(G_1, G_2)$ o vecinătate a lui K determinată de mulţimile deschise G_1 şi G_2. Atunci există un N_1 cu proprietatea că pentru orice $n > N$, $K_n \subset G_2$, căci în caz contrar mulţimea $X - G_2$ fiind compactă, ar exista un şir (x_n), cu $x_n \in K_n$, care ar avea puncte de acumulare în $X - G_2$, deci în afara mulţimii K.

Deoarece $G_1 \cap K \neq \emptyset$, dacă $G_1 \neq \emptyset$, rezultă că G_1 este vecinătate a unui punct din K şi atunci din lema 0.1 rezultă că există un N_2 astfel încît pentru orice $n > N_2$, $K_n \cap G_1 \neq \emptyset$. Alegînd $N = \max(N_1, N_2)$, necesitatea condiţiei este demonstrată.

Reciproc, fie un şir (x_n), cu $x_n \in K_n$, şi x_0 un punct de acumulare al său. Dacă $x_0 \notin K$, există o mulţime deschisă G astfel încît $G \supset K$ şi $x_0 \notin G$. Rezultă deci că pentru un subşir (K_{n_p}), $K_{n_p} \notin I(\emptyset, G)$, ceea ce contrazice ipoteza ; deci condiţia 1° a teoremei 0.1 este îndeplinită.

Fie $x \in K$ şi G o vecinătate deschisă a sa. Din ipoteze rezultă că este îndeplinită lema 0.1 şi cu aceasta teorema este demonstrată.

Propoziţia 1. *Orice mulţime compactă K are un sistem fundamental numărabil de vecinătăţi.*

Denonstraţie. În adevăr, fie $\mathcal{B} = (B_i)_{i\in\mathcal{N}}$ baza spaţiului X; vom presupune că $\mathcal{B}$ îşi conţine toate reuniunile finite. Dacă alegem mulţimile G_1, G_2 din $\mathcal{B}$, intervalele astfel construite care conţin pe K formează sistemul de vecinătăţi căutat.

În adevăr, fie $I(G_1,\ G_2) \ni K$. Mulţimea G_1 conţine o mulţime G'_1 din $\mathcal{B}$ şi dacă $A \cap G'_1 \neq \emptyset$, atunci şi $A \cap G_1 \neq \emptyset$, dacă $G_1 \neq \emptyset$.

Fie $G_2 = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$; atunci din acoperirea $\{B_k\}$a lui K se poate extrage o acoperire finită $\{B_{kj}\}_{1\leqslant j\leqslant n}$ şi $G_2 \supseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} B_{kj}$. Rezultă, evident, că pentru orice $A \in I\left(G'_1,\ \bigcup\limits_{j=1}^{n} B_{kj}\right)$, avem şi $A \in I(G_1,\ G_2)$, ceea ce demonstrează propoziţia.

Pentru cele ce vor urma vom demonstra aici următoarea

LEMĂ *Dacă F este o mulţime închisă, atunci frontiera lui F este o mulţime rară.*

Demonstraţie. În adevăr, fie G o mulţime deschisă nevidă. Atunci cel puţin una din mulţimile deschise $G \cap \operatorname{Int} F$, $G \cap (X - F)$ este nevidă şi disjunctă de frontiera lui F, ceea ce demonstrează afirmaţia.

§ 2. Considerăm spaţiile X, Y, de mai înainte, şi o aplicaţie $f: X \rightarrow Y$. Vom generaliza definiţia 2 din [4] enunţînd

DEFINIŢIA 2. Aplicaţia f se va zice neconstantă pe deschisele din X sau, mai simplu, neconstantă, dacă pentru orice deschisă nevidă $G \subseteq X$, $\operatorname{Int} f(G) \neq \emptyset$.

O formulare echivalentă a acestei definiţii este dată de

PROPOZIŢIA 2. *Aplicaţia f este neconstantă dacă şi numai dacă pentru orice mulţime frontieră $H \subset Y$, $f^{-1}(H)$ este o mulţime frontieră în X.*

Demonstraţie. Necesitatea. Fie H o mulţime frontieră în Y şi să presupunem că $\operatorname{Int} f^{-1}(H) \neq \emptyset$. Atunci există o deschisă nevidă $G \subseteq f^{-1}(H)$ şi deci, f fiind neconstantă, $\emptyset \neq \operatorname{Int} f(G) \subseteq H$, ceea ce contrazice ipoteza că H este o mulţime frontieră.

Suficienţa. Fie o deschisă nevidă $G \subseteq X$. Dacă $\operatorname{Int} f(G) = \emptyset$, rezultă că $f(G)$ este o mulţime frontieră şi atunci $\emptyset = \operatorname{Int} f^{-1}(f(G)) \supseteq G$ şi deci obţinem contradicţia $G = \emptyset$, ceea ce termină demonstraţia propoziţiei.

Dacă aplicaţia f este şi continuă, are loc:

COROLARUL 1. *Dacă $S \subseteq Y$ este o mulţime de prima categorie, atunci $f^{-1}(S)$ este încă o mulţime de prima categorie.*

Cu acestea putem extinde teorema 5 din [4], enunţînd

TEOREMA 2. *Fie aplicaţia surjectivă $f: X \rightarrow Y$, continuă şi neconstantă. Atunci aplicaţia f^{-1}, definită pe mulţimile compacte din Y, este slab continuă* [1]).

Demonstraţie. Fie (F_n) un şir de compacte din Y, convergent, în sensul teoremei 0.1, către mulţimea compactă F_0. Vom arăta, verificînd condiţiile teoremei 0.1, respectiv lemei 0.1, că există mulţime rară $H \subset f^{-1}(F_0)$, astfel încît şirul de compacte $f^{-1}(F_n)$ converge către $f^{-1}(F_0) - H$.

---

[1]) O astfel de formulare a teoremei este permisă de propoziţia 1.

1° Fie (x_n), $x_n \in f^{-1}(F_n)$, un şir de puncte convergent către x_0. Aplicaţia f fiind continuă, şirul $f(x_n)$ converge către $f(x_0)$, însă $f(x_n) \in F_n$ şi deoarece şirul (F_n) este convergent către F_0, în baza teoremei 0.1, condiţia 1°, rezultă că $f(x_0) \in F_0$, adică $x_0 \in f^{-1}(F_0)$.

2° Presupunem, mai întîi, că $\operatorname{Int} f^{-1}(F_0) \neq \emptyset$. Fie atunci $x_0 \in \overline{\operatorname{Int} f^{-1}(F_0)}$ şi o vecinătate a sa U, pe care o vom presupune deschisă. Deoarece f este neconstantă, rezultă că $f(U)$ conţine o mulţime deschisă V, astfel încît $V \cap F_0 \neq \emptyset$. Fie un punct $y \in V \cap F_0$; atunci V este o vecinătate pentru y şi deci, în baza lemei 0.1, există un N, astfel încît pentru orice $n > N$, $F_n \cap V \neq \emptyset$, de unde rezultă imediat că pentru $n > N$, $f^{-1}(F_n) \cap U \neq \emptyset$, deci x_0 îndeplineşte condiţia din lema 0.1, iar punctele care nu îndeplinesc această condiţie formează, în baza lemei 1, o mulţime rară.

Dacă $\operatorname{Int} f^{-1}(F_0) = \emptyset$, atunci condiţia 2° este evident satisfăcută de cel puţin un punct, deoarece f este continuă şi $f^{-1}(F_0) \neq \emptyset$, teorema fiind demonstrată.

Particularizînd mulţimile F_n obţinem:

COROLARUL 2. *Dacă aplicaţia* $f : X \to Y$ *este continuă şi neconstantă, atunci aplicaţia multiformă* f^{-1} *definită pe* $F(X)$ *este slab continuă.*

§ 3. Pentru a stabili şi în cazul funcţiei $f : X \to Y$ o legătură analogă cu cea dintre continuitatea slabă şi punctele de extremum, în cazul funcţiilor reale, vom expune înprealabil, într-o formulare mai generală, cîteva rezultate din [2] şi [3].

DEFINIŢIA 3. Punctul $x \in X$ se va numi punct singular, pentru funcţia continuă $f : X \to Y$, dacă există o vecinătate a sa U, astfel încît $f(x) \in \operatorname{Fr} \overline{f(U)}$.

DEFINIŢIA 4. Punctul $y \in Y$ se va numi valoare singulară a aplicaţiei f, dacă $f^{-1}(y)$ conţine puncte singulare.

Pentru precizare vom numi cuplu singular, pentru funcţia f, perechea (x, y), unde x este punct singular şi $y = f(x)$, valoarea singulară corespunzătoare.

TEOREMA 3. *Mulţimea valorilor singulare ale aplicaţiei f este o mulţime de prima categorie.*

Demonstraţie. Să facem mai întîi observaţia că dacă U este vecinătatea unui punct singular x pentru care $y = f(x) \in \operatorname{Fr} \overline{f(U)}$ şi dacă $x \in U' \subseteq U$, atunci $y \in \operatorname{Fr} \overline{f(U')}$.

Fie $y \in Y$ o valoare singulară, x un punct singular corespunzător şi U o vecinătate a lui x pentru care $y \in \operatorname{Fr} \overline{f(U)}$. Atunci există o mulţime B_i, din baza spaţiului X, pentru care $x \in B_i \subseteq U$ şi deci $y \in \operatorname{Fr} \overline{f(B_i)}$. Dacă notăm cu S mulţimea valorilor singulare avem, deoarece X are bază numărabilă, $S \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \operatorname{Fr} \overline{f(B_i)}$ şi deci, în baza lemei 1, S este o mulţime de prima categorie.

COROLARUL 3. *Dacă aplicaţia f este şi neconstantă, atunci mulţimea punctelor singulare, pentru f, este o mulţime de prima categorie.*

În cele ce vor urma, în cadrul acestui paragraf, considerăm aplicaţia $f : X \to Y$ ca fiind continuă şi neconstantă.

Dacă notăm cu $H(y_n, y)$ mulţimea rară corespunzătoare şirului (y_n), $y_n \to y$, prin proprietatea de slabă continuitate a aplicaţiei f^{-1} are loc.

Teorema 4. *Cuplul* (x, y) *nu este singular dacă şi numai dacă pentru orice şir* (y_n), *cu* $y_n \to y$, $x \notin H(y_n, y)$.

Demonstraţie. Necesitatea. Vom arăta că punctul x îndeplineşte condiţiile lemei 0.1.

Fie un şir (y_n) convergent către y şi o vecinătate U a lui x. Deoarece cuplul (x, y) nu este singular, iar f este neconstantă, rezultă că $f(U)$ este o vecinătate a lui y. Deci există un N, astfel încît pentru orice $n > N$, $y_n \in f(U)$ adică pentru $n > N$, $f^{-1}(y_n) \cap U \neq \emptyset$.

Suficienţa. Să presupunem că (x, y) este un cuplu singular. Atunci există o vecinătate U a lui x astfel încît $y \in \mathrm{Fr}\ \overline{f(U)}$ şi deoarece f este neconstantă, rezultă că y este un punct de acumulare pentru $Y - \overline{f(U)}$; există deci un şir (y_n) convergent către y astfel încît $y_n \notin \overline{f(U)}$, adică pentru orice n, $f^{-1}(y_n) \cap U = \emptyset$, deci $x \in H(y_n, y)$ ceea ce contrazice ipoteza şi deci teorema este demonstrată.

O formulare echivalentă a acestei teoreme este, evident,

Propoziţia 3. *Cuplul* (x, y) *este singular dacă şi numai dacă există un şir* (y_n), *convergent către* y, *astfel încît* $x \in H(y_n, y)$.

Corolarul 4. *Aplicaţia multiformă* f^{-1} *este continuă în sensul din* [6] *pe complementara unei mulţimi de prima categorie.*

Considerînd , în plus, proprietăţile speciale ale topologiei obişnuite pe dreapta reală, din propoziţiile de mai sus se pot obţine unele rezultate din [5].

§4. Pentru a obţine o teoremă de existenţă a funcţiilor implicite vom da mai întîi două definiţii.

Definiţia 5. Fie E şi F două spaţii topologice şi o aplicaţie $f : E \to F$. Vom spune că f are proprietatea lui Darboux pe E, dacă pentru orice mulţime conexă $A \subseteq E$, $f(A)$ este conexă în F.

Are loc, evident,

Propoziţia 4. *Dacă* E *este conex şi* f *continuă, atunci* f *are proprietatea lui Darbaux pe* E.

Definiţia 6. Fie E un spaţiu topologic conex şi $K \subset E$ o mulţime rară. Vom spune că mulţimea K este simplă, dacă disconectează spaţiul E în două componente C_1 şi C_2, astfel încît $\mathrm{Fr}\ C_1 = \mathrm{Fr}\ C_2 = K$.

Fie X, Y, Z spaţii topologice cu proprietăţile din paragraful introductiv; în plus vom presupune că orice vecinătate a unui punct conţine o subvecinătate conexă. Fie, de asemenea, K o mulţime rară, simplă în Z. Cu acestea putem enunţa

Teorema 5. *Fie o funcţie* $F : X \times Y \to Z$[2]). *Să presupunem că:*

1° *F este continuă pe* $X \times Y$.

2° *Există un punct* (x_0, y_0), *pentru care* $F(x_0, y_0) \in K$.

3° *Există o vecinătate* U, *a lui* x_0, *şi o vecinătate deschisă şi conexă* V_0, *a lui* y_0, *astfel încît pentru orice* $x \in U$, *fixat, notînd cu* $F_x(y)$ *aplicaţia* $y \to F(x, y)$,

i) *funcţia* F_x *este neconstantă în* V_0,

ii) V_0 *nu conţine puncte singulare pentru* F_x.

---

[2]) Pe $X \times Y$ se consideră topologia produs.

În aceste condiţii, există o vecinătate U_0, *a lui* x_0, *şi o aplicaţie* $f: U_0 \to \mathcal{P}_R(V_0)$, *unde* $\mathcal{P}_R(V_0)$ *este mulţimea părţilor rare ale lui* V_0, *continuă în sensul lui Fl. Vasilescu, avînd proprietăţile*:

a) $y_0 \in f(x_0)$,

b) *pentru orice* $y \in f(x)$, $F(x, y) \in K$.

Demonstraţie. Pentru demonstrarea existenţei aplicaţiei f vom urma ideea demonstraţiei unei propoziţii din [1].

Datorită condiţiilor 2° şi 3° rezultă că există în V_0 punctele α şi β cu proprietatea că $F(x_0, \alpha) \in C_1$ şi $F(x_0, \beta) \in C_2$.

Din condiţia 1° rezultă atunci că există vecinătăţile U_1 şi U_2, ale lui x_0, astfel încît pentru orice $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ să avem respectiv $F(x_1, \alpha) \in C_1$, $F(x_2, \beta) \in C_2$. Să notăm $U_0 = U \cap U_1 \cap U_2$; U_0 va fi, de asemenea, o vecinătate a lui x_0.

Pentru orice $x \in U_0$ avem $F(x, \alpha) \in C_1$, $F(x, \beta) \in C_2$ şi deoarece pentru orice $x \in U$, F_x are proprietatea lui Darboux pe mulţimea conexă V_0, rezultă că $F(x, V_0) \cap K \neq \emptyset$, deci $F_x^{-1}(K) \neq \emptyset$ şi totodată $F_x^{-1}(K)$ este o mulţime rară în V_0. Notînd $F_x^{-1}(K)$ cu $f(x)$, obţinem aplicaţia $f: U_0 \to \mathcal{P}_R(V_0)$, avînd evident proprietăţile a) şi b).

Pentru a demonstra că f este continuă, vom urma îndeaproape demonstraţia teoremei 2.1 din [5].

Să observăm că orice punct (x, y), cu $y \in f(x)$, îndeplineşte condiţiile 1°—3° ale teoremei, iar aplicaţia pe care o determină coincide cu f în orice punct în care există amîndouă.

Deoarece, prin modul cum s-au definit, mulţimile $f(x)$ sînt compacte în topologia relativă a lui V_0, rămîne de demonstrat că este îndeplinită condiţia a doua din teorema lui Vasilescu.

Fie un şir $x_n \to x$, x_n, $x \in U_0$, şi mulţimile corespunzătoare $f(x_n)$, $f(x)$. Vom arăta că pentru orice punct $y \in f(x)$ şi pentru orice vecinătate a sa V, $V \cap f(x_n) \neq \emptyset$, pentru $n > N$.

În adevăr, pentru punctul y şi vecinătatea sa V, există o vecinătate $V' \subseteq V$ îndeplinind condiţiile teoremei. Atunci pentru orice x dintr-o vecinătate U a lui x_0 se obţine aplicaţia f_U care coincide cu f pe $U_0 \cap U$. Deoarece $x_n \to x$, există un N astfel încît pentru $n > N$, $x_n \in U_0 \cap U$ şi atunci $f(x_n) \cap V' = f_U(x_n) \cap V' \neq \emptyset$.

Din modul în care a fost construită aplicaţia f, rezultă, deoarece F este continuă, că pentru orice şir (y_n), $y_n \in f(x_n)$, punctele sale de acumulare se află în $f(x)$ şi deci $f(x_n) \to f(x)$, teorema fiind astfel demonstrată.

Primită la redacţie la 10 mai 1968

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii din Bucureşti
str. Academiei nr. 14

SUR LES POINTS SINGULIERS D'UNE APPLICATION CONTINUE

RÉSUMÉ

On construit un cadre plus général pour la notion de point singulier et pour celle de valeur singulière d'une application continue, telles qu'elles ont été données par S. Stoïlow dans [2] et [3]. On établit un rapport entre ces notions, d'une part, et la notion de continuité faible introduite par l'auteur [4] d'autre part.

BIBLIOGRAFIE

1. Acad. M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, *Manual de analiză matematică*, vol. I, Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1963.
2. S. Stoïlow, *Remarques sur quelques propriétés des transformations continues de n variables.* C.R. de l'Acad. des Sci. de Paris, **183**, 731/732 (1926).
3. S. Stoilow, *Sur les valeurs singulières des transformations continues de plusieurs variables.* Mathematica, Cluj, **2**, 94–101 (1929).
4. I. Ţevy, *O generalizare a noţiunii de continuitate în sensul lui Florin Vasilescu.* St. cerc. mat., **19**, *6*, 935–943 (1967).
5. I. Ţevy, *Teoreme de existenţă a funcţiilor implicite,* St. cerc. mat., **20**, *4*, 604–611, (1968).
6. Fl. Vasilescu, *Essai sur les fonctions multiformes de variables réelles.* (Teză), Gauthier – Villars, Paris, 1925.

1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date din text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale. Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

1969 APR 1

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, A. DELEANU, M. JURCHESCU, **Topologie, Categorii, Suprafeţe riemanniene**, 1967, 394 p., 21,50 lei.

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1967, 311 p., 15 lei.

I. COLOJOARA, **Elemente de teorie spectrală**, 1968, 311 p., 19,50 lei.

ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.

I. CUCULESCU, **Procese Markov şi funcţii excesive**, 1968, 356 p., 19 lei.

N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţi local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, **Metode matematice în hidrogazodinamica subterană**, 1966, 582 p., 31 lei.

AL. GHIKA, **Analiza funcţională**, 1967, 594 p., 31 lei.

ALEXANDRU GHIKA, **Opera matematică**, 1968, 955 p., 50 lei.

S. GUIAŞU şi R. THEODORESCU, **Teoria matematică a informaţiei**, 1966, 227 p., 8,25 lei.

SILVIU GUIAŞU, **Aplicaţii ale teoriei informaţiei. Sisteme dinamice. Sisteme cibernetice**, 1968, 350 p., 17 lei.

A. HALANAY, D. WEXLER, **Teoria calitativă a sistemelor cu impulsuri**, 1968, 313 p., 13 lei.

M. IOSIFESCU şi P. TĂUTU, **Procese stohastice şi aplicaţii în biologie şi medicină**, 1968, 345 p. 22 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, vol. II, 1966, 669 p., 38 lei.

S. STOILOV, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

IVAN SINGER, **Cea mai bună aproximare în spaţii vectoriale normate prin elemente din subspaţii vectoriale**, 1967, 386 p., 23 lei.

MARIUS I. STOKA, **Geometrie integrală**, 1967, 240 p., 9,75 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 2, P. 203 – 368, BUCUREŞTI, 1969

I. P. „Informaţia" – c. 6129

43831

Lei 20.

F 762

STUDII ȘI CERCETĀRI MATEMATICE

3

TOMUL 21

1969

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACŢIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAŞ — secretar de redacţie.

La revue „STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE", paraît 10 fois par an. Le prix d'un abonnement annuel este de $ 10 — ; £ 4.3.0 ; F.F.49. — ; D.M.40—.
Toute commande de l'étranger sera adressée à CARTIMEX, Boite postale 134—135, Roumaine, ou à ses représentants à l'étranger. En Roumanie, vous pourrez vous abonner par les bureaux de poste ou chez votre facteur.
În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondenţă, se trimit la Comitetul de redacţie al revistei pe adresa: Calea Griviţei nr. 21, Bucureşti 12.

F 762

TOM. 21, NR. 3
1969

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

SUMAR

Pag.

N. BOTH, O caracterizare sintactică a independenţei unui sistem de axiome 371

EFTIMIE I. GRECU, Cîmpuri de vectori paraleli în spaţii A_2 cu conexiune afină liniară local euclidiene 377

N. MARCOV, Teoreme de limită privind funcţiile Bessel K_0 şi K_1 405

MARGARETA MIHALYI, Despre noţiunea de proiectivitate sintactică 419

ŞTEFAN MITITELU, Determinarea cantităţii maxime de materiale care trec printr-o reţea de transport şi distribuţia ei pe arce 433

A. B. NÉMETH, Metoda iterativă de rezolvare a jocurilor normale, finite, de n persoane 439

GH. OBREJA, Asupra caracteristicii operative şi numărului mediu de probe în cazul unor teste secvenţiale 451

IULIAN POPOVICI, Proprietăţi globale ale conexiunii asociate algebrei numerelor complexe 463

ALEXANDRU GH. RADU, Morfisme acoperitoare şi biacoperitoare în topologia aditivă (V) 471

ALEXANDRU GH. RADU, Categoria fasciculelor în topologia multiplicativ-aditivă (VI) 479

N. N. TEODORESCU, Asupra grupului de mişcări ale spaţiilor conform euclidiene 483

ELEONORA TOMA MARCU, Asupra unui operator înrudit cu operatorul lui Sestier din analiza algebrică contextuală 499

C. N. UDRIŞTE, Introducerea unor invarianţi diferenţiali intrinseci într-o varietate riemanniană. 509

C. N. UDRIŞTE, Grupuri de mişcări în spaţii Riemann de clasa unu 515

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. P. 369–524, BUCUREŞTI, 1969

ORSZÁGOS MŰSZAKI DOKUMENTÁCIÓS 1863

O CARACTERIZARE SINTACTICĂ A INDEPENDENȚEI UNUI SISTEM DE AXIOME

DE

N. BOTH

(Cluj)

Fără a recurge la matrici logice, lucrarea dă o condiție necesară și suficientă ca un sistem de axiome din calculul propozițiilor să fie independent.

§ 1. CONSIDERAȚII PRELIMINARE

În general, independența sistemelor de axiome ale calculului propozițional se tratează pe cale semantică, apelînd la interpretări peste cîmpuri de valori.

Ne propunem în cele ce urmează să dăm o caracterizare sintactică a acestei proprietăți, utilizînd un operator deductiv.

Egalitatea ($\mathcal{A} = \mathcal{B}$) dintre două formule ale calculului propozițional va exprima identitatea lor, abstracție făcînd de o substituție clasică :

$$\mathop{\mathrm{S}}\limits_{p_i}^{x_i} \mathcal{A}(p_i) = \mathcal{A}(x_i) = \mathcal{B},$$

unde p_i sînt variabile propoziționale iar x_i sînt formule.

Pe lîngă aceasta vom întrebuința un nou tip de substituție și anume :

$$\mathop{\mathrm{S}}\limits_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \mathfrak{A}(\mathcal{A}) = \mathfrak{A}(\mathcal{B}), \tag{1.1}$$

$\mathfrak{A}$, $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ fiind formule sintactic adevărate, $\mathfrak{A}(\mathcal{B})$ va fi tot formulă sintactic adevărată și vom avea :

$$\mathfrak{A}(\mathcal{B}) \in \mathrm{ded}\,(\mathfrak{A}(\mathcal{A}), \mathcal{B}). \tag{1.2}$$

Aceasta se justifică prin faptul că :

$$\mathop{\mathrm{S}}\limits_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \mathfrak{A}(\mathcal{A}) = \mathop{\mathrm{S}}\limits_{\mathfrak{N}}^{\mathcal{B}} \mathop{\mathrm{S}}\limits_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{N}} \mathfrak{A}(\mathcal{A}),$$

unde $\mathfrak{N}$ reprezintă orice formulă sintactic adevărată ([3], cap. II).

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 3, P. 371 — 376 BUCUREŞTI, 1969

Substituţia (1.1) aplicată unei mulţimi X de formule sintactic adevărate o vom nota simbolic $S_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(X)$ şi va însemna substituţia formulei $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ peste tot unde apare în formulele mulţimii X.

§ 2. OPERATORUL „δ"

DEFINIŢIA 2.1. Fie $\tau = \{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots\}$ o mulţime de expresii logice şi $X = \{x, y, \ldots\} \subseteq \tau$. Definim operatorul δ astfel:

$$\mathcal{A} \in \delta(X_i) \Leftrightarrow \mathcal{A} \in \operatorname{ded}(X_i) \,\&(\forall x)\, [x \in X_i \rightarrow \mathcal{A} \notin \operatorname{ded}(X_i \setminus x)],$$

unde $X_i \subseteq X$.

CONSECINŢA 2.1. $\mathcal{A} \in \delta(X) \& X \cap Y = \emptyset \,\&\, Y \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{A} \notin \delta(X \cup Y)$.

Din $\mathcal{A} \in \delta(X)$, pe baza definiţiei de mai sus, rezultă că $\mathcal{A} \in \operatorname{ded}(X)$. Presupunînd că $\mathcal{A} \in \delta(X \cup Y)$, pe aceeaşi bază rezultă că $\mathcal{A} \notin \operatorname{ded}((X \cup Y)\setminus y)$, unde $y \in Y \subset X \cup Y$. Deoarece $X \cap Y = \emptyset$, înseamnă că $(X \cup Y)\setminus y = X \cup Y \setminus y$ şi în concluzie $\mathcal{A} \in \operatorname{ded}(X \cup Z)$, unde am notat $Z = Y \setminus y$. Cum însă $X \subseteq X \cup Z$, proprietatea de monotonie a operatorului ded se exprimă prin: $\operatorname{ded}(X) \subseteq \operatorname{ded}(X \cup Z)$. Deoarece $\mathcal{A} \in \operatorname{ded}(X)$ prin ipoteză, rezultă că $\mathcal{A} \in \operatorname{ded}(X \cup Z)$, în contradicţie cu concluzia precedentă. Aşadar, presupunerea că $\mathcal{A} \in \delta(X \cup Y)$ este falsă şi deci $\mathcal{A} \notin \delta(X \cup Y)$.

Consecinţa de mai sus o putem formula şi astfel:

$$\mathcal{A} \in \delta(X) \& X \cap Y = \emptyset \,\&\, \mathcal{A} \in \delta(X \cup Y) \Rightarrow Y = \emptyset.$$

DEFINIŢIA 2.2. Mulţimea X prin operatorul δ generează în τ o relaţie $\mathcal{R}$ şi anume:

$$\mathcal{A}\mathcal{R}\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \delta(X_i).$$

Totalitatea expresiilor care sînt în relaţia $\mathcal{R}$ cu $\mathcal{A} \in \tau$ formează o *clasă modulo* $\mathcal{R}$.

Orice mulţime finită X generează un număr finit de clase în τ. Întradevăr, dacă X conţine n expresii, numărul claselor este $N = C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n - 1$.

DEFINIŢIA 2.3. Vom zice că X *respectă pe* τ *prin* δ dacă:

$$(\forall \mathcal{A})\, [\mathcal{A} \in \delta(X_i) \& X_i \subseteq X \rightarrow \mathcal{A} \in \tau].$$

DEFINIŢIA 2.4. Vom zice că X *acoperă pe* τ *prin* δ dacă:

$$(\forall \mathcal{A})\, (\exists X_i)\, [\mathcal{A} \in \tau \,\&\, X_i \subseteq X \rightarrow \mathcal{A} \in \delta(X_i)].$$

LEMA 2.1. *Dacă* $X = x$ *şi* $\mathcal{A} \in \operatorname{ded}(X)$ *iar* $\mathcal{A} \notin \emptyset$, *atunci* $\mathcal{A} \in \delta(X)$.

Demonstraţie. Presupunem că $\mathcal{A} \notin \delta(X)$. Cum $\mathcal{A} \in \operatorname{ded}(X)$, rezultă că $\mathcal{A} \in \operatorname{ded}(X \setminus x)$. Dar $X \setminus x = \emptyset$ iar $\operatorname{ded}(\emptyset) = \emptyset$ ([1], § 6) deci $\mathcal{A} \in \emptyset$, ceea ce contrazice ipoteza şi demonstrează lema.

LEMA 2.2. $x \in \delta(x)$.

Aceasta rezultă imediat din proprietatea de scufundare a operatorului ded — $X \subseteq \operatorname{ded}(X)$ — şi din lema 2.1.

Teorema 2.1. *Dacă X este o mulțime finită și $\mathcal{A} \in \text{ded}\,(X)$, atunci există o submulțime $X_k \subseteq X$ astfel ca să avem $\mathcal{A} \in \delta(X_k)$.*

Demonstrație. Există două posibilități:

a) $(\forall x)\,[x \in X \rightarrow \mathcal{A} \notin \text{ded}\,(X \setminus x)]$

iar în acest caz, pe baza definiției 2.1, $\mathcal{A} \in \delta\,(X_k)$, unde $X_k = X$, deci teorema este demonstrată.

b) $(\exists x)\,[x \in X \,\&\, \mathcal{A} \in \text{ded}\,(X \setminus x)]$.

Notăm $X \setminus x = Y$ și cum $\mathcal{A} \in \text{ded}\,(Y)$, avem din nou două posibilități de forma a) sau b). În cazul că se repetă mereu situația b), X fiind o mulțime finită, ajungem după un număr finit de pași la $\mathcal{A} \in \text{ded}\,(T)$, unde $T = t \in X$, care cu lema 2.1 ne conduce la $\mathcal{A} \in \delta\,(T)$ și cu $X_k = T \subset X$ demonstrează teorema.

Observația 2.1. În continuare vom considera relația $\mathcal{R}$ ca fiind generată de un sistem finit X_0 de scheme (forme) axiomatice ([4], § 19) în mulțimea τ a tautologiilor, cu condiția că X_0 respectă și acoperă pe τ prin δ.

Întrebuințarea schemelor justifică semnificația dată egalității în § 1 și ca atare nu vom face distincție între formulele ce aparțin unei aceleiași scheme.

Consecința 2.2. *Sistemul X_0 este necontradictoriu și complet din punct de vedere semantic.*

Necontradicția rezultă din teorema 2.1, observația 2.1 (condiția că X_0 respectă pe τ) și definiția 2.3 iar completitudinea din observația 2.1 (X_0 acoperă pe τ), definiția 2.4 și definiția 2.1.

Observația 2.2. Clasele lui X_0 modulo $\mathcal{R}$ în general nu sînt disjuncte și deci relația $\mathcal{R}$, considerată la observația 2.1, în general nu este o relație de echivalență ([2], cap. I).

§ 3. TREAPTĂ DE DEDUCTIBILITATE δ

Zicem că formula $\mathcal{A}$ este *deductibilă* δ *de treaptă k* din mulțimea X și notăm $\mathcal{A} \in \delta_k\,(X)$, dacă este deductibilă δ prin k separații din X. În acest caz vom scrie $\mathcal{A} = \delta_k^0\,(X)$. Evident că:

$$\mathcal{A} \in \delta\,(X) \rightarrow (\exists k)\,[\mathcal{A} \in \delta_k\,(X)]. \tag{3.1}$$

Dăm mai jos o definiție inductivă a treptei de deductibilitate δ astfel:

a_1. $\mathcal{A} \in \delta_0\,(X) \Leftrightarrow \mathcal{A} = X = x$ (egalitate în sensul enunțat la § 1).

a_2. $\mathcal{A} \in \delta_1\,(X) \Leftrightarrow X = \{x,\ x \rightarrow \mathcal{A}\}$.

b. $\mathcal{A} \in \delta_{k+1}\,(X) \Leftrightarrow \mathcal{A} \in \delta_k(\delta_1^0(X_1),\ X_2)$, unde $X_1 \cup X_2 = X$. În general $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ iar în particular se poate ca $X_1 = X_2$.

Consecința 3.1. $x \in \delta_0\,(x)$ (rezultă din a_1)

Consecința 3.2. $\delta_n\,(X) \subseteq \delta\,(X) \subseteq \text{ded}\,(X)$ (rezultă din definiția precedentă și definiția 2.1).

Lema 3.1. *Dacă X_0 este un sistem independent, atunci* $X \cup Y \subseteq X_0 \,\&\, X \subseteq \text{ded}\,(Y) \Rightarrow X \subseteq Y$.

În caz contrar ar exista $x \in X$ astfel ca $x \notin Y$ dar $x \in \text{ded}\,(Y)$ deci schema x ar fi dependentă.

Lema 3.2. $x \in \delta_n(Y) \,\&\, \{x,\ Y\} \subseteq X_0 \Rightarrow x = Y$.

Demonstrație. $x \in \delta_n(Y) \Rightarrow x \in \mathrm{ded}\,(Y)$ (consecința 3.2). Deoarece $\{x, Y\} \subseteq X_0$ și $x \in \mathrm{ded}\,(Y)$ înseamnă că $x \in Y$ (lema 3.1).

Deci $Y = x \cup Y_1$ și $x \notin Y_1$ adică $x \cap Y_1 = \emptyset$. Cum $x \in \delta\,(x)$ (lema 2.2) și $x \in \delta_n(Y)$ (prin ipoteză) adică $x \in \delta\,(Y)$ sau $x \in \delta\,(x \cup Y_1)$, din consecința 2.1 rezultă că $Y_1 = \emptyset$ deci $Y = x$.

Lema 3.3. $Y \subseteq X_0 \;\&\; x \in X_0 \;\&\; x \in \delta_n(Y) \Rightarrow n = 0$.

Demonstrație. Aplicînd lema 3.2 obținem că $x = Y = y$ care cu consecința 3.1 dă $x \in \delta_0\,(Y)$ adică $n = 0$.

Lema 3.4. $\mathcal{A} \in \delta_1\,(y,\ x \to \mathcal{A}) \Rightarrow x = y$.

Aceasta rezultă din definiția a_2 și definiția egalității formulelor (§ 1).

Teorema 3.1. $\mathcal{A} \in \delta_1\,(X) \;\&\; \mathcal{A} \in \delta_1(Y) \;\&\; X \cup Y \subseteq X_0 \Rightarrow X = Y$.

Demonstrație. Avem $\mathcal{A} \in \delta_1\,(X) \Rightarrow X = \{x,\ x \to \mathcal{A}\}$ (definiția a_2)

$$\mathcal{A} \in \delta_1\,(Y) \Rightarrow Y = (y,\ y \to \mathcal{A}\} \qquad -\,,,\,-$$

Așadar $\overset{y}{\underset{x}{S}}(X) = Y$ (1.1) și $Y \in \mathrm{ded}\ (X, y)$ (1.2). Ținînd cont de faptul că $Y \cup \{X, y\} \subseteq X_0$, lema 3.1 ne conduce la $Y \subseteq \{X, y\}$.

Dar cum $y \in Y = \{y, y \to \mathcal{A}\}$ iar $y \to \mathcal{A} \neq y$, rezultă că $y \to \mathcal{A} \in X$ adică :

1) $y \to \mathcal{A} = x \to \mathcal{A}$ sau

2) $y \to \mathcal{A} = x$.

Cazul 1) ne conduce la $\mathcal{A} \in \delta_1\,(y,\ x \to \mathcal{A})$ care cu lema 3.4 dă $x = y$ adică $\{x,\ x \to \mathcal{A}\} = \{y,\ y \to \mathcal{A}\}$ sau $X = Y$.

În cazul 2) cum $x = y \to \mathcal{A}$, înseamnă că $X = \{y \to \mathcal{A},\ (y \to \mathcal{A}) \to \mathcal{A}\}$ deci $\overset{y \to \mathcal{A}}{\underset{y}{S}}(Y) = X$ cu $X \subseteq \mathrm{ded}\,(Y, y \to \mathcal{A})$ și deoarece $y \to \mathcal{A} \in Y$ avem $X \subseteq \subseteq \mathrm{ded}(Y)$, care cu lema 3.1 dă $X \subseteq Y$. Însă deja aveam $x = y \to \mathcal{A} \in Y$ și deci rămîne sau $x \to \mathcal{A} = y \in Y$ adică $\{x,\ x \to \mathcal{A}\} = \{y,\ y \to \mathcal{A}\}$ și ca atare $X = Y$, sau $x \to \mathcal{A} = y \to \mathcal{A}$ ceea ce conduce la cazul 1) în care teorema este de asemenea adevărată.

§ 4. CARACTERIZAREA SINTACTICĂ A SISTEMULUI X_0

Teorema 4.1. *Dacă $\mathcal{R}$ este o relație de echivalență, atunci sistemul X_0 este independent.*

Demonstrație. Presupunem că X_0 nu este independent, adică $(\exists x)\ [x \in X_0 \;\&\; x \in \mathrm{ded}\ (X_0 \setminus x)]$. Evident că $x \notin X_0 \setminus x$. Din teorema 2.1 rezultă că $(\exists X_k)\ [X_k \subseteq X_0 \setminus x \;\&\; x \in \delta\,(X_k)\,]$, unde $x \neq X_k$ deoarece $X_k \subseteq X_0 \setminus x$ iar $x \notin X_0 \setminus x$.

Așadar $x \in \delta\,(X_k)$ și $x \in \delta\,(x)$ (lema 2.2) cu $x \neq X_k$ de unde rezultă că x aparține la două clase diferite. Deci clasele lui X_0 modulo $\mathcal{R}$ nefiind disjuncte, $\mathcal{R}$ nu este echivalență, fapt ce contrazice ipoteza și demonstrează teorema.

Teorema 4.2. (Reciprocă). *Dacă sistemul X_0 este independent, atunci $\mathcal{R}$ este o relație de echivalență.*

Demonstrație. Teorema 4.2 este echivalentă cu afirmația :

,,Dacă X_0 este independent, clasele sale modulo $\mathcal{R}$ sînt disjuncte'' adică :

$$X \cup Y \subseteq X_0 \text{ independent, } \mathcal{A} \in \delta\,(X) \;\&\; \mathcal{A} \in \delta\,(Y) \Rightarrow X = Y.$$

Ţinînd cont de (3.1), adică :

$$(\exists m)\ [\mathcal{A} \in \delta_m (X)] \,\&\, (\exists n)\ [\mathcal{A} \in \delta_n (Y)]$$

vom demonstra că

$X \cup Y \subseteq X_0$ independent, $\mathcal{A} \in \delta_m (X) \,\&\, \mathcal{A} \in \delta_n (Y) \Rightarrow X = Y \,\&\, m=n$
din care teorema rezultă imediat.

Demonstraţia o vom face prin inducţie simultană relativ la treptele k şi l de deductibilitate ([5]).

Fie $\mathcal{A} \in \delta_0(X) \,\&\, \mathcal{A} \in \delta_n(Y)$. Avînd în vedere definiţia a_1, obţinem $\mathcal{A} = X = x$. Astfel $\mathcal{A} \in \delta_n (Y)$ devine $x \in \delta_n (Y)$, care cu $X = x \in X_0$ şi $Y \subseteq X_0$ şi cu lema 3.3 dă $n = 0$, adică $x \in \delta_0 (Y)$ şi conform definiţiei a_1 avem $x = Y = y$ sau $X = Y$ şi $m = n = 0$.

Cazul $\mathcal{A} \in \delta_m (X) \,\&\, \mathcal{A} \in \delta_0(Y)$ se tratează analog şi conduce la acelaşi rezultat.

Admitem că $\mathcal{A} \in \delta_k (X) \,\&\, \mathcal{A} \in \delta_l (Y) \Rightarrow X = Y \,\&\, k = l$.

Să demonstrăm că

$$\mathcal{A} \in \delta_{k+1} (X) \,\&\, \mathcal{A} \in \delta_{l+1} (Y) \Rightarrow X = Y \,\&\, k + 1 = l + 1.$$

$$\mathcal{A} \in \delta_{k+1} (X) \Rightarrow \mathcal{A} \in \delta_k (\delta_1^0 (X_1),\ X_2) \text{ (def. b unde } X_1 \cup X_2 = X).$$

$$\mathcal{A} \in \delta_{l+1} (Y) \Rightarrow \mathcal{A} \in \delta_l (\delta_1^0 (Y_1),\ Y_2) \ (-\text{,,}--\text{,,}-\ Y_1 \cup Y_2 = Y).$$

Or, după ipoteza inducţiei, rezultă că :

$$\{\delta_1^0(X_1),\ X_2\} = \{\delta_1^0 (Y_1),\ Y_2\}.$$

Există deci următoarele posibilităţi :

1. $\delta_1^0(X_1) = y \in Y_2$ şi $\delta_1^0(Y_1) = x \in X_2$ sau $y \in \delta_1 (X_1)$ şi $x \in \delta_1 (Y_1)$

Dar cum $X_1 \subset X_0$ şi $Y_1 \subset X_0$ iar $y \in X_0$ şi $x \in X_0$, posibilitatea 1 contrazice lema 3.3 şi ca atare este exclusă. Rămîne deci că

2. $\delta_1^0(X_1) = \delta_1^0(Y_1) = \mathcal{B}$ iar $X_2 = Y_2$.

Aceasta înseamnă că $\mathcal{B} \in \delta_1 (X_1) \,\&\, \mathcal{B} \in \delta_1 (Y_1)$ cu $X_1 \cup Y_1 \subseteq X_0$.

Aplicînd teorema 3.1 obţinem că $X_1 = Y_1$, care cu $X_2 = Y_2$ conduce la $X_1 \cup X_2 = Y_1 \cup Y_2$ sau $X = Y$.

Întrucît $k = l$ deci $k + 1 = l + 1$, teorema este adevărată pentru orice m şi n (m şi n fiind numere naturale).

Concluzie. Condiţia necesară şi suficientă ca sistemul finit de axiome X_0 să fie independent este ca relaţia $\mathcal{R}$ generată de X_0 în τ prin operatorul δ să fie o relaţie de echivalenţă.

Primită la redacţie la 19 octombrie 1967

Institutul pedagogic Cluj

UNE CARACTÉRISATION SYNTACTIQUE DE L'INDÉPENDANCE D'UN SYSTÈME D'AXIOMES

(RÉSUMÉ)

On donne, sans l'aide des matrices logiques, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système d'axiomes du calcul des propositions soit indépendant.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Asser, *Einführung in die mathematische Logik.* t. I, Aussagenkalkül.
2. P. Dubreil, *Algebre.*
3. P. S. Novikov, *Elemente de logică matematică.* Ed. tehnică, 1965.
4. С. К. Клини, *Введение в метаматематику.*
5. N. Both, *Despre bazele inducției complete. Inducția simultană.* St. cerc. mat., **18**, *9* (1967).

CÎMPURI DE VECTORI PARALELI ÎN SPAȚII A_2 CU CONEXIUNE AFINĂ LINIARĂ LOCAL EUCLIDIENE

DE

EFTIMIE I. GRECU

Utilizînd o teoremă demonstrată de Tiberiu Postelnicu referitoare la reducerea la o formă canonică a conexiunii spațiilor $A_2(x^1,x^2)$ cu conexiune afină liniară local euclidiene, se determină cîmpurile de vectori paraleli potențiali ale spațiilor A_2 și se dau anumite proprietăți ale acestor cîmpuri de vectori.

Dacă $A_n(x^1, \ldots, x^n)$ este un spațiu cu conexiune afină, ai cărui coeficienți de conexiune sînt $\Gamma^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n)$, se poate asocia lui A_n sistemul de ecuații diferențiale

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2} = \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}$$

care definește curbele autoparalele ale spațiului A_n. De asemenea, se poate asocia, în mod invariant, spațiului A_n sistemul de ecuații cu derivate parțiale

$$1) \qquad A_{jk}(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma^i_{jk}\frac{\partial z}{\partial x^i} = 0.$$

Fie pentru aceasta o transformare de variabile

$$x'^i = x'^i(x^1, \ldots, x^n), \qquad (i = 1,2, \ldots, n)$$

și o transformare liniară a funcției z

$$(2) \qquad z' = az + b,$$

unde a, b sînt constante cu $a \neq 0$. Avem

$$\frac{\partial z}{\partial x^i} = \frac{1}{a}\frac{\partial z'}{\partial x'^r}\frac{\partial x'^r}{\partial x^i}$$

și

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^r \partial x'^s}\frac{\partial x'^r}{\partial x^j}\frac{\partial x'^s}{\partial x^k} + \frac{\partial z'}{\partial x'^r}\frac{\partial^2 x'^r}{\partial x^j \partial x^k}\right).$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 3, P. 377—403, BUCUREȘTI, 1969

Rezultă :

$$A_{jk}(z) = \frac{1}{a}\left[\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^r \partial x'^s}\ \frac{\partial x'^r}{\partial x^j}\ \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} + \left(\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma^r_{jk}\frac{\partial x'^i}{\partial x^r}\right)\frac{\partial z'}{\partial x'^i}\right]$$

de unde obținem în definitiv formulele :

$$A_{jk}(z) = \frac{1}{a} A'_{rs}(z')\frac{\partial x'^r}{\partial x^j}\frac{\partial x'^s}{\partial x^k}$$

dacă ținem seamă de legea de transformare a conexiunii

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma'^i_{rs}\frac{\partial x'^r}{\partial x^j}\ \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - \Gamma^r_{jk}\frac{\partial x'^i}{\partial x^r}.$$

Deci sistemul (1) se schimbă în sistemul

$$A'_{jk}(z') = \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^j \partial x'^k} + \Gamma'^i_{jk}\frac{\partial z'}{\partial x'^i} = 0.$$

Sistemul cu derivate parțiale (1) este deci un sistem invariant asociat spațiului A_n, cu condiția ca funcția z să fie considerată ca un invariant sau ca o funcție care suferă chiar o transformare liniară (2). Sistemul (1) se poate deduce din ecuațiile transportului paralel al unui vector covariant V_j, ce derivă dintr-un potențial z, deci $V_j = \frac{\partial z}{\partial x^j}\cdot$ Într-adevăr, ecuațiile transportului paralel al unui vector covariant V_j sînt

$$\mathrm{d}V_j + \Gamma^i_{jk} V_i \mathrm{d}x^k = 0$$

de unde

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma^i_{jk}\frac{\partial z}{\partial x^i} = 0.$$

Rezultă că a găsi o soluție a sistemului (1) revine la a găsi un vector covariant derivînd dintr-un potențial și care se transportă în A_n prin paralelism. În general, dacă spațiul A_n este oarecare, asemenea vectori nu există, deoarece condițiile de integrabilitate ale ecuațiilor (1), care se scriu

$$T^i_{jk}\frac{\partial z}{\partial x^i} = 0, \qquad \Gamma^i_{jkl}\frac{\partial z}{\partial x^i} = 0, \tag{3}$$

unde T^i_{jk}, Γ^i_{jkl} sînt tensorii de torsiune și de curbură ai spațiului A_n, n-au altă soluție decît soluția banală $z = \text{const}$. Dacă spațiul A_n este local euclidian, deci $T^i_{jk} = 0$, $\Gamma^i_{jkl} = 0$, atunci condițiile (3) de integrabilitate sînt identic satisfăcute și sistemul (1) admite și soluții diferite de soluția banală.

Să observăm mai întîi că dacă punem $V_j = \frac{\partial z}{\partial x^j}$, atunci sistemul (1) devine :

$$\frac{\partial V_j}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} V_i = 0.$$

Rezultă că componentele $V_1(x^1, x^2)$, $V_2(x^1, x^2)$ sînt soluţii ale sistemului de ecuaţii cu derivate parţiale (4) şi (5)

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x^1} + \Gamma^1_{11} V_1 + \Gamma^2_{11} V_2 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial V_1}{\partial x^2} + \Gamma^1_{12} V_1 + \Gamma^2_{12} V_2 = 0 \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V_2}{\partial x^1} + \Gamma^1_{21} V_1 + \Gamma^2_{21} V_2 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial V_2}{\partial x^2} + \Gamma^1_{22} V_1 + \Gamma^2_{22} V_2 = 0. \end{cases}$$

Înmulţind în (4) prima ecuaţie cu Γ^2_{12}, iar a doua ecuaţie cu $-\Gamma^2_{11}$ şi adunînd, vom elimina pe V_2, iar dacă înmulţim în (5) prima ecuaţie cu Γ^1_{22}, iar a doua ecuaţie cu $-\Gamma^1_{21}$ şi adunăm, vom elimina pe V_1 astfel încît obţinem ecuaţiile cu derivate parţiale care definesc pe V_1, respectiv V_2

$$(4')\qquad \Gamma^2_{12}\frac{\partial V_1}{\partial x^1} - \Gamma^2_{11}\frac{\partial V_1}{\partial x^2} = (\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12})\, V_1$$

$$(5')\qquad \Gamma^1_{22}\frac{\partial V_2}{\partial x^1} - \Gamma^1_{21}\frac{\partial V_2}{\partial x^2} = (\Gamma^2_{22}\Gamma^1_{21} - \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22})\, V_2$$

cărora li se asociază respectiv sistemele caracteristice

$$(4'')\qquad \frac{\mathrm{d}x^1}{\Gamma^2_{12}} = -\frac{\mathrm{d}x^2}{\Gamma^2_{11}} = \frac{\mathrm{d}V_1}{(\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12})\, V_1}$$

$$(5'')\qquad \frac{\mathrm{d}x^1}{\Gamma^1_{22}} = -\frac{\mathrm{d}x^2}{\Gamma^2_{21}} = \frac{\mathrm{d}V_2}{(\Gamma^2_{22}\Gamma^1_{21} - \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22})\, V_2}.$$

Din (4''), (5'') obţinem respectiv ecuaţiile :

$$(4''')\qquad \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x^1} = -\frac{\Gamma^2_{11}}{\Gamma^2_{12}}$$

$$(5''')\qquad \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x^1} = -\frac{\Gamma^2_{21}}{\Gamma^1_{22}},$$

unde presupunem că de-a lungul curbei integrale respective x^2 este funcţie de x^1.

Deoarece conexiunea $\Gamma^i_{jk}(x^1, x^2)$ a spațiului $A_2(x^1, x^2)$ este liniară, deci avem componentele:
$\Gamma^i_{jk} = a^i_{jk} x^1 + b^i_{jk} x^2 + c^i_{jk}$, unde a^i_{jk}, b^i_{jk}, c^i_{jk} sînt constante, $(i, j, k = 1, 2)$,rezultă că fiecare din ecuațiile $(4''')$, $(5''')$ este o ecuație diferențială de primul ordin de forma

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$$

care se poate totdeauna integra prin cvadraturi, distingîndu-se două cazuri, după cum determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

este sau nu diferit de zero, obținînd în felul acesta cîte o integrală primă a fiecăruia din sistemele $(4'')$, $(5'')$.

Se mai poate obține cîte o integrală primă a fiecăruia din sistemele $(4'')$, $(5'')$ în următoarele cazuri:

a) $\dfrac{\partial\, \Gamma^i_{i1}}{\partial\, x^2} = \dfrac{\partial\, \Gamma^i_{i2}}{\partial\, x^1}$, $(i = 1, 2)$, i fiind un indice fix.

În acest caz, amplificînd în $(4'')$ primele două rapoarte respectiv cu Γ^1_{22} și $-\Gamma^1_{11}$, iar în $(5'')$ respectiv cu Γ^2_{22} și $-\Gamma^2_{12}$, obținem

$$\mathrm{dln}\, V_i = -\Gamma^i_{ij}\, \mathrm{d}x^j, \text{ (sumare după } j = 1, 2); \; (i = 1, 2)$$

și se observă că expresia

$$\Gamma^i_{ij}\, \mathrm{d}x^j = \Gamma^i_{i1}\, \mathrm{d}x^1 + \Gamma^i_{i2}\, \mathrm{d}x^2$$

este o diferențială *totală*, care se poate integra pe un drum format din segmente de drepte paralele cu axele de coordonate și care unește punctul fix $P_0(x^1_0, x^2_0)$, cu punctul variabil $P(x^1, x^2)$ al spațiului $A_2(x^1, x^2)$.

b) Conexiunea lui A_2 este liniară și omogenă

$$\Gamma^i_{jk} = a^i_{jk} x^1 + b^i_{jk} x^2.$$

În acest caz, amplificăm primele două rapoarte din $(4'')$ respectiv cu formele liniare și omogene în x^1, x^2

$$L_1(x^1, x^2) = \alpha^1_1 x^1 + \alpha^1_2 x^2, \quad L_2(x^1, x^2) = \alpha^2_1 x^1 + \alpha^2_2 x^2$$

și vom căuta să determinăm constantele α^i_j, $(i, j = 1, 2)$, din condiția ca forma

$$L_1\, \mathrm{d}x^1 + L_2\, \mathrm{d}x^2$$

să fie o diferențială totală și din condiția ca

$$L_1\, \Gamma^2_{12} - L_2\, \Gamma^2_{11} \equiv \Gamma^1_{12}\, \Gamma^2_{11} - \Gamma^1_{11}\, \Gamma^2_{12}$$

care exprimă identitatea a două forme pătratice în variabilele x^1, x^2.

Avem deci

$$(\alpha^1_1 x^1 + \alpha^1_2 x^2)(a^2_{12} x^1 + b^2_{12} x^2) - (\alpha^2_1 x^1 + \alpha^2_2 x^2)(a^2_{11} x^1 + b^2_{11} x^2) \equiv$$
$$\equiv (a^1_{12} x^1 + b^1_{12} x^2)(a^2_{11} x^1 + b^2_{11} x^2) - (a^1_{11} x^1 + b^1_{11} x^2)(a^2_{12} x^1 + b^2_{12} x^2).$$

Obţinem sistemul

$$\begin{cases} \alpha_2^1 - \alpha_1^2 = 0 \\ a_{12}^2\,\alpha_1^1 - a_{11}^2\,\alpha_1^2 = a_{12}^1\,a_{11}^2 - a_{11}^1\,a_{12}^2 \\ b_{12}^2\,\alpha_1^1 + a_{12}^2\,\alpha_2^1 - b_{11}^2\,\alpha_1^2 - a_{11}^2\,\alpha_2^2 = a_{12}^1\,b_{11}^2 + a_{11}^2\,b_{12}^1 - a_{11}^1\,b_{12}^2 - a_{12}^2\,b_{11}^1 \\ b_{12}^2\,\alpha_2^1 - b_{11}^2\alpha_2^2 = b_{12}^1\,b_{11}^2 - b_{11}^1\,b_{12}^2 \end{cases}$$

care este un sistem liniar neomogen de patru ecuaţii cu patru necunoscute α_j^i, $(i, j = 1, 2)$, deci admite o soluţie unic determinată, dacă matricea sistemului are rangul 4.

c) Conexiunea lui A_2 este liniară neomogenă

$$\Gamma_{jk}^i = a_{jk}^i x^1 + b_{jk}^i x^2 + c_{jk}^i.$$

În acest caz, amplificăm primele două rapoarte din (4″) respectiv cu formele liniare neomogene în x^1, x^2

$$L_1(x^1, x^2) = \alpha_1^1 x^1 + \alpha_2^1 x^2 + \alpha_0^1 \quad , \quad L_2(x^1, x^2) = \alpha_1^2 x^1 + \alpha_2^2 x^2 + \alpha_0^2$$

şi vom determina constantele α_j^i, $(i = 1, 2\,;\ j = 0, 1, 2)$, din aceleaşi condiţii ca la cazul b). Trebuie deci să avem

$$\frac{\partial L_1}{\partial x^2} = \frac{\partial L_2}{\partial x^1}$$

$$(\alpha_1^1 x^1 + \alpha_2^1 x^2 + \alpha_0^1)(a_{12}^2 x^1 + b_{12}^2 x^2 + c_{12}^2) - (\alpha_1^2 x^1 + \alpha_2^2 x^2 + \alpha_0^2)$$
$$(a_{11}^2\,x^1 + b_{11}^2\,x^2 + c_{11}^2) \equiv$$
$$\equiv (a_{12}^1\,x^1 + b_{12}^1\,x^2 + c_{12}^1)(a_{11}^2\,x^1 + b_{11}^2\,x^2 + c_{11}^2) - (a_{11}^1\,x^1 + b_{11}^1\,x^2 + c_{11}^1)$$
$$(a_{12}^2 x^1 + b_{12}^2 x^2 + c_{12}^2).$$

Obţinem sistemul

$$\begin{cases} \alpha_2^1 - \alpha_1^2 = 0, \\ a_{12}^2\alpha_1^1 - a_{11}^2\alpha_1^2 = a_{12}^1 a_{11}^2 - a_{11}^1 a_{12}^2, \\ b_{12}^2\alpha_1^1 + a_{12}^2\alpha_2^1 - b_{11}^2\alpha_1^2 - a_{11}^2\alpha_2^2 = a_{12}^1 b_{11}^2 + a_{11}^2 b_{12}^1 - a_{11}^1 b_{12}^2 - a_{12}^2 b_{11}^1, \\ b_{12}^2\alpha_2^1 - b_{11}^2\alpha_2^2 = b_{12}^1 b_{11}^2 - b_{11}^1 b_{12}^2, \\ c_{12}^2\alpha_1^1 + a_{12}^2\alpha_0^1 - c_{11}^2\alpha_1^2 - a_{11}^2\alpha_0^2 = a_{12}^1\,c_{11}^2 + a_{11}^2 c_{12}^1 - a_{11}^1 c_{12}^2 - a_{12}^2 c_{11}^1 \\ c_{12}^2\alpha_2^1 + b_{12}^2\alpha_0^1 - c_{11}^2\alpha_2^2 - b_{11}^2\alpha_0^2 = b_{12}^1\,c_{11}^2 + b_{11}^2 c_{12}^1 - b_{11}^1 c_{12}^2 - b_{12}^2 c_{11}^1 \\ c_{12}^2\alpha_0^1 - c_{11}^2\alpha_0^2 = c_{12}^1 c_{11}^2 - c_{11}^1 c_{12}^2 \end{cases}$$

care este un sistem liniar neomogen de şapte ecuaţii cu şase necunoscute α_j^i $(i = 1, 2\,;\ j = 0, 1, 2)$, care este compatibil dacă rangul matricei extinse este egal cu şase.

O dată determinate componentele V_1, V_2, pentru a obţine potenţialul z, din care derivă acest vector, vom integra sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x^1} = V_1(x^1, x^2) \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial x^2} = V_2(x^1, x^2). \end{cases}$$

Fiecare din sistemele (4), (5) şi (6) este complet integrabil, deoarece spaţiile A_2 sînt presupuse local euclidiene. Se observă că integrabilitatea completă a sistemului (6) este o consecinţă a condiţiilor $T^i_{jk} = 0$, iar integrabilitatea completă a fiecăruia din sistemele (4), (5) este o consecinţă a condiţiilor $\Gamma^i_{jkl} = 0$.

Pentru integrarea sistemului (6) se poate proceda astfel :
Se observă că membrul al doilea al ecuaţiei

$$(7)\qquad dz = V_1\, dx^1 + V_2\, dx^2$$

care este echivalentă cu (6), este o diferenţială totală deoarece avem

$$\frac{\partial V_i}{\partial x^j} = \frac{\partial V_j}{\partial x^i}, \qquad (i, j = 1, 2)$$

şi atunci, pentru a determina pe $z = z(x^1, x^2)$, este suficient să calculăm integrala curbilinie din membrul doi al ecuaţiei (7) între două puncte $A_0(x^1_0, x^2_0)$ şi $A(x^1, x^2)$, unde A_0 este un punct fix, integrarea făcîndu-se pe un drum format din segmente paralele cu axele de coordonate şi care uneşte cele două puncte, aşa încît z este dat de expresia

$$z = \int_{x^1_0}^{x^1} V_1(x^1 x^2_0)\, dx^1 + \int_{x^2_0}^{x^2} V_2(x^1, x^2)\, dx^2.$$

În [5], T. Postelnicu demonstrează următoarea teoremă :
Conexiunea unui spaţiu A_2, cu conexiunea afină liniară local euclidiană, poate fi redusă la una din formele canonice :

$$[\mathrm{I}]\ \Gamma^1_{11} = x^2,\ \Gamma^1_{12} = \varepsilon\Gamma^2_{11} = x^1 + \varepsilon k x^2,\quad \Gamma^2_{12} = \varepsilon\, \Gamma^1_{22} = kx^1 + (1 + \varepsilon k^2)\, x^2,$$
$$\Gamma^2_{22} = (1 + \varepsilon k^2)\, x^1 + k(k^2 + 2\varepsilon)\, x^2$$

$$[\mathrm{II}]\ \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \varepsilon x^1,\ \ \Gamma^2_{11} = \varepsilon x^2,\ \ \Gamma^1_{22} = \varepsilon' x^1,\ \ \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = \varepsilon' x^2$$

$$[\mathrm{III}]\ \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \varepsilon x^1,\ \ \Gamma^2_{12} = \varepsilon x^2$$

dacă Γ^1_{11} şi Γ^2_{11} sînt liniar independente şi unde componentele nescrise ale conexiunii sînt nule, iar ε, ε' sînt ± 1.

Dacă Γ^1_{11} şi Γ^2_{11} sînt liniar dependente, iar Γ^2_{11} depinde de x^1, avem formele canonice:

$$[\mathrm{IV}]\ \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = \varepsilon\Gamma^2_{12} = x^1 + \varepsilon x^2$$

$$[\mathrm{V}]\ \Gamma^1_{12} = \varepsilon\Gamma^1_{22} = \gamma,\ \Gamma^2_{11} = \varepsilon\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{22} - \gamma = x^1 + \varepsilon x^2$$

$$[\mathrm{VI}]\ \Gamma^1_{11} = 1,\quad \Gamma^1_{12} = \varepsilon\Gamma^1_{22} = \gamma,\quad \Gamma^2_{11} = \varepsilon\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{22} + \varepsilon - \gamma = x^1 + \varepsilon x^2$$

[VII] $\Gamma^1_{11} = \tau$, $\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = \gamma$, $\Gamma^2_{11} = x^1$, unde $\tau = 0, 1$ iar γ este o constantă.

Dacă Γ^1_{11} şi Γ^2_{11} sînt liniar dependente, iar Γ^2_{11} nu depinde x^2, avem forma canonică

[VIII] $\Gamma^1_{11} = \tau$, $\Gamma^2_{11} = - x^2$, $\Gamma^2_{12} = \gamma$, unde $\tau = 0, 1$ iar $\gamma^2 - \tau\gamma - 1 = 0$.

Dacă Γ^2_{11} nu depinde de x^1, x^2, însă Γ^1_{11} depinde de x^1, x^2, cele două componente fiind liniar dependente, avem formele canonice:

$$[\mathrm{IX}]\ \Gamma^1_{11} = x^1,\ \Gamma^2_{22} = \varepsilon x^2$$

$$[\mathrm{X}]\ \Gamma^1_{11} = x^1 + x^2,\quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{22} = x^1 + x^2 + \gamma,\quad \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{12} = 1,\quad \Gamma^2_{22} = \gamma + 1$$

$$[\mathrm{XI}]\ \Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{12} = x^1 + x^2,\quad \Gamma^1_{22} = x^1 (1 - \beta)\, x^2 - \gamma,\quad \Gamma^2_{22} = \beta x^2 + \gamma$$

$$[\mathrm{XII}]\ \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = x^1,\quad \Gamma^2_{11} = - \Gamma^2_{22} = 1$$

$$[\mathrm{XIII}]\ \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = 1 + x^1,\quad \Gamma^2_{11} = - \Gamma^2_{22} = 1$$

$$[\mathrm{XIV}]\ \Gamma^1_{11} = x^1,\quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = \gamma,\quad \Gamma^2_{11} = \tau,\quad (\gamma \neq 0).$$

Dacă Γ^1_{11}, Γ^2_{11} sînt constante, avem

$$[\mathrm{XV}]\ \Gamma^1_{12} = \rho,\quad \Gamma^2_{22} = \alpha,\quad \Gamma^1_{22} = \rho\,(\alpha - \rho)\, x^1 + \beta x^2 + \gamma,$$

unde $\rho \neq 0$

$$[\mathrm{XVI}]\ \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \tau,\quad \Gamma^1_{22} = \varepsilon x^2,\quad \Gamma^2_{22} = b x^2 + c$$

$$[\mathrm{XVII}]\ \Gamma^1_{11} = 1,\quad \Gamma^1_{12} = \gamma,\quad \Gamma^1_{22} = - \gamma\,(\varepsilon x^2 - \gamma),\quad \Gamma^2_{22} = \varepsilon x^2$$

$$[\mathrm{XVIII}]\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = \varepsilon x^2,\quad \Gamma^1_{22} = \varepsilon x^1 + \alpha$$

$$[\mathrm{XIX}]\ \Gamma^1_{11} = 1,\quad \Gamma^1_{12} = \varepsilon x^2,\ \Gamma^1_{22} = - \varepsilon\,(\gamma x^2 + 1),\quad \Gamma^2_{22} = \varepsilon x^2 + \gamma.$$

Vom considera acum, pe rînd, fiecare din cele nouăsprezece tipuri de spaţii $A_2(x^1, x^2)$ cu conexiune afină liniară local euclidiene şi vom determina, în fiecare caz în parte, cîmpul de vectori covarianţi paraleli, precum şi potenţialul z din care derivă aceşti vectori:

$$[1]\ \Gamma^1_{11} = x^2,\quad \Gamma^1_{12} = \varepsilon\Gamma^2_{11} = x^1 + \varepsilon k x^2,\quad \Gamma^2_{12} = \varepsilon\Gamma^1_{22} = k x^1 + (1 + \varepsilon k^2)\, x^2$$

$$\Gamma^2_{22} = (1 + \varepsilon k^2)\, x^1 + k\,(k^2 + 2\varepsilon)\, x^2.$$

Sistemul (2), (3) se scrie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x^1} + x^2 V_1 + \varepsilon (x^1 + \varepsilon k x^2) V_2 = 0 \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x^2} + (x^1 + \varepsilon k x^2) V_1 + [k x^1 + (1 + \varepsilon k^2) x^2] V_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_2}{\partial x^1} + (x^1 + \varepsilon k x^2) V_1 + [k x^1 + (1 + \varepsilon k^2) x^2] V_2 = 0 \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial x^2} + \varepsilon [k x^1 + (1 + \varepsilon k^2) x^2] V_1 + [(1 + \varepsilon k^2) x^1 + k (k^2 + 2\varepsilon) x^2] V_2 = 0. \end{cases}$$

Sistemul caracteristic se scrie

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{k x^1 + (1 + \varepsilon k^2) x^2} = - \frac{\mathrm{d}x^2}{\varepsilon x^1 + k x^2} = \frac{\mathrm{d}V_1}{[\varepsilon (x^1)^2 + k x^1 x^2 - (x^2)^2] V_1} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}V_2}{[\varepsilon (x^1)^2 + k x^1 x^2 - (x^2)^2] V_2}.$$

Din primele două rapoarte obținem

$$(\varepsilon x^1 + k x^2) \,\mathrm{d}x^1 + [k x^1 + (1 + \varepsilon k^2) x^2] \,\mathrm{d}x^2 = 0$$

și, deoarece primul membru este o diferențială totală, putem integra pe un drum format din segmente paralele cu axele de coordonate și obținem integrala primă

$$\varepsilon (x^1)^2 + 2 k x^1 x^2 + (1 + \varepsilon k^2) (x^2)^2 = K_1.$$

Pentru a găsi încă o integrală primă a sistemului caracteristic asociat, observăm că conexiunea lui A_2 este liniară și omogenă și atunci amplificăm primele două rapoarte respectiv cu formele liniare și omogene în x^1, x^2:

$$f_1(x^1, x^2) = a x^1 + b x^2, \quad f_2(x^1, x^2) = A x^1 + B x^2$$

și vom căuta să determinăm pe a, b, A, B din condiția ca forma

$$f_1 \,\mathrm{d}x^1 - f_2 \,\mathrm{d}x^2 = (a x^1 + b x^2) \,\mathrm{d}x^1 - (A x^1 + B x^2) \,\mathrm{d}x^2$$

să fie o diferențială totală și din condiția ca

$$(a x^1 + b x^2) [k x^1 + (1 + \varepsilon k^2) x^2] + (A x^1 + B x^2) (\varepsilon x^1 + k x^2) \equiv \varepsilon (x^1)^2 + $$
$$+ k x^1 x^2 - (x^2)^2.$$

Rezultă sistemul

$$b + A = 0$$
$$k a + \varepsilon A = \varepsilon$$
$$(1 + \varepsilon k^2) b + k B = -1$$
$$k b + (1 + \varepsilon k^2) a + \varepsilon B + k A = k$$

care are soluția $b = A = 0$, $a = \dfrac{\varepsilon}{k}$, $B = -\dfrac{1}{k}$.

Obţinem :

$$\frac{\varepsilon}{k}\, x^1\, \mathrm{d}x^1 + \frac{1}{k}\, x^2\, \mathrm{d}x^2 = \frac{\mathrm{d}V_1}{V_1} = \frac{\mathrm{d}V_2}{V_2}$$

de unde avem integralele prime

$$V_1\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2k}[\varepsilon(x^1)^2+(x^2)^2]} = K_2, \qquad V_2^{-\frac{1}{2k}[\varepsilon(x^1)^2+x^2)^2]} = K_3.$$

Componentele V_1, V_2 au atunci expresiile

$$V_1 = \varphi\,(t)\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2k}[\varepsilon(x^1)^2+(x^2)^2]}$$

$$V_2 = \psi\,(t)\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2k}[\varepsilon(x^1)^2+(x^2)^2]},$$

$$\text{unde } t = \varepsilon\,(x^2)^2 + 2k\, x^1 x^2 + (1+\varepsilon k^2)\,(x^2)^2.$$

Funcţiile φ, ψ se determină din sistemul liniar şi cu coeficienţi constanţi

$$2k\,\varphi' + \varphi + K\psi = 0$$

$$2\,k\,\psi' + \varepsilon k \varphi + (1+\varepsilon k^2)\,\psi = 0$$

şi avem

$$\varphi\,(t) = C_1\, \mathrm{e}^{r_1 t} + C_2\, \mathrm{e}^{r_2 t}$$

$$\psi\,(t) = -\left[\left(\frac{1}{k} + 2r_1\right) C_1\, e^{r_1 t} + \left(\frac{1}{k} + 2r_2\right) C_2 \mathrm{e}^{r_2 t}\right]$$

unde r_1, r_2 sînt rădăcinile ecuaţiei caracteristice

$$4k^2 r^2 + 2k\,(2+\varepsilon k^2)\, r + 1 = 0.$$

Rezultă că V_1, V_2 au expresiile

$$V_1 = (C_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 t})\mathrm{e}^{\frac{1}{2k}[\varepsilon(x^1)^2+(x^2)^2]}$$

$$V_2 = -\left[\left(\frac{1}{k} + 2r_1\right) C_1\, \mathrm{e}^{r_1 t} + \left(\frac{1}{k} + 2r_2\right) C_2\, \mathrm{e}^{r_2 t}\right] \mathrm{e}^{\frac{1}{2k}[\varepsilon(x^1)^2+(x^2)^2]}.$$

Potenţialul z din care derivă acest vector are expresia

$$z = C_1\left[\int_0^{x^1} \mathrm{e}^{\varepsilon\left(\frac{1}{2k}+r_1\right)u^2}\, \mathrm{d}u - \left(\frac{1}{k}+2r_1\right)\int_0^{x^2} \mathrm{e}^{\varepsilon\left(\frac{1}{2k}+r_1\right)(x^1)^2 + 2kr_1 x^1 u + (\frac{1}{2k}+r_1+\varepsilon k^2 r_1) u^2}\, \mathrm{d}u\right] +$$

$$+\, C_2\left[\int_0^{x_1} \mathrm{e}^{\varepsilon\left(\frac{1}{2k}+r_2\right)u^2}\, \mathrm{d}u - \left(\frac{1}{k}+2\,r_2\right)\int_0^{x^2} \mathrm{e}^{\varepsilon\left(\frac{1}{2k}+r_2\right)(x^1)^2 + 2kr_2\, x^1 u + \left(\frac{1}{2k}+r_2+\varepsilon k^2 r_2\right) u^2}\, \mathrm{d}u\right] +$$

$$+\, C_3.$$

Coordonatele carteziene ale spațiului Riemann $V_2(x^1, x^2)$ asociat lui $A_2(x^1, x^2)$, deci pentru care $\left|{}^{i}_{jk}\right| = -\Gamma^i_{jk}$, sînt prin urmare

$$u^i = \int_0^{x^1} e^{\varepsilon\left(\frac{1}{2k}+r_i\right)u^2} du - \left(\frac{1}{k} + 2r_i\right)\int_0^{x^2} e^{\varepsilon\left(\frac{1}{2k}+r_i\right)(x^1)^2 + 2kr_ix^1u + \left(\frac{1}{2k}+r_2+\varepsilon k^2 r_2\right)u^2} du,$$

unde $i = 1, 2$

II $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \varepsilon x^1,\ \Gamma^2_{11} = \varepsilon x^2,\ \Gamma^1_{22} = \varepsilon' x^1,\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = \varepsilon' x^2.$

Obținem sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x^1} + \varepsilon x^1 V_1 + \varepsilon x^2 V_2 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial V_1}{\partial x^2} + \varepsilon' x^2 V_1 + \varepsilon x^1 V_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V_2}{\partial x^1} + \varepsilon' x^2 V_1 + \varepsilon x^1 V_2 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial V_2}{\partial x^2} + \varepsilon' x^1 V_1 + \varepsilon' x^2 V_2 = 0 \end{cases}$$

iar sistemul caracteristic asociat se scrie

$$\frac{dx^1}{x^1} = -\frac{dx^2}{x^2} = \frac{dV_1}{[\varepsilon'(x^2)^2 - \varepsilon(x^1)^2]V_1} = \frac{dV_2}{[\varepsilon'(x^2)^2 - \varepsilon(x^1)^2]V_2}$$

care are integralele prime

$$x^1x^2 = K_1,\ V_1 e^{\frac{1}{2}[\varepsilon(x^1)^2 + \varepsilon'(x^2)^2]} = K_2,\ V_2 e^{\frac{1}{2}[\varepsilon(x^1)^2 + \varepsilon'(x^2)^2]} = K_3$$

de unde deducem

$$V_1 = \varphi(t)\, e^{-\frac{1}{2}[\varepsilon(x^1)^2 + \varepsilon'(x^2)^2]}$$

$$V_2 = \psi(t)\, e^{-\frac{1}{2}[\varepsilon(x^1)^2 + \varepsilon'(x^2)^2]},\ (\text{unde } t = x^1x^2)$$

funcțiile φ, ψ fiind soluții ale sistemului liniar cu coeficienți constanți

$$\varphi' + \varepsilon\psi = 0$$

$$\psi' + \varepsilon'\varphi = 0.$$

Ecuația caracteristică a acestui sistem este

$$r^2 - \varepsilon\varepsilon' = 0$$

și vom distinge două cazuri și anume

Cazul a. $\varepsilon\varepsilon' = 1$, deci $r = \pm 1$ și avem

$$\varphi = C_1 e^t + C_2 e^t$$

$$\psi = \varepsilon(C_2 e^{-t} - C_1 e^{-t})$$

de unde rezultă

$$\begin{cases} V_1 = (C_1 e^t + C_2 e^{-t})\, e^{-\frac{\varepsilon}{2}[(x^1)^2 + (x^2)^2]} \\[2ex] V_2 = \varepsilon(C_2 e^{-t} - C_1 e^t)\, e^{-\frac{\varepsilon}{2}[(x^1)^2 + (x^2)^2]}. \end{cases}$$

Potențialul z are expresia

$$z = C_1 \Big[\int_0^{x^1} e^{-\frac{\varepsilon}{2} u^2} du - \varepsilon \int_0^{x^2} e^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^1 - \varepsilon u)^2} du + C_2 \Big[\int_0^{x^1} e^{-\frac{\varepsilon}{2} u^2} du +$$

$$+ \varepsilon \int_0^{x^2} e^{-\frac{\varepsilon (x^1 + \varepsilon u)^2}{2}} du \Big] + C_3.$$

Dacă în integrala a doua și a patra se fac respectiv schimbările de variabilă

$$x^1 - \varepsilon u = v, \; x^1 + \varepsilon u = v$$

obținem în definitiv

$$z = C_1 \int_0^{x^1 - \varepsilon x^2} e^{-\frac{\varepsilon}{2} v^2} dv + C_2 \int_0^{x^1 + \varepsilon x^2} e^{-\frac{\varepsilon}{2} v^2} dv + C_3$$

deci coordonatele carteziene ale spațiului Riemann asociat sînt

$$u^1 = \int_0^{x^1 - \varepsilon x^2} e^{-\frac{\varepsilon}{2} v^2} dv \,, \quad u^2 = \int_0^{x^1 + \varepsilon x^2} e^{-\frac{\varepsilon}{2} v^2} dv.$$

Cazul b. $\varepsilon\varepsilon' = -1$, deci $r = \pm i$ și avem

$$\varphi = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

$$\psi = \varepsilon (C_1 \sin t - C_2 \cos t)$$

de unde rezultă

$$V_1 = (C_1 \cos t + C_2 \sin t) \, e^{\frac{\varepsilon}{2}[(x^2)^2 - (x^1)^2]}$$

$$V_2 = \varepsilon (C_1 \sin t - C_2 \cos t) \, e^{\frac{\varepsilon}{2}[(x^2)^2 - (x^1)^2]}.$$

Potențialul z din care derivă acest vector se scrie

$$z = C_1 \Big[\int_0^{x^1} e^{-\frac{\varepsilon}{2} u^2} du + \varepsilon \int_0^{x^2} e^{\frac{\varepsilon}{2}[u^2 - (x^1)^2]} \sin x^1 u \, du -$$

$$- \varepsilon C_2 \int_0^{x^2} e^{\frac{\varepsilon}{2}[u^2 - (x^1)^2]} \cos x^1 u \, du + C_3$$

deci coordonatele carteziene sînt

$$u^1 = \int_0^{x^1} e^{-\frac{\varepsilon}{2} u^2} du + \int_0^{x^2} e^{\frac{\varepsilon}{2}[u^2 - (x^1)^2]} \sin x^1 u \, du$$

$$u^2 = - \varepsilon \int_0^{x^2} e^{\frac{\varepsilon}{2}[u^2 - (x^1)^2]} \cos x^1 u \, du$$

$$[\text{III}] \; \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \varepsilon x^1, \quad \Gamma_{11}^2 = \varepsilon x^2.$$

Componentele V_1, V_2 se determină din sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x^1} + \varepsilon x^1 V_1 + \varepsilon x^2 V_2 = 0 \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x^2} + \varepsilon x^1 V_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V_2}{\partial x^1} + \varepsilon x^1 V_2 = 0 \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial x^2} = 0. \end{cases}$$

Obținem imediat

$$V_2 = C_2 \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^1)^2},$$

$$V_1 = \varphi(x^1) - C_2 \varepsilon x^1 x^2 \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^1)^2},$$

unde funcția $\varphi(x^1)$ este soluția ecuației diferențiale

$$\varphi' + \varepsilon x^1 \varphi = 0$$

care prin integrare ne dă

$$\varphi = C_1 \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^1)^2}$$

așa încît avem

$$\begin{cases} V_1 = (C_1 - C_2 \varepsilon x^1 x^2) \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^1)^2} \\ V_2 = C_2 \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^1)^2} \end{cases}$$

iar z are expresia

$$z = C_1 \int_0^{x^1} \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}t^2} \mathrm{d}t + C_2 x^2 \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^1)^2} + C_3$$

deci coordonatele carteziene ale spațiului Riemann asociat sînt

$$u^1 = \int_1^{x^1} \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}t^2} \mathrm{d}t, \quad u^2 = x^2 \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^1)^2}$$

[IV] $$\Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = \varepsilon \Gamma^2_{12} = x^1 + \varepsilon x^2.$$

Obținem sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x^1} + (x^1 + \varepsilon x^2) V_2 = 0 \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x^2} + \varepsilon (x^1 + \varepsilon x^2) V_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V_2}{\partial x^1} + \varepsilon (x^1 + \varepsilon x^2) V_2 = 0 \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial x^2} + (x^1 + \varepsilon x^2) V_2 = 0. \end{cases}$$

Avem imediat

$$V_2 = \varphi(x^1) \mathrm{e}^{-x^1 x^2 - \frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2},$$

unde φ verifică ecuația diferențială

$$\varphi' + \varepsilon x^1 \varphi = 0$$

care ne dă prin integrare

$$\varphi = C_2 \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^1)^2}$$

astfel că avem

$$V_2 = C_2 \mathrm{e}^{-x^1 x^2 - \frac{\varepsilon}{2}[(x^1)^2 + (x^2)^2]} .$$

Ținînd seamă de V_2, obținem

$$V_1 = \varepsilon C_2 \mathrm{e}^{-x^1 x^2 - \frac{\varepsilon}{2}[(x^1)^2 + (x^2)^2]} + \psi(x^2),$$

unde $\psi' = 0$, deci $\psi = C_1$, așa încît avem

$$\begin{cases} V_1 = C_1 + C_2\, \varepsilon\, \mathrm{e}^{-x^1 x^2 - \frac{\varepsilon}{2}[(x^1)^2 + (x^2)^2]} \\ V_2 = C_2 \mathrm{e}^{-x^1 x^2 - \frac{\varepsilon}{2}[(x^1)^2 + (x^2)^2]} . \end{cases}$$

Potențialul z are expresia

$$z = C_1 x^1 + C_2 \Big[\varepsilon \int_0^{x^1} \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}(\varepsilon t + x^2)^2} \mathrm{d}t + \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}(\varepsilon x^1 + t)^2} \mathrm{d}t + C_3$$

iar coordonatele carteziene sînt

$$u^1 = x^1,\ u^2 = \varepsilon \int_0^{x^1} \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}(\varepsilon t + x^2)^2} \mathrm{d}t + \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}(\varepsilon x^1 + t)^2} \mathrm{d}t$$

[V] $\Gamma^1_{12} = \varepsilon \Gamma^1_{22} = \gamma,\ \Gamma^2_{11} = \varepsilon \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{22} - \gamma = x^1 + \varepsilon x^2.$

Avem sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x^1} + (x^1 + \varepsilon x^2) V_2 = 0 \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x^2} + \gamma V_1 + \varepsilon (x^1 + \varepsilon x^2) V_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V_2}{\partial x^1} + \gamma V_1 + \varepsilon (x^1 + \varepsilon x^2) V_2 = 0 \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial x^2} + \varepsilon\gamma V_1 + (x^1 + \varepsilon x^2 + \gamma) V_2 = 0 \end{cases}$$

căruia i se asociază sistemul caracteristic

$$\varepsilon \mathrm{d}x^1 = -\mathrm{d}x^2 = \frac{\mathrm{d}V_1}{\gamma V_1} = \frac{\mathrm{d}V_2}{\gamma V_2}$$

ale cărui integrale prime sînt

$$x^1 + \varepsilon x^2 = K_1, \quad V_1 \mathrm{e}^{\gamma x^2} = K_2, \quad V_2 \mathrm{e}^{\gamma x^2} = K_3$$

de unde obţinem

$$V_1 = \varphi(t)\mathrm{e}^{-\gamma x^2}, \quad V_2 = \psi(t)\mathrm{e}^{-\gamma x^2}, \quad \text{unde } t = x^1 + \varepsilon x^2,$$

funcţiile φ, ψ fiind soluţii ale sistemului

$$\varphi' + t\psi = 0$$
$$\psi' + \varepsilon t\psi + \gamma\varphi = 0.$$

Eliminînd funcţia ψ, obţinem pentru φ ecuaţia diferenţială

$$t\varphi'' + (\varepsilon t^2 - 1)\varphi' - \gamma t^2 \varphi = 0.$$

Dacă φ_1, φ_2 sînt două soluţii particulare independente ale acestei ecuaţii, atunci soluţia generală se scrie

$$\varphi = C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2$$

de unde obţinem

$$\psi = -\frac{1}{t}(C_1 \varphi_1' + C_2 \varphi_2')$$

aşa încît putem scrie

$$\begin{cases} V_1 = (C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2)\,\mathrm{e}^{-\gamma x^2} \\ V_2 = -\dfrac{1}{t}(C_1 \varphi_1' + C_2 \varphi_2')\,\mathrm{e}^{-\gamma x^2}. \end{cases}$$

Potenţialul z din care derivă acest vector este

$$z = C_1\left[\int_0^{x^1} \varphi_1(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^{x^2} \frac{\varphi_1'(x^1 + \varepsilon u)}{x^1 + \varepsilon u}\,\mathrm{e}^{-\gamma u}\,\mathrm{d}u\right] +$$
$$+ C_2\left[\int_0^{x^2} \varphi_2(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^{2} \frac{\varphi_2'(x^1 + \varepsilon u)}{x^1 + \varepsilon u}\,\mathrm{e}^{-\gamma u}\,\mathrm{d}u\right] + C_3$$

iar coordonatele carteziene sînt deci

$$u^i = \int_0^{x^1} \varphi_i(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^{x^2} \frac{\varphi_i'(x^1 + \varepsilon u)}{x^1 + \varepsilon u}\,\mathrm{e}^{-\gamma u}\,\mathrm{d}u, \quad (i = 1, 2)$$

[VI] $\Gamma^1_{11} = 1,\ \Gamma^1_{12} = \varepsilon\Gamma^1_{22} = \gamma,\ \Gamma^2_{11} = \varepsilon\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{22} + \varepsilon - \gamma = x^1 + \varepsilon x^2.$

Componentele V_1, V_2 sînt soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x^1} + V_1 + (x^1 + \varepsilon x^2)\,V_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial V_2}{\partial x^1} + \gamma V_1 + \varepsilon(x^1 + \varepsilon x^2)V_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x^2} + \gamma V_1 + \varepsilon(x^1 + \varepsilon x^2)V_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial V_2}{\partial x^2} + \varepsilon\gamma V_1 + (x^1 + \varepsilon x^2 + \gamma - \varepsilon)\,V_2 = 0 \end{cases}$$

al cărui sistem caracteristic se scrie

$$\varepsilon\,\mathrm{d}x^1 = -\,\mathrm{d}x^2 = \frac{\mathrm{d}V_1}{(\gamma - \varepsilon)\,V_1} = \frac{\mathrm{d}V_2}{(\gamma - \varepsilon)\,V_2}$$

care are integralele prime

$$x^1 + \varepsilon x^2 = K_1, \quad V_1\, e^{x^1+\gamma x^2} = K_2, \quad V_2 e^{x^1+\gamma x^2} = K_3$$

deci avem

$$V_1 = \varphi(t)\, e^{-(x^1+\gamma x^2)}, \quad V_2 = \psi(t)\, e^{-(x^1+\gamma x^2)}, \text{ (unde } t = x^1 + \varepsilon x^2)$$

funcțiile φ, ψ determinîndu-se din sistemul

$$\varphi' + t\psi = 0$$
$$\psi' + (\varepsilon t - 1)\,\psi + \gamma\varphi = 0.$$

Eliminînd pe ψ între aceste ecuații, obținem ecuația

$$t\varphi'' + (\varepsilon t^2 - t - 1)\,\varphi' - \gamma t^2\,\varphi = 0$$

care are soluția generală

$$\varphi = C_1\,\varphi_1 + C_2\,\varphi_2$$

de unde rezultă

$$\psi = -\frac{1}{t}\,(C_1\,\varphi_1' + C_2\,\varphi_2')$$

astfel că avem

$$\begin{cases} V_1 = (C_1\,\varphi_1 + C_2\,\varphi_2)\, e^{-(x^1+\gamma x^2)} \\ V_2 = -\dfrac{1}{t}(C_1\,\varphi_1' + C_2\,\varphi_2')\, e^{-(x^1+\gamma x^2)}. \end{cases}$$

Potențialul z se scrie

$$z = C_1\left[\int_0^{x^1} e^{-u}\,\varphi_1(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^{x^2} \frac{\varphi_1'(x^1+\varepsilon u)}{x^1+\varepsilon u}\, e^{-(x^1+\gamma u)}\,\mathrm{d}u\right] +$$
$$+ C_2\left[\int_0^{x^1} e^{-u}\,\varphi_2(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^{x^2} \frac{\varphi_2'(x^1+\varepsilon u)}{x^1+\varepsilon u}\, e^{-(x^1+\gamma u)}\,\mathrm{d}u\right] + C_3$$

de unde rezultă că coordonatele carteziene au expresiile

$$u^i = \int_0^{x^1} e^{-u}\,\varphi_i(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^{x^2} \frac{\varphi_i'(x^1+\varepsilon u)}{x^1+\varepsilon u}\, e^{-(x^1+\gamma u)}\,\mathrm{d}u, \quad (i = 1, 2)$$

$$\text{[VII]} \quad \Gamma^1_{11} = \tau, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = \gamma, \quad \Gamma^2_{11} = x^1.$$

Obținem sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x^1} + \tau V_1 + x^1\, V_2 = 0 \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x^2} + \gamma V_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V_2}{\partial x^1} + \gamma V_1 = 0 \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial x^2} + \gamma V_2 = 0 \end{cases}$$

de unde rezultă imediat

$$V_1 = \varphi(x^1) \quad e^{-\gamma x^2}, \quad V_2 = \psi(x^1) \quad e^{-\gamma x^2}$$

funcţiile φ, ψ verificînd sistemul

$$\varphi' + \tau\varphi + x^1 \psi = 0,$$
$$\psi' + \gamma\varphi = 0.$$

Eliminînd pe φ, obţinem ecuaţia diferenţială

$$\psi'' + \tau\psi' - \gamma x^1 \Psi = 0$$

a cărei soluţie generală este

$$\psi = \gamma(C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2)$$

de unde deducem

$$\varphi = -(C_1 \psi_1' + C_2 \psi_2')$$

astfel că avem

$$\begin{cases} V_1 = -(C_1 \psi_1' + C_2 \psi_2')\, e^{-\gamma x^2} \\ V_2 = \gamma(C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2)\, e^{-\gamma x^2}. \end{cases}$$

Expresia potenţialului este

$$z = C_1 [\psi_1(0) - \psi_1(x^1) e^{-\gamma x^2}] + C_2 [\psi_2(0) - \psi_2(x^1) e^{-\gamma x^2}] + C_3$$

deci coordonatele carteziene ale spaţiului $V_2(x^1, x^2)$ sînt

$$u^i = \psi_i(0) - \psi_i(x^1) e^{-\gamma x^2}, \quad (i = 1, 2)$$

$$[\text{VIII}] \quad \Gamma^1_{11} = \tau, \quad \Gamma^2_{11} = -x^2, \quad \Gamma^2_{12} = \gamma$$

unde $\tau = 0, 1$, iar $\gamma^2 - \tau\gamma = 1 = 0$.

Avem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x^1} + \tau V_1 - x^2 V_2 = 0 \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x^2} + \gamma\, V_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V_2}{\partial x^1} + \gamma V_2 = 0 \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$$

de unde rezultă imediat

$$V_2 = C_2\, e^{-\gamma x^1}, \quad V_1 = \varphi(x^1) - \gamma\, C_2 x^2\, e^{-\gamma x^1}$$

funcţia φ verificînd ecuaţia

$$\varphi' + \gamma^2 C_2\, x^2\, e^{-\gamma x^1} + \tau(\varphi - \gamma\, C_2\, x^2\, e^{-\gamma x^1}) - C_2\, x^2\, e^{-\gamma x^1} = 0.$$

Se disting două cazuri :

Cazul a. $\tau = 0$, de unde rezultă $\gamma^2 = 1$ şi $\varphi' = 0$, deci $\varphi = C$
În acest caz avem

$$\begin{cases} V_1 = C_1 - C_2\, \gamma\, x^2\, e^{-\gamma x^1} \\ V_2 = C_2\, e^{-\gamma x^1}. \end{cases}$$

Potenţialul z este dat de expresia

$$z = C_1 x^1 + C_2 x^2 \mathrm{e}^{-\gamma x^1} + C_3$$

iar coordonatele carteziene sînt

$$u^1 = x^1, \ u^2 = x^2 \mathrm{e}^{-\gamma x^1}.$$

Cazul b. $\tau = 1$, de unde rezultă $\gamma^2 - \gamma - 1 = 0$ şi $\varphi' + \varphi = 0$, deci $\varphi = C_1 \mathrm{e}^{-x^1}$.

În acest caz avem

$$\begin{cases} V_1 = C_1 \mathrm{e}^{-x^1} - C_2 \gamma x^2 \mathrm{e}^{-\gamma x^1} \\ V_2 = C_2 \mathrm{e}^{-\gamma x^1}. \end{cases}$$

Potenţialul z este în acest caz

$$z = - C_1 \mathrm{e}^{-x^1} + C_2 x^2 \mathrm{e}^{-\gamma x^1} + C_3$$

iar coordonatele carteziene sînt

$$u^1 = - \mathrm{e}^{-x^1}, \quad u^2 = x^2 \mathrm{e}^{-\gamma x^1}$$

$$[\mathrm{IX}] \quad \Gamma^1_{11} = x^1, \quad \Gamma^2_{22} = \varepsilon x^2.$$

Rezultă sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x^1} + x^1 V_1 = 0 \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V_2}{\partial x^1} = 0 \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial x^2} + \varepsilon x^2 V_2 = 0 \end{cases}$$

de unde obţinem imediat

$$V_1 = C_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^1)^2}$$

$$V_2 = C_2 \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2}.$$

Expresia potenţialului z este

$$z = C_1 \int_0^{x^1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} \mathrm{d}t + C_2 \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}t^2} \mathrm{d}t + C_3$$

iar expresia coordonatelor carteziene este

$$u^1 = \int_0^{x^1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} \mathrm{d}t, \ \ u^2 = \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}t^2} \mathrm{d}t$$

$$[\mathrm{X}] \quad \Gamma^1_{11} = x^1 + x^2, \ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{22} = x^1 + x^2 + \gamma, \ \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{12} = 1, \ \Gamma^2_{22} = \gamma + 1.$$

Componentele V_1, V_2 sînt soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x^1} + (x^1 + x^2)\, V_1 + V_2 = 0 \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x^2} + (x^1 + x^2 + \gamma)\, V_1 + V_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V_2}{\partial x^1} + (x^1 + x^2 + \gamma)\, V_1 + V_2 = 0 \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial x^2} + (x^1 + x^2 + \gamma) V_1 + (\gamma + 1) V_2 = 0 \end{cases}$$

căruia i se asociază sistemul caracteristic

$$\mathrm{d}x^1 = -\,\mathrm{d}x^2 = \frac{\mathrm{d}V_1}{\gamma V_1} = \frac{\mathrm{d}V_2}{\gamma V_2}$$

care are integralele prime

$$x^1 + x^2 = K_1, \quad V_1\, \mathrm{e}^{-\gamma x^1} = K_2, \quad V_2\, \mathrm{e}^{-\gamma x^1} = K_3$$

deci putem scrie

$$V_1 = \varphi(t)\, \mathrm{e}^{\gamma x^1}, \quad V_2 = \psi(t)\, \mathrm{e}^{\gamma x^1}, \quad (\text{unde } t = x^1 + x^2)$$

funcţiile φ, ψ verificînd sistemul

$$\varphi' + (t + \gamma)\, \varphi + \psi = 0$$

$$\psi' + (\gamma + 1)\, \psi + (t + \gamma)\, \varphi = 0.$$

Eliminînd funcţia ψ, obţinem ecuaţia diferenţială

$$\varphi'' + (t + 2\gamma + 1)\, \varphi' + (\gamma t + \gamma^2 + 1)\, \varphi = 0$$

a cărei soluţie generală este

$$\varphi = C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2$$

de unde rezultă

$$\psi = -\, [(t + \gamma)\, (C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2) + C_1 \varphi_1' + C_2 \varphi_2']$$

astfel că avem

$$\begin{cases} V_1 = (C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2)\, \mathrm{e}^{\gamma x^1} \\ V_2 = -\, [(t + \gamma)\, (C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2) + C_1 \varphi_1' + C_2 \varphi_2']\, \mathrm{e}^{\gamma x^1}. \end{cases}$$

Acest vector derivă din potenţialul

$$z = C_1 \left[\int_0^{x^1} \mathrm{e}^{\gamma u}\, \varphi_1(u)\, \mathrm{d}u - \mathrm{e}^{\gamma x^1} \int_0^{x^2} \varphi_1'(x^1 + u) \mathrm{d}u - \mathrm{e}^{\gamma x^1} \int_0^{x^2} (x^1 + u + \gamma) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\, \varphi_1(x^1 + u)\, \mathrm{d}u \right] + C_2 \left[\int_0^{x^1} \mathrm{e}^{\gamma u} \varphi_2(u)\, \mathrm{d}u - \mathrm{e}^{\gamma x^1} \int_0^{x^2} \varphi_2'(x^1 + u)\, \mathrm{d}u \, - \right.$$

$$\left. -\, \mathrm{e}^{\gamma x^1} \int_0^{x^2} (x^1 + u + \gamma)\, \varphi_2(x^1 + u)\, \mathrm{d}u \right] + C_3$$

iar coordonatele carteziene ale spațiului Riemann asociat sînt

$$u^i = \int_0^{x^1} \mathrm{e}^{\gamma u}\, \varphi_i(u)\,\mathrm{d}u - \mathrm{e}^{\gamma x^1} \int_0^{x^2} \varphi_i'(x^1 + u)\,\mathrm{d}u - \mathrm{e}^{\gamma x^1} \int_0^{x^2} (x^1 +$$

$$+ u + \gamma)\, \varphi_i(x^1 + u)\,\mathrm{d}u, \ (i = 1, 2)$$

[XI] $\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{12} = x^1 + x^2$, $\Gamma^1_{22} = x^1 + (1 - \beta)\, x^2 - \gamma$, $\Gamma^2_{22} = \beta x^2 + \gamma$.

Obținem sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x^1} + (x^1 + x^2)\, V_1 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial V_1}{\partial x^2} + (x^1 + x^2)\, V_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V_2}{\partial x^1} (x^1 + x^2)\, V_1 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial V_2}{\partial x^2} + [x^1 + (1 - \beta)\, x^2 - \gamma] V_1 + (\beta x^2 + \gamma) \cdot \\ \qquad\qquad\qquad \cdot V_2 = 0 \end{cases}$$

de unde avem imediat

$$V_1 = \varphi\,(x^2)\, \mathrm{e}^{-x^1 x^2 - \frac{1}{2}(x^1)^2}.$$

funcția φ verificînd ecuația

$$\varphi' + x^2 \varphi = 0, \text{ deci } \varphi = C_1\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2)^2},$$

astfel că

$$V_1 = C_1\, \mathrm{e}^{-x^1 x^2 - \frac{1}{2}[(x^1)^2 + (x^2)^2]}.$$

Avem apoi

$$V_2 = \psi\,(x^2) + C_1 + \mathrm{e}^{-x^1 x^2 - \frac{1}{2}[(x^1)^2 + (x^2)^2]},$$

unde ψ satisface ecuația diferențială

$$\psi' + (\beta x^2 + \gamma)\, \psi = 0$$

care ne dă prin integrare

$$\psi = C_2\, \mathrm{e}^{-\gamma x^2 - \frac{\beta}{2}(x^2)^2}$$

de unde rezultă

$$\begin{cases} V_1 = C_1\, \mathrm{e}^{-x^1 x^2 - \frac{1}{2}[(x^1)^2 + (x^2)^2]} \\[2ex] V_2 = C_1\, \mathrm{e}^{-x^1 x^2 - \frac{1}{2}[(x^1)^2 + (x^2)^2]} + C_2\, \mathrm{e}^{-\gamma x^2 - \frac{\beta}{2}(x^2)^2}. \end{cases}$$

Potențialul z din care derivă acest vector are expresia

$$z = C_1 \left[\int_0^{x^1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-x^1 t - \frac{(x^1)^2 + t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \right] + C_2 \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}t^2 - \gamma t}\,\mathrm{d}t + C_3$$

care ne dă expresiile coordonatelor carteziene

$$u^1 = \int_0^{x^1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_0^{x^2} e^{-x^1 t - \frac{(x^1)^2 + t^2}{2}} dt, \; u^2 = \int_0^{x^2} e^{-\frac{\beta}{2} t^2 - \gamma t} dt$$

$$[\mathrm{XII}] \; \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \mathrm{x}^1, \; \Gamma^2_{11} = -\Gamma^2_{22} = 1.$$

Sistemul ce defineşte pe V_1, V_2 se scrie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x^1} + x^1 V_1 + V_2 = 0 \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x^2} + x^1 V_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V_2}{\partial x^1} + x^1 V_2 = 0 \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial x^2} - V_2 = 0 \end{cases}$$

de unde obţinem imediat

$$V_2 = \varphi(x^1) \, e^{x^2}$$

funcţia φ verificînd ecuaţia diferenţială

$$\varphi' + x^1 \varphi = 0$$

care ne dă prin integrare

$$\varphi = C_2 \, e^{-\frac{1}{2}(x^1)^2}$$

astfel că avem

$$V_2 = C_2 \, e^{x^2 - \frac{1}{2}(x^1)^2},$$

Rezultă apoi

$$V_1 = \psi(x^1) - C_2 \, x^1 \, e^{x^2 - \frac{1}{2}(x^1)^2},$$

unde ψ verifică ecuaţia

$$\psi'' + x^1 \psi = 0$$

care ne dă

$$\psi = C_1 \, e^{-\frac{1}{2}(x^1)^2}$$

de unde deducem

$$\begin{cases} V_1 = C_1 \, e^{-\frac{1}{2}(x^1)^2} - C_2 \, x^1 \, e^{x^2 - \frac{1}{2}(x^1)^2} \\ V_2 = C_2 \, e^{x^2 - \frac{1}{2}(x^1)^2}. \end{cases}$$

Potenţialul z are atunci expresia

$$z = C_1 \int_0^{x^1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + C_2 \left[e^{x^2 - \frac{1}{2}(x^1)^2} - 1 \right] + C_3$$

iar coordonatele carteziene sînt

$$u^1 = \int_0^{x^1} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt, \; u^2 = e^{x^2 - \frac{1}{2}(x^1)^2} - 1$$

$$[\text{XIII}] \; \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = 1 + x^1, \; \Gamma^2_{11} = -\Gamma^2_{22} = 1.$$

Obţinem sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x^1} + (1 + x^1)\, V_1 + V_2 = 0 \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x^2} + (1 + x^1)\, V_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V_2}{\partial x^1} + (1 + x^1)\, V_2 = 0 \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial x^2} - V_2 = 0 \end{cases}$$

de unde avem imediat

$$V_2 = \varphi\,(x^1)\, e^{x^2},$$

unde φ este soluţia ecuaţiei

$$\varphi' + (1 + x^1)\, \varphi = 0, \quad \text{deci } \varphi = C_2\, e^{-x^1 - \frac{1}{2}(x^1)^2},$$

astfel că

$$V_2 = C_2\, e^{x^2 - x^1 - \frac{1}{2}(x^1)^2}.$$

Avem apoi

$$V_1 = \psi\,(x^1) - C_2\,(1 + x^1)\, e^{x^2 - x^1 - \frac{1}{2}(x^1)^2},$$

unde ψ satisface ecuaţia

$$\psi' + (1 + x^1)\; \psi = 0, \; \text{deci } \psi = C_1\, e^{-x^1 - \frac{1}{2}(x^1)^2}.$$

Rezultă componentele

$$\begin{cases} V_1 = C_1\, e^{-x^1 - \frac{1}{2}(x^1)^2} - C_2\,(1 + x^1)\, e^{x^2 - x^1 - \frac{1}{2}(x^1)^2} \\ V_2 = C_2\, e^{x^2 - x^1 - \frac{1}{2}(x^1)^2}. \end{cases}$$

Expresia lui z este

$$z = C_1 \int_0^{x^1} e^{-t - \frac{t^2}{2}}\, dt + C_2 \left[e^{x^2 - x^1 - \frac{1}{2}(x^1)^2} - 1 \right] + C_3$$

iar coordonatele carteziene au expresiile

$$u^1 = \int_0^{x^1} e^{-t-\frac{t^2}{2}}\, dt, \quad u^2 = e^{x^2 - x^1 - \frac{1}{2}(x^1)^2} - 1$$

[XIV] $\Gamma^1_{11} = x^1, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = \gamma, \quad \Gamma^2_{11} = \tau, \quad (\gamma \neq 0).$

Componentele V_1, V_2 sînt soluţiile sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x^1} + x^1 V_1 + \tau V_2 = 0 \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x^2} + \gamma V_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V_2}{\partial x^1} + \gamma V_1 = 0 \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial x^2} + \gamma V_2 = 0 \end{cases}$$

care ne dă imediat

$$V_1 = \varphi(x^1)\, e^{-\gamma x^2}, \quad V_2 = \psi(x^1)\, e^{-\gamma x^2}$$

funcţiile φ, ψ verificînd sistemul

$$\varphi' + x^1 \varphi + \tau \psi = 0$$
$$\psi' + \gamma \varphi = 0.$$

Eliminînd pe φ, obţinem ecuaţia diferenţială

$$\psi'' + x^1 \psi' - \gamma\tau\, \psi = 0$$

care are soluţia generală

$$\psi = \gamma (C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2)$$

de unde rezultă

$$\varphi = -(C_1 \psi_1' + C_2 \psi_2').$$

Deci avem

$$\begin{cases} V_1 = -(C_1 \psi_1' + C_2 \psi_2')\, e^{-\gamma x^2} \\ V_2 = \gamma (C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2)\, e^{-\gamma x^2}. \end{cases}$$

Acest vector derivă din potenţialul

$$z = C_1 [\psi_1(0) - \psi_1(x^1)\, e^{-\gamma x^2}] + C_2 [\psi_2(0) - \psi_2(x^1)\, e^{-\gamma x^2}] + C_3$$

iar coordonatele carteziene sînt

$$u^i = \psi_i(0) - \psi_i(x^1)\, e^{-\gamma x^2}, \quad (i = 1,2),$$

[XV] $\Gamma^1_{12} = \rho, \ \Gamma^2_{22} = \alpha, \ \Gamma^1_{22} = \rho(\alpha - \rho)\, x^1 + \beta\, x^2 + \gamma, \ (\rho \neq 0).$

Obţinem sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x^1} = 0 \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x^2} + \rho\, V_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V_2}{\partial x^1} + \rho V_1 = 0 \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial x^2} + [\rho(\alpha - \rho)\, x^1 + \beta\, x^2 + \gamma]\, V_1 + \alpha V_2 = 0 \end{cases}$$

care ne dă imediat

$$V_1 = C_1\, e^{-\rho x^2}, \quad V_2 = \varphi(x^2) - C_1\, \rho\, x^1\, e^{-\rho x^2},$$

unde φ satisface ecuaţia diferenţială

$$\varphi' + \alpha\,\varphi + C_1\,(\beta\, x^2 + \gamma)\, e^{-\rho x^2} = 0$$

a cărei soluţie generală este

$$\varphi = C_1\, e^{-\rho x^2}\left[\frac{\beta}{(\alpha-\rho)^2} - \frac{\beta}{\alpha-\rho}\, x^2 - \frac{\gamma}{\alpha-\rho}\right] + C_2\, e^{-\alpha x^2}$$

de unde rezultă

$$\begin{cases} V_1 = C_1\, e^{-\rho x^2} \\ V_2 = C_1\left[\dfrac{\beta}{(\alpha-\rho)^2} - \dfrac{\beta}{\alpha-\rho}\, x^2 - \dfrac{\gamma}{\alpha-\rho} - \rho\, x^1\right] e^{-\rho x^2} + C_2\, e^{-\alpha x^2}. \end{cases}$$

Potenţialul z este

$$z = C_1\left\{\left[\frac{\beta(\alpha-2\rho)}{\rho^2(\alpha-\rho)^2} + \frac{\beta x^2+\gamma}{\rho(\alpha-\rho)} + x^1\right] e^{-\rho x^2} - \frac{\beta(\alpha-2\rho)}{\rho^2(\alpha-\rho)^2} - \frac{\gamma}{\rho(\alpha-\rho)}\right\} +$$

$$+ C_2\,\frac{1}{\alpha}\,(1 - e^{-\alpha x^2}) + C_3$$

iar coordonatele carteziene sînt

$$u^1 = \left[\frac{\beta(\alpha-2\rho)}{\rho^2\,(\alpha-\rho)^2} + \frac{\beta x^2+\gamma}{\alpha(\alpha-\rho)} + x^1\right] e^{-\rho x^2} - \frac{\beta(\alpha-2\rho)}{\rho^2(\alpha-\rho)^2} - \frac{\gamma}{\rho(\alpha-\rho)},$$

$$u^2 = \frac{1}{\alpha}\,(1 - e^{-\alpha x^2})$$

[XVI] $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \tau, \quad \Gamma^1_{22} = \varepsilon\, x^2, \quad \Gamma^2_{22} = b x^2 + c.$

Componentele V_1, V_2 se determină din sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x^1} + \tau\, V_1 = 0 \\ \dfrac{\partial V^1}{\partial x^2} + \tau\, V_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V_2}{\partial x^1} + \tau\, V_2 = 0 \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial x^2} + \varepsilon\, x^2 V_1 + (b x^2 + c)\, V_2 = 0 \end{cases}$$

care ne dă imediat

$$V_1 = \varphi(x^2)\; e^{-\tau x^1}, \quad V_2 = \psi(x^2)\; e^{-\tau x^1},$$

unde funcţiile φ, ψ verifică sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\varphi' + \tau\psi = 0$$

$$\psi' + \varepsilon\, x^2 \varphi + (b x^2 + c)\, \psi = 0.$$

Eliminînd ψ obţinem ecuaţia

$$\varphi'' + (b x^2 + c)\, \varphi' - \varepsilon\tau\, x^2 \varphi = 0$$

care are soluţia generală

$$\varphi = \tau\,(C_1\varphi_1 + C_2\,\varphi_2)$$

de unde rezultă

$$\psi = -\,(C_1\,\psi'_1 + C_2\,\varphi'_2)$$

astfel că avem vectorul

$$\begin{cases} V_1 = \tau(C_1\,\varphi_1 + C_2\,\varphi_2)\,\mathrm{e}^{-\tau x^1} \\ V_2 = -\,(C_1\varphi'_1 + C_2\varphi'_2)\,\mathrm{e}^{-\tau x^1} \end{cases}$$

care derivă din potenţialul

$$z = C_1[\varphi_1(0) - \varphi_1(x^2)\ \mathrm{e}^{-\tau x^1}] + C_2[\varphi_2(0) - \varphi_2(x^2)\ \mathrm{e}^{-\tau x^1}] + C_3.$$

Coordonatele carteziene ale spaţiului $V_2(x^1, x^2)$ sînt

$$u^i = \varphi_i(0) - \varphi_i(x^2)\,\mathrm{e}^{-\tau x^1}, \quad (i = 1,\ 2)$$

[XVII] $\Gamma^1_{11} = 1, \quad \Gamma^1_{12} = \gamma, \quad \Gamma^1_{22} = -\,\gamma(\varepsilon\,x^2 - \gamma), \quad \Gamma^2_{22} = \varepsilon\,x^2.$

Obţinem sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x^1} + V_1 = 0 \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x^2} + \gamma V_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V_2}{\partial x^1} + \gamma V_1 = 0 \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial x^2} - \gamma(\varepsilon x^2 - \gamma)\ V_1 + \varepsilon\,x^2\,V_2 = 0 \end{cases}$$

de unde rezultă imediat

$$V_1 = \varphi(x^2)\ \mathrm{e}^{-x^1}$$

funcţia φ satisfăcînd ecuaţia

$$\varphi' + \gamma\varphi = 0$$

care ne dă prin integrare

$$\varphi = C_1\,\mathrm{e}^{-\gamma x^2}$$

astfel că avem

$$V_1 = C_1\ \mathrm{e}^{-(x^1+\gamma x^2)}$$

de unde deducem

$$V_2 = \psi\,(x^2) + C_1\,\gamma\ \mathrm{e}^{-(x^1+\gamma x^2)}$$

funcţia ψ fiind soluţia ecuaţiei

$$\psi' + \varepsilon x^2\psi = 0$$

de unde rezultă

$$\psi = C_2\ \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2}.$$

Avem deci componentele

$$\begin{cases} V_1 = C_1\ \mathrm{e}^{-(x^1+\gamma x^2)} \\ V_2 = C_1\gamma\ \mathrm{e}^{-(x^1+\gamma x^2)} + C_2\ \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2}. \end{cases}$$

Potențialul z din care derivă acest vector are expresia

$$z = C_1\left[1 - \mathrm{e}^{-(x^1+\gamma x^2)}\right] + C_2\int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}t^2}\,\mathrm{d}t + C_3$$

iar coordonatele carteziene sînt deci

$$u^1 = 1 - \mathrm{e}^{-(x^1+\gamma x^2)}, \quad u^2 = \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}t^2}\,\mathrm{d}t$$

[XVIII] $\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = \varepsilon x^2 \quad , \quad \Gamma^1_{22} = \varepsilon x^1 + \alpha.$

Integrînd sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x^1} = 0 \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x^2} + \varepsilon x^2 V_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V_2}{\partial x^1} + \varepsilon x^2 V_1 = 0 \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial x^2} + (\varepsilon x^1 + \alpha)\, V_1 + \varepsilon x^2 V_2 = 0 \end{cases}$$

obținem imediat

$$\begin{cases} V_1 = C_1\, \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2} \\ V_2 = \varphi(x^2) - C_1\, \varepsilon x^1 x^2\, \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2}, \end{cases}$$

unde φ satisface ecuația

$$\varphi' + \varepsilon x^2 \varphi + C_1\, \alpha\, \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2} = 0$$

care are soluția

$$\varphi = (C_2 - C_1\, \alpha\, x^2)\, \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2}.$$

Avem deci vectorul de componente

$$\begin{cases} V_1 = C_1\, \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2}. \\ V_2 = (C_2 - C_1\, \varepsilon x^1 x^2 - C_1\, \alpha x^2)\, \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2} \end{cases}$$

care derivă din potențialul

$$z = C_1\left[(x^1 + \varepsilon\alpha)\, \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2} - \varepsilon\alpha\right] + C_2\int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}t^2}\,\mathrm{d}t + C_3.$$

Expresia coordonatelor carteziene este

$$u^1 = (x^1 + \varepsilon\alpha)\, \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2} - \varepsilon\alpha, \quad u^2 = \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}t^2}\,\mathrm{d}t$$

[XIX] $\Gamma^1_{11} = 1, \quad \Gamma^1_{12} = \varepsilon x^2, \quad \Gamma^1_{22} = -\,\varepsilon(\gamma x^2 + 1), \quad \Gamma^2_{22} = \varepsilon x^2 + \gamma.$

Componentele V_1, V_2 satisfac sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x^1} + V_1 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial V_1}{\partial x^2} + \varepsilon x^2\, V_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V_2}{\partial x^1} + \varepsilon x^2\, V_1 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial V_2}{\partial x^2} - \varepsilon\,(\gamma x^2 + 1)\, V_1 + (\varepsilon x^2 + \gamma)\, V_2 = 0 \end{cases}$$

care ne dă imediat

$$V_1 = \varphi\,(x^2)\, \mathrm{e}^{-x^1}$$

unde $\varphi' + \varepsilon x^2 \varphi = 0$, deci $\varphi = C_1\, \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2}$.

Avem astfel

$$V_1 = C_1\, \mathrm{e}^{-x^1 - \frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2}$$

de unde rezultă

$$V_2 = \psi\,(x^2) + C_1\, \varepsilon x^2\, \mathrm{e}^{-x^1 - \frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2}$$

cu $\psi' + (\varepsilon x^2 + \gamma)\,\psi = 0$, deci $\psi = C_2\, \mathrm{e}^{-\gamma x^2 - \frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2}$.

Putem scrie

$$\begin{cases} V_1 = C_1\, \mathrm{e}^{-x^1 - \frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2} \\[2ex] V_2 = C_1 \varepsilon x^2\, \mathrm{e}^{-x^1 - \frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2} + C_2\, \mathrm{e}^{-\gamma x^2 - \frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2}. \end{cases}$$

Potențialul z este

$$z = C_1 \left[1 - \mathrm{e}^{-x^1 - \frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2} \right] + C_2 \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-\gamma t - \frac{\varepsilon}{3} t^2}\, \mathrm{d}t + C_3$$

iar coordonatele carteziene sînt deci

$$u^1 = 1 - \mathrm{e}^{-x^1 - \frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2}, \quad u^2 = \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-\gamma t - \frac{\varepsilon}{2} t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Primită la redacție la 18 august 1968.

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej“,
București, Str. Polizu nr. 1.

CHAMPS DE VECTEURS PARALLÈLES DANS DES ESPACES A_2 AVEC CONNEXION AFFINE LINÉAIRE LOCALE EUCLIDIENNE

(RÉSUMÉ)

En utilisant un théorème démontré par Tiberiu Postelnicu, se référant à la réduction de la connexion des espaces $A_2(X^1, X^2)$ à une forme canonique avec connexion affine linéaire locale

euclidienne, on détermine les champs de vecteurs parallèles potentiels des espaces A_2 et on donne certaines propriétés de ces champs de vecteurs.

BIBLIOGRAFIE

1. F. Abramovici, *Champs parallèles dans les espaces projectifs euclidiens*. Lucrările consfătuirii de geometrie diferenţială, Timişoara, 1955, p. 263—267.
2. P. Eisenhart, *Non Riemannian Geometry*, p. 31.
3. V. şi I. Levine, *Fields of Parallel Vectors in Projectively Flat Spaces*. Duke Mathématical Journal, **16**, 23—32 (1949).
4. A. Lopschitz, *Sugli spazi riemanniani contenenti un campo di giaciture parallele*. Travaux de Séminaire de Kagan, *II—III*, 327—333 (1935).
5. T. Postelnicu, *Spaţii A_2 cu conexiune afină liniară local euclidiene*. Revista Universităţii „C. I. Parhon" Bucureşti, *4—5*, 101—131 (1954).
6. Gh. Vrănceanu, *Lecţii de geometrie diferenţială*, Vol. I, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1962, p. 214—217.
7. Gh. Vrănceanu, *Sur les espaces à connexion projective*. Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, **242**, 61—63 (1955).
8. Young Chow-Wong, *A note on Levine Paper*. Duke Mathématical Journal, **20**, 119—125.

TEOREME DE LIMITĂ PRIVIND FUNCŢIILE BESSEL K_0 şi K_1

DE

N. MARCOV

Se demonstrează teoremele 1,2 şi 3, unde integralele sînt luate pe un arc simplu admiţînd tangentă şi curbură variind continuu în orice punct, $\theta(s)$ fiind unghiul făcut de tangenta la arc şi axa Ox, iar $\rho(s,t)$ distanţa între punctele s şi t ale arcului.

Ecuaţiile mişcării plane permanente a fluidelor vîscoase incompresibile, electroconductoare, în jurul unor profile subţiri, sînt ecuaţii neliniare. Liniarizarea acestor ecuaţii, prin metoda lui Oseen, reduce studiul acestei mişcări fluide, [1], la rezolvarea următoarei ecuaţii integrale pentru funcţia $C(t)$:

$$c(b-a)\,T_1(s) = (a-b)\int_0^l \overline{C(t)}\,\frac{\mathrm{d}t}{\xi + i\eta} +$$

$$+ (b-c)\int_0^l \left\{\overline{C(t)}\,\frac{|a|\,\rho}{\xi + i\eta}\,K_1(|a|\,\rho) + C(t)\;a\,K_0(|a|\,\rho)\right\} \mathrm{e}^{a\xi}\,\mathrm{d}t +$$

$$+ (c-a)\int_0^l \left\{\overline{C(t)}\,\frac{b\,\rho}{\xi + i\eta}\,K_1(b\rho) + C(t)\,bK_0(b\rho)\right\} \mathrm{e}^{b\xi}\,\mathrm{d}t.$$

Constantele reale a, b, c depind de datele problemei. În cazul în care constantele a, b au valori mari, pentru a rezolva aproximativ această ecuaţie, este necesar să se cunoască valorile expresiilor de forma

$$\int_0^l C(t)\,K_0(a\rho)\,\mathrm{e}^{a\xi}\,a\,\mathrm{d}t$$

pentru valorile mari ale parametrului a. În cele ce urmează vor fi considerate cîteva integrale de această formă.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 3, P. 405—417, BUCUREŞTI, 1969

Fie arcul neted

$$x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad s \in [0, l] \tag{1}$$

s fiind coordonata curbilinie, iar $\theta(s)$ fiind unghiul pe care îl formează tangenta cu axa Ox

$$x'(s) = \cos\, \theta(s), \qquad y' = (s) = \sin\, \theta(s).$$

Notăm cu ρ distanţa între două puncte ale arcului

$$\rho = \rho(t, s) = \{[x(s) - x(t)]^2 + [y(s) - y(t)]^2\}^{\frac{1}{2}}$$

şi însemnăm

$$\xi + i\eta = x(s) - x(t) + i\,[y(s) - y(t)].$$

Teorema 1. *Dacă funcţia* $f : [0, l] \to R$ *este continuă, atunci*

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^l f(t)\, K_0(a\rho)\, a\, \mathrm{d}t = \pi f(s), \qquad s \in (0, l).$$

Teorema 2. *Dacă funcţia f este continuă, iar unghiul $\theta(s)$ are valori în intervalul* $(0, \pi)$, *atunci*

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^l f(t)\, \mathrm{e}^{a\xi} K_0(a\rho)\, a\, \mathrm{d}t = \pi \frac{f(s)}{\sin\, \theta(s)}, \qquad s \in (0, l).$$

Teorema 3. *Dacă funcţia f este holderiană, iar funcţia $\theta(s)$ este hölderiană şi cu valori în intervalul* $(0, \pi)$, *atunci*

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^l f(t)\, \mathrm{e}^{a\xi} K_1(a\rho)\, \mathrm{sgn}\,(s - t)\, a\, \mathrm{d}t = \pi f(s)\, \mathrm{ctg}\, \theta(s), \qquad s \in (0, l).$$

Funcţiile K_0, K_1 sînt funcţiile Bessel de argument imaginar, speţa a doua şi de ordin zero respectiv unu, [2]. Funcţiile ξ, ρ, θ sînt definite prin relaţiile (1), iar în teorema 3 integrala este considerată în sensul valorii principale.

Pentru a demonstra aceste teoreme vom preciza unele proprietăţi ale funcţiilor ρ, ξ, η definite pentru un arc neted, dar fără demonstraţie, aceste proprietăţi fiind o consecinţă a rezultatelor indicate în [3]. De altfel ele pot fi stabilite direct.

Deoarece integranţii integralelor din teoremele 1, 2, 3 au o singularitate în punctul $\rho = 0$, vom considera funcţiile ρ, ξ, η ca funcţii de variabila t şi le vom preciza comportamentul în vecinătatea punctului $t = s$.

Fie arcul neted (1) şi fie $s \in (0, l)$ fixat. Deoarece arcul nu are puncte multiple, rezultă

$$\delta_0 = \min\, \{\rho(0, s),\ \rho(l, s)\} > 0.$$

Însemnăm

$$A = [0, s - \delta] \cup [s + \delta, l], \tag{2}$$

$$\Delta = (s - \delta,\ s + \delta) \quad \text{pentru} \quad \delta \in (0, \delta_0).$$

Funcţiile ξ, ρ sînt funcţii continue în ambele variabile. Prin metoda reducerii la absurd, se arată inegalităţile

$$(3)\qquad 0 < \rho_A \leqslant \rho \quad \text{pentru } t \in A; \qquad \rho_A = \inf_A \{\rho\}$$

$$0 < m \leqslant \frac{\rho(t, s)}{|t - s|} \leqslant 1 \ \text{pentru } t, s \in [0, l]; \ m = \inf_{[0, l]^2} \left\{\frac{\rho}{|t - s|}\right\}.$$

Dacă în plus

$$\theta(s) \in (0, \pi) \quad \text{pentru} \quad (\forall)\, s \in [0, l],$$

atunci

$$(4)\qquad 0 < m_A \leqslant \rho - \xi \qquad \text{pentru } t \in A; \qquad m_A = \inf_A \{\rho - \xi\}$$

$$\frac{\xi}{\rho} \leqslant \frac{|\xi|}{\rho} \leqslant \cos\theta_0 < 1 \qquad \text{pentru } t, s \in [0, l]; \quad \cos\theta_0 = \sup_{[0, l]^2} \left\{\frac{|\xi|}{\rho}\right\}$$

funcţia $|\xi|/\rho$ fiind definită prin continuitate pentru $t = s$.

Deoarece

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\{\xi\, x'(t) + \eta\, y'(t)\}$$

rezultă că funcţia $\partial\rho/\partial t \operatorname{sgn}(t - s)$ este continuă pentru $t \neq s$, iar în $t = s$ fiind definită prin continuitate

$$\lim_{t \to s} \frac{\partial\rho}{\partial t} \operatorname{sgn}(t - s) = 1.$$

Deci există o vecinătate Δ_1 a punctului $t = s$ pe care funcţia considerată este strict pozitivă. Dacă funcţia $f : [0, l] \to R$ este continuă, atunci funcţia $f : \partial\rho/\partial t \operatorname{sgn}(t - s)$ este o funcţie continuă pe această vecinătate Δ_1 a punctului $t = s$. Scriind condiţia continuităţii acestei funcţii în punctul $t = s$, rezultă

$$(5)\qquad (\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ \delta > 0 : \quad (\forall)\, t \in \bar{\Delta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} \operatorname{sgn}(t - s) > 0 \ \text{şi} \ \left| \frac{f(t)}{\dfrac{\partial\rho}{\partial t} \operatorname{sgn}(t - s)} - f(s) \right| < \varepsilon.$$

Funcţia $\xi/\rho \operatorname{sgn}(s - t)$ este o funcţie continuă pentru $t \neq s$, iar în $t = s$ se defineşte prin continuitate

$$\lim_{t \to s} \frac{\xi}{\rho} \operatorname{sgn}(s - t) = \cos\theta(s)$$

astfel încît

$$(6)\qquad (\forall)\ \varepsilon > 0 \qquad (\exists)\ \delta > 0 : \qquad (\forall)\, t \in \bar{\Delta} \Rightarrow$$

$$\cos\theta(s) - \varepsilon \leqslant \frac{\xi}{\rho} \operatorname{sgn}(s - t) \leqslant \cos\theta(s) + \varepsilon.$$

Dacă în plus $\theta(s) \in (0, \pi)$ pentru orice $s \in [0, l]$, atunci această inegalitate se scrie sub forma

$$\cos\theta_{1\varepsilon} \leqslant \frac{\xi}{\rho}\operatorname{sgn}(s-t) \leqslant \cos\theta_{2\varepsilon}, \tag{6'}$$

unde

$$\cos\theta_{1\varepsilon} = \cos\theta(s) - \varepsilon, \quad \cos\theta_{2\varepsilon} = \cos\theta(s) + \varepsilon$$

pentru $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1) \cdot \varepsilon_1 > 0$ se alege prin condiţia

$$|\cos\theta(s) \pm \varepsilon_1| < 1.$$

Deoarece $\theta_{1\varepsilon}, \theta_{2\varepsilon} \in (0, \pi)$, există un număr M cu proprietatea

$$|g(\varepsilon) - g(0)| \leqslant M\varepsilon \quad \text{pentru} \quad (\forall)\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_1) \tag{7}$$

$g(\varepsilon)$ fiind oricare din funcţiile

$$\frac{\pi - \theta_{k\varepsilon}}{\sin\theta_{k\varepsilon}}, \quad \frac{\theta_{k\varepsilon}}{\sin\theta_{k\varepsilon}}, \quad \operatorname{ctg}\theta_{k\varepsilon}, \quad k = 1, 2$$

ale căror valori pentru $\varepsilon = 0$, definite prin continuitate, sînt

$$\frac{\pi - \theta}{\sin\theta}, \quad \frac{\theta}{\sin\theta}, \quad \operatorname{ctg}\theta; \quad \theta = \theta(s); \quad k = 1, 2.$$

Dacă presupunem funcţia $\theta'(s)$ hölderiană, atunci există constantele $H_0 > 0$ şi $\mu \in (0, 1]$ astfel încît

$$|\theta(t_2) - \theta(t_1)| \leqslant H_0 |t_2 - t_1|^{\mu} \quad \text{pentru } t_2, t_1 \in [0, l]. \tag{$*$}$$

În cazul acesta funcţia $1 : \partial\rho/\partial t \operatorname{sgn}(t - s)$ este hölderiană în raport cu t, pe o vecinătate Δ_2 a punctului $t = s$, pentru un acelaşi indice μ. Dacă funcţia $f : [0, l] \to R$ este hölderiană pentru un indice $\nu \in (0,1]$, atunci funcţia $f : \partial\rho/\partial t \operatorname{sgn}(t - s)$ este hölderiană pe intervalul Δ_2 şi verifică o inegalitate de tipul ($*$). În cazul particular $t_2 = t$, $t_1 = s$ se obţine

$$\left| \frac{f(t)}{\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\operatorname{sgn}(t-s)} - f(s) \right| \leqslant H' |t - s|^{\lambda} \leqslant H\rho^{\lambda} \quad \text{pentru } t \in \Delta_2, \tag{8}$$

unde

$$\lambda = \min\{\nu, \mu\} > 0$$

ultima inegalitate fiind o consecinţă a inegalităţii (3).

O dată precizate aceste inegalităţi ,vom demonstra cîteva leme ajutătoare.

LEMA 1. *Pentru condiţiile teoremelor 1, 2, respectiv 3, rezultă*

$$\lim_{a\to\infty} \int_A f(t)\, K_0(a\rho)\, a\, dt = 0$$

$$\lim_{a\to\infty} \int_A f(t)\, e^{a\xi} K_0(a\rho)\, a\, dt = 0$$

$$\lim_{a\to\infty} \int_A f(t)\, e^{a\xi} K_1(a\rho)\, \operatorname{sgn}(s - t)\, a\, dt = 0.$$

intervalele A fiind date în (2).

Într-adevăr, ţinînd seama de prima inegalitate (3) se pot utiliza pe A dezvoltările asimptotice ale funcţiilor K_0, K_1, [2].

$$K_0(a\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2a\rho}}\,\mathrm{e}^{-a\rho}\left\{1 - \frac{\vartheta_0}{8a\rho}\right\} \quad \text{pentru } t \in A \tag{9}$$

$$K_1(a\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2a\rho}}\,\mathrm{e}^{-a\rho}\left\{1 + \frac{3\vartheta_1}{8a\rho}\right\} \quad \text{unde } \vartheta_0, \vartheta_1 \in [0,\ 1].$$

Aceste dezvoltări precum şi prima inegalitate (4) arată că integranţii din limitele considerate se anulează pentru a tinzînd la infinit, uniform în raport cu $t \in A$. Deci trecerea la limită sub semnul integralelor este permisă, obţinîndu-se valoarea zero pentru limitele considerate. Cu aceasta lema este demonstrată.

LEMA 2. *Pentru a demonstra teoremele 1,2,3, este suficient a arăta : pentru condiţiile teoremelor 1,2,3 se obţine*

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ \delta > 0 \quad \text{şi} \quad (\exists)\ a_\varepsilon : \quad (\forall)\ a > a_\varepsilon \Rightarrow \tag{10}$$

$$\left| \int_\Delta f(t)\, K_0(a\rho)\, a\, \mathrm{d}t - \pi f(s) \right| < \varepsilon$$

$$\left| \int_\Delta f(t)\, \mathrm{e}^{a\xi} K_0(a\rho)\, a\, \mathrm{d}t - \pi \frac{f(s)}{\sin\ \theta(s)} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \int_\Delta f(t)\, \mathrm{e}^{a\xi} K_1(a\rho)\ \mathrm{sgn}\ (s-t)\, a\, \mathrm{d}t - \pi f(s)\ \mathrm{ctg}\ \theta(s) \right| < \varepsilon$$

intervalul Δ *fiind dat în (2).*

Într-adevăr, să presupunem prima inegalitate (10) verificată. Atunci fixînd pe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, rezultă

$$\left| \int_\Delta - \pi f(s) \right| < \varepsilon \qquad \text{pentru } a > a_\varepsilon$$

iar prin lema 1,

$$\left| \int_A \right| < \varepsilon \qquad \text{pentru } a > a_{A(\varepsilon)}$$

astfel încît

$$\left| \int_0^l f(t)\, K_0(a\rho)\, a\, \mathrm{d}t - \pi f(s) \right| = \left| \int_A + \int_\Delta - \pi f(s) \right| < 2\varepsilon$$

pentru

$$a > \max\{a_\varepsilon,\ a_{A(\varepsilon)}\}.$$

$\varepsilon > 0$ fiind arbitrar, această ultimă inegalitate demonstrează teorema 1, deci prima inegalitate (10) este o condiţie suficientă.

În mod asemănător se arată suficienţa celorlalte două inegalităţi (10), deci lema 2 este demonstrată.

Aşadar urmează să stabilim inegalităţile (10).

LEMA 3. *Arcul (1) fiind neted, rezultă* :

$$(\forall)\ \varepsilon > 0,\quad (\forall)\ \delta \in (0,\ \delta_0]\quad (\exists)\ a_{\varepsilon,\delta} :\quad (\forall)\ a > a_{\varepsilon,\delta} \Rightarrow$$

$$\left| \int_\Delta K_0(a\rho) \frac{\partial f}{\partial t} \operatorname{sgn}(t-s)\, a\,\mathrm{d}t - \pi \right| < \varepsilon .$$

Într-adevăr, efectuînd în integrala considerată substituţia $t \to \rho$, se obţine

$$\int_\Delta = -\int_{\rho(s-\delta,\, s)}^{0} K_0(a\rho)\, a\,\mathrm{d}\rho + \int_0^{\rho(s+\delta,\, s)} K_0(a\rho)\, a\,\mathrm{d}\rho \to$$

$$\to 2\int_0^\infty K_0(u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{pentru } a \to \infty.$$

Dar, din reprezentarea integrală [2]

$$K_0(u) = \int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-uv}}{\sqrt{v^2-1}}\,\mathrm{d}v, \quad u > 0$$

rezultă că funcţia K_0 este pozitivă şi

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{u\cos\theta} K_0(u)\,\mathrm{d}u = \frac{\pi-\theta}{\sin\theta} \qquad \text{pentru } \theta \in (0,\pi). \tag{11}$$

Aşadar limita mai sus obţinută are valoarea π şi deci lema este demonstrată.

LEMA 4. *Prima inegalitate (10) este adevărată.*

Într-adevăr, însemnăm

$$E_1 = \int_A \left\{ f(t) - f(s) \frac{\partial\rho}{\partial t} \operatorname{sgn}(t-s) \right\} K_0(a\rho)\, a\,\mathrm{d}t$$

$$E_2 = \int_\Delta K_0(a\rho) \frac{\partial\rho}{\partial t} \operatorname{sgn}(t-s)\, a\,\mathrm{d}t.$$

Pentru $\varepsilon > 0$ dat alegem $\delta(\varepsilon)$ prin relaţia

$$\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_0,\ \delta_5(\varepsilon)\} > 0$$

δ_5 fiind dat de inegalitatea (5). Aplicînd inegalitatea (5) se obţine

$$|E_1| \leqslant \int_\Delta \left| \frac{f(t)}{\dfrac{\partial\rho}{\partial t} \operatorname{sgn}(t-s)} - f(s) \right| K_0(a\rho) \frac{\partial\rho}{\partial t} \operatorname{sgn}(t-s)\, a\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon E_2 .$$

Aplicînd lema 3 rezultă

$$|E_2 - \pi| < \varepsilon, \quad |E_1| < \varepsilon(\pi + \varepsilon) \quad \text{pentru } a > a_{\varepsilon,\,\delta(\varepsilon)} \equiv a_\varepsilon .$$

Deci

$$(\forall)\ \varepsilon > 0\quad (\exists)\ \delta(\varepsilon) > 0\quad \text{şi}\quad (\exists)\ a_\varepsilon : (\forall)\ a > a_\varepsilon \Rightarrow$$

$$\left|\int_\Delta f(t)\, K_0(a\rho)\, a\,\mathrm{d}t - \pi f(s)\right| = |E_1 + f(s)\,(E_2 - \pi)| \leqslant \varepsilon\{\pi + \varepsilon + |f(s)|\}$$

şi prima inegalitate (10) este demonstrată.

LEMA 5. *Dacă arcul (1) este neted, iar* $\theta(s)$ *are valori în intervalul* $(0, \pi)$, *atunci*

$$(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ \delta_\varepsilon \in (0, \delta_0) : (\forall)\ \delta \in (0, \delta_\varepsilon]\ (\exists)\ a_{\varepsilon,\delta} : (\forall)\ a > a_{\varepsilon,\delta} \Rightarrow$$

$$\left|\int_\Delta e^{a\xi} K_0(a\rho)\, \frac{\partial\rho}{\partial t}\, \operatorname{sgn}(t - s)\, a\,\mathrm{d}t - \frac{\pi}{\sin\theta(s)}\right| < \varepsilon.$$

Pentru demonstraţie efectuăm substituţia $t \to a\rho = u$ şi obţinem

$$E_3 = \int_{s-\delta}^{s} e^{a\xi} K_0(a\rho)\, \frac{\partial\rho}{\partial t}\, \operatorname{sgn}(t - s)\, a\,\mathrm{d}t = \int_0^{a\rho(s-\delta,\, s)} e^{u\xi/\rho} K_0(u)\,\mathrm{d}u$$

$$E_4 = \int_{s}^{s+\delta} = \int_0^{a\rho(s+\delta,\, s)} e^{u\xi/\rho} K_0(u)\,\mathrm{d}u.$$

Pentru $\varepsilon > 0$ dat, fie $\delta \in (0, \delta_\varepsilon]$, δ_ε fiind dat de inegalitatea (6). Aplicînd inegalitatea (6′) pentru $t < s$, rezultă

$$\int_0^{a\rho(s-\delta,\, s)} e^{u\cos\theta_{1\varepsilon}} K_0(u)\,\mathrm{d}u \leqslant E_3 \leqslant \int_0^{a\rho(s-\delta,\, s)} e^{u\cos\theta_{2\varepsilon}} K_0(u)\,\mathrm{d}u.$$

Din relaţia (11) rezultă că termenii extremi ai acestei inegalităţi au limită pentru a tinzînd la infinit, deci

$$\frac{\pi - \theta_{1\varepsilon}}{\sin\theta_{1\varepsilon}} - \varepsilon \leqslant \int_0^{a\rho(s-\delta,\, s)} \leqslant E_3 \leqslant \int_0^{\infty} = \frac{\pi - \theta_{2\varepsilon}}{\sin\theta_{2\varepsilon}} \quad \text{pentru } a > a_{\varepsilon,\delta}.$$

Aplicînd inegalităţile (7) se obţine

$$\text{(i)}\qquad \frac{\pi - \theta}{\sin\theta} - (M + 1)\,\varepsilon \leqslant E_3 \leqslant \frac{\pi - \theta}{\sin\theta} + M\varepsilon,\quad \theta = \theta(s).$$

Evaluînd în mod asemănător expresia E_4, rezultă

$$\int_0^{a\rho(s+\delta,\, s)} e^{-u\cos\theta_{2\varepsilon}} K_0(u)\,\mathrm{d}u \leqslant E_4 \leqslant \int_0^{a\rho(s+\delta,\, s)} e^{-u\cos\theta_{1\varepsilon}} K_0(u)\,\mathrm{d}u$$

$$\frac{\theta_{2\varepsilon}}{\sin\theta_{2\varepsilon}} - \varepsilon \leqslant \int_0^{a\rho(s+\delta,\, s)} \leqslant E_4 \leqslant \int_0^{\infty} = \frac{\theta_{1\varepsilon}}{\sin\theta_{1\varepsilon}}$$

$$\text{(ii)}\qquad \frac{\theta}{\sin\theta} - (M + 1)\,\varepsilon \leqslant E_4 \leqslant \frac{\theta}{\sin\theta} + M\varepsilon,\quad \theta = \theta(s).$$

Deoarece

$$\int_{\Delta} \mathrm{e}^{a\xi} K_0(a\rho) \frac{\partial \rho}{\partial t} \operatorname{sgn}(t-s)\, a\, \mathrm{d}t = E_3 + E_4$$

rezultă că pentru $\delta \in (0, \delta_\varepsilon]$ fixat, δ_ε fiind dat de (6), există $a_{\varepsilon,\delta}$ astfel încît

$$\text{(iii)} \qquad \frac{\pi}{\sin\theta(s)} - (2M+2)\,\varepsilon \leqslant \int_{\Delta} \leqslant \frac{\pi}{\sin\theta(s)} + 2M\varepsilon$$

îndată ce $a > a_{\varepsilon,\delta}$. Această ultimă inegalitate demonstrează lema 5.

LEMA 6. *A doua inegalitate (10) este adevărată.*

Demonstraţia acestei leme este analogă demonstraţiei lemei 4. Fie

$$E_5 = \int_{\Delta} \left\{ f(t) - f(s) \frac{\partial \rho}{\partial t} \operatorname{sgn}(t-s) \right\} \mathrm{e}^{a\xi} K_0(a\rho)\, a\, \mathrm{d}t$$

$$E_6 = \int_{\Delta} \mathrm{e}^{a\xi} K_0(a\rho) \frac{\partial \rho}{\partial t} \operatorname{sgn}(t-s)\, a\, \mathrm{d}t.$$

Pentru $\varepsilon > 0$ dat se alege $\delta(\varepsilon)$ prin relaţia

$$\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_5(\varepsilon), \delta_\varepsilon\}$$

δ_5, δ_ε fiind daţi prin inegalitatea (5) respectiv lema 5. Aplicînd inegalitatea (5), rezultă

$$|E_5| \leqslant \varepsilon E_6.$$

Aplicînd lema 5, se obţine

$$|E_6 - \pi/\sin\theta(s)| < \varepsilon, \quad |E_5| \leqslant \varepsilon\{\pi/\sin\theta(s) + \varepsilon\} \quad \text{pentru} \quad a > a_{\varepsilon,\,\delta(\varepsilon)} = a_\varepsilon.$$

Deci

$$(\forall)\ \varepsilon < 0\ (\exists)\ \delta(\varepsilon) > 0 \ \text{şi}\ (\exists)\ a_\varepsilon : (\forall)\ a > a_\varepsilon \Rightarrow$$

$$\left| \int_{\Delta} f(t)\, \mathrm{e}^{a\xi} K_0(a\rho)\, a\, \mathrm{d}t - \frac{\pi f(s)}{\sin\theta(s)} \right| = \left| E_5 + f(s)\left[E_6 - \frac{\pi}{\sin\theta(s)}\right] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\{\pi/\sin\theta(s) + \varepsilon + |f(s)|\}$$

şi a doua inegalitate (10) este demonstrată.

Pentru a stabili lema următoare, vom arăta

$$\text{(12)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{u\cos\theta} K_1(|u|) \operatorname{sgn} u\, \mathrm{d}u = \pi \operatorname{ctg}\theta,\ \theta \in (0,\pi).$$

Într-adevăr, deoarece

$$K_1(|u|) \operatorname{sgn} u = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} K_0(|u|)$$

vom integra prin părţi. Ţinînd seamă de dezvoltarea asimptotică (9) a funcţiei K_0 şi de faptul că această funcţie are o singularitate logaritmică în origine

$$K_0(u) = -\lg u + \text{funcţie continuă}$$

se obţine

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{u\cos\theta} K_1(|u|)\,\mathrm{sg}n\,du = \lim_{\sigma\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\sigma} + \int_{\sigma}^{\infty}\right) =$$

$$= \cos\theta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{u\cos\theta} K_0(|u|)\,du = \cos\theta\ \{ \int_0^{\infty} (e^{u\cos\theta} + e^{-u\cos\theta})\ K_0(u)\,du \}.$$

Ultimul termen al acestei egalităţi, prin relaţia (11), are valoarea

$$\cos\theta\left\{\frac{\pi-\theta}{\sin\theta} + \frac{\theta}{\sin\theta}\right\} = \pi\ \mathrm{ctg}\,\theta$$

şi relaţia (12) este stabilită.

LEMA 7. *În cazul unui arc neted, pentru* $\theta \in (0, \pi)$ *se arată*

$$\lim_{a-\infty} \int_\Delta e^{a\rho\cos\theta\,\mathrm{sgn}(s-t)}\ K\ (a\rho)\left(-\frac{\partial\rho}{\partial t}\right) a\,dt = \pi\ \mathrm{ctg}\ \theta. \tag{13}$$

Într-adevăr, prin substituţia $t \to a\rho = u$ se obţine

$$\int_\Delta = \lim_{\sigma\to 0}\left\{-\int_{a\rho\,(s-\delta,s)}^{a\rho\,(s-\sigma,s)} e^{u\cos\theta} K_1(u)\,du - \right.$$

$$\left. -\int_{a\rho\,(s+\sigma,s)}^{a\rho\,(s+\delta,s)} e^{-u\cos\theta} K_1(u)\,du\right\} = F_1 + F_2,$$

unde

$$F_1 = \lim_{\sigma\to 0}\left\{\int_{a\sigma}^{a\rho\,(s-\delta,s)} e^{u\cos\theta} K_1(u)\,du + \int_{-a\sigma}^{-a\rho\,(s+\delta,s)} e^{u\cos\theta}\ K_1(-u)\,du\right\} =$$

$$= \int_{-a\rho\,(s+\delta,s)}^{a\rho\,(s-\delta,s)} e^{u\cos\theta}\ K_1(|u|)\ \mathrm{sgn}\ u\,du$$

$$F_2 = \lim_{\sigma\to 0}\left\{\int_{a\rho(s-\sigma,s)}^{a\sigma} e^{u\cos\theta}\ K_1(u)\,du - \int_{a\rho(s+\sigma,s)}^{a\sigma} e^{-u\cos\theta}\ K_1(u)\,du\right\}.$$

Deoarece în vecinătatea originii are loc dezvoltarea

$$K_1(u) = \frac{1}{u} + \text{funcţie continuă}$$

rezultă

$$F_2 = \lim_{\sigma\to\theta}\left\{\int_{a\rho(s-\sigma,s)}^{a\sigma} \frac{1}{u}\,du - \int_{a\rho(s+\sigma,s)}^{a\sigma} \frac{1}{u}\,du\right\} = \lim_{\sigma\to 0}\ \lg\frac{\rho(s+\sigma,s)}{\rho(s-\sigma,s)} = 0$$

astfel încît

$$\int_{\Delta} = F_1 \to \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{u \cos \theta} K_1(|u|) \operatorname{sgn} u \, \mathrm{d}u \quad \text{pentru } a \to \infty.$$

Relația (12) arată că această limită are valoarea $\pi \operatorname{ctg} \theta$ și lema este demonstrată.

Lema 8. *Dacă arcul (1) este neted, iar $\theta(s)$ are valori în intervalul $(0, \pi)$, atunci*

$$(\forall)\ \varepsilon > 0\ \ (\exists)\ \delta_\varepsilon :\ (\forall)\ \delta \in (0, \delta_\varepsilon]\ \ (\exists)\ a_{\varepsilon, \delta} :\ (\forall)\ a > a_{\varepsilon, \delta} \Rightarrow$$

$$\left| \int_{\Delta} \mathrm{e}^{a\xi} K_1(a\rho) \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) a \, \mathrm{d}t - \pi \operatorname{ctg} \theta \right| < \varepsilon.$$

În această inegalitate integrala este considerată în sensul valorii principale. Existența integralei decurge din faptul că integrantul are expresia

$$\frac{1}{\rho} \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \text{funcție continuă}$$

primul termen al acestei expresii fiind integrabil, în valoare principală. Într-adevăr, se obține

$$\lim_{\sigma \to 0} \left\{ \int_{s-\delta}^{s-\sigma} + \int_{s+\sigma}^{s+\delta} \right\} \frac{1}{\rho} \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \mathrm{d}t = \lg \frac{\rho(s-\delta, s)}{\rho(s+\delta, s)},$$

Pentru a arăta inegalitatea de mai sus, ținem seama de faptul că funcția K_1 are valori pozitive, ținem seama de semnul funcției $\partial \rho / \partial t$ așa cum rezultă din (5), și de inegalitățile (6′). Se obține

$$(\forall)\ \varepsilon > 0\ \ (\exists)\ \delta_\varepsilon > 0 :$$

$$\mathrm{e}^{\pm a\rho \cos \theta_{1\varepsilon}} K_1(a\rho) \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \leqslant \mathrm{e}^{\pm a\xi} K_1(a\rho) \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \leqslant \mathrm{e}^{\pm a\rho \cos \theta_{2\varepsilon}} K_1(a\rho) \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

semnele $\pm$ corespunzînd intervalelor

$$t \in (s - \delta_\varepsilon, s) \text{ respectiv } t \in (s, s + \delta_\varepsilon).$$

Adunînd aceste inegalități și integrînd pe Δ cu $\delta \in (0, \delta_\varepsilon]$ rezultă

$$\int_{\Delta} \mathrm{e}^{a\rho \cos \theta_{1\varepsilon} \operatorname{sgn}(s-t)} K_1(a\rho) \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) a \, \mathrm{d}t \leqslant \int_{\Delta} \leqslant \int_{\Delta} \mathrm{e}^{a\rho \cos \theta_{2\varepsilon} \operatorname{sgo}(s-t)} K_1(a\rho) \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) a \, \mathrm{d}t.$$

Prin lema 7 se obține

$$\pi \operatorname{ctg} \theta_{1\varepsilon} - \varepsilon \leqslant \int_{\Delta} \leqslant \pi \operatorname{ctg} \theta_{2\varepsilon} + \varepsilon \qquad \text{pentru } a > a_{\varepsilon, \delta}$$

iar prin inegalitățile (7)

$$\pi \operatorname{ctg} \theta(s) - (M\pi + 1)\,\varepsilon \leqslant \int_\Delta \leqslant \pi \operatorname{ctg} \theta(s) + (M\pi + 1)\,\varepsilon.$$

Această ultimă inegalitate demonstrează lema 8.

Lema 9. *A treia inegalitate (10) este adevărată.*

Într-adevăr, însemnăm

$$F_3 = \int_\Delta \left\{ f(t) - f(s) \frac{\partial \rho}{\partial t} \operatorname{sgn}(t - s) \right\} e^{a\xi} K_1(a\rho) \operatorname{sgn}(s - t)\, a\, dt$$

$$F_4 = \int_\Delta e^{a\xi} K_1(a\rho) \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) a\, dt.$$

Pentru $\varepsilon > 0$ dat se alege $\delta(\varepsilon)$ prin relația

$$\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_8(\varepsilon),\ \delta_\varepsilon\}$$

δ_8, δ_ε fiind dați prin inegalitatea (8) respectiv lema 8. Pentru intervalul Δ corespunzător lui $\delta = \delta(\varepsilon)$ se obține

$$|F_3| \leqslant \int_\Delta \left| \frac{f_{(t)}}{\frac{\partial \rho}{\partial t} \operatorname{sgn}(t - s)} - f(s) \right| e^{a\xi} K_1(a\rho) \frac{\partial \rho}{\partial t} \operatorname{sgn}(t - s)\ a\ dt$$

iar prin inegalitățile (8) și (4)

$$|F_3| \leqslant \int_\Delta H \rho^\lambda e^{a\rho \cos\theta_0} K_1(a\rho) \frac{\partial \rho}{\partial t} \operatorname{sgn}(t - s)\ a\ dt.$$

Prin substituția $t \to a\rho = u$ rezultă

$$|F_3| \leqslant H a^{-\lambda} \left\{ \int_0^{a\rho(s-\delta,\, s)} + \int_0^{a\rho(s+\delta,\, s)} \right\} e^{u\cos\theta_0} u^\lambda K_1(u)\, du \leqslant$$

$$\leqslant 2H\ a^{-\lambda} \int_0^\infty e^{u\cos\theta_0} u^\lambda K_1(u)\, du = H_1\, a^{-\lambda}$$

λ fiind pozitiv, iar $\cos\theta_0 < 1$. Deci

(i) $$|F_3| < \varepsilon \quad \text{pentru } a > a_{1\varepsilon}.$$

Aplicînd lema 8, rezultă

(ii) $$|F_2 - \pi \operatorname{ctg} \theta(s)| < \varepsilon \quad \text{pentru} \quad a > a_\varepsilon.$$

Deci

$$(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ \delta > 0 \ \text{ și } \ (\exists)\ a_\varepsilon :\ (\forall)\ a > a_\varepsilon => $$

$$\left| \int_\Delta f(t)\, e^{a\xi} K_1(a\rho) \operatorname{sgn}(s - t)\, a\, dt - \pi f(s) \operatorname{ctg} \theta(s) \right| =$$

$$= |F_3 + f(s)[F_4 - \pi \operatorname{ctg} \theta(s)]| \leqslant \varepsilon \{1 + |f(s)|\}.$$

Această ultimă inegalitate demonstrează lema 9.

Demonstrația teoremelor 1,2,3 decurge din faptul că lemele 4,6,9 stabilesc inegalitatea (10) din lema 2.

O consecință directă a teoremei 3 este

TEOREMA 4. *Dacă funcția $f: [0,l] \to R$ este hölderiană, iar funcția $\theta(s)$ este hölderiană și cu valori în intervalul $(0,\pi)$, atunci*

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^l f(t)\,\frac{\xi+i\eta}{\rho}\,e^{a\xi}K_1(a\rho)\,a\,dt = \pi f(s)\operatorname{ctg}\theta(s)\,e^{i\theta(s)}\,,\quad s\in(0,\,l).$$

Într-adevăr, se aplică teorema 3 funcției hölderiene

$$f(t)\,\frac{\xi+i\eta}{\rho}\,\operatorname{sgn}(s-t)$$

a cărei valoare în punctul $t = s$ este

$$f(s)\,\exp\{i\,\theta(s)\}$$

Proprietățile (3)—(8) din cazul unui arc neted, se păstrează și în cazul unui arc neted pe porțiuni, fără puncte de întoarcere.

PROPOZIȚIA 1. Teoremele 1—4 sînt adevărate și în cazul unui arc neted pe porțiuni.

În cazul particular al arcului neted

$$x = s\cos\alpha\ ,\quad y = s\sin\alpha\ ,\quad s\in[0,l]\ ,\quad \alpha = \text{const.}\in(0,\pi)$$

rezultă

PROPOZIȚIA 2. *Dacă funcția $f: [0, l] \to R$ este continuă, atunci*

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^l f(t)K_0(a|s-t|)\,a\,dt = \pi f(s)$$

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^l f(t)\,e^{a(s-t)\cos\alpha}K_0(a|s-t|)\,a\,dt = \frac{\pi f(s)}{\sin\alpha}.$$

Dacă în plus f este hölderiană, atunci

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^l f(t)\,e^{a(s-t)\cos\alpha}K_1(a|s-t|)\,\operatorname{sgn}(s-t)\,a\,dt = \pi f(s)\operatorname{ctg}\alpha$$

pentru $s\in(0,\,l)$, $\alpha\in(0,\,\pi)$.

Existența și demonstrația acestei ultime propoziții au fost sugerate de studiul efectuat de către Ko Tamada și T. Miyagi asupra mișcării fluidelor vîscoase în jurul unei plăci plane , [4].

Primită la redacție la 10 februarie 1968

Universitatea din București
Facultatea de matematică-mecanică, Str. Academiei nr. 14

THÉORÈMES CONCERNANT LES FONCTIONS BESSEL K_0 et K_1

(RÉSUMÉ)

On considère un arc simple $z : [0,l] \to K$ et on suppose qu'il admet une tangente et une courbure bien déterminées et variant continuellement en chacun des ses points. Soit θ (s) l'angle entre l'axe Ox et la tangente de l'arc au point s et ρ (s,t) la distance entre les points s et t de l'arc. On peut écrire

$$\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{i\theta(s)}\mathrm{d}s, \ \xi + i\eta = \rho e^{i\omega} = z\ (s) - z(t),$$

où $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}z|$ est l'élément d'arc.

On montre les théorèmes suivants :

1. La fonction f: $[\mathrm{o},1] \to R$ étant continue, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^l f(t)\ K_o\ (n\rho)\, n\mathrm{d}t = \pi f(s),\ s \in (\mathrm{o},l).$$

2. La fonction f étant continue et l'angle $\theta\,(\mathrm{s})$ ayant des valeurs dans l'intervalle $(\mathrm{o}\pi)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^l f(t)\ \mathrm{e}^{n\xi}\, K_0\,(n\rho)\, n\mathrm{d}t = \pi \mathrm{f}(s)/\sin\,\theta\,(s), \qquad \mathrm{s} \in (\mathrm{o}\ l).$$

3. Si les fonctions f et θ sont höldériennes et l'angle θ a des valeurs dans l'intervalle $(0, \pi)$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^l f\,(t)\ \mathrm{e}^{n\xi}\, K_1\,(n\rho)\ \mathrm{sgn}\,(s - t)\ n\ \mathrm{d}t = \pi \mathrm{f}\ (\mathrm{s})\ \mathrm{ctg}\ (\mathrm{s}), \qquad \mathrm{s} \in\ (\mathrm{o},\ l),$$

l'intégrale de cette relation étant considérée en valeur principale au sens de Cauchy.

BIBLIOGRAFIE

1 N. Marcov, *Mişcarea fluidelor vîscoase electroconductoare în jurul profilelor subţiri*. St. cerc. mat., **20**, *2*, 221–233 (1968).
2. G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions*. Cambridge, 1922.
3. Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные Интегральные Уравнения*. Moscova, 1962.
4. Ko Tamada and Tosio Miyagi, *Laminar Viscous Flow past a Flat Plate set normal to the Stream, with Special Reference to High Reynolds Numbers*. J. Phys. Soc. Japan. **17**, *2*, 373 (1962).

DESPRE NOȚIUNEA DE PROIECTIVITATE SINTACTICĂ

DE

MARGARETA MIHALYI

În lucrarea de față ne-am propus să întreprindem un studiu al noțiunii de proiectivitate sintactică în cazul particular al frazelor ce au proprietatea lui Tesnière [11], adică al frazelor în care fiecare cuvînt are cel mult un regent. Noțiunea de proiectivitate sintactică modelează structura sintactică a frazelor. Fiind dată o frază, între termenii ei există în mod natural o relație de ordine (determinată de ordinea cuvintelor în fraza respectivă). Datorită dependenței sintactice între termenii frazei, mai avem încă o relație binară. Noțiunea de proiectivitate face legătura între aceste două relații, stabilind relațiile de dependență sau subordonare pe care trebuie să le satisfacă termenii ce se află între alți doi termeni ai frazei ce sînt în relație de dependență sau subordonare.

INTRODUCERE

Noțiunea de proiectivitate a fost introdusă de către Harper și Hays [4]. Un studiu detaliat al acestei noțiuni a fost făcut simultan de Lecerf și Ihm [6], [7]. Un studiu al noțiunii de proiectivitate în cadrul unor limbi naturale a fost făcut de Irina Lynch [8], Lydia Hirschberg [5], E. V. Padučeva [10] și s-a constatat că proprietatea de proiectivitate nu este decît o primă aproximație, mai mult sau mai puțin bună, în funcție de cazul particular al fiecărei limbi naturale. Un studiu algebric sistematic al noțiunii de proiectivitate este expus în cartea lui S. Marcus [9].

— În prima parte a articolului sînt date o serie de definiții, notații și rezultate anterioare ce se folosesc în continuare ; în partea a doua am demonstrat două teoreme privind legătura dintre proiectivitatea în sensul lui Lecerf și proprietatea lui Šreider [12] în cazul unor anumite tipuri de fraze ; secțiunea a treia conține o teoremă de descompunere a frazelor cu proprietatea lui Tesnière în fraze simple, care stabilește și corelația ce există între proiectivitatea frazei inițiale și cea a frazelor simple obținute prin descompunere. Această teoremă reduce studiul proiectivității frazelor cu proprietatea lui Tesnière la studiul proiectivității frazelor simple,

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 3, P. 419–431 BUCUREȘTI, 1969

lucru care ușurează mult această problemă. În continuare, în partea a patra, am dat două criterii geometrice de proiectivitate în cazul frazelor simple. În ultima parte se consideră unele extensii ale diverselor tipuri de proiectivitate, stabilindu-se și relațiile de implicație ce există între ele.

1. DEFINIȚII, NOTAȚII ȘI REZULTATE ANTERIOARE

Fie V o mulțime finită, nevidă, numită vocabular, ale cărei elemente se numesc cuvinte. Orice element al semigrupului liber generat de V prin operația de concatenare se numește frază pe vocabularul V. Dacă notăm cu x_i acel cuvînt al unei fraze f care se află pe locul i, atunci fraza f se scrie $f = x_1 x_2 \dots x_n$. Ca elemente ale lui V, diverși x_i pot coincide, însă ca termeni ai frazei, $i \neq j$ implică $x_i \neq x_j$. Pe mulțimea $F = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ se consideră o relație binară R nonsimetrică și nonreflexivă, numită relație de dependență, notată $x_i R x_j$ sau $x_i \rightarrow x_j$ și care se citește : „x_i depinde de x_j”. Fie $\overline{R}$ închiderea tranzitivă a lui R, adică $x_i \overline{R} x_j$ dacă există șirul finit $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ aparținînd lui F cu $x_{i_1} = x_i$, $x_{i_k} = x_j$ și $x_{i_l} R x_{i_{l+1}}$ pentru $1 \leqslant l \leqslant k - 1$. În loc de $x_j \overline{R} x_j$ se mai scrie $x_i \rightrightarrows x_j$ și se citește : x_i este subordonat lui x_j iar $\overline{R}$ se mai numește și relație de subordonare. Pentru toate aceste notații, a se vedea [9] sau [13].

Pentru $i \neq j$ vom nota :

$$(i,j) = \begin{cases} \{i+1, i+2, \dots, j-1\} & \text{cînd } i < j \\ \{j+1, j+2, \dots, i-1\} & \text{cînd } i > j \end{cases}$$

$$[i, j) = (i,j) \cup \{i\},$$

$$(i, j] = (i,j) \cup \{j\},$$

$$[i, j] = (i,j) \cup \{i, j\}.$$

Cu ajutorul relațiilor R și $\overline{R}$ se pot defini următoarele tipuri de proiectivitate sintactică (a se vedea [9]) :

DEFINIȚIA 1. Fraza $f = x_1 x_2 \dots x_n$ este monoton proiectivă la dreapta dacă pentru $i \neq j$, relația $x_i \rightrightarrows x_j$ este echivalentă cu $i < j$.

Fraza $f = x_1 x_2 \dots x_n$ este monoton proiectivă la stînga dacă pentru $i \neq j$, relația $x_i \rightrightarrows x_j$ este echivalentă cu $i > j$.

Fraza f este monoton proiectivă dacă este monoton proiectivă la dreapta sau dacă este monoton proiectivă la stînga. Notăm cu F. 1 proprietatea frazei f de a fi monoton proiectivă.

DEFINIȚIA 2. Fraza $f = x_1 x_2 \dots x_n$ este proiectivă tare dacă relația $x_i \rightrightarrows x_j$ implică relația $x_k \rightarrow x_j$ pentru orice $k \in (i, j)$. Notăm cu F. 2 proprietatea frazei f de a fi proiectivă tare.

DEFINIȚIA 3. Fraza $f = x_1 x_2 \dots x_n$ este proiectivă în sens restrîns dacă relația $x_i \rightarrow x_j$ implică relația $x_k \rightarrow x_j$ pentru orice $k \in (i, j)$. Notăm cu F. 3 proprietatea frazei f de a fi proiectivă în sens restrîns.

DEFINIȚIA 4. Fraza $f = x_1 x_2 \dots x_n$ este proiectivă în sensul lui Harper și Hays dacă relația $x_i \rightarrow x_j$ implică relația $x_k \rightrightarrows x_j$ pentru orice $k \in (i, j)$. Notăm cu F. 4 proprietatea frazei f de a fi proiectivă în sensul lui Harper și Hays.

DEFINIȚIA 5. Fraza $f = x_1 x_2 \ldots x_n$ este proiectivă în sensul lui Lecerf și Ihm dacă relația $x_i \rightrightarrows x_j$ implică relația $x_k \rightrightarrows x_j$ pentru orice $k \in (i, j)$. Notăm cu F. 5 proprietatea frazei f de a fi proiectivă în sensul lui Lecerf.

DEFINIȚIA 6. Fraza $f = x_1 x_2 \ldots x_n$ este cvasiproiectivă dacă relațiile $x_i \rightrightarrows x_m$, $x_j \rightrightarrows x_m$, $i \neq m \neq j$, implică relația $x_k \rightrightarrows x_m$ pentru orice $k \in -(i, j)$. Notăm cu F. 6 proprietatea frazei f de a fi cvasiproiectivă.

Se știe că [9]:

$$\text{F. } 1 \Rightarrow \text{NF.}2 \Rightarrow \text{F.}3 \Rightarrow \text{F. } 4. \Leftrightarrow \text{F. } 5 \Rightarrow \text{F.}6.$$

Dacă $x_i \rightarrow x_j$, spunem că x_j este un regent al lui x_i. Termenul x_i al unei fraze este sub o săgeată dacă există k și j astfel încît $x_j \rightarrow x_k$ și $i \in (j, k)$.

DEFINIȚIA 7. Se spune despre fraza $f = x_1 x_2 \ldots x_n$ că are proprietatea lui Tesnière [11] dacă relația $x_i \rightarrow x_j$ implică falsitatea relației $x_i \rightarrow x_k$ pentru orice $k \neq j$. Această proprietate revine la existența a cel mult unui singur regent pentru fiecare termen al frazei sau la faptul că de la fiecare cuvînt pleacă cel mult o singură săgeată.

DEFINIȚIA 8. Fraza $f = x_1 x_2 \ldots x_n$ are proprietatea lui Šreider [12] dacă relațiile $x_i \rightarrow x_j$, $k \in (i, j)$, $x_k \rightarrow x_l$ implică relația $l \in [i, j]$. Această proprietate revine la nonintersecția săgeților de dependență.

DEFINIȚIA 9. Fraza $f = x_1 x_2 \ldots x_n$ este o frază simplă dacă:

(i) există i_0 unic astfel încît $x_{i_0} \rightarrow x_i$ este fals pentru orice i, $1 \leqslant i \leqslant n$. x_{i_0} se numește centrul frazei;

(ii) pentru orice $i \neq i_0$, există i' unic astfel încît $x_i \rightarrow x_{i'}$;

(iii) pentru orice $i \neq i_0$, $x_i \rightrightarrows x_{i_0}$.

Deci o frază este simplă dacă un singur termen al ei (centrul) nu are nici un regent, restul termenilor au cîte un singur regent (deci orice frază simplă are proprietatea lui Tesnière) și fiecare termen este subordonat centrului.

Unei fraze i se poate asocia un graf; se știe că frazele simple au ca graf asociat o arborescență [13].

2. RELAȚIA DINTRE PROIECTIVITATEA ÎN SENSUL LUI LECERF ȘI PROPRIETATEA LUI ŠREIDER PENTRU FRAZELE CU PROPRIETATEA LUI TESNIÈRE

TEOREMA 1. *Dacă fraza f, avînd proprietatea lui Tesnière, este proiectivă în sensul lui Lecerf, atunci ea are și proprietatea lui Šreider.*

Demonstrație. Fie $f = x_1 x_2 \ldots x_n$ proiectivă în sensul lui Lecerf, avînd și proprietatea lui Tesnière. Vom demonstra, prin reducere la absurd, că fraza f are și proprietatea lui Šreider. Să presupunem deci că există relațiile $x_i \rightarrow x_j$ $k \in (i,j)$, $x_k \rightarrow x_l$ și $l \notin [i, j]$. Distingem două cazuri:

a)

$$\left.\begin{array}{ll}
 & l < i < k < j \Rightarrow x_i \rightrightarrows x_l \text{ și } x_k \Rightarrow x_j \Rightarrow \\
 & \nearrow \\
i < j \Rightarrow & \quad \text{sau} \\
 & \searrow \\
 & i < k < j < l \Rightarrow x_j \rightrightarrows x_l \text{ și } x_k \rightrightarrows x_j \Rightarrow
\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

conform proprietății lui Tesnière de la fiecare termen al frazei pleacă o singură săgeată, deci

$$\left.\begin{cases} \Rightarrow x_i \to x_j \to \ldots \to x_l \text{ și } x_k \to x_l \to \ldots \to x_j \Rightarrow \\ \Rightarrow x_j \to \ldots \to x_l \qquad \text{și } x_k \to x_l \to \ldots \to x_j \Rightarrow \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} \Rightarrow x_j \rightrightarrows x_l \text{ și } x_l \rightrightarrows x_j \\ \Rightarrow x_j \rightrightarrows x_l \text{ și } x_l \to x_j \end{cases}\right\} \Rightarrow x_j \rightrightarrows x_l \text{ și } x_l \to x_j$$

ceea ce este absurd;

b)

$$\left.\begin{array}{ll} & l < j < k < i \Rightarrow x_k \rightrightarrows x_j \text{ și } x_j \rightrightarrows x_l \Rightarrow \\ & \nearrow \\ j < i \Rightarrow & \text{sau} \\ & \searrow \\ & j < k < i < l \Rightarrow x_k \rightrightarrows x_j \text{ și } x_i \rightrightarrows x_l \Rightarrow \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{cases} \Rightarrow x_k \to x_l \to \ldots \to x_j \text{ și } x_j \to \ldots \to x_l \Rightarrow \\ \Rightarrow x_k \to x_l \to \ldots \to x_j \text{ și } x_i \to x_j \to \ldots \to x_l \Rightarrow \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} \Rightarrow x_l \rightrightarrows x_j \text{ și } x_j \rightrightarrows x_l \\ \Rightarrow x_l \rightrightarrows x_j \text{ și } x_j \rightrightarrows x_l \end{cases}\right\} \Rightarrow x_l \rightrightarrows x_j \text{ și } x_j \rightrightarrows x_l$$

ceea ce este absurd.

Deci în ambele cazuri ajungem la o contradicție. Rezultă că $l \in [i,j]$ și deci f are proprietatea lui Šreider.

TEOREMA 2. *Dacă fraza f are proprietatea lui Tesnière și proprietatea lui Šreider și dacă pentru x_i, astfel încît $x_i \to x_j$ este fals pentru orice j, nu există i_1, i_2 cu $i \in (i_1, i_2)$ și $x_{i_1} \to x_{i_2}$ (adică orice termen al frazei care nu are nici-o regentă, nu este sub nici-o săgeată), atunci f este proiectivă în sensul lui Lecerf.*

Demonstrație. Fie $f = x_1 x_2 \ldots x_n$ îndeplinind condițiile din ipoteza teoremei. Fie $x_i \rightrightarrows x_j$ și $k \in (i, j)$. Trebuie să demonstrăm că $x_k \rightrightarrows x_j$. Relația $x_i \rightrightarrows x_j \Rightarrow$ există șirul finit $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_l}$ cu $x_i = x_{i_1} \to x_{i_2} \to$ $\to \ldots \to x_{i_{l-1}} \to x_{i_l} = x_j$. Distingem două cazuri:

a) există s, $s \in (1, l)$, cu $i_s = k$. În acest caz este evident că $x_k \rightrightarrows x_j$;

b) nu există s, $s \in (1, l)$, cu $i_s = k$. Cum $k \in (i, j)$, $i_1 = i$ și $i_l = j$, rezultă că există i_{s-1} și i_s cu $s - 1$, $s \in [1, l]$ și $x_{i_{s-1}} \to x_{i_s}$ și $k \in (i_{s-1}, i_s)$, deci x_k se află sub cel puțin o săgeată și deci, conform ipotezei, are o regență, fie aceasta x_{k_1}. Avem deci: $x_{i_{s-1}} \to x_{i_s}$, $k \in (i_{s-1}, i_.)$, $x_k \to x_{k_1}$ conform proprietății lui Šreider $k_1 \in [i_{s-1}, i_s]$. Dacă $k_1 = i_{s-1}$ sau $k_1 = i_s$, atunci din $x_k \to x_{k_1}$ și $x_{k_1} \to xi_s \to \ldots \to x_j$ rezultă $x_k \rightrightarrows x_j$ q.e.d. În caz contrar, $k_1 \in (i_{s-1}, i_s)$, deci x_{k_1} se află sub o săgeată, deci are regență. Ținînd cont de proprietatea lui Šreider, rezultă că există k_2, cu x_{k_2} regența lui x_{k_1}, și acest k_2 are aceleași proprietăți ca și k_1. Repetînd în continuare raționamentul, obținem șirul k_1, $k_2, \ldots$ cu următoarele proprietăți:
$k_m \in (i_{s-1}, i_s)$ pentru orice m natural;
$x_k \to x_{k_1} \to x_{k_2} \to \ldots$;
$x_{kl} \neq x_{k_{l'}}$, deoarece $x_{kl} \neq x_{kl+1}$, întrucît relația de dependență este nonreflexivă, să presupunem, prin reducere la absurd, că $x_{kl} = x_{k_{l'}}$, pentru

$k_l \neq k_{l'}$, deci $x_k \to \ldots \to x_{k_l} \to x_{k_{l+1}} \to \ldots \to x_{k_l} \to \ldots$ deci $x_{k_l} \rightrightarrows x_{k_{l+1}}$ şi $x_{k_{l+1}} \rightrightarrows x_{k_l}$ ceea ce este absurd.

Deci termenii şirului $(k_m)_m$ sînt distincţi şi cum $k_m \in (i_{s-1}, i_s)$, rezultă că sînt în număr finit, adică după un număr finit de paşi obţinem $x_{k_{m_0}} = x_{i_{s-1}}$ sau $x_{k_{m_0}} = x_{i_s}$ şi deci $x_k \rightrightarrows x_{k_{m_0}} \rightrightarrows x_j$ q.e.d.

Observaţii : a) Condiţia ca termenii ce nu au nici o regenţă să nu fie sub nici o săgeată este necesară. Pentru a demonstra acest lucru, dăm un contra exemplu: fie fraza $f = x_1x_2x_3x_4x_5$ cu următoarele relaţii de dependenţă :

$$x_1 \to x_5$$

$$x_2 \to x_3$$

$$x_3 \to x_4$$

Fraza f are proprietatea lui Tesnière şi a lui Šreider dar nu este proiectiva în sensul lui Lecerf deoarece $x_1 \rightrightarrows x_5$ dar $x_2 \not\rightrightarrows x_5$.

b) Din cele două teoreme rezultă că pentru frazele simple noţiunile de proiectivitate Lecerf şi proprietatea lui Šreider nu sînt echivalente : Într-un sens implicaţia este mai largă : frazele cu proprietatea lui Tesnière (orice frază simplă are această proprietate) proiective Lecerf au şi proprietatea lui Šreider. În celălalt sens, relaţia dintre ele este mai complicată : Frazele cu proprietatea lui Tesnière, îndeplinind condiţia din ipoteza teoremei (sferele noţiunii de frază simplă şi a celor ce îndeplinesc condiţia din ipoteza teoremei se intersectează doar, nu există nici o relaţie de incluziune între ele) şi avînd proprietatea lui Šreider sînt şi proiective Lecerf.

Exemple. 1) $f_1 = x_1x_2x_3$ unde $x_1 \to x_3$, $x_3 \to x_2$ este frază simplă, are proprietatea lui Šreider dar nu este proiectivă Lecerf ($x_2 \not\rightrightarrows x_3$).

2) $f_2 = x_1x_2x_3x_4, x_1 \to x_2, x_3 \to x_4$ nu este frază simplă, dar are proprietatea lui Šreider şi este proiectivă Lecerf.

3. DESCOMPUNEREA FRAZELOR CU PROPRIETATEA LUI TESNIÈRE ÎN FRAZE SIMPLE

Fie fraza $f = x_1x_2\ldots x_n$. Notăm cu F mulţimea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Pe mulţimea F definim relaţia binară R_1 astfel : $x_iR_1x_j$ dacă x_iRx_j sau dacă $x_jR\,x_i$. În loc de $x_iR_1x_j$ mai notăm şi $x_i \to x_j$. Relaţia R_1 este simetrică şi nonreflexivă. Considerăm închiderea tranzitivă a relaţiei R_1, adică $x_i\bar{R}_1x_j$ dacă există şirul $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ astfel încît $x_{i_1} = x_i$, $x_{i_k} = x_j$ şi $x_{i_l}R_1x_{i_{l+1}}$ pentru orice l, $1 \leqslant l \leqslant k - 1$. Relaţia $\bar{R}_1$ o mai notăm şi $x_i \rightrightarrows x_j$. Relaţia $\bar{R}_1$ este simetrică, tranzitivă şi nonreflexivă. Nonreflexivitatea relaţiei $\bar{R}_1$ se poate demonstra prin reducere la absurd. Întradevăr, să presupunem că $x_i \rightrightarrows x_i$. Această relaţie implică existenţa şirului $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ astfel încît : $x_i \to x_{i_1} \to x_{i_2} \to \ldots \to x_{i_k} \to x_i$, unde $k \geqslant 1$ deoarece relaţia R_1 este nonreflexivă. Logic există patru posibilităţi :

a) $\ldots \leftarrow x_{i_k} \to x_i$ absurdă datorită proprietăţii lui Tesnière.

b) $\ldots \to x_{i_k} \to x_i$ în acest caz rezultă că avem şi $\ldots \to x_{i_{k-1}} \to x_{i_k} \to x_i$ căci în caz contrar avem contradicţia de la a). Din aproape în aproape obţinem : $x_i \to \ldots \to x_{i_k} \to x_i$ adica $x_i \rightrightarrows x_i$ ceea ce este absurd.

c) $\ldots \leftarrow x_{i_k} \leftarrow x_i$ repetînd raţionamentul de la b) şi a), rezultă că relaţia scrisă revine la $x_i \rightarrow x_{i_k} \leftarrow x_i$ care este de fapt repetarea relaţiei $x_i \rightarrow x_{i_k}$.

d) $\ldots \leftarrow x_{i_k} \leftarrow x_i$ există în această situaţie două cazuri:

— pentru orice l, $1 \leqslant l \leqslant k-1$, $x_{i_l} \leftarrow x_{i_{l+1}}$ şi $x_i \leftarrow x_{i_1}$ adică $x_i \leftarrow x_{i_1} \leftarrow \ldots \leftarrow x_i$ sau $x_i \leftrightarrows x_i$ ceea ce este absurd;

— există l_0, $1 \leqslant l_0 \leqslant k$, maxim astfel încît $x_{i_l} \leftarrow x_{i_{l+1}}$ pentru $l \geqslant l_0$ şi $x_{i_{l_0-1}} \rightarrow x_{i_{l_0}}$; avem deci $x_i \ldots \rightarrow x_{i_{l_0}} \leftarrow \ldots \leftarrow x_i$ conform raţionamentelor de la a) şi b), rezultă că $x_i \rightarrow \ldots \rightarrow x_{i_{l_0}} \leftarrow \ldots \leftarrow x_i$; datorită proprietăţii lui Tesnière $x_{i_1} = x_{i_k}$, $x_{i_2} = x_{i_{k-1}}$, ş.a.m.d., adică avem de fapt repetarea relaţiei $x_i' \rightarrow \ldots \rightarrow x_{i_{l_0}}$.

Considerăm acum o nouă relaţie R_2 pe mulţimea F, definită astfel: $x_i R_2 x_j$ dacă $i = j$ sau dacă $x_i \bar{R}_1 x_j$. Datorită definiţiei ei, relaţia R_2 devine reflexivă, cum păstrează şi proprietăţile lui $\bar{R}_1$, R_2 este o relaţie de echivalenţă, care deci împarte mulţimea F în clase de echivalenţă.

Fie din nou fraza $f = x_1 x_2 \ldots x_n$ şi $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Oricărui şir $i_1, i_2, \ldots, i_{n_i}$ cu $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{n_i} \leqslant n$ i se asociază fraza $f_i = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{n_i}}$ numită şi subfrază a lui f. Subfrazei f_i i se asociază mulţimea $F_i = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n_i}}\}$ şi numerele m_i şi M_i, definite astfel:

$$m_i = \min(i_1, i_2, \ldots, i_{n_i}) = i_1, \quad M_i = \max(i_1, i_2, \ldots, i_{n_i}) = i_{n_i}$$

şi notăm cu S_i mulţimea $S_i = \{x_{m_{i+1}}, x_{m_{i+2}}, \ldots, x_{M_i}\}$.

A descompune fraza $f = x_1 x_2 \ldots x_n$ în subfraze, înseamnă a găsi un şir finit de fraze f_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, $f_i = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{n_i}}$ astfel încît f_i să fie subfraze ale lui f, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, $\bigcup_{i=1}^{k} F_i = F$ şi $i \neq j \Rightarrow F_i \cap F_j = \emptyset$, unde $F_i = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n_i}}\}$. Dacă subfrazele f_i sînt fraze simple, spunem că avem o descompunere a lui f în subfraze simple.

TEOREMA 3. *Fie $f = x_1 x_2 \ldots x_n$ o frază care are proprietatea lui Tesnière. Sînt adevărate următoarele afirmaţii:*

(1) *Există o descompunere a frazei f în subfraze simple f_l, $1 \leqslant l \leqslant k$.*

(2) *Dacă există i şi j, $i \neq j$, astfel încît $S_i \cap S_j \neq \emptyset$, atunci fraza f nu este proiectivă nici tare, nici în sens restrîns, nici în sensul lui Harper şi Hays, nici în sensul lui Lecerf.*

(3) *Dacă „$i \neq j \Rightarrow S_i \cap S_j = \emptyset$", atunci fraza f este proiectivă tare, în sens restrîns, în sensul lui Harper şi Hays, respectiv în sensul lui Lecerf dacă şi numai dacă pentru orice l, $1 \leqslant l \leqslant k$, f_l este proiectivă tare, în sens restrîns, în sensul lui Harper şi Hays, respectiv în sensul lui Lecerf.*

Demonstraţie. (1) Pe mulţimea F considerăm clasele de R_2-echivalenţă, fie acestea F_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, notate astfel încît $i < j$ să implice $m_i < m_j$. Dacă $F_i = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n_i}}\}$, atunci îi putem asocia subfraza $f_i = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{n_i}}$ (presupunînd că $i_l < i_{l+1}$). Vom demonstra că f_i sînt subfrazele căutate: cum R_2 este o relaţie de echivalenţă pe F, rezultă că $\bigcup_{i=1}^{k} F_i = F$ şi $i \neq j \Rightarrow F_i \cap F_j = \emptyset$; f_i este frază simplă pentru că:

(i) Există i_0 astfel încît $x_{i_0} \rightarrow x_{i_l}$ este fals pentru orice $x_{i_l} \in F_i$, căci dacă presupunem că pentru orice $x_{i_l} \in F$ există $x_{i_{l'}} \in F_i$ astfel încît $x_{i_l} \rightarrow x_{i_{l'}}$, atunci pornind, de exemplu, de la x_{i_1}, putem construi un lanț : $x_{i_1} \rightarrow x_{i_{l'}} \rightarrow \ldots$. Cum mulțimea F_i este finită și cum f are proprietatea lui Tesnière, rezultă că după cel mult n_i pași un termen se va repeta, fie, de exemplu, $x_{i_1} \rightarrow \ldots \rightarrow x_{i_l} \rightarrow \ldots \rightarrow x_{i_l}$, adică $x_{i_l} \rightrightarrows x_{i_l}$ ceea ce este absurd. Deci există $x_{i_{l_0}} \in F_i$, termen ce nu are nici o regență. Să presupunem că există și $x_{i_{l'_0}} \in F_i$ cu aceeași proprietate ca $x_{i_{l_0}}$. Cum $x_{i_{l_0}}$, $x_{i_{l'_0}} \in F_i$, rezultă că $x_{i_{l_0}} \; R_2 \; x_{i_{l'_0}}$, adică $i_{l_0} = i_{l'_0}$ ceea ce este contrar ipotezei sau $x_{i_{l_0}} \; \overline{R}_1 \; x_{i_{l'_0}}$, adică există șirul $x_{i_{l_1}}, x_{i_{l_2}}, \ldots, x_{i_{l_m}}$ cu $x_{i_{l_0}} - x_{i_{l_1}} - x_{i_{l_2}} - \ldots - x_{i_{l_m}} - x_{i_{l'_0}}$. Ținînd cont de proprietățile lui $x_{i_{l_0}}$ și $x_{i_{l'_0}}$, rezultă că prima săgeată este dirijată spre stînga și ultima spre dreapta. Raționînd din aproape în aproape, ajungem la o contradicție cu proprietatea lui Tesnière. Deci $x_{i_{l_0}}$ nu are nici o regență și este singurul termen al frazei cu această proprietate.

(ii) Pentru $i_l \neq i_{l_0}$, există $i_{l'}$ pentru care $x_{i_l} \rightarrow x_{i_{l'}}$, conform definiției și unicității lui i_{l_0} și conform proprietății lui Tesnière acest $i_{l'}$ este unic.

(iii) Fie $i_l \neq i_{l_0}$; trebuie să demonstrăm că $x_{i_l} \rightrightarrows x_{i_{l_0}}$. Cum $x_{i_{l_0}}$ și $x_{i_l} \in F_1$ rezultă că $x_{i_l} \; R_2 \; x_{l_0}$, deci există șirul $x_{i_{l_1}}, x_{i_{l_2}}, \ldots, x_{i_{l_m}}$ cu $x_{i_l} - x_{i_{l_1}} - x_{i_{l_2}} - \ldots - x_{i_{l_m}} - x_{i_{l_0}}$, cum x_{i_0} este centrul frazei f_i, avem $x_{i_{l_m}} \rightarrow x_{i_{l_0}}$, cum f_i are proprietatea lui Tesnière, rezultă că $x_{i_{l_{m-1}}} \rightarrow x_{i_{l_m}}$, continuînd raționamentul, obținem că : $x_{i_l} \rightarrow x_{i_{l_1}} \rightarrow \ldots \rightarrow x_{i_{l_0}}$ adică $x_{i_l} \rightrightarrows x_{i_{l_0}}$ q.e.d..

(2) Fie $i \neq j$, mai precis $i < j$ și $S_i \cap S_j \neq \emptyset$, adică există $k \in S_i \cap S_j$ sau $k \in [m_i, M_i] \cap [m_j, M_j]$. Există următoarele două posibilități :

$$m_i < m_j \leqslant k \leqslant M_i < M_j$$

$$m_i < m_j \leqslant k \leqslant M_j < M_i .$$

Proiectivitățile considerate (tare, în sens restrîns, Harper — Hays, Lecerf) cer ca orice termen al frazei ce se află sub o săgeată (se spune că x_i este sub o săgeată dacă există j și k astfel încît $i \in (j, k)$ și $x_j \rightarrow x_k$) să fie subordonat uneia din extremitățile ei. Să presupunem că fraza f este proiectivă. Știm că $k \in [m_i, M_i]$ și $x_{m_i} \rightrightarrows x_{M_i}$; rezultă că există i_l și $i_{l'}$, cu $x_{i_l} \rightarrow x_{i_{l'}}$ și $k \in [i_l, i_{l'}]$, deci x_k este subordonat lui x_{i_l} sau $x_{i_{l'}}$, cum atît x_{i_l} cît și $x_{i_{l'}}$ este în relația R_2 cu x_{m_i} și x_{M_i}, datorită tranzitivității relației R_2, $x_k \; R_2 \; x_{m_i}$, deci $x_k \in F_i$. Raționînd analog, obținem că $x_k \in F_j$ deci $x_k \in F_i \cap F_j = \emptyset$ ceea ce este absurd. Deci dacă $S_i \cap S_j \neq \emptyset$, atunci fraza f nu este proiectivă în nici unul din sensurile considerate.

(3) Presupunem că pentru $i \neq j$, $S_i \cap S_j = \emptyset$. Trebuie să demonstrăm că f este $\ast$ proiectivă ($\ast$ însemnînd una din proiectivitățile tare, în sens restrîns, Harper — Hays, Lecerf) dacă și numai dacă pentru orice i, $1 \leqslant i \leqslant k$, f_i este $\ast$ proiectiva.

(a) Să presupunem că pentru orice i, $1 \leqslant i \leqslant k$, f_i este $\ast$ proiectivă și fie $x_l \rightrightarrows x_m$ sau (în funcție de $\ast$) $x_l \rightarrow x_m$. Din aceste relații rezultă că $x_l \; R_2 \; x_m$, deci există i_0, $1 \leqslant i_0 \leqslant k$, astfel încît x_l, $x_m \in F_{i_0}$ și deci $x_l \rightrightarrows x_m$ sau $x_l \rightarrow x_m$ în f_{i0} care este $\ast$ proiectivă. f_{i_0} fiind $\ast$ proiectivă, rezultă că pentru orice $r, r \in (l, m)$ $x_r \leftarrow x_m$ sau (în funcţie de $*$) $x_r \rightrightarrows x_m$, deci şi f este $*$ proiectivă q.e.d.

(b) Să presupunem că f este $*$ proiectivă şi fie $i \in [1, k]$. Fie x_{i_l}, $x_{i_{l'}} \in F_i$ cu $x_{i_l} \rightarrow x_{i_{l'}}$ sau $x_{i_l} \rightrightarrows x_{i_{l'}}$. Cum x_{i_l} $x_{i_{l'}} \in F$ şi f este $*$ proiectivă rezultă că pentru orice $r \in (i_l, i_{l'})$, avem $x_r \rightarrow x_{i_{l'}}$ sau $x_r \rightrightarrows x_{i_{l'}}$ ceea ce este adevărat şi pentru acei x_r care aparţin lui F_i şi deci f_i este $*$ proiectivă q.e.d.

Observaţii. a) $S_i \cap S_j = \emptyset$ pentru $i \neq j$ înseamnă de fapt că:

$$S_1 = F_1 = \{x_{1_1}, x_{1_2}, \ldots, x_{1_{n_1}}\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}\}$$

$$S_2 = F_2 = \{x_{2_1}, x_{2_2}, \ldots, x_{2_{n_2}}\} = \{x_{n_{1+1}}, x_{n_{1+2}}, \ldots, x_{n_{1+n_2}}\}$$

. . . .

$$S_k = F_k = \{x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_{nk}}\} = \{x_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1}, x_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1}, \ldots,$$
$$x_{n_1+\ldots+n_k=n}\}.$$

b) Pentru proiectivitatea monotonă, teorema 3 este neinteresantă, deoarece orice frază monoton proiectivă este o frază simplă [9] şi deci f are o singură subfrază improprie simplă, care este identică cu ea însăşi.

c) Relativ la cvasiproiectivitate şi la proprietatea lui Šreider, teorema nu este adevărată. Contra exemple:

$$f = x_1x_2x_3x_4x_5x_6 \text{ cu } x_1 \rightarrow x_5,\ x_2 \rightarrow x_3,\ x_3 \rightarrow x_5,\ x_4 \rightarrow x_6$$

f este cvasiproiectivă deşi condiţia (2) din teoremă nu este îndeplinită căci

$$f_1 = x_1x_2x_3x_5,\quad S_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

$$f_2 = x_4x_6,\qquad S_2 = \{x_4, x_5, x_6\}$$

$$S_1 \cap S_2 = \{x_4, x_5\} \neq \emptyset,$$

$$f' = x_1x_2x_3x_4x_5x_6 \text{ cu } x_1 \rightarrow x_5,\ x_2 \rightarrow x_3,\ x_3 \rightarrow x_4,\ x_5 \rightarrow x_6$$

f are proprietatea lui Šreider, deşi condiţia (2) din teoremă nu este îndeplinită, căci

$$f_1' = x_1x_5x_6,\quad S_1' = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

$$f_2' = x_2x_3x_4,\quad S_2' = \{x_2, x_3, x_4\}$$

$$S_1' \cap S_2' = \{x_2, x_3, x_4\} = \emptyset,$$

d) O frază cu proprietatea lui Tesnière este simplă dacă şi numai dacă se descompune într-o singură subfrază simplă, adică atunci cînd oricare doi termeni ai ei sînt în relaţia R_2 (orice doi termeni ai ei se pot uni printr-un lanţ).

4. CRITERII GEOMETRICE PENTRU PROIECTIVITATEA TARE ȘI ÎN SENS RESTRÎNS LA FRAZELE SIMPLE

În cazul frazelor cu proprietatea lui Tesnière, am redus deci problema proiectivității la aceeași problemă pentru frazele simple. Pentru a da criterii geometrice de proiectivitate este necesar să reprezentăm frazele sub formă de grafuri ; se știe că graful asociat unei fraze simple este o arborescență [13].

Pentru proiectivitatea tare și cea în sens restrîns am obținut următoarele criterii geometrice de proiectivitate :

1) *Proiectivitatea tare*. Fraza $f = x_1x_2 \ldots x_n$ este proiectivă tare dacă relația $x_i \rightrightarrows x_j$ implică relația $x_k \to x^j$ pentru orice k, $\min(i, j) < k < k \max(j, j)$. Fie x_{i_0} centrul frazei. Se știe că pentru orice i, $x_i \rightrightarrows x_{i_0}$ în particular este adevărat că $x_1 \rightrightarrows x_{i_0}$ și $x_n \rightrightarrows x_{i_0}$, deci este adevărată relația $x_k \to x_{i_0}$ pentru orice k, $k \in (1, i_0) \cup (i_0, n) = \{2, 3, \ldots \ldots, i_0 - 1, i + 1, \ldots, n - 1\}$. Pentru x_1 și x_n putem avea următoarele situații : $x_1 \to x_{i_0}$ sau $x_1 \to x_2$ ($x_1 \to x_j$, $j \neq i_0$, $j > 2$ este imposibilă deoarece atunci $2 \in (1, j)$ și asta implică $x_2 \to x_j$ or x_2 depinde de x_{i_0} și deci numai de el) respectiv $x_n \to x_{i_0}$ sau $x_n \to x_{n-1}$. Deci toți termenii frazei, exceptînd primul și ultimul termen, depind de centrul ei, extremitățile pot să depindă tot de centru sau de termenul imediat vecinilor. Alte relații de dependență în cadrul frazei f nu mai pot exista, deoarece am văzut că, exceptînd centrul frazei despre care știm *a priori* că nu are regență, de la fiecare termen al frazei pleacă cîte o săgeată, astfel încît o nouă relație de dependență, care știm că presupune existența unei săgeți în plus, ar contrazice proprietatea lui Tesnière. Deci fraza simplă f este proiectivă tare dacă și numai dacă are graful de forma unui fascicul ce sosește în centru, razele avînd lungimea egală cu 1, exceptînd eventual pe cele extreme care pot avea și lungimea egală cu 2. Acest fapt este ilustrat în figura 1.

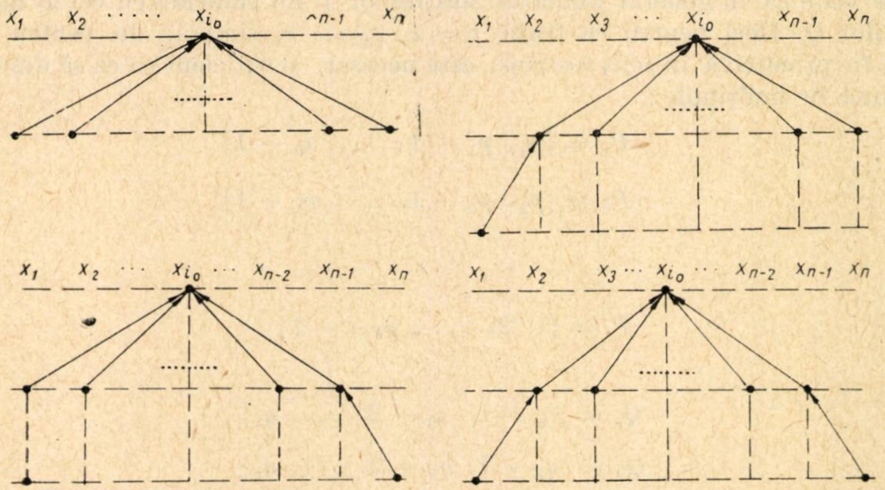


Fig. 1

2) *Proiectivitatea în sens restrîns.* Fraza $f = x_1 x_2 \ldots x_n$ este proiectivă în sens restrîns dacă relația $x_i \rightarrow x_j$ implică relația $x_k \rightarrow x_j$ pentru orice $k \in (i, j)$. Fie x_{i_0} centrul frazei. Fie $i_1 = \max \{i ; x_i \rightarrow x_{i_0}, i < i_0$ și $j_1 = \min \{j ; x_j \rightarrow x_{i_0}, i_0 < j\}$. Deci $x_{i_1} \rightarrow x_{i_0}$, și $x_{j_1} \rightarrow x_{i_0}$, din definiția proiectivității în sens restrîns rezultă că $x_i \rightarrow x_{i_0}$ pentru $i \in (i_1, i_0)$ deci $i > i_1$ ceea ce contrazice definiția lui x_{i_1}, adică $(i_1, i_0) = \emptyset$, deci $i_1 = i_0 - 1$. Analog obținem $j_1 = i_0 + 1$. Fie $P_1 = \{x_i ; i < i_0, x_i \rightarrow x_{i_0}$, $i = i_0 - 1$ sau $x_{i+1} \rightarrow x_{i_0}\}$, $P_1 \neq \emptyset$ deoarece $x_{i_0-1} \in P_1$ și fie $p_1 = \min \{i, x_i \in P_1\}$. Deci pentru $i, p_1 \leqslant i < i_0$, avem $x_i \rightarrow x_{i_0}$. Analog se definește mulțimea Q_1 ce conține pe x_{j_1} și q_1 astfel încît $j, i_0 < j \leqslant q_1$, implică $x_j \rightarrow x_{i_0}$. Din definiția lui P_1 și a lui p_1, respectiv a lui Q_1 și a lui q_1, rezultă că $x_{p_1-1} \nrightarrow x_{i_0}$ și $x_{q_1+1} \nrightarrow x_{i_0} \cdot x_{i_0}$ fiind centrul frazei $x_{p_1-1} \not\rightleftarrows x_{i_0}$, deci există șirul $x_{p_{11}}, x_{p_{12}}, \ldots, x_{p_{1l}}$ astfel încît $x_{p_1-1} \rightarrow x_{p_{11}} \rightarrow x_{p_{12}} \rightarrow \rightarrow \ldots \rightarrow x_{p_{1l}} \rightarrow x_{i_0}$. Să vedem ce valoari poate avea p_{11} : $p_{11} = p_1$; în acest caz $l = 1$ și $x_{p_1-1} \not\rightleftarrows x_{i_0}$ revine la $x_{p_1-1} \rightarrow x_{p_1} \rightarrow x_{i_0}$; $p_{11} \in (p_1, n)$, această relație implică relația $p_1 \in (p_{1}-1, p_{11})$, care combinată cu relația $x_{p_1-1} \rightarrow x_{p_{11}}$ implică relația $x_{p_1} \rightarrow x_{p_{11}}$ ceea ce contravine proprietății lui Tesnière, deci acest caz nu este posibil. În concluzie $x_{p_1-1} \rightarrow x_{p_1}$. Analog se demonstrează că $x_{q_1+1} \rightarrow x_{q_1}$. Definim acum mulțimea $P_2 = \{x_i ; i < p_1, x_i \rightarrow x_{p_1}, i = p_1 - 1$ sau $x_{i+1} \rightarrow x_{p_1}\} \neq \emptyset$ și $p_2 = \min \{i, x_i \in P_2\}$. Analog definim mulțimea Q_2 și q_2. Repetăm raționamentul pînă epuizăm toți termenii frazei ; aceasta este posibil deoarece fraza are n termeni și deci putem avea cel mult $i_0 - 1$ mulțimi P și $n - i_0 - 1$ mulțimi Q. Se vede că în general numărul mulțimilor P nu coincide cu cel al mulțimilor Q. Deci pentru ca fraza $f = x_1 x_2 \ldots x_n$ simplă, de centru x_{i_0}, să fie proiectivă în sens restrîns, este necesar, și suficient ca ea să descompună în mulțimile :

$$P_1 = \{p_1, p_1 + 1, \ldots, i_0 - 1\}$$

$$P_2 = \{p_2, p_2 + 1, \ldots, p_1 - 1\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_l = \{1, 2, \ldots, p_{l-1} - 1\}$$

și

$$Q_1 = \{i_0 + 1, i_0 + 2, \ldots, q_1\}$$

$$Q_2 = \{q_1 + 1, q_1 + 2, \ldots, q_2\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Q_h = \{q_{h-1} + 1, q_{h-1} + 2, \ldots, n\}$$

astfel încît $i \in P_1 \cup Q_1$ implică $x_i \rightarrow x_{i_0}$; $i \in P_k$ implică $x_i \rightarrow x_{p_k-1}$; $i \in Q_{k'}$, implică $x_i \rightarrow x_{q_{k'}-1}$ pentru $1 \leqslant k \leqslant l, 1 \leqslant k' \leqslant h$.

Alte relaţii de dependenţă nu mai pot exista deoarece fraza fiind simplă, are şi proprietatea lui Tesnière.

Acest fapt este ilustrat în figura 2.

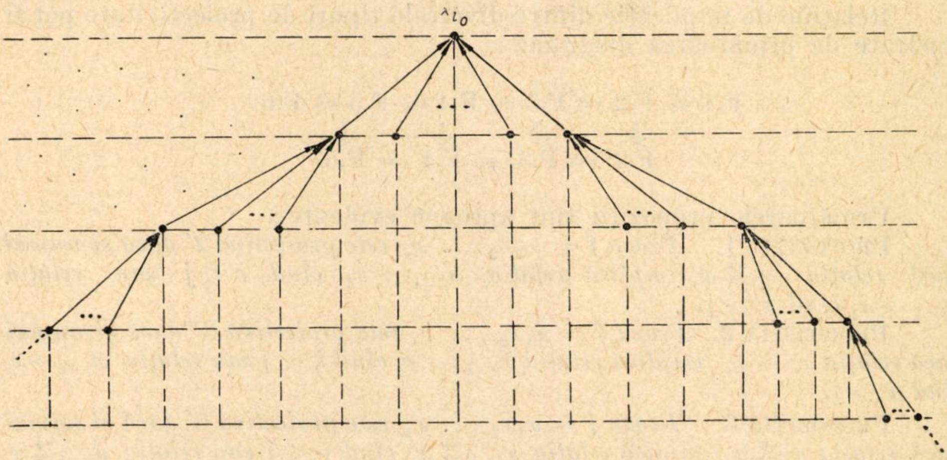


Fig. 2

5. UNELE EXTENSIUNI ALE TIPURILOR DE PROIECTIVITATE

Pentru ca o frază să fie ⋇ proiectivă (⋇ însemnează respectiv tare, în sens restrîns, în sensul lui Harper şi Hays, în sensul lui Lecerf) trebuie ca toţi termenii ce se află sub o săgeată să fie în relaţia R sau $\overline{R}$ cu una din extremităţile săgeţii. Extensiunile considerate constau în aceea că se pretinde această proprietate (de a fi dependent respectiv subordonat extremităţii săgeţii) doar unui termen de sub săgeată (adică să existe un termen de sub săgeată care să fie în relaţia R respectiv $\overline{R}$ cu una din extremităţile săgeţii). Obţinem astfel următoarele tipuri de proiectivitate:

DEFINIŢIA 2′. Fraza $f = x_1 x_2 \ldots x_n$ este proiectivă 2′ dacă relaţia $x_i \rightrightarrows x_j$ implică existenţa unui k, $k \in (i, j)$, astfel încît $x_k \rightarrow x_j$. Notăm cu F.2′ proprietatea frazei f de a fi proiectivă 2′.

DEFINIŢIA 3′. Fraza $f = x_1 x_2 \ldots x_n$ este proiectivă 3′ dacă relaţia $x_i \rightarrow x_j$ implică existenţa unui k, $k \in (i, j)$, astfel încît $x_k \rightarrow x_j$. Notăm cu F.3′ proprietatea frazei f de a fi proiectivă 3′.

DEFINIŢIA 4′. Fraza $f = x_1 x_2 \ldots x_n$ este proiectivă 4′ dacă relaţia $x_i \rightarrow x_j$ implică existenţa unui k, $k \in (i, j)$, astfel încît $x_k \rightrightarrows x_j$. Notăm cu F. 4′ proprietatea frazei f de a fi proiectivă 4′.

DEFINIŢIA 5′. Fraza $f = x_1 x_2 \ldots x_n$ este proiectivă 4′ dacă relaţia $x_i \rightrightarrows x_j$ implică existenţa unui k, $k \in (i, j)$, astfel încît $x_k \rightrightarrows x_j$. Notăm cu F.5′ proprietatea frazei f de a fi proiectivă 5′.

(În aceste definiţii , prin existenţa unui k se înţelege existenţa a cel puţin unui k cu proprietăţile enunţate).

Sînt evidente următoarele implicaţii:

F.2 ⇒ F.2′, F.3 ⇒ F.3′, F.4 ⇒ F.4′, F.5 ⇒ F.5′ şi F.2′ ⇒ F.3.′ ⇒ ⇒ F.4′ ⇐ F.5′.

Este interesant faptul că echivalenţa F.4 ⇔ F.5 nu se păstrează. Într-adevăr, fraza :

$f = x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ cu $x_1 \to x_6$, $x_2 \to x_3x_5 \to x_6x_6 \to x_4$ este proiectivă 4′ dar nu este proiectivă 5′.

Relaţiile de implicaţie dintre diversele tipuri de proiectivitate pot fi ilustrate de următoarea diagramă :

$$\begin{tikzcd}
F.1 \arrow[r, Rightarrow] & F.2 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & F.3 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & F.4 \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & F.5 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & F.6 \\
 & F.2' \arrow[r, Rightarrow] & F.3' \arrow[r, Rightarrow] & F.4' & F.5' \arrow[l, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Următoarele propoziţii sînt aproape evidente :

PROPOZIŢIA 1. *Fraza* $f = x_1x_2 \ldots x_n$ *este proiectivă* 2′ *dacă şi numai dacă relaţia* $x_i \rightrightarrows x_j$ *implică relaţia* $x_{j-1} \to x_j$ *cînd* $i < j$ *sau relaţia* $x_{j+1} \to x_j$ *cînd* $i > j$.

PROPOZIŢIA 2. *Fraza* $f = x_1x_2 \ldots x_n$ *este proiectivă* 3′ *dacă şi numai dacă relaţia* $x_i \to x_j$ *implică relaţia* $x_{j-1} \to x_j$ *cînd* $i < j$ *sau relaţia* $x_{j+1} \to x_j$ *cînd* $i > j$.

PROPOZIŢIA 3. *Fraza* $f = x_1x_2 \ldots x_n$ *este proiectivă* 5′ *dacă şi numai dacă relaţia* $x_i \rightrightarrows x_j$ *implică relaţia* $x_{j-1} \rightrightarrows x_j$ *cînd* $i < j$ *sau relaţia* $x_{j+1} \rightrightarrows x_j$ *cînd* $i > j$.

Propoziţia 3 este valabilă şi pentru proiectivitatea 4′, deoarece relaţia $x_i \to x_j$ implică relaţia $x_i \rightrightarrows x_j$.

Demonstrăm doar prima propoziţie : dacă fraza f are proprietatea enunţată în propoziţie, este evident că este proiectivă 2′. Să presupunem că f este proiectivă 2′ şi fie $x_i \rightrightarrows x_j$. Cum fraza f este proiectivă 2′, există $k_0 \in (i, j)$ astfel încît $x_{k_0} \to x_j$. Distingem două cazuri :

a) $i > j$. Dacă $k_0 = j - 1$, atunci propoziţia este demonstrată, dacă nu, atunci relaţia $x_{k_0} \to x_j$ implică relaţia $x_{k_0} \rightrightarrows x_j$, deci, conform faptului că f este 2′ proiectivă, există $k_1 \in (k_0, j)$ astfel încît $x_{k1} \to x_j$. Repetînd raţionamentul obţinem şirul $k_0 < k_1 < \ldots < j$. Şirul fiind mărginit de j, este finit or acest şir se rupe atunci cînd $k = j - 1$ deoarece în acest caz $(j - 1, j) = \emptyset$ şi avem deci $x_{j-1} \to x_j$ .q.e.d.

b) $i > j$, deci $k_0 > j$. Dacă $k_0 = j + 1$, propoziţia este demonstrată, dacă nu, atunci relaţia $x_{k0} \to x_j$ implică relaţia $x_{k0} \rightrightarrows x_j$ care la rîndul ei implică existenţa unui k_1, $k_1 \in (k_0, j)$, $j < k_1 < k_0$ astfel încît $x_{k1} \to x_j$. Repetînd raţionamentul obţinem şirul $k_0 > k_1 > \ldots > j$. Şirul fiind mărginit superior de k_0 şi inferior de j este finit, or acest şir se rupe atunci cînd $k = j + 1$, căci în acest caz $(j + 1, j) = \emptyset$ şi nu mai putem folosi proprietatea frazei de a fi proiectivă 2′, şi deci $x_{j+1} \to x_j$. q.e.d.

Celelalte propoziţii se demonstrează analog.

TEOREMA 4. *Fraza* $f = x_1, x_2 \ldots x_n$ *cvasiproiectivă este proiectivă Lecerf, dacă şi numai dacă fraza* f *este proiectivă în sensul definiţiei* 5′.

Demonstraţie. Dacă fraza f este proiectivă Lecerf (deci implicit şi cvasiproiectivă) evident această frază este proiectivă 5′.

Fie fraza f cvasiproiectivă şi proiectivă 5′. Să presupunem că are loc relaţia $x_i \rightrightarrows x_j$. Trebuie să demonstrăm că pentru orice k, $k \in (i, j)$, are loc relaţia $x_k \rightrightarrows x_j$. Conform propoziţiei 3 relaţia $x_i \rightrightarrows x_j$ implică relaţia $x_{j-1} \rightrightarrows x_j$ cînd $i < j$ sau relaţia $x_{j+1} \rightrightarrows x_j$ cînd $i > j$, datorită cvasiproiectivităţii relaţiile $x_i \rightrightarrows x_j$, $x_{j-1} \rightrightarrows x_j$ implică relaţia $x_k \rightrightarrows x_j$ cînd $k \in (i, j-1)$, respectiv relaţiile $x_i \rightrightarrows x_j$ şi $x_{j+1} \rightrightarrows x_j$ implică relaţia $x_k \rightrightarrows x_j$ cînd $k \in (j+1, i)$, adică în ambele cazuri relaţia $x_k \rightrightarrows x_j$ este adevărată pentru $k \in (i, j)$. q.e.d..

Primită la redacţie la 26 ianuarie 1968

Centrul de calcul economic
şi cibernetică economică

SUR LA NOTION DE PROJECTIVITÉ SYNTACTIQUE

RÉSUMÉ

On fait une étude algébrique et géométrique des divers types de projectivité syntactique, notamment de ceux presentés par S. Marcus dans le chapitre 6 de [9] et de ceux présentés par Šreider dans [12]. Par exemple, on donne des conditions dans lesquelles la quasi-projectivité est équivalente à la projectivité au sens de Lecerf ; des conditions dans lesquelles la projectivité Lecerf entraîne la projectivité au sens de Šreider. Dans la deuxième partie du travail, en partant du critère géométrique de projectivité au sens de Lecerf, on donne des critères géométriques concernant d'autres types de projectivité syntactique. Ces critères sont applicables à chaque phrase simple au sens de [13].

BIBLIOGRAFIE

1. N. Chomsky, *Formal properties of grammars.* Handbook of mathematical psychology (R. D. Luce, R. R. Bush, E. Galanter editors), vol. 11, 1963, John Wiley and Sons, chapter 12.
2. N. Chomsky, *On certain formal properties of grammars.* Information and Control, **2** (1959).
3. C. Gaifman, *Dependency systems and phrase-structure systems.* P—2315, Rand Corporation, Santa Monica, California, 1961.
4. K. E. Harper — D. G. Hays, *The use of machines in the construction of a grammar and computer program for structural analysis.* Proceedings of the International Congress on Information Processing, UNESCO, Paris, 1959.
5. L. Hirschberg, *Le relâchement conditionnel de l'hypothèse de projectivité,* EURATOM, Rapport CETIS, No. 35, 1961.
6. Y. Lecerf, *Une représentation algébrique de la structure des phrases dans diverses langues naturelles.* Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, **252**, *2*, 232—234 (1961).
7. Y. Lecerf — P. Ihm, *Eléments pour une grammaire générale des langues projectives.* Rapport GRISA, No. 1, 1960.
8. I. Lynch, *Suggestions for modification of Lecerf theory of projectivity and of his stemmas.* for the purposes of their application to „non-projective" Russian sentences. EURATOM, Rapport CETIS, No. 35, 1961.
9. S. Marcus, *Algebraic linguistics*; *Analytic models.* Academic Press, New York, 1967, capitolul 6.
10. E. V. Paduceva, *O sposobah predstavlenija sintaktičeskoĭ struktury predloženija.* Voprosy jazykoznanija, No. 2, 1964.
11. L. Tesnière, *Eléments de syntaxe structurale.* Klincksieck, Paris, 1959.
12. I. A. Šreider, *Svoĭstva projektivnosti jazika.* Naučino tehničeskaja informaţija, *8* (1964).
13. S. Marcus, *Phrases arboréscentes.* Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, **11**, *6*, 641—646 (1966).

DETERMINAREA CANTITĂŢII MAXIME DE MATERIALE CARE TREC PRINTR-O REŢEA DE TRANSPORT ŞI DISTRIBUŢIA EI PE ARCE

DE

ŞTEFAN MITITELU

Se consideră o reţea de transport cu două noduri principale între care există un trafic optim de materiale.

În lucrare se arată că, în acest caz, determinarea cantităţii de materiale care trec prin reţea se bazează pe determinarea fluxurilor optime de materiale în reţele cu cîte o intrare şi o ieşire şi se determină fluxurile de materiale ale acelor reţele.

În practică apar numeroase probleme a căror rezolvare duce la utilizarea optimă a diferitelor reţele de transport, permiţînd astfel transportul maxim de materiale în reţea cu un număr minim de mijloace de transport într-un timp mai scurt.

Orice unitate de transport este interesată să transporte o cantitate cît mai mare de materiale pentru satisfacerea cerinţelor consumatorilor, realizînd în acelaşi timp un beneficiu maxim şi alegîndu-şi pentru aceasta rutele convenabile de circulaţie într-o reţea.

În această lucrare vom studia o problemă de acest fel pentru reţelele de transport. Deoarece o reţea rutieră de transport presupune introducerea unor consideraţii suplimentare, pentru redarea mai exactă a fenomenului vom studia problema pentru o astfel de reţea.

1. EXPUNEREA PROBLEMEI

Fie $\mathcal{R}$ o reţea de transport cu n noduri[1]) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ şi fie două dintre ele X_1 şi X_n noduri principale [2]). Dacă între două noduri X_i şi X_j se circulă în ambele sensuri, atunci vom considera arcele $(X_i,$

---

[1]) În [1] şi [2] se numesc vîrfuri.

[2]) În [2] se numesc poli.

ST. CERC. MAT., TOM., 21, NR. 3, P. 433—438 BUCUREŞTI, 1969

5 — c. 6233

X_j) şi (X_j, X_i) dinstincte. Vom numi capacitate C_{ij} ($\geqslant 0$) a arcului (X_i, X_j), cantitatea maximă de materiale care se pot transporta de la X_i la X_j. În funcţie de natura reţelei, în unele cazuri $C_{ij} = C_{ji}$, iar în altele $C_{ij} \neq C_{ji}$. Între cele două noduri principale X_1 şi X_n are loc un trafic de materiale în ambele sensuri. Presupunînd că materialele în circulaţia lor nu descriu circuite, ne propunem să determinăm cantitatea maximă de materiale care trece prin reţea şi distribuţia ei pe arcele reţelei atunci cînd reţeaua se află deci în regim optim de transport.

Se pune condiţia ca în orice nod X_j ($j \neq 1$, $j \neq n$) fluxul parţial care intră să fie egal cu fluxul parţial care iese (flux conservativ), adică :

$$\sum_{(X_i,\, X_j) \in \cup_{X_j}^{-}} u_{ij} = \sum_{(X_j,\, X_k) \in \cup_{X_j}^{+}} u_{jk},$$

unde :

— u_{ij} ($\leqslant C_{ij}$) este cantitatea de materiale care trece prin arcul (X_i, X_j);

— u_{jk} ($\leqslant C_{jk}$) este cantitatea de materiale care trece prin arcul (X_j, X_k);

— $\bigcup_{X_j}^{-}$ este mulţimea arcelor (X_i, X_j) incidente interior în X_j;

— $\bigcup_{X_j}^{+}$ este mulţimea arcelor (X_j, X_k) incidente exterior în X_j

2. CONDIŢIE ÎN PUNEREA PROBLEMEI

Este uşor de observat că unele drumuri care permit circulaţia de la X_1 la X_n, au arce comune cu unele drumuri care permit circulaţia de la X_n la X_1.

Dacă capacitatea C_{ij} a unui arc (X_i, X_j) este utilizată la maxim pe un drum ($X_1, \ldots, X_i, X_j, \ldots X_n$), adică acest drum este saturat, atunci pe un drum ($X_n, \ldots, X_i, X_j, \ldots, X_1$), care conţine acelaşi arc (X_i, X_j) circulaţia se blochează. Presupunînd că nu există prioritate în circulaţia materialelor şi că în ambele sensuri, de la X_1 la X_n şi invers, materialelele au condiţii identice de transport, vom presupune că capacitatea C_{ij} a arcului (X_i, X_j) este utilizată în mod egal de materialele care circulă în ambele sensuri.

3. SOLUŢIONAREA PROBLEMEI

Cu observaţiile anterioare, problema pusă se reduce la determinarea fluxului maxim într-o reţea de transport [1].

Reţeaua $\mathcal{R}$ se reduce atunci la suprapunerea a două reţele $\mathcal{R}_1$ şi $\mathcal{R}_2$, fiecare cu cîte o intrare şi o ieşire [1]. Reţeaua $\mathcal{R}_1$ conţine toate drumurile din $\mathcal{R}$ care merg de la X_1 la X_n, iar reţeaua R_2 conţine toate drumurile din $\mathcal{R}$ care merg de la X_n la X_1.

În privinţa capacităţii arcelor, dacă în reţeaua $\mathcal{R}$ arcul (X_i, X_j) se găseşte atît pe un drum care merge de la X_1 la X_n, cît şi pe unul care merge de la X_n la X_1, atunci pentru reţeaua $\mathcal{R}_1$ arcului (X_i, X_j) îi vom asocia capacitatea :

$$C_{ij}^{(1)} = \frac{C_{ij}}{2},$$

iar arcului (X_k, X_l), care se găsește numai pe un astfel de drum, îi vom asocia capacitatea :

$$C_{kl}^{(1)} = C_{kl}.$$

Pentru rețeaua $\mathcal{R}_2$ capacitățile $C_{ij}^{(2)}$ se iau la fel. Ambele rețele $\mathcal{R}_1$ și $\mathcal{R}_2$ conțin fiecare un număr cel mult egal de noduri cu cel al rețelei $\mathcal{R}$, căci dacă în $\mathcal{R}_1$, de exemplu, pe un drum $(X_1, \ldots, X_i, X_j, \ldots, X_k, \ldots X_n)$ apar consecutiv nodurile X_i, X_j și X_k iar nodul X_j nu este legat cu alte noduri, în afară de X_i și X_k, atunci arcele (X_i, X_j) și (X_j, X_k) pot constitui un singur arc (X_i, X_k) a cărui capacitate se ia :

$$C_{ik} = \min\,(C_{ij}, C_{jk}). \qquad (2)$$

În felul acesta transporturile în rețele $\mathcal{R}_1$ și $\mathcal{R}_2$ nu se influențează reciproc, fiind evitate astfel blocările de materiale care ar influența circulația lor.

Să notăm cu $\Phi(1, n)$ fluxul maxim de materiale în rețeaua $\mathcal{R}_1$ și cu $u_{ij}^{(1)}$ distribuțiile sale (fluxurile) pe arcele (X_i, X_j) ale rețelei $\mathcal{R}_1$. Să notăm de asemenea cu $\Phi\ (n, 1)$ fluxul maxim de materiale în rețeaua $\mathcal{R}_2$ și cu $u_{ij}^{(2)}$ distribuțiile sale pe arcele (X_i, X_j) ale rețelei $\mathcal{R}_2$. Trecînd prin rețeaua $\mathcal{R}$ fluxul de materiale $\Phi\ (1, n)$ de la nodul 1 la nodul n și fluxul de materiale $\Phi\ (n, 1)$ de la nodul n la nodul 1 cu distribuțiile $u_{ij}^{(1)}$ și respectiv $u_{ij}^{(2)}$ pe arcele (X_i, X_j) ale sale, atunci prin arcele (X_i, X_j) trec cantitățile de materiale:

$$u_{ij}^{*} = u_{ij}^{(1)} + u_{ij}^{(2)}\,(i, j = 1, 2, \ldots, n; i \neq j).$$

Însă în urma acestui fapt în rețeaua $\mathcal{R}$, în general, între nodurile principale 1 și n rămîn drumuri nesaturate.

Fie c cantitatea de materiale care saturează aceste drumuri și fie δ_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ acelea dintre ele pe care se distribuie această cantitate. Să notăm cu v_k fluxul de materiale suplimentare care trece pe drumul δ_k. Deci $c = \sum\limits_{k=1}^{p} v_k$.

Atunci soluția problemei este dată de următoarele teoreme :

TEOREMA 1. *Cantitatea maximă C de materiale care trec prin rețeaua $\mathcal{R}$ de transport este dată de relația*

$$C = \Phi\,(1, n) + \Phi\,(n, 1) + c.$$

TEOREMA 2. *Distribuțiile $\overline{u}_{ij}$, ale cantității maxime C de materiale care trec prin rețeaua $\mathcal{R}$ de transport, pe arcele (X_i, X_j) ale sale sînt date de relațiile :*

$$\overline{u}_{ij} = u_{ij}^{*} + v_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n; i \neq j),$$

unde :

$$v_{ij} = \begin{cases} \sum\limits_{k} v_k, \ \textit{dacă}\ (X_i, X_j) \in \delta_k, \\ 0, \ \textit{dacă}\ (X_i, X_j) \notin \delta_k. \end{cases}$$

Exemplu. Să considerăm rețeaua $\mathfrak{R}$ din figura 1.

Cele două noduri principale sînt *1* și *8*. Pe fiecare arc al rețelei s-a notat capacitatea sa de transport. Conform celor anterioare, această rețea conduce la rețelele $\mathfrak{R}_1$ (fig. 2) și $\mathfrak{R}_2$ (fig. 3) în care se circulă numai în cîte un sens și în care apar și capacitățile arcelor. Pentru $\mathfrak{R}_2$ am folosit o rețea izomorfă [2] mai plauzibilă.

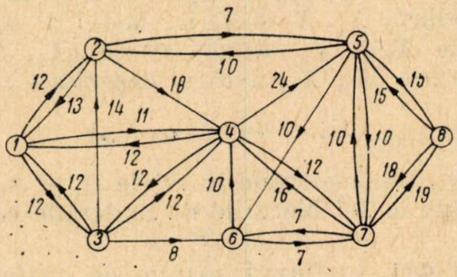

1
2
3
4
5
6
7
8
7
10
12
13
14
11
18
24
15
15
12
12
12
12
12
12
10
10
10
10
12
16
18
19
7
7
8

Fig. 1

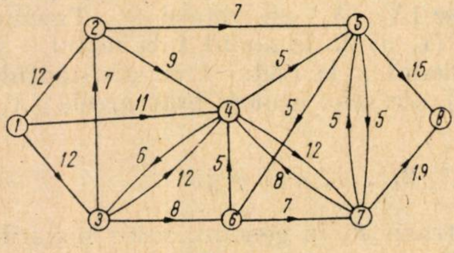

1
2
3
4
5
6
7
8
7
12
7
9
5
11
15
5
5
5
12
6
12
5
12
8
19
8
7

Fig. 2

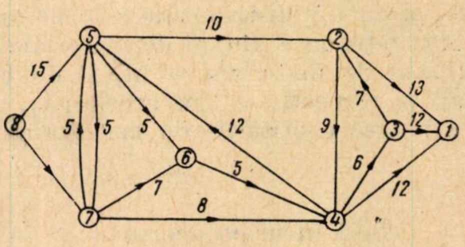

8
5
2
3
1
6
7
4
10
15
7
13
5
5
5
12
9
12
6
5
7
12
8

Fig. 3

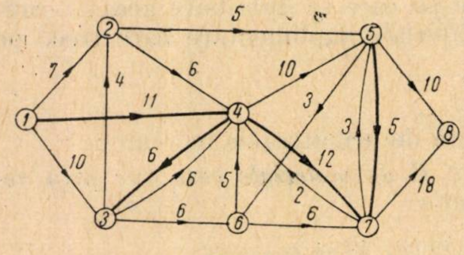

1
2
3
4
5
6
7
8
5
7
4
6
10
10
11
3
3
5
6
12
10
6
5
2
18
6
6

Fig. 4

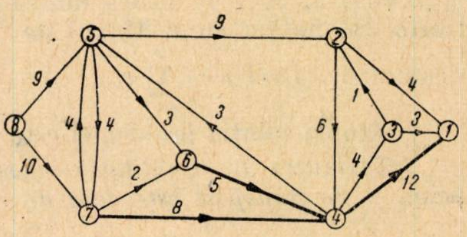

8
5
2
3
1
6
7
4
9
9
4
4
3
3
1
4
6
3
10
2
5
4
12
8

Fig. 5

Fluxurile optime în rețelele $\mathfrak{R}_1$ și $\mathfrak{R}_2$ cu cîte o intrare și o ieșire le determinăm cu ajutorul algoritmului lui Ford-Fulkerson [1].

Plecînd de la fluxuri conservative în cele două rețele $\mathfrak{R}_1$ (fig. 4) și $\mathfrak{R}_2$ (fig. 5) și folosind algoritmul lui Ford-Fulkerson se găsesc fluxurile optime în rețelele $\mathfrak{R}_1$ (fig. 6) și $\mathfrak{R}_2$ (fig. 7) :

$$\Phi(1,8) = 15 + 19 = 34$$

$$\Phi(8,1) = 10 + 0 + 5 + 8 = 23.$$

Distribuţiile u_{ij}^{*} se văd în figura 8. Adăugînd două unităţi pe drumul nesaturat (8,5,6,4,3,1) se obţine figura 9 care conţine numai drumuri saturate şi pe ale cărei arce s-au notat distribuţiile $\overline{u}_{ij}$ ale lui C care în acest caz, conform teoremei 1, este :

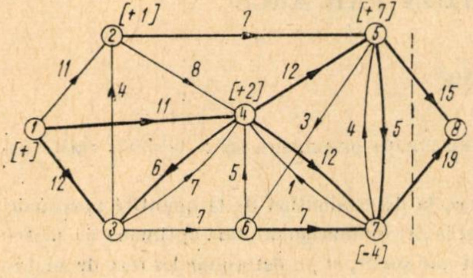

[+1]
7
[+7]
2
5
11
8
12
4
[+2]
15
11
4
1
3
4
5
8
[+]
12
6
7
5
12
19
1
3
7
6
7
7
[-4]

Fig. 6

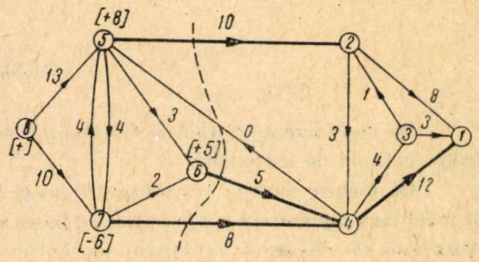

[+8]
10
5
2
13
8
1
3
4
4
0
3
3
1
8
[+]
[+5]
10
6
2
5
4
12
7
4
[-6]
8

Fig. 7

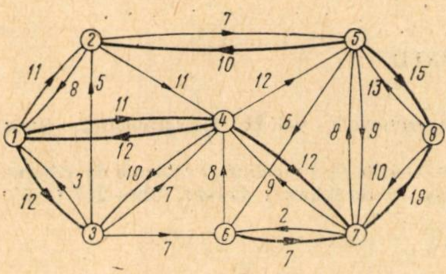

7
2
5
10
11
8
5
11
12
15
13
11
1
4
6
8
9
8
12
12
3
10
7
8
12
9
10
19
2
3
6
7
7
7

Fig. 8

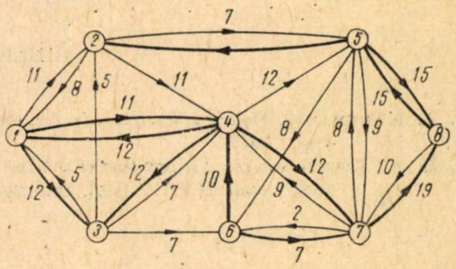

7
2
5
11
8
5
11
12
15
15
11
1
4
8
8
9
8
12
5
12
7
10
12
9
10
19
12
2
3
6
7
7
7

Fig. 9

$$C = 34 + 23 + 2 = 59.$$

Arcele saturate au fost trasate cu linii groase.

Observaţie. Deoarece $u_{ij}^{(1)}$, de exemplu, nu sînt unice [1], rezultă că nici $\overline{u}_{ij}$ nu sînt unice.

4. O VARIANTĂ A PROBLEMEI

Problema studiată poate fi privită şi ca o problemă de minim.

Astfel dacă din localitatea A trebuie să se transporte un material în localitatea B pe o reţea terestră intermediară cu ajutorul autovehiculelor, numărul maxim C de autovehicule care trec prin reţea este în acelaşi timp şi numărul minim de autovehicule care asigură transportul materialului într-un timp minim de la A la B.

Dacă s-ar destina pentru această lucrare $C_1 (> C)$ autovehicule, $C_1 - C$ dintre ele rămîn nefolosite, iar dacă se folosesc şi acestea, înseamnă că reţeaua nu se află în regim optim de circulaţie.

Primită la redacţie la 29 aprilie 1968.

Institutul de construcţii Bucureşti.

DÉTERMINATION DE LA QUANTITÉ MAXIMALE DE MATÉRIAUX QUI PASSENT PAR UN RÉSEAU DE TRANSPORT ET SA DISTRIBUTION PAR ARCS

RÉSUMÉ

On considère un réseau de transport à deux nœuds principaux entre lesquels existe un trafic optimal de matériaux.

On montre dans ce travail que, dans ce cas, la détermination de la quantité maximale de matériaux qui passent par le réseau est basée sur la détermination des flux optimaux de matériaux dans des réseaux ayant chacun une entrée et une sortie, et on détermine les flux de matériaux des arcs du réseau.

Le problème est résolu pour un réseau particulier.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Kaufmann, *Metode şi modele ale cercetării operaţionale.* vol. II, Ed. ştiinţifică, Bucureşti, 1967.
2. B. A. Trahtenbrot, *Asupra teoriei schemelor cu contacte fără repetiţii.* Probleme de cibernetică, Acad. R.P.R., Bibl. anal. rom.-sov., Seria tehnică, *69—70*, 129—217 (1959).

METODA ITERATIVĂ DE REZOLVARE A JOCURILOR NORMALE, FINITE, DE *n* PERSOANE

DE

A. B. NÉMETH

(Cluj)

Se generalizează metoda jocului fictiv propus de G. W. Brown pentru rezolvarea jocurilor matriciale la cazul general al jocurilor normale, finite de *n* persoane.

Notăm (N. N. Vorobiev [4]) cu

$$\Gamma = < N ; \{X_i\}_{i \in N} ; \{f_i\}_{i \in N} >, \quad N = \{1, .., n\},$$

un joc normal, finit, cu sumă nulă, de *n* persoane.

Fie

$$\overline{\Gamma} = < N ; \{X_i^*\}_{i \in N} ; \{f_i^*\}_{i \in N} >$$

extinderea jocului Γ, unde $X^*_{i\,.\,i=1..n}$, este mulţimea tuturor măsurilor de probabilitate din cîmpul de probabilitate definit pe X_i ; măsura degenerată care face să corespundă unui element $x_i \in X_i$ probabilitatea 1, iar la toate celelalte probabilitatea 0, se identifică cu elementul însuşi. Funcţiile f_i^*, n, $i = 1,..., n$ se definesc în următorul fel :

$$f_i^* = f_i(x^*) = f_i(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{j_n=1}^{m_n} \alpha_{j_1}^1 \alpha_{j_2}^2 \ldots \alpha_{j_n}^n f_i(x_{j_1}^1, x_{j_2}^2, \ldots, x_{j_n}^n),$$

unde $\alpha_{j_i}^i$ este probabilitatea cu care figurează $x_{j_i}^i \in X_i$ în x_i^* ; avem deci

$$\alpha_{j_i}^i \geqq 0 ; \sum_{j_i=1}^{m_i} \alpha_{j_i}^i = 1.$$

ST. CERC. MAT. TOM. 21, NR. 3, P. 439–450, BUCUREŞTI, 1969

Teorema lui von Neumann — Nash afirmă că în mulţimea $X^* = \times_{i\in N} X_i^*$ există un punct de echilibru al jocului $\overline{\Gamma}$, adică un punct x^* pentru care avem pentru orice $y^* \in X^*$

$$f_i(x^*_{N-i}\,|y^*_i) \leqq f_i(x^*),\ i=1,\dots, n,$$

unde

$$f_i(x^*_{N-i}\,|y^*_i) = f_i(x^*_1,\dots,\ x^*_{i-1},y^*_i x^*_{i+1},\dots, x^*_n).$$

Noţiunea de punct de echilibru este noţiunea centrală a teoriei moderne a jocurilor. Prezintă interes deosebit metodele de aflare a punctelor de echilibru. Din punctul de vedere al metodelor de rezolvare, cea mai completă parte din teoria jocurilor o constituie jocurile matriciale. O importantă metodă de rezolvare a acestor jocuri este metoda interativă Brown-Robinson-Shapiro.

În 1951 G. W. Brown [1] a propus o metodă iterativă pentru aflarea punctului şea a jocurilor matriciale, metodă avînd la bază un joc fictiv în care, după repetarea de t ori a jocului, jucătorul presupune că în al $t+1$-lea joc adversarul său va aplica o strategie ce corespunde strategiei mixte formate din ponderile cu care a ales diferitele strategii pure în cele t jocuri anterioare, şi efectuează în al $t+1$-lea joc alegerea în aşa fel că alege cea mai avantajoasă strategie pură în această ipoteză. Convergenţa acestei metode a fost demonstrată de J. Robinson [2] în anul 1953, iar H. N. Shapiro [3] a evaluat viteza de convergenţă a metodei.

În cele ce urmează vom demonstra convergenţa metodei analoge pentru jocuri normale finite de n persoane cu sumă nulă. Remarcăm că ultima condiţie, adică ca jocul să fie cu sumă nulă, nu este esenţială. Orice joc normal, finit, de n persoane poate fi transformat într-un joc normal, finit, de $n+1$ persoane cu sumă nulă prin introducerea unui jucător pasiv fictiv, fără ca mulţimea strategiilor optime a celor n jucători activi să se modifice. În demonstraţie în limita posibilităţilor vom aplica limbajul lucrării [2].

Dăm următoarele două leme evidente :

LEMA 1. *Pentru orice* $x^* \in X^*$ *şi* $i \in N$ *avem* :

$$\max_{x_i\in X_i} f_i\,(x^*_{N-1}\,|\,x_i) \geqq f_i(x^*).$$

LEMA 2. *Pentru orice* $x^* \in X^*$ *avem* :

$$\sum_{i=1}^{n} \max_{x_i\in X_i} f_i(x^*_{N-i}\,|x_i) \geqq 0.$$

Un rezultat fundamental în scopul care-l urmărim îl constituie următoarea teoremă :

TEOREMA 1. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca* x^* *să fie punct şea este ca să avem* :

$$\sum_{i=1}^{n} \max_{x_i\in X_i} f_i(x^*_{N-i}\,|x_i) = 0.$$

Demonstrație. Demonstrarea necesității este imediată. Pentru a demonstra suficiența condiției trebuie arătat că

$$f_i(x^*_{N-i}|y^*_i) \leqq f_i(x^*), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

pentru orice $y^* \in X^*$. Putem scrie pe baza lemei 1 :

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \max_{x_i \in X_i} f_i(x^*_{N-1}|x_i) =$$

$$= \max_{x_l \in X_l} f_l(x^*_{N-l}|x_l) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{n} \max_{x_i \in X_i} f_i(x^*_{N-i}|x_i) \geqq$$

$$\geqq \max_{x_l \in X_l} f_l(x^*_{N-l}|x_l) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{n} f_i(x^*) \cdot$$

De aici urmează că

$$0 \geqq \max_{x_l \in X_l} f_l(x^*_{N-l}|x_l) - f_l(x^*),$$

adică pentru orice $y^*_l \in X^*_l$,

$$f_l(^*_{N-l}|y^*_l) \geqq f_l(x^*).$$

Cum l a fost ales arbitrar, suficiența este demonstrată.

Considerăm acum jocul Γ și formăm următorul proces iterativ :

$t = 0$ Alegem $x_0 \in X = \underset{i \in N}{\times} X_i$ în mod arbitrar.

$t = 1$ Se alege $x^1_i \in X_i$ astfel ca să avem

$$f_i(x^0_{N-i}|x^1_i) = \max_{x_i \in X_i} f_i(x^0_{N-i}|x_i) \quad i = 1, \ldots, n.$$

$t + 1$. Se presupune că s-au efectuat primii t pași și se face pasul $t + 1$ alegîndu-l pe $x^{t+1}_i \in X_i$ astfel ca

$$\sum_{j=0}^{t} f_i(x^j_{N-i}|x^{t+1}_i) = \max_{x_i \in X_i} \sum_{j=0}^{t} f_i(x^j_{N-i}|x_i).$$

Demonstrarea convergenței procesului se face cu ajutorul următoarei teoreme :

TEOREMA 2. *Avem*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{n} \max_{x_i \in X_i} \sum_{j=0}^{t-1} f_i(x^j_{N-i}|x_i) = 0$$

Demonstrație. Presupunem că mulțimea X_i conține m_i elemente. Formăm cu ajutorul acestor elemente un vector m_i dimensional pe care îl vom nota tot cu X_i :

$$X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im_i}).$$

Punem în corespondență fiecărei mulțimi X_i vectorul cu elemente reale

$$Y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{im_i}).$$

Sistemul de vectori Y_i, $i = 1,\ldots,n$, se va numi sistem inițial de vectori dacă este îndeplinită următoarea condiție:

$$\sum_{i=1}^{n} \max Y_i = 0,$$

unde

$$\max Y_i = \max_{1 \leqslant k \leqslant m_i} y_{ik}$$

Fiind dat un sistem inițial de vectori Y_i, $i = 1,\ldots,n$, și elementul $x^\circ \in X$, formăm șirurile de vectori m_i dimensionali

$$Y_i = Y_i^\circ, Y_i^1, \ldots, Y_i^t, \ldots, \qquad i = 1,\ldots,n$$

în următorul fel

1. $$Y_i^1 = Y_i^\circ + (f_i(x_{N-i}^\circ \mid x_i)), \qquad i = 1,\ldots,n$$

unde

$$(f_i(x_{N-i}^\circ | x_i)) = (f_i(x_{N-i}^0 | x_{i1}), f_i(x_{N-i}^\circ | x_{i2}), \ldots, f_i(x_{N-i}^\circ | x_{im_i})).$$

2. $$Y_i^2 = Y_i^1 + (f_i(x_{N-i}^1 | x_i)), \qquad i = 1,\ldots,n,$$

unde elementele x_i^1 $(i = 1,\ldots,n)$ se află în următorul fel

$$y_i^\circ + f_i(x_{N-i}^\circ | x_i^1) = \max Y_i^1,$$

x_i^1 și y_i° fiind elemente cu aceiași indici ai lui Y_i^0, respectiv X_i.

3. $$Y_i^{t+1} = Y_i^t + (f_i(x_{N-i}^t | x_i)) = Y_i^0 + (\sum_{j=0}^{t} f_i(x_{N-i}^j | x_i)), \qquad i = 1,\ldots,n,$$

unde elementele x_i^t, $i = 1, \ldots, n$ se află în următorul fel:

$$y_i^t + \sum_{j=0}^{t-1} f_i(x_{N-i}^j | x_i^t) = \max Y_i^t.$$

Vom arăta că

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n} \max Y_i^t \geqq 0.$$

Într-adevăr, putem scrie

$$\sum_{i=1}^{n} \max Y_i^t = \sum_{i=1}^{n} \max [Y_i^0 + (\sum_{j=0}^{t-1} f_i(x_{N-i}^j | x_i))] \geqq \sum_{i=1}^{n} \min Y_i^0 + \sum_{i=1}^{n} \max_{x_i \in X_i}$$

$$\sum_{j=0}^{t-1} f_i(x_{N-i}^j | x_i) \geqq \sum_{i=1}^{n} \min Y_i^0;$$

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n} \max Y_i^t \geqq \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n} \min Y_i^0 = 0.$$

Introducem notațiile

$$a_i = \max_{x \in X} |f_i(x)|, \quad a = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{a_i\}.$$

Zicem că elementul $x_i' \in X_i$ este esențial în intervalul $(s, s + t)$ al procesului, dacă există $t' \in (s, s + t)$ astfel ca

$$\max Y_i^{t'} = y_i^{t'} + \sum_{j=0}^{t'-1} f_i(x_{N-i}^j | x'_i).$$

Dacă toate elementele $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$, sînt esențiale în intervalul $(s, s + t)$ al procesului, atunci are loc inegalitatea

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} \max Y_i^{s+t} \leqq 2nat.$$

Vom arăta că dacă toate elementele lui X_i sînt esențiale în intervalul $(s, s+t)$ al procesului, atunci

$$(1') \qquad \max Y_i^{s+t} - \min Y_i^{s+t} \leqq 2a_i t.$$

Cum toate elementele lui X_i sînt esențiale în intervalul $(s, s + t)$, se poate alege $t' \in (s, s + t)$ astfel ca să avem

$$\min Y_i^{s+t} = y_i^{0'} + \sum_{j=0}^{s+t-1} f_i(x_{N-i}^j) | x_i') = y_i^{0'} + \sum_{j=0}^{t'-1} f_i(x_{N-i}^j | x_i') +$$

$$+ \sum_{j=t'}^{s+t-1} f_i(x_{N-i}^j | x_i') \geqq y_i^{0'} + \sum_{j=0}^{t'-1} f_i(x_{N-i}^j | x_i') - a_i t = \max Y_i^{t'} - a_i t.$$

Pe de altă parte,

$$\max Y_i^{s+t} = y_i^{0''} + \sum_{i=1}^{s+t-1} f_i(x_{N-i}^j | x_i'') = y_i^{0''} + \sum_{j=0}^{t'-1} f_i(x_{N-i}^j | x_i'') +$$

$$+ \sum_{j=t'}^{s+t-1} f_i(x_{N-i}^j | x_i'') \leqq \max Y_i^{t'} + a_i t.$$

Deci avem inegalitățile

$$\max Y_i^{s+t} \leqq \max Y_i^{t'} + a_i t,$$

$$\min Y_i^{s+t} \geqq \max Y_i^{t'} - a_i t.$$

Scăzînd aceste două inegalități, obținem inegalitatea (1'). Din inegalitatea demonstrată şi din presupunerea că toate elementele $x_i \in X_i$, $i = 1,\ldots,n$, sînt esenţiale în intervalul $(s, s + t)$ al procesului, urmează inegalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} \max Y_i^{s+t} - \sum_{i=1}^{n} \min Y_i^{s+t} \leqq 2 \text{ nat}.$$

Vom arăta că $-\sum_{i=1}^{n} \min Y_i^{s+t} \geqq 0$. Sînt evidente următoarele relaţii

$$-\min Y_i^{s+t} = \max(-Y_i^{s+t}) = \max\left[-Y_i^0 + \left(\sum_{j=0}^{s+t-1} -f_i(x_{N-1}^j \mid x_i)\right)\right] \geqq$$

$$\geqq \min(-Y_i^0) + \max\left(\sum_{j=0}^{s+t-1} -f_i(x_{N-i}^j \mid x_i)\right) = -\max Y_i^0 +$$

$$+ \max_{x_i \in X_i} \sum_{j=0}^{s+t-1} - f_i(x_{N-i}^j \mid x_i).$$

Folosind lema 2 şi presupunerea că sistemul de vectori Y_i, $i = 1,\ldots,n$, este sistem iniţial, putem scrie

$$-\sum_{i=1}^{n} \min Y_i^{s+t} \geqq -\sum_{i=1}^{n} \max Y_i^0 + \sum_{i=1}^{n} \max_{x_i \in X_i} \sum_{j=0}^{s+t-1} -f_i(x_{N-i}^j \mid x_i) \geqq 0.$$

Folosind această ultimă inegalitate, urmează inegalitatea (1).

Vom demonstra că pentru orice $\varepsilon > 0$ există t_0, astfel ca

$$\sum_{i=1}^{n} \max Y_i^t < \varepsilon t \tag{2}$$

ori de cîte ori $t > t_0$. Demonstraţia o vom face prin inducţie relativ la elementele din mulţimile X_i, $i = 1,\ldots,n$. Afirmaţia este evidentă dacă toate mulţimile X_i conţin cîte un singur element. Presupunem că afirmaţia de mai sus este adevărată pentru toate subjocurile lui Γ. Presupunem că subjocul Γ' s-a obţinut din Γ suprimînd elementul $x_l' \in X_l$. Funcţiile f_i, $i = 1,\ldots,n$ vor rămîne aceleaşi şi pentru Γ', numai că în domeniul de definiţie a lor nu va mai figura $x_l' \in X_l$. Pe baza presupunerii de inducţie îl putem alege pe t^* astfel ca să avem pentru toate subjocurile de tipul lui Γ', cu orice sistem iniţial de vectori Y_i', $i = 1,\ldots,n$, în procesul iterativ

$$\sum_{i=1}^{n} \max Y_i'^t < \frac{1}{2} \varepsilon t,$$

ori de cîte ori $t \geqq t^*$.

Vom arăta că dacă $x_l' \in X_l$ nu este esenţial în intervalul $(s, s + t^*)$ al procesului, atunci se poate scrie

$$\sum_{i=1}^{n} \max Y_i^{s+t^*} < \sum_{i=1}^{n} \max Y_i^s + \frac{1}{2} \varepsilon t^*.$$

Punem

$$Y_i'^t = Y_i^{s+t} - (\max Y_i^s).$$

Observăm că

$$\sum_{=1}^{n} \max Y_i'^0 = 0.$$

Rezultă că sistemul de vectori $Y_i'^0$, $i = 1,\ldots, n$, este sistem inițial. Deci $Y_i'^0$ poate fi vector inițial în formarea unui proces iterativ. Din definiția lui $Y_i'^t$ urmează că componenta maximă a acestui vector va avea același indice ca și componenta maximă a vectorului Y_i^{s+t}. Cum $x_i' \in X_i$ nu este esențial în intervalul $(s, s+t^*)$, înseamnă că $x_i^{s+t} \neq x_i'$ pentru $0 \leq t < t^*$. Aceasta înseamnă că x_i' nu va figura ca element esențial în primii t^* pași ai procesului iterativ ce pornește cu $Y_i'^0$. Urmează că elementul x_i' poate fi suprimat în primii t^* pași, deci acești pași pot fi considerați ca pași referitori la procesul relativ la subjocul Γ', și aplicînd ipoteza de inducție avem

$$\sum_{i=1}^{n} \max Y_i'^t \leq \frac{1}{2} \varepsilon t^*,$$

adică

$$\sum_{i=1}^{n} \max Y_i^{s+t^*} - \sum_{i=1}^{n} \max Y_i^s \leq \frac{1}{2} \varepsilon t^*. \tag{3}$$

Demonstrăm că dacă $t > \frac{4nat^*}{\varepsilon}$ are loc relația (2). Presupunem că $t > t^*$. Fie $0 \leq \theta < 1$ și q număr intreg, astfel ca să avem $t (\theta + q) t^*$.

A. Presupunem că există numărul întreg pozitiv $s \geq q$ astfel încît toate elementele $x_i \in X_i$, $i = 1,\ldots, n$, sînt esențiale în intervalul $((\theta+s-1)\, t^*, (\theta+s) t^*)$. Presupunem că s este numărul maxim cu această proprietate. Deoarece în fiecare dintre intervalele $((\theta + r - 1)\, t^*, (\theta + r)\, t^*)$ pentru $r = s + 1,\ldots, q$, există elemente $x_i \in X_i$, $i = 1,\ldots,n$, neesențiale, putem aplica formula (3) și obținem :

$$\sum_{i=1}^{n} \max Y_i^t \leq \sum_{i=1}^{n} \max Y_i^{(\theta+s)t^*} + \frac{1}{2} \varepsilon (q-s) t^*.$$

Pe de altă parte, pe baza alegerii lui s putem scrie aplicînd formula (1)

$$\sum_{i=1}^{n} \max Y_i^t \leq 2nat^* + \frac{1}{2} \varepsilon (q-s) t^*.$$

B. Dacă nu există s cu proprietatea de la punctul A, atunci în fiecare din intervalele $(\theta + s - 1)\ t^*,\ (\theta + s)\ t^*)$, $s = 1, \ldots, q$, există elemente $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$, neesențiale, deci putem scrie

$$\sum_{i=1}^{n} \max Y_i^t < \sum_{i=1}^{n} \max Y_i^{\theta t^*} + \frac{1}{2}\, \varepsilon q t^* \leqq \sum_{i=1}^{n} \max Y_i^0 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \max_{x_i \in X_i} \sum_{j=0}^{\theta t^*} f_i(x_{N-i}^j | x_i) + \frac{1}{2}\, \varepsilon q t^* \geqq na(\theta t^* + 1) + \frac{1}{2}\, \varepsilon q t^* < 2nat^* +$$

$$+ \frac{1}{2}\, \varepsilon q t^*.$$

Deci în toate cazurile avem

$$\sum_{i=1}^{n} \max\ Y_i^t < 2nat^* + \frac{1}{2}\, \varepsilon q t^*.$$

Avem $qt^* \leqq t$ și $\dfrac{4nat^*}{\varepsilon} \leqq t$, adică $2nat^* \leqq \dfrac{1}{2}\, \varepsilon t$ și prin urmare

$$\sum_{i=1}^{n} \max\ Y_i^t < \varepsilon t.$$

Această inegalitate, împreună cu inegalitatea

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n} \max\ Y_i^t \geqq 0,$$

demonstrează că

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n} \max\ Y_i^t = 0,$$

de unde urmează teorema.

TEOREMA 3. *Are loc următoarea evaluare*

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n} \max_{x_i \in X_i} \sum_{j=0}^{t-1} f_i(x_{N-i}^j | x_i) \leqq a n^m t^{-\frac{1}{m-n}},$$

unde $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

Demonstrație. Aplicînd notațiile introduse la demonstrarea teoremei 2, punem

$$S_1(t) = \sum_{i=1}^{n} \max Y_i^t$$

$$S_2(t) = \sum_{i=1}^{n} \max\,(-Y_i^t)$$

$$S_i(t) = \max\ Y_i^t + \max(-Y_i^t).$$

Avem relaţiile

$$S_1(t) + S_2(t) = \sum_{i=1}^{n} S_i(t),$$

$$S_i(t) \geqq 0, \ i = 1, \ldots, n$$

$$S_2\,(t) \geqq 0.$$

Ca şi în cazul teoremei 2, pentru a putea aplica metoda inducţiei, demonstrăm ceva mai mult decît cele afirmate de teorema 3 :

Dacă $\sum\limits_{i=1}^{n} \max\, Y_i^0 = 0$, are loc evaluarea

$$\frac{S_1(t)}{t} \leqq an^m\, t^{-\frac{1}{m-n}}, \tag{4}$$

unde $m = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$.

Îl vom considera pe n fixat şi vom face demonstraţia prin inducţie relativ la m. Înainte de toate observăm că din punctul de vedere al teoriei jocurilor au importanţă numai cazurile cînd $n \geqq 2$. Dacă $m = n$, punem $t^{-\frac{1}{m-n}} = 0$. Pentru acest caz inegalitatea (4) are loc în mod evident. Ea este de asemenea îndeplinită pentru cazul $m = n + 1$. Considerăm jocul Γ pentru care $m \geqq n + 2$, presupunem îndelpinită evaluarea (4) pentru toate subjocurile lui Γ şi o demonstrăm pentru Γ. Putem presupune că $t \geqq 3$. Pentru $t < 3$ inegalitatea (4) se verifică direct.

Vom arăta că pentru orice t^*, $0 < t^* < t$, are loc cel puţin una din următoarele două inegalităţi

$$S_1\,(t) \leqq 2nat^* \tag{5}$$

$$S_1(t) - S_1\,(t - t^*) \leqq an^{m-1}\, t^{*\,-\frac{1}{m-n-1}}. \tag{6}$$

Presupunem că (5) nu are loc, adică

$$S_1\,(t) > 2\,nat^*.$$

Deoarece

$$S_1(t) \leqq \sum_{i=1}^{n} S_i(t),$$

avem cel puţin un indice l, $1 \leqq l \leqq n$, pentru care are loc inegalitatea

$$2at^* < S_l(t) = \max\, Y_l^t + \max\,(-Y_l^t) =$$

$$= \max\left[Y_l^0 + \left(\sum_{j=0}^{t-1} f_l(x_{N-l}^j \,|\, x_l)\right)\right] + \max\left[-\,Y_l^0 + \left(\sum_{j=0}^{t-1} -\,f_l(x_{N-l}^j \,|\, x_l)\right)\right].$$

Fie

$$y_l^{0'} + \sum_{j=0}^{t-1} f_l(x_{N-l}^j|x_l') = \max\left[Y_l^0 + \left(\sum_{j=0}^{t-1} f_l(x_{N-l}^j|x_l)\right)\right],$$

$$-y_l^{0''} + \sum_{j=0}^{t-1} -f_l(x_{N-l}^j|x_l'') = \max\left[-Y_l^0 + \left(\sum_{j=0}^{t-1} -f_l(x_{N-l}^j|x_l)\right)\right].$$

Relaţia de mai sus se mai poate scrie în forma

$$y_l^{0'} + \sum_{j=0}^{t-1} f_l(x_{N-l}^j|x_l') - y_l^{0''} + \sum_{j=0}^{t-1} -f_l(x_{N-l}^j|x_l'') > 2at^*,$$

de unde urmează că

$$y_l^{0'} + \sum_{j=0}^{t-\omega-1} f_l(x_{N-l}^j|x_l') - y_l^{0''} + \sum_{j=0}^{z-\omega-1} -f_l(x_{N-l}^j|x_l'') > 0,$$

pentru

$$\omega = 0,1,\ldots,t^*.$$

Din ultima inegalitate urmează că x_l'' nu poate fi esenţial în intervalul $(t - t^* - 1,\ t + 1)$ al procedeului.

Formăm subjocul Γ' al jocului Γ prin omiterea elementului $x_l'' \in X_l$. Pentru noul joc formăm şirurile de vectori

$$Y_i'^{t-t^*},\quad Y_i'^{t-t^*+1},\ldots,Y_i'^{t},\quad i=1,\ldots,n,$$

unde

$$Y_i'^{t-\omega} = Y_i^{t-\omega} - (\max Y_i^{t-t^*}),\ i = 1,\ldots,n,\ i \neq l,$$

$$Y_l'^{t-\omega} = Y_l^{t-\omega}(m_l - 1) - (\max Y_l^{t-t^*})$$

$Y_l^{t-\omega}(m_l - 1)$ este vectorul obţinut din $Y_l^{t-\omega}$ prin omiterea componentei corespunzătoare elementului x_l''.

Observăm că în intervalul $(t - t^* - 1,\ t + 1)$ al procesului iterativ pentru jocul Γ' vor fi la fiecare pas aceleaşi elemente esenţiale ca şi în cazul procesului pentru jocul Γ.

Totodată $\sum_{i=1}^{n} \max Y_i^{t-t^*} = 0$, deci putem aplica ipoteza de inducţie la jocul Γ' şi obţinem pentru $\omega = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \max Y_i'^{t} \leqq a\, n^{m-1} (t^*)^{1-\frac{1}{m-n-1}}.$$

Cum însă

$$\sum_{i=1}^{n} \max Y_i'^{t} = \sum_{i=1}^{n} \max Y_i^{t} - \sum_{i=1}^{n} \max Y_i^{t-t^*},$$

urmează inegalitatea (6).

Pentru indicii t care nu-l întrec pe t^*, inegalitatea (5) este evident îndeplinită.

Presupunem că $t > t^*$ şi punem $q = \left[\frac{t}{t^*}\right]$. Între numerele $t, t-t^*, \ldots, \ldots, t-qt^*$ există numere pentru care este îndeplinită inegalitatea (5). Fie $t - \tau t^*$ cel mai mare număr cu această proprietate. Putem scrie

$$S_1(t) = \sum_{k=1}^{\tau} [S_1(t-(k-1)t^*)-S_1(t-kt^*)]+S_1(t-\tau t^*) \leqq$$

$$\leqq \tau a n^{m-1} (t^*)^{1-\frac{1}{m-n-1}} + 2nat^* \leqq t a n^{m-1} (t^*)^{-\frac{1}{m-n-1}} + 2nat^*,$$

de unde

$$\frac{S_1(t)}{t} \leqq a\,(n^{m-1}(t^*)^{-\frac{1}{m-n-1}} + \frac{2nt^*}{t}).$$

Vom arăta că poate fi ales un t^*, $0 < t^* < t$, în aşa fel ca

$$n^{m-1}(t^*)^{-\frac{1}{m-n-1}} + \frac{2nt^*}{t} < n^m t^{-\frac{1}{m-n}}.$$

Pentru aceasta vom arăta că în caz de $t > 1$, $m \geqslant n+2$, $n \geqslant 2$, are loc inegalitatea

$$1 < \left(\frac{n^{m-1}}{4} - \left(\frac{2}{n}\right)^{m-n-1}\right) t^{1-\frac{1}{m-n}}.$$

Este suficient de văzut că

$$\frac{n^{m-1}}{4} - \left(\frac{2}{n}\right)^{m-n-1} \geqq 1.$$

În caz de $n = 2$, $m = 4$, are loc egalitatea cu 1, iar pentru m şi n crescători, expresia este crescătoare, deci are loc inegalitatea.

Urmează că

$$\left(\frac{2}{n}\right)^{m-n-1} t^{1-\frac{1}{m-n}} + 1 < \frac{1}{4} n^{m-1} t^{1-\frac{1}{m-n}}$$

şi t^* poate fi ales astfel ca

$$\left(\frac{2}{n}\right)^{m-n-1} t^{1-\frac{1}{m-n}} < t^* < \frac{1}{4} n^{m-1} t^{1-\frac{1}{m-n}} \tag{7}$$

Pentru a putea îndeplini şi condiţia $t^* < t$ observăm că în caz de $t > 2$ avem

$$1 < t - \left(\frac{2}{n}\right)^{m-n-1} t^{1-\frac{1}{m-n}}$$

Din prima parte a inegalităţii (7) avem

$$n^{m-1}(t^*)^{-\frac{1}{m-n-1}} < \frac{1}{2}\, n^m t^{-\frac{1}{m-n}}$$

iar din a doua parte

$$\frac{2nt^*}{t} < \frac{1}{2}\, n^m t^{-\frac{1}{m-n}}$$

Cu aceasta s-a demonstrat inegalitatea (4), de unde urmează teorema 3.

Primită la redacţie la 22 februarie 1968

Institutul de Calcul al Academiei Republicii
Socialiste România Filiala Cluj.

ITERATIVE METHOD OF SOLVING THE FINITE, NORMAL, n-PERSON GAMES

(ABSTRACT)

In the note an iterative method is generalized for the solving of a game by fictitious play, which has been proposed for the matrix games by G. W. Brown [1]. J. Robinson [2] proved the convergence of this method and H.N. Shapiro [3] estimated the rapidity of its convergence. This method is not dependent on particularities of two-person games and is generalized in the note for the solving of finite, normal n-person games with zero sum. In Theorem 3 it is evaluated the rapidity of convergence which is of order

$$0\left(t^{-\frac{1}{m-n}}\right),$$

where t is the step in the iterative process, n is the number of players, and m the number of all pure strategies.

BIBLIOGRAFIE

1. Brown G. W., *Iterative solutions of games by fictitious play. Activity Analysis of Production and Allocation* ed. de T. C. Koopmans, Cowles Commission on Research in Economics Monograph Nr. 13, Wiley, New York, 1951, pag. 374—376.
2. Robinson J., *An iterative method of solving a game.* Ann. og Math., **54**, 296—301 (1951).
3. Shapiro H. N., *Note on a computation method in the theory of games* Comm. Pure and Appl. Math., **11**, 588—593 (1958).
4. ВОРОБЬЕВ, Н.Н., *Конечные, безкоалиционные игры.* Усп. Мат. наук, **14**, *4/88/*, 21—56 (1959).

ASUPRA CARACTERISTICII OPERATIVE ŞI NUMĂRULUI MEDIU DE PROBE ÎN CAZUL UNOR TESTE SECVENŢIALE

DE

GH. OBREJA

În această lucrare se prezintă o metodă simplă de calcul a funcţiei h (θ,ω), necesară pentru exprimarea caracteristicii operative a unui test secvenţial, pentru verificarea ipotezei $H : \theta \leqslant \omega$, cu alternativa $\theta > \omega$, introdus de M. A. Girshick. ([1], § 4.2.4)

În prima parte se stabileşte ecuaţia generală, în cazul repartiţiilor de forma

$$f(x ; \theta) = e^{[A(x)r(\theta) + B(x) + s(\theta)]} .$$

Se rezolvă apoi ecuaţia cînd variabilele aleatorii X şi Y dau naştere la repartiţii Bernoulli, normale şi Poisson, stabilindu-se relaţia generală

$$h(\theta ; \omega) = -\frac{v(\theta ;\omega)}{\delta} \cdot$$

În ultima parte se dă expresia mediei $E_{\theta,\omega}(z)$, pentru cele trei repartiţii menţionate mai sus, relaţie care serveşte la calcularea valorii medii $E_{\theta,\omega}(n)$, a numărului de probe necesare testului secvenţial considerat.

§ 1. TESTUL SECVENŢIAL AL LUI GIRSHICK

În anul 1946, M. A. Girshick a introdus un test secvenţial al raportului de probabilităţi (T.S.R.P.) pentru o clasă specială de probleme. Această clasă poate fi definită în felul următor:

Fie X şi Y două variabile aleatoare independente, ale căror densităţi de probabilitate au aceeaşi formă funcţională, presupusă cunoscută iar mărimile parametrilor θ şi ω sînt necunoscute.

Problema constă în verificarea ipotezei H : $\theta \leqslant \omega$, cu alternativa H' : $\theta > \omega$. Această problemă se pune în practică, de exemplu în cazul comparării preciziei a două procese tehnologice de producţie a aceluiaşi produs.

ST- CERC. MAT.. TOM. 21, NR. 3, P. 451—461, BUCUREŞTI, 1969

Pentru verificarea ipotezei $H: \theta \leqslant \omega$, Girshick a propus următoarea metodă [1], [2]:

Alegem două valori θ_0, ω_0, $(\theta_0 < \omega_0)$ şi notăm cu H_0 ipoteza că densitatea comună a variabilelor X şi Y să fie de forma $f(x;\theta_0)\, f(y;\omega_0)$, şi cu H_1, ipoteza că densitatea comună este $f(x;\omega_0)\, f(y;\theta_0)$. Sau altfel scris $H_0: \theta = \theta_0, \omega = \omega_0$; $H_1: \theta = \omega_0, \ \omega = \theta_0$.

Atunci admiterea ipotezei H echivalează cu admiterea ipotezei H_0, iar respingerea ipotezei H echivalează cu admiterea ipotezei H_1.

Testul secvenţial pentru ipoteza H va fi, prin urmare, T.S.R.P. pentru verificarea ipotezei H_0 cu alternativa H_1. Introducînd notaţiile

$$f_0(x;y) = f(x;\theta_0) f(y;\omega_0) \tag{1.1}$$
$$f_1(x;y) = f(x;\omega_0) f(y;\theta_0),$$

funcţiile de verosimilitate, asociate perechilor de observaţii $(x_1; y_1), \ldots, (x_n; y_n)$ în cazul ipotezelor H_0 şi H_1, respectiv, sînt următoarele

$$p_{0n} = f_0(x_1; y_1) \cdots f_0(x_n; y_n) \tag{1.2}$$
$$p_{1n} = f_1(x_1; y_1) \cdots f_1(x_n; y_n).$$

T.S.R.P. pentru verificarea ipotezei H_0 cu alternativa H_1 se construieşte apoi uşor după metoda cunoscută, ([1], § 4.2.4), pe baza raportului

$$\frac{p_{1n}}{p_{0n}} = \frac{f_1(x_1; y_1) \cdots f_1(x_n; y_n)}{f_0(x_1; y_1) \cdots f_0(x_n; y_n)}. \tag{1.3}$$

Girshick a arătat că în multe cazuri, reducerea verificării ipotezei H la verificarea ipotezei H_0 este posibilă numai dacă există o funcţie $v(\theta;\omega)$ satisfăcînd condiţiile:

a) $v(\theta;\omega) = 0$, cînd $\theta = \omega$.

b) $v(\theta;\omega) < 0$, cînd $\theta < \omega$; $v(\theta;\omega) = -v(\omega;\theta)$.

Funcţia $v(\theta;\omega)$ poate fi interpretată ca măsura diferenţei dintre valorile θ şi ω. Dependenţa testului de valoarea funcţiei $v(\theta;\omega)$ se prezintă în felul următor:

dacă $v \geqslant \delta$, $(\delta > 0)$, atunci admiterea ipotezei H constituie o eroare, iar

dacă $v \leqslant -\delta$, atunci respingerea ipotezei H este de asemenea o eroare.

În acest fel avem

$$P[\mathcal{N}H \mid v(\theta;\omega) \leqslant -\delta] \leqslant \alpha. \tag{1.4}$$
$$P[H \mid v(\theta;\omega) \geqslant \delta] \leqslant \beta.$$

Cu acestea, valorile θ_0 şi ω_0 se pot alege din condiţia

$$v(\theta_0;\omega_0) = -\delta. \tag{1.5}$$

În [2] se generalizează procedeul expus mai sus pentru o clasă generală de repartiţii de forma

$$f(x\,;\,\theta) = e^{[A(x)r(\theta)+B(x)+s(\theta)]} \tag{1.6}$$

şi respectiv

$$f(y\,;\,\omega) = e^{[A(y)r(\omega)+B(y)+s(\omega)]}$$

obţinîndu-se pentru funcţia $v\ (\theta\,;\,\omega)$ următoarea formă

$$v(\theta\,;\,\omega) = \pm\ [\mathbf{r}(\theta) - r(\omega)]. \tag{1.7}$$

Semnul + corespunde cazului cînd funcţia r este crescătoare iar semnul — cînd r este descrescătoare.

§ 2. CALCULUL CARACTERISTICII OPERATIVE L (θ;ω)

Caracteristica operativă $L\ (\tau)$ a T.S.R.P. pentru verificarea ipotezei simple $\tau = \tau_0$, cu alternativa $\tau = \tau_1$, se defineşte ca probabilitatea admiterii ipotezei $\tau = \tau_0$, cînd adevărata valoare a parametrului este τ, ([1], §3.4),

$$L\ (\tau) = P\ (\tau = \tau_0 \mid \tau). \tag{2.1}$$

Se arată că funcţia $L\ (\tau)$ se exprimă prin relaţia

$$L(\tau) = \frac{A^{h(\tau)} - 1}{A^{h(\tau)} - B^{h(\tau}}, \tag{2.2}$$

unde $A = \dfrac{1-\beta}{\alpha}$ şi $B = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$, iar $h\ (\tau)$ se defineşte ([1], §3.4) astfel ca $h\ (\tau) \neq 0$, şi valoarea medie a expresiei

$$\left[\frac{f(x\,;\,\tau_1)}{f(x\,;\,\tau_0)}\right]^{h(\tau)} \tag{2.3}$$

să fie egală cu 1, adică

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{f(x\,;\,\tau_1)}{f(x\,;\,\tau_0)}\right]^{h(\tau)} f(x\,;\,\tau)\,dx = 1. \tag{2.4}$$

Se demonstrează că există o funcţie unică $h\ ((\tau) \neq 0$ care satisface relaţia (2.4), [1].

Pentru a calcula caracteristica operativă $L\ (\theta\,;\,\omega)$ a T.S.R.P. pentru verificarea ipotezei $H_0 : \theta = \theta_0$, $\omega = \omega_0$, cu alternativa $H_1 : \theta = \omega_0$; $\omega = \theta_0$, va trebui să calculăm funcţia $h\ (\theta\,;\,\omega) \neq 0$, satisfăcînd condiţiile de mai sus adică

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{f(x\,;\,\omega_0)\,f(y\,;\,\theta_0)}{f(x\,;\,\theta_0)\,f(y\,;\,\omega_0)}\right]^{h(\theta;\omega)} f(x\,;\,\theta)\,f(y\,;\,\omega)\ dx\ dy = 1 \tag{2.5}$$

iar pentru cazul discret

$$\sum_{-x}\sum_{-y}\Bigg[\frac{f(x;\ \omega_0)\,f(y;\ \theta_0)}{f(x;\ \theta_0)\,f(y;\ \omega_0)}\Bigg[^{h(\theta;\omega)} f(x;\ \theta)\,f(y;\ \omega)=1$$

sumarea făcîndu-se pentru toate valorile posibile ale lui X şi Y.

TEOREMA 1. *Dacă variabilele aleatoare independente X și Y, au densități de probabilitate de forma (1.6), atunci condiția (2.5) devine*

$$\varphi_{z1+z2}(t)=1 \tag{2.6}$$

unde $t=\delta h\,(\theta;\ \omega)$, $Z_1=A\,(x)$ *și* $Z_2=-A\,(y)$

Demonstrație. Folosind relaţiile (1.6) şi (1.7) avem

$$\left[\frac{f(x;\ \omega_0)\,f(y;\ \theta_0)}{f(x;\ \theta_0)\,f(y;\ \omega_0)}\right]^{h(\theta;\omega)}=e^{h(\theta;\omega[r(\omega_0)-r(\theta_0)]A(x)}\cdot e^{h(\theta;\omega)[r(\theta_0)-r(\omega_0)]A(y)}=$$

$$=e^{h(\theta;\omega)\delta A(x)}\cdot e^{-h(\theta;\omega)\delta A(y)}.$$

Ținînd seama de aceasta, condiția (2.5) devine

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\delta h(\theta;\omega)A(x)}\cdot f(x;\ \theta)\,dx\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\delta h(\theta;\omega)A(y)}\cdot f(y;\ \omega)\,dy=1$$

sau încă

$$M\,[e^{\delta h(\theta;\omega)A(x)}]\ M\ [e^{-\delta h(\theta;\omega)A(y)}]=1. \tag{2.7}$$

Variabilele X şi Y fiind independente, rezultă că şi funcţiile $A\,(x)$, $A\,(y)$ se bucură de aceeaşi proprietate. Prin urmare (2.7) se scrie

$$M\left\{e^{\delta h(\theta;\omega)[A(x)-A(y)]}\right\}=1.$$

Introducind notaţiile $\delta h\,(\theta;\ \omega)=t$, $A\,(x)=Z_1$ și $A\,(y)=Z_2$, relația (2.6) devine

$$\varphi_{z1+z2}\,(t)=M\,[e^{t(Z_1+Z_2)}]=1, \tag{2.8}$$

unde $\varphi\,(t)$ este funcţia generatoare a sumei Z_1+Z_2.

Această teoremă ne permite, în multe cazuri, calculul rapid al funcţiei $h\,(\theta;\omega)$ şi deci a caracteristicii operative pentru repartiţiile frecvent întîlnite în aplicaţii.

Cazul repartiției binomiale. Vom demonstra următoarea propoziţie : Dacă variabilele aleatoare X şi Y urmează legea binomială Be (p) și Be (π) respectiv, atunci funcţia $h(p;\pi)$ este de forma

$$h\,(p;\pi)=-\frac{v\,(p;\pi)}{\delta},$$

Demonstrație. Fie

$$X\begin{pmatrix}1 & 0\\ p & 1-p\end{pmatrix}\ \text{şi}\ Y\begin{pmatrix}1 & 0\\ \pi & 1-\pi\end{pmatrix}.$$

Avem

$$(2.9)\qquad \begin{aligned} f(x, p) &= p(1-p) = e^{\ln p + \ln(1-p)} \\ f(y, \pi) &= \pi(1-\pi) = e^{\ln \pi + \ln(1-\pi)} \end{aligned}$$

Comparînd aceste relaţii cu (1.6), rezultă că $A(x) = 1$ şi $A(y) = 1$. În cazul nostru funcţiile generatoare sînt

$$(2.10)\qquad \varphi_X(t) = pe^t + (1-p)$$

şi analog

$$\varphi_Y(t) = \pi e^t + (1-\pi).$$

Aplicînd relaţia (2.8) şi ţinînd seama de notaţiile introduse obţinem

$$[pe^{\delta h(p;\pi)} + (1-p)]\,[\pi e^{-\delta h(p;\pi)} + (1-\pi)] = 1.$$

Acest produs se mai scrie

$$\pi(1-p) - p(1-\pi)\, e^{\delta h(p;\pi)} - \pi(1-p)\, e^{-\delta h(p;\pi)} + p(1-\pi) = 0$$

sau împărţind cu $p(1-\pi)$

$$\frac{\pi(1-p)}{p(1-\pi)} - e^{\delta h(p;\pi)} - \frac{\pi(1-p)}{p(1-\pi)}\, e^{-\delta h(p;\pi)} + 1 = 0.$$

În lucrarea [2] se stabileşte că funcţia $v(p;\pi)$ este de forma

$$(2.11)\qquad v(p;\pi) = -\ln\frac{\pi(1-p)}{p(1-\pi)}\,;$$

Ţinînd seama de relaţia (2.11), ecuaţia de mai sus devine

$$[1 - e^{-\delta h(p;\pi)}]\,[e^{-v(p;\pi)} - e^{\delta h(p;\pi)}] = 0.$$

Factorul $[1 - e^{-\delta h(p;\pi)}] \neq 0$ deoarece în caz contrar am avea $e^{-\delta h(p;\pi)} = 1$ adică $\delta\, h(p;\pi) \equiv 0$.

Rămîne deci

$$e^{-v(p;\pi)} - e^{\delta h(p;\pi)} = 0$$

de unde rezultă că

$$(2.12)\qquad h(p;\pi) = -\frac{v(p;\pi)}{\delta}.$$

Funcţia $h(p;\pi)$ o dată determinată, caracteristica operativă a T.S.R.P. pentru verificarea ipotezei $H: p \leqslant \pi$, cu alternativa $p > \pi$ se scrie imediat înlocuind în (2.2) relaţia (2.12)

$$(2.13)\qquad L(p;\pi) = \frac{A^{-\frac{v(p;\pi)}{\delta}} - 1}{A^{-\frac{v(p;\pi)}{\delta}} - B^{-\frac{v(p;\pi)}{\delta}}}.$$

Dacă folosim relaţiile (1.5) şi (2.11), egalitatea (2.13) devine

$$(2.13') \qquad L(p;\pi) = \frac{A^{\frac{\ln \frac{\pi(1-p)}{p(1-\pi)}}{\ln \frac{\pi_0(1-p_0)}{p_0(1-\pi_0)}}} - 1}{A^{\frac{\ln \frac{\pi(1-p)}{p(1-\pi)}}{\ln \frac{\pi_0(1-p_0)}{p_0(1-\pi_0)}}} - B^{\frac{\ln \frac{\pi(1-p)}{p(1-\pi)}}{\ln \frac{\pi_0(1-p_0)}{p_0(1-\pi_0)}}}}.$$

Cazul repartiţiei Poisson. În acest caz vom dovedi că dacă X şi Y sînt două variabile aleatoare independente, fiecare dintre ele dînd naştere la repartiţii Poisson cu parametrii λ şi μ respectiv, atunci

$$h(\lambda;\mu) = -\frac{v(\lambda;\mu)}{\delta}.$$

Pentru repartiţii de tip Poisson relaţiile (1.6) se scriu

$$f(x;\lambda) = e^{[x \ln \lambda - \lambda - \ln(x!)]}$$

$$f(y;\mu) = e^{[y \ln \mu - \mu - \ln(y!)]}$$

Deoarece $A(x) = x$, $A(y) = y$, şi folosind expresia funcţiei generatoare a repartiţiei Poisson, condiţia (2.6) ia forma

$$e^{\lambda[e^{\delta h(\lambda;\mu)}-1]} \cdot e^{\mu[e^{-\delta h(\lambda;\mu)}-1]} = 1$$

sau

$$\lambda(e^{\delta h(\lambda;\mu)}-1) + \mu(e^{-\delta h(\lambda;\mu)}-1) = 0$$

Calcule elementare ne conduc la relaţia

$$\delta\, h(\lambda;\mu) = \ln \mu - \ln \lambda.$$

Deoarece [2] avem $v(\lambda;\mu) = \ln\lambda - \ln \mu$ obţinem, în sfîrşit,

$$h(\lambda;\mu) = -\frac{v(\lambda;\mu)}{\delta}$$

şi prin urmare

$$2.14) \qquad L(\lambda;\mu) = \frac{A^{\frac{\ln \mu - \ln \lambda}{\ln \mu_0 - \ln \lambda_0}} - 1}{A^{\frac{\ln \mu - \ln \lambda}{\ln \mu_0 - \ln \lambda_0}} - B^{\frac{\ln \mu - \ln \lambda}{\ln \mu_0 - \ln \lambda_0}}}.$$

Cazul repartiţiei normale. Dacă X este o variabilă aleatoare $N(0, \theta^2)$ şi Y este de asemenea o variabilă aleatoare $N(0, \omega^2)$, atunci

$$h(\theta;\omega) = -\frac{v(\theta;\omega)}{\delta}.$$

Preferăm în acest caz o demonstraţie care se bazează pe calculul direct al relaţiei (2.5). Înlocuind expresiile densităţilor normale de repartiţie în ecuaţia (2.5), obţinem

$$\frac{1}{2\pi\theta\,\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2\left(-\frac{h}{2\theta_0^2}+\frac{h}{2\omega_0^2}+\frac{1}{2\theta^2}\right)-y^2\left(-\frac{h}{2\omega_0^2}+\frac{h}{2\theta_0^2}+\frac{1}{2\omega^2}\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1.$$

Făcînd transformarea de variabile

$$x=\frac{u}{\sqrt{-\frac{h}{2\,\theta_0^2}+\frac{h}{2\,\omega_0^2}+\frac{1}{2\,\theta^2}}}\,;\quad y=\frac{v}{\sqrt{-\frac{h}{2\omega_0^2}+\frac{h}{2\,\theta_0^2}+\frac{1}{2\omega^2}}}$$

şi ţinînd seama de faptul că

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z=\sqrt{\pi},$$

obţinem

$$2\,\theta\,\omega\sqrt{\left[h(\theta\,;\,\omega)\left(\frac{1}{2\,\theta_0^2}-\frac{1}{2\omega_0^2}\right)+\frac{1}{2\omega^2}\right]\left[h(\theta\,;\,\omega)\left(\frac{1}{2\omega_0^2}-\frac{1}{2\,\theta_0^2}\right)+\frac{1}{2\,\theta^2}\right]}=1. \tag{2.15}$$

Pentru repartiţia normală avem însă [1], [2]

$$\begin{aligned} v(\theta\,;\,\omega)&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{\theta^2}\right)\\ -\,\delta&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega_0^2}-\frac{1}{\theta_0^2}\right). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ridicînd la pătrat (2.15) şi ţinînd seama de (2.16), obţinem

$$-\,h(\theta\,;\,\omega)^2\,\delta^2+h(\theta\,;\,\omega)\,\delta\left(\frac{1}{2\,\theta^2}-\frac{1}{2\omega^2}\right)+\frac{1}{4\,\theta^2\,\omega^2}=\frac{1}{4\,\theta^2\,\omega^2}$$

sau încă

$$\delta\,h(\theta\,;\,\omega)\,[h(\theta\,;\,\omega)\,\delta+v(\theta\,;\,\omega)]=0.$$

Deoarece $\delta\,h(\theta\,;\omega)\neq 0$, obţinem

$$h(\theta\,;\,\omega)\,\delta+v(\theta\,;\,\omega)=0$$

de unde rezultă

$$h(\theta\,;\,\omega)=-\,\frac{v(\theta\,;\,\omega)}{\delta}. \tag{2.17}$$

Ca şi în cazul precedent, caracteristica operativă $L(\theta\,;\ \omega)$ se va exprima printr-o relaţie analoagă

$$L(\theta\,;\omega)=\frac{A^{\frac{\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{\theta^2}}{\frac{1}{\omega_0^2}-\frac{1}{\theta_0^2}}}-1}{A^{\frac{\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{\theta^2}}{\frac{1}{\omega_0^2}-\frac{1}{\theta_0^2}}}-B^{\frac{\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{\theta^2}}{\frac{1}{\omega_0^2}-\frac{1}{\theta_0^2}}}}. \tag{2.17'}$$

§ 3. VALOAREA MEDIE A NUMĂRULUI DE OBSERVAŢII

Spre deosebire de testele clasice de verificare a ipotezelor, la testul secvenţial pentru verificarea ipotezei H_0: $\theta=\theta_0$, cu alternativa H_1: $\theta=\theta_1$, numărul n de observaţii nu mai este fix, ci constituie o variabilă aleatoare. Valoarea medie a lui n, $E_\theta(n)$, cînd θ este adevărata valoare a parametrului, este funcţie de parametrul θ şi se numeşte funcţia numărului mediu de observaţii. În ([1], § 3.5) se dă următoarea expresie pentru această funcţie în cazul verificării ipotezei simple $\theta=\theta_0$ cu alternativa $\theta=\theta_1$:

$$E_\theta(n)=\frac{L(\theta)\ln B+[1-L(\theta)]\ln A}{E_\theta(z)}, \tag{3.1}$$

unde $L(\theta)$ este caracteristica operativă a criteriului, iar $E_\theta(z)$ valoarea medie a variabilei

$$z=\ln\frac{f(x\,;\,\theta_1)}{f(x\,;\,\theta_0)}. \tag{3.2}$$

Mai departe, vom calcula $E_{\theta\omega}(n)$ în cazul verificării ipotezei $\theta\leqslant\omega$ cu alternativa $\theta>\omega$, ipoteză, care după cum a arătat Girshick, este echivalentă cu verificarea ipotezei H_0: $\theta=\theta_0$, $\omega=\omega_0$, cu alternativa H_1: $\theta=\omega_0$, $\omega=\theta_0$,

Întrucît $L(\theta\,;\omega)$ s-a calculat mai înainte, nu ne rămîne decît să calculăm valoarea medie $E_{\theta.\,\omega}(z)$.

Ne vom mărgini în acest caz la cele trei repartiţii: binomială, normală şi Poisson. Variabila z este în cazul nostru de forma:

$$z=\ln\frac{f(x\,;\ \omega_0)\,f(y\,;\,\theta_0)}{f(x\,;\,\theta_0)\,f(y\,;\,\omega_0)}. \tag{3.3}$$

a) *Repartiţia binomială*. Valoarea medie a variabilei z este

$$E_{p,\pi}(z)=\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1}\left[\ln\frac{f(x\,;\pi_0)\,f(y\,;p_0)}{f(x\,;p_0)\,f(y\,;\pi_0)}\right]f(x\,;p)\,f(y\,;\pi). \tag{3.3'}$$

Dezvoltînd suma şi folosind relaţiile $f(1\,;p) = p$, $f(0\,;p) = 1 - p$, $f(1\,;\pi) = \pi$, $f(0\,;\pi) = 1 - \pi$, obţinem în ipoteza independenţei variabilelor X şi Y

$$E_{p,\pi}(z) = p\,(1-\pi)\ln\frac{\pi_0(1-p_0)}{p_0(1-\pi_0)} + \pi(1-p)\ln\frac{p_0(1-\pi_0)}{\pi_0(1-p_0)}.$$

Aplicînd relaţiile (1.5) şi (2.11) avem

$$E_{p,\pi}(z) = -\,\delta\pi(1-p) + \delta\,p(1-\pi)$$

adică

$$E_{p,\pi}(z) = \delta\,(p-\pi)\,. \tag{3.4}$$

Relaţia (3.1) devine prin urmare

$$E_{p,\pi}(n) = \frac{L(p\,;\pi)\ln B + [1 - L(p\,;\pi)]\ln A}{\delta(p-\pi)}. \tag{3.5}$$

b) *Repartiţia Poisson*. Relaţia (3.3′) devine în acest caz

$$E_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\left\{\ln\left[\left(\frac{\mu_0}{\lambda_0}\right)^x\left(\frac{\lambda_0}{\mu_0}\right)^y\right]\right\}\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x\,!}\,\frac{\mu^y e^{-\mu}}{y\,!}.$$

Însă am văzut că $\ln\frac{\mu_0}{\lambda_0} = \delta$ şi prin urmare avem

$$E_{\lambda,\mu}(z) = \delta\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}(x-y)\,\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x\,!}\,\frac{\mu^y e^{-\mu}}{y\,!}.$$

Această relaţie reprezintă valoarea medie a diferenţei celor două variabile aleatoare care au fost presupuse independente.

Deoarece $M(X) = \lambda$, $M(Y) = \mu$ vom avea

$$M(X - Y) = \lambda - \mu.$$

Avem prin urmare

$$E_{\lambda,\mu}(z) = \delta\,(\lambda - \mu)$$

iar

$$E_{\lambda,\mu}(n) = \frac{L(\lambda\,;\mu)\ln B + [1 - L(\lambda\,;\mu)]\ln A}{\delta(\lambda-\mu)}.$$

c) *Repartiţia normală*. În acest caz vom avea

$$E_{\theta,\omega}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\ln\frac{f(x\,;\omega_0)f(y\,;\theta_0)}{f(x\,;\theta_0)f(y\,;\omega_0)}\right]f(x\,;\theta)f(y\,;\omega)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$E_{\theta,\omega}(z) = \frac{1}{2\pi\theta\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[-\,x^2\left(\frac{1}{2\,\omega_0^2} - \frac{1}{2\,\theta_0^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{2\omega_0^2} - \frac{1}{2\theta_0^2}\right)\right]e^{-\frac{x^2}{2\theta^2} - \frac{y^2}{2\omega^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Folosind relațiile (2.16) obținem

$$E_{\theta,\,\omega}(z)=\frac{\delta}{2\pi\theta\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2-y^2)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\theta^2}-\frac{y^2}{2\omega^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

relație care reprezintă valoarea medie a diferenței X^2-Y^2, înmulțită cu constanta δ. În cele din urmă obținem

$$E_{\theta,\,\omega}(z)=\delta\,(\theta^2-\omega^2)$$

iar

$$E_{\theta,\,\omega}(n)=\frac{L(\theta\,;\,\omega)\ln B+[1-L(\theta\,;\,\omega)\ln A}{\delta\,(\theta^2-\omega^2)}. \tag{3.7}$$

Trebuie să subliniem însă faptul că relațiile obținute pentru caracteristica operativă și valoarea medie a numărului de observații sînt aproximative deoarece noi am folosit în calcule $A=\frac{1-\beta}{\alpha}$ și $B=\frac{\beta}{1-\alpha}$, pe cînd în realitate avem $A\leqslant\frac{1-\beta}{\alpha}$ și $B\geqslant\frac{\beta}{1-\alpha}$ (vezi [1], § 3.3).

Totuși, pentru scopurile noastre, aproximațiile făcute nu conduc la erori care să influențeze prea mult rezultatele.

Primită la redacție la 1 martie 1968

Centrul de statistică matematică al
Academiei Republicii Socialiste România
Calea Griviței nr. 21, București

THE OPERATIVE CHARACTERISTIC AND THE MEAN NUMBER OF TRIALS FOR SEQUENTIAL TESTS

(ABSTRACT)

In this paper the author presents a simple method of calculating a function $h(\theta\,;\,\omega)$ necessary to express the operative characteristic of a sequential test in order to control the hypothesis $H:\ \theta\leqslant\omega$ with the alternative $\theta>\omega$ introduced by M.A. Girshick ([1], § 4.2.4).

In the first part the general equation is established in the case of distributions in the form.

$$f(x\,;\,\theta)=\mathrm{e}^{[A(x)r(\theta)+B(x)+s(\theta)]}$$

Then the equation is solved when the random variables X and Y give birth to the Bernoulli, normal and Poisson distributions obtaining the general relationship

$$h(\theta\,;\,\omega)=-\frac{v(\theta\,;\,\omega)}{\delta}$$

In the last part the expression of mean $E_{\theta,\,\omega}(z)$ for the three above mentioned distributions is given, by means of which it is possible to calculate the mean value $E_{\theta,\,\omega}(n)$, the number of trials necessary to the sequential test considered.

BIBLIOGRAFIE

1. А. ВАЛЬД, *Последовательный анализ.* И. Л., Москва, 1960.
2. И. ВЭДУВА, *Последовательные тесты для распределений экспоненциального типа.* Revue de Mathématiques Pures et Appliquées, **7**, *4* (1962).
3. M. IOSIFESCU, G. MIHOC, R. THEODORESCU, *Calculul probabilităţilor şi statistica matematică.* Bucureşti, 1966.

PROPRIETĂȚI GLOBALE ALE CONEXIUNII ASOCIATE ALGEBREI NUMERELOR COMPLEXE

DE

IULIAN POPOVICI

Se studiază algebrele reale de dimensiune 2 cu element unitate (în primul rînd corpul complex) din punct de vedere al conexiunilor asociate [1], [2]. Se determină grupurile globale de mişcare ale acestor conexiuni, cît şi metricile asociate lor şi care admit grup global de mişcare cu mobilitate maximă.

G. Vrănceanu a asociat [1] fiecărei algebre reale $\mathfrak{A}_n$ de dimensiune n şi a cărei lege de înmulţire este dată, într-o bază $e_1, e_2, \ldots, e_n$, de formula :

$$e_j e_k = \Gamma^i_{jk} e_i \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

spaţiul A_n care se obţine introducînd în spaţiul numeric R_n conexiunea afină constantă Γ^i_{jk}.

Această asociere stabileşte o legătură între anumite noţiuni cu caracter algebric şi geometric. Astfel, grupul de automorfisme al algebrei $\mathfrak{A}_n$ este subgrupul liniar maximal al grupului de stabilitate al conexiunii Γ^i_{jk} care generează la rîndul său, împreună cu translaţiile lui A_n, grupul de mişcare al conexiunii Γ^i_{jk}.

Pe de altă parte, algebra $\mathfrak{A}_n$ este asociativă şi comutativă dacă şi numai dacă spaţiul A_n este fără torsiune şi admite paralelism absolut. În acest caz, A_n este local euclidian şi deci există transformări locale

$$u^i = \varphi^i (x^1, \ldots, x^n) \tag{2}$$

de la $A_n (x^1, \ldots, x^n)$ la $E_1(u^1, \ldots, u^n)$ verificînd condiţiile :

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^j \partial x^k} = - \Gamma^r_{jk} \frac{\partial u^i}{\partial x^r}. \tag{3}$$

Grupul de stabilitate (considerat ca grup de transformări locale ale lui A_n) al conexiunii Γ^i_{jk}, presupusă constantă, simetrică, nenulă şi cu

ST. CERC. MAT., TOM 21, NR. 3, P. 463—470, BUCUREŞTI, 1969

paralelism absolut, are atunci n^2 parametri, fiind local izomorf cu $GL\,(n,\, R)$. Însă noi vom considera doar transformări globale şi atunci numărul de parametri va scade în general. Aceiaşi observaţie este valabilă şi în cazul grupurilor de mişcare ale diverselor metrici (definite sau nedefinite, dar neconstante de-a lungul lui A_n) asociate conexiunii Γ^i_{jk}; dacă considerăm transformări locale ale lui A_n, vom obţine grupuri cu $n\,(n+1)/2$ parametri, dar dacă vom considera doar transformări globale ale lui A_n, acest număr se va reduce; vom spune că o metrică asociată conexiunii Γ^i_{jk} are *mobilitate maximă* dacă grupul ei global de mişcare are un număr maxim de parametri în comparaţie cu grupurile globale de mişcare ale celorlalte metrici asociate aceleiaşi conexiuni. Aceste fapte sînt ilustrate de rezultatele ulterioare obţinute în cazul $n=2$, cînd este posibilă scrierea sub o formă finită a grupurilor de mişcare ale conexiunilor şi metricilor respective.

Se arată uşor că, fiind dată o algebră reală $\mathcal{A}_2$ arbitrară cu element unitate e_1, putem găsi un element e_2 liniar independent de e_1 astfel ca să avem unul din cazurile : $e_2^2 = -\,e_1$; $e_2^2 = e_1$; $e_2^2 = 0$. În primele două cazuri grupul de automorfisme al lui $\mathcal{A}_2$ este dat de transformarea

$$x' = x, \quad y' = -\,y, \tag{4}$$

unde am pus $x^1 = x$, $x^2 = y$; în ultimul caz grupul de automorfisme este :

$$x' = x, \qquad y' = \alpha y \qquad (\alpha \neq 0). \tag{4'}$$

Orice algebră $\mathcal{A}_2$ cu element unitate este evident asociativă şi comutativă. Prin urmare, spaţiul A_2 asociat va fi local euclidian în toate cazurile descrise. El va avea respectiv una din următoarele conexiuni simetrice :

$$\Gamma^i_{0j} = \delta^i_j, \quad \Gamma^i_{11} = -\,\delta^i_0\,; \tag{5}$$

$$\Gamma^i_{0j} = \delta^i_j, \quad \Gamma^i_{11} = \delta^i_0\,; \tag{6}$$

$$\Gamma^i_{0j} = \delta^i_j, \quad \Gamma^i_{11} = 0 \tag{7}$$

$(i, j = 1, 2)$. Conexiunea (5) corespunde algebrei numerelor complexe.

Ne propunem mai întîi să determinăm toate transformările care anulează conexiunile (5), (6) şi (7). Sistemul cu derivate parţiale (3) devine :

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} + \frac{\partial u^i}{\partial x} = 0\,; \quad \frac{\partial^2 u^i}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial u^i}{\partial y} = 0\,; \quad \frac{\partial^2 u^i}{\partial y^2} + \varepsilon\frac{\partial u^i}{\partial x} = 0, \tag{8}$$

unde $\varepsilon = -\,1$ în cazul conexiunii (5), $\varepsilon = 1$ în cazul conexiunii (6) şi $\varepsilon = 0$ în cazul conexiunii (7).

Din prima ecuaţie (8) obţinem :

$$u^i = A^i(y)\,\mathrm{e}^{-x} + C^i(y).$$

Introducînd în a doua ecuaţie (8), rezultă că C^i sînt nişte constante. A treia ecuaţie (8) dă :

$$u^i = \mathrm{e}^{-x}(a^i \cos y + b^i \sin y) + C^i \qquad \text{dacă } \varepsilon = -\,1\,;$$

$$u^i = \mathrm{e}^{-x}(a^i\,\mathrm{e}^{-y} + b^i\,\mathrm{e}^{y}) \qquad + C^i \qquad \text{dacă } \varepsilon = 1\,;$$

$$u^i = \mathrm{e}^{-x}(a^i + b^i y) + C^i \qquad \text{dacă } \varepsilon = 0,$$

unde a^i, b^i şi C^i sînt nişte constante. Deci, notînd $u^1 = u$; $u^2 = v$ şi considerînd soluţiile particulare următoare ale sistemului (8) :

$$(9) \qquad u = \mathrm{e}^{-x} \cos y, \quad v = \mathrm{e}^{-x} \sin y \quad \text{dacă } \varepsilon = -1;$$

$$(10) \qquad u = \mathrm{e}^{-x-v}, \quad v = \mathrm{e}^{-x+y} \quad \text{dacă } \varepsilon = 1;$$

$$(11) \qquad u = \mathrm{e}^{-x}, \quad v = \mathrm{e}^{-x} y \quad \text{dacă } \varepsilon = 0,$$

soluţia sa generală este dată de combinaţiile liniare :

$$(12) \qquad u' = au + bv + A, \; v' = cu + dv + B$$

în toate cazurile considerate. Determinantul funcţional al soluţiei generale este egal, în afara unui factor nenul, cu determinantul $ad - bc$ al transformării (12). Rezultă că această transformare poate fi privită ca o schimbare de coordonate afine în E_2 şi deci putem lua orice soluţie a sistemului (8) de una din formele (9), (10) sau (11). Inversînd aceste formule obţinem :

$$(9') \quad x = -\ln\sqrt{u^2+v^2}, \; \cos y = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \; \sin y = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \quad \text{dacă } \varepsilon = -1;$$

$$(10') \qquad x = -\frac{1}{2}\ln(uv), \qquad y = \frac{1}{2}\ln\frac{v}{u} \qquad \text{dacă } \varepsilon = 1;$$

$$(11') \qquad x = -\ln u, \qquad y = N\frac{v}{u} \qquad \text{dacă } \varepsilon = 0.$$

Aceste formule permit să vedem cît putem prelungi transformările care anulează conexiunile (5), (6) şi (7) şi să determinăm imaginile acestor transformări. Astfel, difeomorfismul (9), (9′) aplică fiecare bandă B_α ($\alpha < y < \alpha + 2\pi$) a lui A_2 pe planul E_2 din care s-a scos semidreapta Δ_α dată de : $u = \rho \cos \alpha$, $v = \rho \sin \alpha$; $\rho \geqslant 0$.

Consideraţiile de mai sus conduc la rezultatul următor :

TEOREMA A. *Singurele transformări ale lui* A_2 *în* E_2 *care anulează conexiunile* (5), (6), (7) *sînt* (*în afara unei transformări afine din* E_2) *respectiv* : *difeomorfismul* (9), (9′) *care aplică fiecare bandă* $B_\alpha \subset A_2$ *pe* $E_2 - \Delta_\alpha$, *difeomorfismul* (10), (10′) *care duce* A_2 *pe cadranul* $u > 0$, $v > 0$, *difeomorfismul* (11), (11′) *care duce* A_2 *pe semiplanul* $u > 0$, *cît şi restricţii ale acestor difeomorfisme.*

Vom deduce acum grupurile globale de mişcare şi metricile cu mobilitate maximă asociate fiecăreia din cele trei conexiuni considerate.

a) *Cazul conexiunii* (5). Conform teoremei A, nu putem găsi o transformare care să anuleze conexiunea (5) pe întreg planul A_2. De aceea vom începe prin a considera cilindrul obţinut prin identificarea punctelor lui A_2 echivalente în raport cu grupul discret

$$(13) \qquad x' = x, \quad y' = y + 2\pi n \quad (n \in Z).$$

Acest cilindru este aplicat de difeomorfismul (9) pe planul E_2 din care s-a scos originea şi deci avem :

TEOREMA B. *Grupul de mişcare al cilindrului definit de* (13) *este global izomorf cu* $GL\,(2, R)$ *şi are deci* 4 *parametri.*

În adevăr, $GL\ (2,\ R)$ este grupul maximal care invariază conexiunea lui E_2 şi care menţine originea lui E_2. Din (9) şi (9′) deducem imediat că transformările grupului de mişcare sînt de forma :

$$(14)\qquad \begin{cases} x' = x - \ln\sqrt{(a\cos y + b\sin y)^2 + (c\cos y + d\sin y)^2}\,; \\ \cos y' = \dfrac{a\cos y + b\sin y}{\sqrt{(a\cos y + b\sin y)^2 + (c\cos y + d\sin y)^2}}\,; \\ \sin y' = \dfrac{c\cos y + d\sin y}{\sqrt{(a\cos y + b\sin y)^2 + (c\cos y + d\sin y)^2}}\,, \end{cases}$$

unde a,b,c,d sînt nişte constante $(ad - bc \neq 0)$. Orice transformare (14) induce de-a lungul fiecărei generatoare $y = \text{const.}$ cîte o translaţie.

Pe de altă parte, se vede uşor că orice transformare a lui $GL(2,R)$ poate fi scrisă în mod unic ca un produs al unei transformări de forma :

$$(15)\qquad u' = u + bv,\quad v' = dv\quad (d \neq 0)$$

cu o dilatare şi apoi cu o rotaţie.

Un calcul simplu arată că grupul de stabilitate al conexiunii (5) pe cilindrul (13) dat de subgrupul (14) care invariază originea este izomorf cu grupul transformărilor (15). Atunci, translaţiile cilindrului (13) corespund rotaţiilor şi dilatărilor planului E_2 : translaţiile în lungul generatoarei corespund dilatărilor, iar translaţiile în lungul axei Oy corespund rotaţiilor. Transformării (4) care dă grupul de automorfisme îi corespunde o transformare de aceeaşi formă, adică o simetrie în raport cu axa Ov.

TEOREMA C. *Grupul de mişcare al planului afin* A_2 *dotat cu conexiunea* (5) *este izomorf cu* $GL\ (2,R) \times Z$, *iar transformările sale sînt date de formulele* (14) *cu* $ad - bc \neq 0$.

Demonstraţie. Notăm cu T_α transformarea (9) a benzii B_α pe $E_2 - \Delta_\alpha$. Fie o transformare globală T din grupul de mişcare al lui A_2 dotat cu conexiunea (5) şi fie D_α imaginea benzii B_α prin T. Difeomorfismul $T_\alpha \circ T^{-1}$ duce domeniul D_α pe $E_2 - \Delta_\alpha$ şi totodată anulează conexiunea (5). Conform teoremei A, domeniul D_α nu poate fi decît o bandă $B_{\alpha'}$. Deci *T duce orice bandă* B_α *pe o altă bandă* $B_{\alpha'}$.

Să arătăm mai întîi că transformarea T este definită în mod unic de restricţia sa la o bandă oarecare B_α. Pentru aceasta, putem presupune (efectuînd eventual o translaţie de-a lungul axei Oy) că T invariază banda $B_{-\pi}$. T va induce în E_2 prin intermediul formulelor (9) o transformare centroafină care invariază semidreapta $\Delta_{-\pi}$; prin urmare, transformarea T restrînsă la banda $B_{-\pi}$ este dată de formulele (14) în care $a > 0$, $c = 0$ şi $d \neq 0$. Putem presupune în plus că $d > 0$, deoarece, în caz contrar, putem lua în locul transformării T compunerea sa cu automorfismul (4). Aceasta revine la a presupune că T invariază fiecare din dreptele $y = \pi$; $y = -\pi$ în parte. Cum transformarea T invariază dreapta $y = 0$, ea trebuie să invarieze şi benzile B_0, $B_{-2\pi}$; revenind la planul E_2, ajungem la concluzia că T este dată de asemenea de formulele (14) cu $a > 0$, $d > 0$, $c = 0$ pe $B_{-2\pi} \cup B_{-\pi} \cup B_0$. Din aproape în aproape se arată că orice transformare T a planului A_2 care lasă invariantă banda $B_{-\pi}$ şi care invariază conexiunea (5) este dată de formulele (14) în care $a > 0$; $c = 0$;

$d \neq 0$. y' apare ca o funcție numai de y, crescătoarea sau descrescătoare după cum $d > 0$ sau $d < 0$. Pe de altă parte, orice translație

$$x' = x; \quad y' = y + \alpha$$

este dusă de (9) într-o rotație de unghi α și deci transformarea (9) determină un izomorfism între grupul translațiilor în lungul axei Oy și produsul direct dintre grupul multiplicativ al numerelor complexe unimodulare cu grupul aditiv al întregilor Z. Totodată se vede ușor că orice transformare centroafină a lui E_2 se exprimă în mod unic ca produsul unei rotații cu o transformare de forma:

$$(15') \qquad u' = au + bv; \quad v' = dv \quad (a > 0, d \neq 0),$$

ceea ce demonstrează teorema C.

După cum arată formulele (14), orice transformare a grupului de mișcare al conexiunii (5) induce cîte o translație pe fiecare dreaptă $y = \text{const.}$ a lui A_2; totodată variabila y se transformă în mod separat prin intermediul unei funcții monotone (crescătoare sau descrescătoare după cum determinantul $ad - bc$ al transformării este pozitiv sau negativ). Mai observăm că grupul de stabilitate al conexiunii (5) este izomorf, în cazul planului A_2 ca și în cazul cilindrului (13), cu grupul transformărilor (15).

Este evident faptul că orice metrică ds asociată conexiunii (5) este indusă cu ajutorul difeomorfismului (9) de o anumită metrică constantă a lui E_2

$$(16) \qquad \mathrm{d}\sigma^2 = E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2 \quad (EG - F^2 \neq 0).$$

Rezultă că *orice metrică asociată conexiunii* (5) *admite un grup de mișcare cu un parametru.* Metrica ds este invariată de automorfismul (4) dacă și numai dacă $F = 0$. De exemplu, dacă luăm în (16) $E = G = 1$, $F = 0$, obținem următoarea metrică a lui A_2:

$$(17) \qquad \mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{-2x}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2).$$

Metrica (17) admite ca grup de mișcare grupul generat de translațiile în lungul axei Oy și de automorfismul (4).

b) *Cazul conexiunii* (6). Din teorema A rezultă imediat

TEOREMA D. *Grupul de stabilitate al conexiunii* (6), *format din transformări globale ale lui A_2, este definit de* (4), *deci coincide cu grupul de automorfisme ale algebrei respective.*

În adevăr, grupul transformărilor afine ale lui E_2 care invariază cadranul $u > 0$; $v > 0$ este generat de transformările:

$$(18) \qquad u' = au; \quad v' = bv \quad (a > 0, b > 0),$$

cît și de transformarea:

$$(19) \qquad u' = v; \quad v' = u.$$

Or, din (10) și (10') deducem că transformării (18) îi corespunde o translație, iar simetriei (19) îi corespunde simetria (4).

Fie acum ds metrica lui A_2 indusă de metrica (16) prin intermediul transformării (10). Se observă că dacă E sau $G \neq 0$, singura transformare

(18) care invariază metrica (16) este cea identică. Dacă presupunem că $E = 0$; $G = 0$, subgrupul maximal al lui (18) care invariază metrica (16) este dat de:

$$u' = au; \quad v' = \frac{1}{a} v \quad (a > 0). \tag{18'}$$

Obținem astfel următorul rezultat: *singura metrică cu mobilitate maximă asociată conexiunii* (6) *este* (*în afara unui factor constant*):

$$ds^2 = e^{-2x}(dx^2 - dy^2). \tag{20}$$

Metrica (20) este nedefinită și grupul ei de mișcare este generat [ca și în cazul metricii (17)] de translațiile lui A_2 în lungul axei Oy și de simetria (4).

c) *Cazul conexiunii* (7). Vom stabili mai întîi

TEOREMA E. *Grupul de stabilitate al conexiunii* (7) *este dat de următoarele transformări ale lui* A_2:

$$x' = x; \quad y' = ae^x + by \quad (b \neq 0). \tag{21}$$

El este izomorf cu grupul afin într-o variabilă.

Demonstrație. Conform teoremei A, oricărei transformări a lui A_2 care conservă conexiunea (7) îi corespunde, prin intermediul difeomorfismului (11), o transformare a lui E_2 de forma:

$$u' = \frac{1}{c} u; \quad v' = du + bv + a \quad (c > 0,\ b \neq 0) \tag{22}$$

și reciproc. Revenind la planul A_2, transformarea (22) dă:

$$x' = x + \ln c; \quad y' = c\,(ae^x + by + d). \tag{22'}$$

Or, se vede că această transformare păstrează originea dacă și numai dacă $c = 1$; $d = 0$, cînd (22') se reduce la (21), iar (22) devine o transformare afină a dreptei $u = 0$.

Ca și în cazurile anterioare, orice metrică ds a lui A_2, asociată conexiunii (7), este indusă de o metrică (16) constantă cu ajutorul difeomorfismului (11). Ținînd seama de faptul că orice transformare (4') este invariantă în raport cu acest difeomorfism, rezultă imediat că *nu putem asocia nici o metrică conexiunii* (7) *care să fie invariată de grupul de automorfisme al algebrei respective*. În schimb putem construi o metrică avînd un grup de mișcare cu doi parametri, așa cum arată

TEOREMA F. *Singura metrică cu mobilitate maximă asociată conexiunii* (7) *este* (*în afara unui factor constant*) *dată de*:

$$ds^2 = e^{-2x}(y\,dx^2 - dx\,dy). \tag{23}$$

Grupul de mișcare al acestei matrici este local izomorf cu grupul afin într-o variabilă și este dat de:

$$x' = x + \ln c; \quad y' = y + ace^x \quad (c > 0). \tag{24}$$

Demonstraţie. O transformare (22) invariază metrica (16) dacă şi numai dacă sînt îndeplinite următoarele trei relaţii :

$$\left(\frac{1}{c^2} - 1\right) E + \frac{2d}{c} F + d^2 G = 0, \tag{25}$$

$$\left(\frac{b}{c} - 1\right) F + b d G = 0, \tag{26}$$

$$(b^2 - 1)\, G = 0. \tag{27}$$

Să presupunem mai întîi că $G \neq 0$. Atunci, din (27) obţinem $b = \pm 1$, iar (25) şi (26) dau respectiv :

$$d = \frac{1}{G}\left(-\frac{F}{c} \pm \sqrt{\frac{1}{c^2}(F^2 - EG) + EG}\right) \tag{25'}$$

$$d = \frac{1}{G}\left(-\frac{F}{c} + \varepsilon F\right), \text{ unde } \varepsilon = b = \pm 1. \tag{26'}$$

Din (25′) şi (26′) rezultă imediat că $c = 1$, deoarece metrica (16) a fost presupusă nedegenerată; transformarea (22) devine :

$$u' = u\,; \quad v' = \frac{F}{G}(\varepsilon - 1)\, u + \varepsilon v + a, \qquad (\varepsilon = \pm 1). \tag{28}$$

Pentru ca (28) să definească un grup de transformări ale lui E_2 este necesar şi suficient să avem una din situaţiile : $F = 0$, $\varepsilon = \pm 1$ sau $F \neq 0$, $\varepsilon = 1$. În ambele cazuri obţinem grupuri cu un singur parametru a.

Să presupunem acum că $G = 0$. Atunci $F \neq 0$, deoarece, în caz contrar, forma pătratică (16) ar fi degenerată. Relaţia (27) este identic satisfăcută, iar (26) dă $B = c$; cît priveşte (25), aceasta ne permite să exprimăm în mod unic pe d în funcţie de c. În aceste condiţii transformarea (22) devine :

$$u' = \frac{1}{c} u\,; \quad v' = \frac{E}{2F}\left(c - \frac{1}{c}\right) u + cv + a \quad (c > 0). \tag{28'}$$

Pe de altă parte, inversa transformării (28′) este de aceeaşi formă cu (28′) (în ipoteza că c este arbitrar) dacă şi numai dacă $E = 0$. Prin urmare metrica

$$d\sigma^2 = du\, dv \tag{29}$$

este singura (în afara unui factor constant) care admite un subgrup invariant maximal al lui (22); acest subgrup este dat de

$$u' = \frac{1}{c} u\,; \quad v' = cv + a \quad (c > 0). \tag{30}$$

Din (29) şi (30) rezultă respectiv (23) şi (24), în virtutea relaţiilor (11), (11′). Astfel, teorema *F* este demonstrată.

Rezultatele anterioare evidențiază atît anumite analogii cît și anumite proprietăți de complementaritate ale conexiunilor (5), (6) și (7). Astfel, metricile (17), (20) și (23) asociate respectiv acestor conexiuni sînt toate invariate de grupul translațiilor în lungul axei Oy, dar nu sînt invariate de nici o altă translație. În timp ce metricile (17) și (20) admit același grup de mișcare avînd un parametru, fiind invariate de grupul (4) de automorfisme ale algebrelor respective, metrica (23) admite un grup de mișcare cu doi parametri și nu este invariată de grupul (4') al automorfismelor. În timp ce orice metrică (definită sau nedefinită) asociată conexiunii (5) are mobilitate maximă, metricile (20) și (23) (ambele nedefinite) sînt singurele metrici cu mobilitate maximă asociate conexiunilor (6) respectiv (7). În timp ce grupurilor de stabilitate ale conexiunilor (5) și (7) sînt cu doi parametri, grupul de stabilitate al conexiunii (6) este discret. După cum am mai menționat, aceste proprietăți au un caracter strict global în sensul că toate conexiunile studiate se comportă în același mod din punctul de vedere al transformărilor locale ale lui A_2; de exemplu, metricile asociate admit grupuri de mișcare (formate din transformări locale ale lui A_2) cu trei parametri. În sfîrșit, conexiunile (6) și (7) pot fi anulate utilizînd transformări globale ale lui A_2 în E_2, pe cînd conexiunea (5) poate fi anulată doar cu ajutorul unor transformări locale ale lui A_2 în E_2.

Primită la redacție la 13 februarie 1968

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
Calea Griviței nr. 21 București

PROPRIÉTÉS GLOBALES DE LA CONNEXION ASSOCIÉE À L'ALGÈBRE DES NOMBRES COMPLEXES

RÉSUMÉ

On peut associer [1] à chaque algèbre réelle n-dimensionnelle $\mathcal{A}_n$ un espace A_n à connexion affine constante Γ^i_{jk}. Dans ce travail on considère le cas où $\mathcal{A}_n$ à élément unité et $n = 2$, ce qui conduit à l'étude des connexions localement euclidiennes (5), (6) et (7) [la connexion (5) est associée au corps complexe]. Leurs groupes globaux de mouvement ont 4 paramètres dans les cas (5) et (7), et 2 paramètres dans le cas (6) (voir les théorèmes C,D,E); ils sont isomorphes à certains groupes linéaires. En introduisant aussi les métriques (17), (20) et (23) avec mobilité maximale de ces connexions, il résulte le caractère complémentaire des propriétés globales obtenues.

Le terme «global» signifie que nous considérons toujours seulement des transformations entières de A_n, en omettant ses transformations locales.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Vrănceanu, *Spazi a connessione affine a le algebre di numeri ipercomplessi.* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, **XII** (1958).
2. G. Vrănceanu, *Lecții de Geometrie diferențială*, vol. II, București, 1964.

MORFISME ACOPERITOARE ŞI BIACOPERITOARE ÎN TOPOLOGIA ADITIVĂ (V)

DE

ALEXANDRU GH. RADU

Sînt expuse noţiunile de morfism acoperitor şi biacoperitor în topologia aditivă precum şi caracterizarea lor în termenii subcategoriei localizante asociate topologiei; în continuare se dă o condiţie necesară ca functorul „produs tensorial" să comute cu limitele proiective finite şi o teoremă de caracterizare în limbajul înfăşurătoarei injective, a celei mai fine topologii pentru care prefasciculele unei familii date sînt separate.

1. PROPOZIŢIE. *Pentru un monomorfism* $u: F \to G$ din $\overline{\mathcal{C}}$, *următoarele afirmaţii sînt echivalente*:

i) *pentru orice morfism* $h_X \to G$, $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, $F \underset{G}{\times} h_X \to h_X$ *este un ciur din* $\tau(X)$.

ii) G/F *este obiect din* $\mathcal{A}\tau$.

Demonstraţie. i) $\Rightarrow$ ii). Dacă $h_X \overset{\varphi}{\to} G/F$, $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, există $\varphi': h_X \to G$ şi diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & \mathrm{Ker}\,\varphi \arrow[d] & \\
 & F \underset{G}{\times} h_X \arrow[rruu, dashed, "\theta"] \arrow[rr] \arrow[d] & & h_X \arrow[dl, "\varphi'"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r, "u"] & G \arrow[r, "p"] & G/F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

cu θ monomorfism şi prin urmare $\mathrm{Ker}\,\varphi \in \tau(X)$ după axioma $T_3'([4]P_3)$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 3, P. 471—478, BUCUREŞTI, 1969

ii) $\Rightarrow$ i), rezultă din diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F \times_G h_x \arrow[r] \arrow[d] & h_x \arrow[r] \arrow[d] & h_x/F \times_G h_x \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\theta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r, "u"] & G \arrow[r, "p"] & G/F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

cu θ monomorfism.

2. Notăm cu S mulţimea monomorfismelor din $\overline{\mathcal{C}}$ care satisfac la una din condiţiile propoziţiei precedente şi o numim mulţimea monomorfismelor acoperitoare din $\overline{\mathcal{C}}$, relativ la topologia τ.

Evident, orice izomorfism din $\overline{\mathcal{C}}$ este element al lui S.

Dacă notăm cu $S(G)$ mulţinea monomorfismelor acoperitoare din $\overline{\mathcal{C}}$ de adresă G, atunci $S(h_x) = \tau(X)$.

3. Corolar. *Pentru un morfism* $u : F \to G$ *din* $\overline{\mathcal{C}}$, *următoarele afirmaţii sînt echivalente* :

i) Im $(u) \to G$ *este un element din* S.

ii) Coker (u) *este obiect din* $\mathcal{A}\tau$.

Un astfel de morfism se numeşte acoperitor în topologia τ.

Evident, orice epimorfism este acoperitor în orice topologie.

4. Propoziţie. *Pentru un morfism* $u : F \to G$ *din* $\overline{\mathcal{C}}$, *următoarele afirmaţii sînt echivalente* :

i) u *este morfism acoperitor în topologia* τ.

ii) *pentru orice prefascicul separat* H, *aplicaţia canonică*

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(G, H) \to \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(F, H)$$

este injectivă.

iii) $a(u)$ *este epimorfism în* $\mathcal{C}^{\sim}$.

Demonstraţie. i) $\Rightarrow$ ii) rezultă din C. 3 şi ([5], P. 9] ii) $\Leftrightarrow$ iii) rezultă din diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(G, iG_1) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(F, iG_1) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\sim}}(aG, G_1) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\sim}}(aF, G_1)
\end{tikzcd}$$

unde G_1 este un obiect oarecare în $\mathcal{C}^{\sim}$ deci *afortiori* prefascicul separat.

iii) $\Rightarrow$ i). Evident.

5. Corolar. *Prefascicului H este separat dacă şi numai dacă pentru orice morfism acoperitor* $F \xrightarrow{u} G$, *aplicaţia canonică*

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(G, H) \to \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(F, H)$$

este injectivă.

6. Corolar. *O limită inductivă de morfisme acoperitoare este un morfism acoperitor.*

7. Corolar. *Un morfism* $u : F \to G$ *din* $\mathcal{C}^{\sim}$ *este epimorfism dacă şi numai dacă* $i(u)$ *este acoperitor.*

8. DEFINIŢIE. Morfismul acoperitor $u : F \to G$ din $\overline{\mathcal{C}}$ se numeşte biacoperitor dacă morfismul diagonal

$$\Delta : F \to F \underset{G}{\times} F$$

este monomorfism acoperitor.

Evident, orice izomorfism şi orice monomorfism acoperitor este morfism biacoperitor.

9. PROPOZIŢIE. *Pentru un morfism* $u : F \to G$ *din* $\overline{\mathcal{C}}$, *următoarele afirmaţii sînt echivalente* :

i) u *este biacoperitor.*

ii) Ker u, Coker u *sînt obiecte din* $\mathcal{A}\tau$.

iii) *pentru orice fascicul* H, *aplicaţia canonică*

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(G, H) \to \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(F, H)$$

este bijectivă.

IV) $a(u)$ *este izomorfism.*

V) *există o diagramă comutativă*

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "u"] \arrow[d, "s_1"'] & G \arrow[d, "s_2"] \arrow[dl, "g"'] \\
F' \arrow[r, "f"'] & G'
\end{tikzcd}$$

cu s_1, s_2 *morfisme biacoperitoare.*

Demonstraţie. i) $\Leftrightarrow$ ii). Dacă u este monomorfism, echivalenţa este imediată (P. 1).

Dacă u este epimorfism, există şirul exact

$$0 \to F \xrightarrow{\Delta} F \underset{G}{\times} F \to F \xrightarrow{u} G \to 0$$

şi deci Ker u = Coker Δ.

Dacă u este un morfism oarecare, există o descompunere $u = u_1 u_2$, cu u_1 monomorfism şi u_2 epimorfism şi în plus Ker u = Ker u_2 şi Coker u = = Coker u_1.

ii) $\Rightarrow$ iii). Se aplică functorul $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(-, H)$ şirului exact

$$0 \to \mathrm{Ker}(u) \to F \xrightarrow{u} G \to \mathrm{Coker}(u) \to 0$$

cu Ker u, Coker u obiecte din $\mathcal{A}\tau$.

iii) $\Rightarrow$ IV). Rezultă din diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(G, iG_1) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(F, iG_1) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\sim}}(aG, G_1) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\sim}}(aF, G_1)
\end{tikzcd}$$

cu G_1 obiect oarecare în $\mathcal{C}^{\sim}$.

iv) $\Rightarrow$ v). Este suficient să considerăm diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\psi_F"'] & G \arrow[d, "\psi_G"] \arrow[dl, "\theta^{-1}\psi_G"'] \\
iaF \arrow[r, "ia(u)=\theta", "\sim"'] & iaG
\end{tikzcd}$$

căci ψ_F este morfism biacoperitor conform echivalenței i) $\Leftrightarrow$ ii).

v) ii) rezultă din șirurile exacte

$$0 \to \operatorname{Ker} u \to \operatorname{Ker} gu \to \operatorname{Ker} g \to \operatorname{Coker} u \to \operatorname{Coker} gu \to \operatorname{Coker} g \to 0$$

$$0 \to \operatorname{Ker} g \to \operatorname{Ker} gf \to \operatorname{Ker} f \to \operatorname{Coker} g \quad \operatorname{Coker} gf \to \operatorname{Coker} f \to 0$$

10. Corolar. *O limită inductivă de morfisme biacoperitoare este un morfism biacoperitor; o limită inductivă filtrată de monomorfisme acoperitoare este un monomorfism acoperitor.*

11. Corolar. *Un morfism u din $\mathcal{C}^\sim$ este izomorfism dacă și numai dacă $i(u)$ este morfism biacoperitor în $\overline{\mathcal{C}}$.*

12. Corolar. *Mulțimea morfismelor acoperitoare (biacoperitoare) este stabilă la compunere.*

Rezultă din șirul exact

$$0 \to \operatorname{Ker} f \to \operatorname{Ker} gf \to \operatorname{Ker} g \to \operatorname{Coker} f \to \operatorname{Coker} gf \to \operatorname{Coker} g \to 0$$

unde g și f sînt morfisme acoperitoare (biacoperitoare) astfel ca gf să aibă sens.

13. Corolar. *Dacă gf este acoperitor, atunci g este acoperitor.*

14. Corolar. *Dacă gf este biacoperitor și g este biacoperitor, atunci f este biacoperitor.*

15. Corolar. *Produsul a două monomorfisme este un monomorfism acoperitor dacă și numai dacă fiecare din factori este acoperitor.*

16. Corolar. *Mulțimea morfismelor acoperitoare (biacoperitoare) este stabilă la schimbarea bazei.*

În particular mulțimea monomorfismelor biacoperitoare este stabilă la schimbarea bazei.

Aceasta rezultă din diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} u' \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & F \times_G H \arrow[r, "u'"] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Coker} u' \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} u \arrow[r] & F \arrow[r, "u"] & G & \operatorname{Coker} u \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

cu θ monomorfism și u morfism acoperitor (biacoperitor).

Ultima afirmație rezultă din faptul că proprietatea unui morfism de a fi monomorfism este stabilă la schimbarea bazei.

Rezultă în particular că dacă $F \xrightarrow{u} G$ este un monomorfism acoperitor, atunci pentru orice obiect H din $\overline{\mathcal{C}}$, monomorfismul canonic

$$F \times H \xrightarrow{n \times l_H} G \times H$$

este acoperitor.

Într-adevăr, $u \times 1_H$ se obţine din u prin schimbarea de bază dată de $G \times H \xrightarrow{pG} G$ şi se ţine sema că $G \times H \underset{O}{\times} G \times H$.

17. Corolar. *Dacă* $F \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} G \xrightarrow{s} H$ *este o diagramă comutativă în* $\overline{\mathcal{C}}$ *cu* s *morfism biacoperitor, atunci există o diagramă comutativă* $F' \xrightarrow{t} F \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} G$ *cu* t *morfism biacoperitor.*

Într-adevăr, din $su = sv$ rezultă $\operatorname{Im}(u - v) \subseteq \operatorname{Ker} s$ şi deci este suficient să luăm $F' = \operatorname{Ker}(u - v)$ şi t monomorfismul canonic.

Din cele precedente rezultă că mulţimea Σ a morfismelor biacoperitoare din $\overline{\mathcal{C}}$ este un sistem saturat ce permite calculul fracţiilor la dreapta.

Prin dualitate se arată că Σ permite calculul fracţiilor şi la stînga.

Categoria de fracţii $\overline{\mathcal{C}}(\Sigma^{-1})$ este echivalentă cu categoria cît $\overline{\mathcal{C}}/A_\tau$ şi prin urmare cu categoria fasciculelor $\mathcal{C}^\sim$.

18. Teoremă. *Fie* $\mathcal{C}$ o $\mathcal{U}$*-categorie preaditivă element al lui* $\mathcal{U}$, $\mathfrak{D}$ o $\mathcal{U}$*-categorie aditivă cu limite inductive,* $t : \mathcal{C} \to \mathfrak{D}$ *un functor covariant aditiv şi* $T : \overline{\mathcal{C}} \to \mathfrak{D}$ *functorul produs tensorial asociat.*

Dacă T *comută cu limitele proiective finite, există un functor* $\overline{T} : \mathcal{C}^\sim \to \mathfrak{D}$, *unic, pînă la un izomorfism functorial, astfel încît diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathcal{C}} \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "T"'] & \mathcal{C}^\sim \\
 & \mathfrak{D} i\overline{T}
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă, unde $\mathcal{C}^\sim$ *este categoria fasciculelor aditive pe* $\mathcal{C}$ *relativ la topologia* τ_T *definită de functorul* T ([4], 3.9—D) *şi unde* a *este functorul fascicul asociat. În plus,* $\overline{T}$ *comută cu limitele proiective finite şi are un adjunct la dreapta* $\overline{S}$.

Demonstraţie. Deoarece $\mathcal{C}^\sim$ este echivalentă cu categoria cît a lui $\overline{\mathcal{C}}$ în raport cu subcategoria localizantă $\operatorname{Ker} T$, existenţa şi unicitatea functorului $\overline{T}$ astfel ca $\overline{T}a = \overline{T}$ rezultă din proprietatea de universalitate a categoriei cît.

Evident, $\overline{T}$ comută cu limitele proiective finite căci $\overline{T} = Ti$, unde $i : \mathcal{C}^\sim \to \overline{\mathcal{C}}$ comută cu limitele proiective.

Un adjunct la dreapta pentru functorul $\overline{T}$ este functorul $\overline{S} = aS$, unde S este un adjunct la dreapta pentru T. Înainte de a arăta izomorfismul de adjuncţie, arătăm că pentru orice obiect D din $\mathfrak{D}$, $S(D)$ este fascicul în topologia τ_T, cu alte cuvinte morfismul de adjuncţie $S(D) \to iaS(D)$ este izomorfism.

Fie $R \xrightarrow{i} X$ un ciur acoperitor al lui X în topologia τ_T, adică $T(i)$ este izomorfism şi deci pentru orice obiect D din $\mathfrak{D}$ există izomorfismul

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(TR,\ D) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(TX,\ D)$$

şi din adjuncţie rezultă izomorfismul

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(X,\ S(D)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(R,\ S(D))$$

adică $S(D)$ este fascicul în topologia τ_T.

Izomorfismul de adjuncţie al lui $\overline{T}$ cu $\overline{S}$ se arată acum uşor :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\sim}(F,\ \overline{S}(D)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(iF,\ iaS(D)) \approx \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(iF,\ S(D)) \xrightarrow{\sim}$$
$$\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(TiF,\ D) \approx \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(\overline{T}(F),\ D)).$$

19. TEOREMĂ. *Fie* $\{F_i\}_{i\in I}$ *o familie de obiecte din* $\overline{\mathcal{C}}$ *şi pentru fiecare* $i \in I$, *fie* Q_i *anvelopa injectivă a lui* F_i. *Cea mai fină topologie pe* $\mathcal{C}$ *pentru care* $(F_i)_{i\in I}$ *sînt prefascicule separate coincide cu cea mai fină topologie pentru care* $(Q_i)_{i\in I}$ *sînt fascicule.*

Demonstraţie. Cea mai fină topologie τ pe $\mathcal{C}$ pentru care $(Q_i)_{i\in I}$ sînt fascicule este dată de asocierea

$$X \rightsquigarrow \tau(X),\ X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C},$$

unde $\tau(X)$ constă din toate ciururile R ale lui X cu proprietatea că pentru orice $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ şi orice $i \in I$, aplicaţia canonică

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_y,\ Q_i) \to \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(u^{-1}(R),\ Q_i)$$

este bijectivă ([4], 3 9—F).

Faptul că fiecare F_i este prefascicul separat în această topologie rezultă din diagrama comutativă.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_X,\ F_i) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(R,\ F_i) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_X,\ Q_i) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(R,\ Q_i)
\end{tikzcd}$$

unde $(R \hookrightarrow X) \in \tau(X)$, $i \in I$.

Fie acum τ' o altă topologie pe $\mathcal{C}$ faţă de care $(F_i)_{i\in I}$ sînt prefascicule separate. Pentru a arăta că τ' este mai puţin fină decît τ este suficient să arătăm că $(Q_i)_{i\in I}$ sînt fascicule în topologia τ' şi pentru aceasta este suficient să arătăm numai că sînt prefascicule separate în topologia τ'.

Fie aşadar $(R \overset{j}{\hookrightarrow} X) \in \tau'(X)$ şi morfismul canonic

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_X,\ Q_i) \to \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(R,\ Q_i),\ i \in I$$

despre care vrem să ştim dacă este monomorfism.

Fie $f : h_x \to Q_i$ cu $f_j = 0$ şi fie diagrama carteziană

$$\begin{tikzcd}
F'_i = F_i \times_{Q_i} h_X \arrow[rr, "u'"] \arrow[dd, "f'"'] & & h_X \arrow[dd, "f"] \\
& R \arrow[ul, dashed, "\theta"'] \arrow[ur, "j"] \arrow[dl, "0"'] & \\
F_i \arrow[rr, "u_i"] & & Q_i
\end{tikzcd}$$

Există un morfism unic $\theta : R \to F'_i$ astfel ca $f'\theta = 0$ şi $u'\,\theta = j$. Deoarece j este monomorfism acoperitor, rezultă că θ este monomorfism acoperitor (P.15).

Deoarece F_i este prefascicul separat, rezultă că $f' = 0$ (P. 4) şi deci $0 = \mathrm{Im}\,(f') = \mathrm{Im}\,(f) \times_{Q_i} F_i = \mathrm{Im}\,(f) \cap F_j$ şi cum Q_i este o extensie esenţială a lui F_i, rezultă $\mathrm{Im}\,(f) = 0$ adică $f = 0$ c.c.t.d.

20. Propoziţie. *Morfismul $u : F \to G$ din $\overline{\mathcal{C}}$ este acoperitor dacă şi numai dacă pentru orice $f : h_X \to G$, $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, şi orice obiect H din $\mathcal{C}^{\sim}$ există şirul exact*

$$(\ast)\ 0 \to \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_X, F) \to \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(F \times_G h_X, H) \to \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(\mathrm{Ker}\,u, H)$$

Demonstraţie. Să considerăm diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
& & & \mathrm{Im}(u') \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\,u' \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & F \times_G h_X \arrow[r, "u'"] \arrow[ur] \arrow[d, "f'"] & h_X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathrm{Coker}\,u' \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\,u \arrow[r] & F \arrow[r, "u"] & G \arrow[r] & \mathrm{Coker}\,u \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

cu θ monomorfism.

Dacă u este acoperitor, atunci Coker u este obiect din $\mathcal{A}\tau$ şi prin urmare Coker u' este obiect din $\mathcal{A}\tau$ de unde rezultă $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(\mathrm{Coker}\ u', H) = 0$.

Din şirurile exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(\mathrm{Coker}\ u', H) \to \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_X, H) \rightleftarrows \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(Im\ (u'), H))$$

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(\mathrm{Im}\ (u'), H) \to \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(F \times_G h_X, H) \to \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(\mathrm{Ker}\ u', H)$$

rezultă exactitatea şirului $(\ast)$.

Reciproc, din exactitatea şirului $(\ast)$ rezultă $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(\mathrm{Coker}\ u', H) = 0$ şi deci Coker u' este obiect din $\mathcal{A}\tau$.

Deoarece există un epimorfism $\oplus h_X \to G$, există şi diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
\oplus h_X \arrow[r] \arrow[d] & \oplus \mathrm{Coker}\,u' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
G \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}\,u \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

şi deci Coker u este obiect din $\mathrm{A}_{\overline{\mathcal{C}}}$.

1. **Propoziție.** *Obiectul* H *din* $\bar{\mathcal{C}}$ *este fascicul dacă și numai dacă pentru orice morfism biacoperitor* $F \xrightarrow{u} G$, *aplicația canonică*

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(G, H) \to \mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(F, H)$$

este izomorfism.

Demonstrație. Suficiența este evidentă căci dacă $R \overset{i}{\hookrightarrow} X$ este o rafinare a lui X, atunci i este monomorfism biacoperitor.

Necesitatea rezultă din P.9.

22. **Corolar.** *Prefascicului separat* F *este fascicul dacă și numai dacă orice monomorfism acoperitor* $0 \to F \xrightarrow{i} F'$ *este retractabil.*

Demonstrație. Necesitatea este evidentă.

Reciproc, fie F prefascicul separat și șirul exact cu scindare

$$0 \to F \xrightarrow{\Psi_F} iaF \to \mathrm{Coker}\ \psi_F \to 0$$

cu coker ψ_F obiect din $\mathcal{A}_\tau$. Deoarece ia F este fascicul, coker $\psi_F = 0$ și deci ψ_F este izomorfism.

Primită la redacție la 25 iunie 1968

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România
Calea Griviței nr. 21, București

MORPHISMES COUVRANTS ET BICOUVRANTS DANS LA TOPOLOGIE ADDITIVE (V)

(RÉSUMÉ)

On expose les notions de morphismes couvrant et bicouvrant dans la topologie additive ainsi que leur caractérisation en langage de la sous-catégorie localisante associée à la topologie ; ensuite on donne une condition nécessaire pour que le foncteur «produit tensoriel» commute aux limites projectives finies et un théorème de caractérisation en langage d'enveloppe injective de la plus fine topologie, pour laquelle les préfaisceaux d'une famille donnée soient séparés.

BIBLIOGRAFIE

1. Verdier-Louis, *Topologies et faisceaux.* Seminaire J.H.E.S., 1964, Fasc. III.
2. Nicolae Popescu, *Elemente de teoria fasciculelor* (v). St. cerc. mat., **18**, 7 (1966).
3. Alexandru Gh. Radu, *Toposul abelian al prefasciculelor aditive de grupuri abeliene peste o categorie preaditivă mică.* St. cerc. mat., **21** (1969).
4. Alexandru Gh. Radu, *Ciururi și topologii aditive.* St. cerc. mat., **21** (1969).
5. Alexandru Gh. Radu, *Toposul abelian al fasciculelor aditive de grupuri abeliene peste un sit preaditiv mic.* St. cerc. mat., **21** (1969).

CATEGORIA FASCICULELOR ÎN TOPOLOGIA MULTIPLICATIV - ADITIVĂ (VI)

DE

ALEXANDRU GH. RADU

Se definește topologia multiplicativ-aditivă și se caracterizează fasciculele în această topologie.

Fie $\mathcal{C}$ o $\mathcal{U}$-categorie preaditivă mică și S un sistem multiplicativ-închis de morfisme din $\mathcal{C}$, adică un sistem de morfisme ce posedă următoarele proprietăți :

a) conține toate izomorfismele din $\mathcal{C}$;

b) dacă $s_1, s_2 \in S$ și $s_1 \, s_2$ are sens, atunci $s_1 s_2 \in S$.

Pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ notăm cu $\mathcal{T}_s(X)$ toate ciururile (aditive) $R \hookrightarrow X$ ale lui X cu proprietatea că pentru orice $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, există $s : Z \to X$ din S astfel ca $fs \in R\,(Z)$.

Asocierea

$$X \rightsquigarrow \mathcal{T}_s\,(X), \qquad X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$$

definește pe $\mathcal{C}$ o topologie (aditivă) $\mathcal{T}_s$ numită topologia multiplicativ-aditivă asociată lui S.

Să verificăm cele trei axiome ale topologiei :

T_1. Este evidentă căci $1_X \in S$ pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$.

T_2. Fie $R \in \mathcal{T}_s\,(X)$ și $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$. Pentru orice $g : Z \to Y$, există $s' : T \to Z$ din S cu $fgs' \in R\,(T)$ deci $gs' \in f^{-1}\,(R)\,(T)$ adică $f^{-1}\,(R) \in \mathcal{T}_s(Y)$.

T_3. Fie $\mathrm{R} \in \mathcal{T}_s(X)$ și R' un ciur al lui X cu proprietatea că pentru orice $u \in R\,(Y)$, $u^{-1}\,(R') \in \mathcal{T}_s\,(Y)$. Să arătăm că $R' \in \mathcal{T}_s\,(X)$ adică pentru orice $h : Z \to X$ există $s : V \to Z$ din S cu $hs \in R'\,(V)$. Deoarece $R \in \mathcal{T}_s\,(X)$ există $s_1 : T \to Z$ din S cu $hs_1 \in R\,(I)$. Prin ipoteză, $(hs_1)^{-1}\,(R') \in \mathcal{T}_s\,(T)$ și deci pentru $T \xrightarrow{1_T} T$ există $s_2 : V \to T$ din S cu $1_T s_2 = s_2 \in (hs_1)^{-1}(R')\,(V)$ adică $hs_1 s_2 \in R'\,(V)$ cu $s_1 s_2 \in S$. Este suficient să luăm $s = s_1 s_2$.

2. *Observație.* Orice $R \in \mathcal{T}_s\,(X)$ conține un ciur al lui X generat de un element $s : Y \to X$ din S. Evident

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 3, P. 479—482 BUCUREȘTI, 1969

3. PROPOZIȚIE. *Sînt echivalente următoarele afirmații :*

i) *Pentru orice* $s \in S$, *ciurul generat de* s *este acoperitor în topologia* $\mathfrak{T}_S$.

ii) *Orice ciur care conține un morfism din* S *este acoperitor în topologia* $\mathfrak{T}_S$.

iii) *Sistemul* S *este permutabil, adică orice diagramă*

$$Z \xrightarrow{s} X \xleftarrow{f} Y, \quad s \in S$$

se poate insera într-o diagramă comutativă

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f'"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "s"] & X \end{tikzcd}, \quad s' \in S.$$

Demonstrație. i) ⇒ ii). Rezultă din T_3'.

ii) ⇒ i). Evident.

i) ⇒ iii). Dacă R este un ciur peste X generat de morfismul $Y \xrightarrow{s} X$ din S, atunci, prin ipoteză, $R \in \mathfrak{T}_S(X)$ și deci $f^{-1}(R) \in \mathfrak{T}_S(Y)$. Conform observației precedente, există $s' : W \to Y$ din S cu $s' \in f^{-1}(R)(W)$, adică $fs' \in R(W)$ și conform definiției ciurului generat de un morfism, există $f' : W \to Z$ cu $sf' = fs'$.

iii) ⇒ i). Fie $s : Z \to X$ din S și R ciurul lui X generat de s. Prin ipoteză, pentru orice $y \xrightarrow{f} X$ există $s' : W \to Y$ și $f' : W \to Z$ cu $fs' = sf' \in R(W)$ adică $R \in \mathfrak{T}_S(X)$.

4. LEMĂ. *Fie* $\mathcal{C}'$ *o subcategorie corefelctivă a lui* $\mathcal{C}$, *adică o subcategorie plină pentru care functorul de incluziune* $S : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ *admite un adjunct la dreapta* T, *și* Σ *sistemul tuturor morfismelor din* $\mathcal{C}$ *care prin* T *sînt duse în izomorfisme. Sistemul* Σ *permite calculul fracțiilor la dreapta și* $\mathcal{C}'$ *este echivalentă cu categoria de fracții* $\mathcal{C}(\Sigma^{-1} - 1)$.

Demonstrație. Evident, Σ este un sistem multiplicativ închis. Σ este permutabil căci orice diagramă

$$X \xrightarrow{s} Y \xleftarrow{f} Z, \qquad s \in \Sigma$$

se inserează în diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] & Y & Z \arrow[l, "f"'] \\ STX \arrow[u, "\Phi_X"] \arrow[r, "ST(s)", "\sim"'] & STY \arrow[u, "\Phi_Y"'] & STZ \arrow[l, "ST(f)"'] \arrow[u, "\Phi_Z"'] \end{tikzcd}$$

cu $ST(s)$ izomorfism și $\Phi_z \in \Sigma$ căci S este deplin fidel. ($\Phi : ST \to 1_{\mathcal{C}}$ este săgeata de adjuncție a lui S cu T.)

Fie $X \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{s} Z$ o diagramă comutativă cu $s \in \Sigma$.

Deoarece $ST(s)$ este izomorfism, din $su = sv$ rezultă $ST(u) = ST(v)$.

Din diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & Y \arrow[r, "s"] & Z \\
STX \arrow[u, "\Phi_X"] \arrow[r, shift left, "ST(u)"] \arrow[r, shift right, "ST(v)"'] & STY \arrow[u, "\Phi_Y"'] \arrow[r, "ST(s)", "\sim"'] & STZ \arrow[u, "\Phi_Z"']
\end{tikzcd}$$

rezultă $u\Phi_X = \Phi_Y ST(u) = \Phi_Y ST(v) = v\Phi_X$ adică diagrama

$$\begin{tikzcd}
STX \arrow[r, "\Phi_X"] & X \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & Y,
\end{tikzcd} \qquad \Phi_X \in \Sigma$$

este comutativă.

$\mathcal{C}'$ este echivalentă cu $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$ căci satisface la aceeași proprietate de universalitate ca $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$.

5. TEOREMĂ. *Păstrînd notațiile lemei precedente, dacă $\mathcal{C}$ este o $\mathfrak{U}$-categorie aditivă mică, la fel este și $\mathcal{C}'$ și dacă $\mathcal{T}_\Sigma$ este topologia* (*aditivă*) *multiplicativă pe $\mathcal{C}$ asociată lui Σ, atunci categoria $\widetilde{\mathcal{C}_\Sigma}$ a fasciculelor aditive pe $\mathcal{C}$ în topologia $\mathcal{T}_\Sigma$ este echivalentă cu categoria $\overline{\mathcal{C}'}$ a prefasciculelor aditive pe $\mathcal{C}'$.*

Demonstrație. Conform lemei precedente $\mathcal{C}'$ este echivalentă cu $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$ și prin urmare functorul imagine directă de prefascicule aditive indus de T,

$$T_* : \overline{\mathcal{C}'} \to \overline{\mathcal{C}}$$

este deplin fidel și injectiv pe obiecte.

Functorul imagine inversă de prefascicule aditive indus de T

$$T^* : \overline{\mathcal{C}} \to \overline{\mathcal{C}'}$$

este un adjunct la stînga pentru T_* și deoarece este izomorf cu functorul imagine directă de prefascicule aditive S_* indus de S, rezultă că T^* comută și cu limitele proiective ([4], 1.10).

Fie $\mathcal{T}_{s*}$ topologia lui $\mathcal{C}$ definită de S_*, adică topologia asociată subcategoriei localizante Ker S_* a lui $\overline{\mathcal{C}}$. Se vede ușor că $\overline{\mathcal{C}'}$ este echivalentă cu categoria $\overline{\mathcal{C}}/\text{Ker } S_*$, adică cu categoria fasciculelor aditive definite pe $\mathcal{C}$ relativ la topologia $\mathcal{T}_{s*}$.

Totul va fi terminat dacă vom arăta că $\mathcal{T}_\Sigma = \mathcal{T}_{s*}$.

Într-adevăr, fie $R \hookrightarrow h_X$ o rafinare a lui X în topologia τ_{s*}, adică $S_*(R) \to S_*(h_X)$ este izomorfism în $\overline{\mathcal{C}'}$ și prin urmare pentru orice $X' \in \text{Ob}\,\mathcal{C}'$ există izomorfismul

$$R(S(X')) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X', TX) \approx \text{Hom}_{\mathcal{C}}(SX', X)$$

căci $S_* \approx T^*$.

În particular, $R(STX) \approx \text{Hom}_{\mathcal{C}}(STX, X)$ și deci $\Phi_X \in R(STX)$ cu $\Phi_X \in \Sigma$.

Reciproc, fie $R \overset{i}{\hookrightarrow} h_X$ o rafinare a lui X în topologia $\mathcal{T}_\Sigma$. Conform lemei precedente, există $s : Y \to X$ din S cu $s \in R(Y)$ și deci $S_*(i)$ este izomorfism, căci $S_* \approx T^*$ și $T^* h(s) = T(s)$ este izomorfism.

Teorema este complet dovedită.

6. COROLAR. *Deoarece $\mathcal{C}'$ este echivalentă cu $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$, rezultă că un prefascicul aditiv pe $\mathcal{C}$ este fascicul în topologia $\mathcal{T}_\Sigma$ dacă și numai dacă duce morfismele din Σ în izomorfisme.*

7. *Observație*. Pentru orice $s \in \sum$, $h(s)$ este biacoperitor în topologia $\mathfrak{T}_\Sigma$ căci $\mathfrak{T}_\Sigma = \mathfrak{T}_{S_*}$ şi $S_*(h(s)) = T^*h(s) = T(s)$ este izomorfism.

8. *Observație*. Pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, mulțimea $\sum(X)$ a morfismelor din $\sum$ de adresă X este coinițială în mulțimea $\sum^2(X)$ a morfismelor biacoperitoare de adresă X.

Într-adevăr, dacă $H \xrightarrow{f} h_x$ este un morfism biacoperitor de adresă h_x, atunci $\mathrm{Im}(f) \xhookrightarrow{i} h_x$ este o rafinare a lui X în topologia $\mathfrak{T}_\Sigma$ şi prin urmare conține un ciur generat de un element din $\sum(X)$.

Există aşadar un morfism $Y \xrightarrow{s} X$ din S astfel ca $s \in \mathrm{Im}(f)(Y)$ sau că $h(s)$ se factorizează prin $\mathrm{Im}(f) \xhookrightarrow{i} h_x$

$$\begin{tikzcd}
 & Im(f) \arrow[dr, "i"] & \\
H \arrow[ur, "p"] \arrow[rr, "f"] & & h_X \\
 & h_Y \arrow[uu, dashed, "g"'] \arrow[ul, dashed, "g'"] \arrow[ur, "h(s)"'] &
\end{tikzcd}$$

Deoarece p este epimorfism, rezultă g' cu $pg' = g$. De aici şi din $ig = h(s)$ rezultă $fg' = h(s)$.

9. *Observație*. Notăm cu $\mathcal{C}_1$ subcategoria plină a lui $\mathcal{C}^\sim$ definită de obiectele $\tilde{h}(X) = ah(X)$.

$\mathcal{C}_1$ este o $\mathcal{U}$-categorie mică preaditivă ale cărei obiecte formează o familie de generatori pentru $\mathcal{C}^\sim$. Categoria $\mathcal{C}_1$ este echivalentă cu $\mathcal{C}(\sum^{-1})$ căci este soluția aceleiaşi probleme de universalitate ca şi $\mathcal{C}(\sum^{-1})$.

Într-adevăr, pentru orice $s \in \sum$, $\tilde{h}(s)$ este izomorfism şi dacă $R : \mathcal{C} \to \mathfrak{D}$ este un alt functor care duce morfismele din $\sum$ în izomorfisme, definim $R_1 : \mathcal{C}_1 \to \mathfrak{D}$ prin $R_1(\tilde{h}(x)) = R(X)$.

Primită la redacție la 25 iunie 1968

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România
Calea Griviței nr. 21, București

CATÉGORIE DES FAISCEAUX DANS LA TOPOLOGIE MULTIPLICATIVE ADITIVE (VI)

(RÉSUMÉ)

On définit la topologie multiplicative additive et on caractérise les faisceaux dans cette topologie.

BIBLIOGRAFIE

1. Nicolae Popescu, *Elemente ale teoriei fasciculelor (III)*. St. cerc. mat., **18**, *4* (1966).
2. Alexandru Gh. Radu, *Quelques observations sur les sites*. Revue Roumaine de math. pures et appliquées, **11**, *8* (1966).
3. Alexandru Gh. Radu, *Toposul abelian al fasciculelor aditive de grupuri abeliene, peste un sit preaditiv mic*. St. cerc. mat. **20** (1968).
4. — *Toposul abelian al prefasciculelor aditive de grupuri abeliene peste o categorie preaditivă mică* (I). St. cerc. mat., **20** (1968).

ASUPRA GRUPULUI DE MIŞCĂRI ALE SPAŢIILOR CONFORM EUCLIDIENE

DE

N. N. TEODORESCU

Se determină spaţiile conform euclidiene care admit mişcări, presupunînd că mulţimea parametrilor grupului de mişcări este inclusă în mulţimea constantelor de integrare a ecuaţiilor lui Killing. În afară de trei excepţii, se arată că toate aceste spaţii sînt subproiective.

Fiind dat un spaţiu Riemann V_n de metrică $ds^2 = a_{ij}dx^i dx^j$, transformările infinitezimale ale grupului de mişcări sînt:

$$x'^i = x^i + \varepsilon\xi^i,$$

unde ξ^i verifică ecuaţiile lui Killing:

$$\xi^s \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^s} + a_{si}\frac{\partial \xi^s}{\partial x^j} + a_{sj}\frac{\partial \xi^s}{\partial x^i} = 0.$$

Dacă spaţiul V_n este conform euclidian, metrica lui poate fi adusă la forma $ds^2 = e^{2\psi}[(dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2]$, iar ecuaţiile lui Killing se scriu:

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} + 2\delta_{ij}\xi^s\frac{\partial \psi}{\partial x^s} = 0. \tag{1}$$

În cele ce urmează vom regăsi [1] transformările infinitezimale ale grupului. Vom considera $n > 2$

★

Notînd

$$\Phi = \xi^s \frac{\partial \psi}{\partial x^s} \tag{2}$$

ST. CERC. MAT., TOM 21, NR. 3, P. 483 — 498, BUCUREŞTI, 1969

şi derivînd (1) în raport cu x^k, apoi schimbînd i cu k şi scăzînd, obţinem :

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i}\right) + 2\delta_{ij}\frac{\partial \Phi}{\partial x^k} - 2\delta_{jk}\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = 0. \tag{2'}$$

Derivînd (2′) în raport cu x^l, schimbînd apoi j cu l şi scăzînd, avem :

$$\delta_{ij}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^k\,\partial x^l} - \delta_{jk}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^l} - \delta_{il}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k} + \delta_{kl}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j} = 0. \tag{2''}$$

Punînd în (2″) $k = l$ şi sumînd obţinem $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\delta_{ij}}{2-n}\,\Delta\Phi$ şi înlocuind în (2″) obţinem :

$$\frac{2\Delta\Phi}{2-n}\left(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{jk}\delta_{il}\right) = 0$$

de unde rezultă $\Delta\Phi = 0$ deci $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i\,\partial x^j} = 0$ de unde :

$$\Phi = \xi^s \frac{\partial \psi}{\partial x^s} = a_s x^s + b, \tag{3}$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt constante.

Relaţia (2′) devine :

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i}\right) + 2\delta_{ij}a_k - 2\delta_{jk}a_i = 0. \tag{3'}$$

Punînd $\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} = 2a_i x^k - 2a_k x^i + X^i_k$, obţinem din (3′) $\frac{\partial X^i_k}{\partial x^j} = 0$, deci avem :

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} = 2a_i x^k - 2a_k x^i + 2C^i_k \tag{3''}$$

unde C^i_k sînt constante satisfăcînd condiţiilor :

$$C^i_k + C^k_i = 0. \tag{4}$$

Din relaţiile (1) şi (3) rezultă :

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} = -\,2\delta_{ik}(a_s x^s + b) \tag{4'}$$

de unde din (3″) şi (4′),

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} = a_i x^k - a_k x^i - \delta_{ik}(a_s x^s + b) + C^i_k. \tag{4''}$$

Punînd în (4″), $\xi^i = a_i\left(\frac{r^2}{2}-\frac{2}{K}\right) - (a_s x^s + b)\, x^i + C^i_s x^s + X^i$, unde $r^2 = (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2$ iar K este o constantă, obţinem $\frac{\partial X^i}{\partial x^k}=0$, deci avem :

$$\xi^i = a_s\left[\left(\frac{r^2}{2}-\frac{2}{K}\right)\delta^i_s - x^i x^s\right] + \frac{1}{2}C^m_s(\delta^i_m x^s - \delta^i_s\, x^m) - bx^i + C^i, \tag{5}$$

unde C^i sînt constante.

Ţinînd seama de (3) rezultă că trebuie să avem :

$$a_s\left[\left(\frac{r^2}{2}-\frac{2}{K}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x^s} - x^s\left(1 + x^m\frac{\partial\psi}{\partial x^m}\right)\right] + \tag{6}$$

$$+\frac{1}{2}C^m_s\left(x^s\frac{\partial\psi}{\partial x^m} - x^m\frac{\partial\psi}{\partial x^s}\right) - b\left(x^s\frac{\partial\psi}{\partial x^s} + 1\right) + C^s\frac{\partial\psi}{\partial x^s} = 0.$$

Vom determina toate spaţiile conform euclidiene care admit mişcări în cazul cînd mulţimea $\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ a parametrilor este inclusă în mulţimea $\{a_1, \ldots, a_n, C^1_2, \ldots, C^{n-1}_n, C^1, \ldots, C^n, b\}$.

★

Observăm că parametrii $a_1, \ldots, a_n, C^1_2, \ldots, C^{n-1}_n, b, C^1, \ldots, C^n$ nu pot fi toţi esenţiali deoarece numărul lor ar depăşi numărul maxim $\frac{n(n+1)}{2}$. De asemenea dacă parametrii $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ar fi esenţiali, atunci considerînd operatorii :

$$X_i = \left(\frac{r^2}{2}-\frac{2}{K}\right)\frac{\partial f}{\partial x^i} - x^i x^s\frac{\partial f}{\partial x^s}, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{7}$$

şi parantezele lui Poisson (X_i, X_j), obţinem operatorii :

$$Y_{ij} \equiv (X_i, X_j) = -\frac{4}{K}\left(x^i\frac{\partial f}{\partial x^j} - x^j\frac{\partial f}{\partial x^i}\right). \tag{7'}$$

Formulele (7′) şi (5) ne arată că şi parametrii $C^i_j (i, j = 1, 2, \ldots, n)$ sînt esenţiali deci numărul de parametrii este $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$, deci spaţiul V_n este cu curbură constantă. Dacă $K > 0$, metrica lui V_n poate fi adusă la forma :

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \cdots + (dx^n)^2}{\left\{1 + \frac{K}{4}\left[(x^1)^2 + \cdots + (x)^2\right]\right\}^2}. \tag{8}$$

★

Să presupunem acum că nu toţi parametrii $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt esenţiali.

În acest caz putem presupune esenţiali parametrii $a_1, a_2, \ldots, a_p$, $p < n$ şi $a_{p+1} = a_{p+2} = \cdots = a_n = 0$.

Grupul conține deci operatorii :

$$X_{\alpha}=\left(\frac{r^{2}}{2}-\frac{2}{K}\right)\frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}-x^{\alpha}x^{s}\frac{\partial f}{\partial x^{s}},\qquad \alpha=1,2,\ldots,p \tag{9}$$

și considerînd parantezele lui Poisson (X_{α}, X_{β}), rezultă că grupul conține și operatorii :

$$Y_{\beta\gamma}\equiv(X_{\beta}, X_{\gamma})=-\frac{4}{K}\left(x^{\beta}\frac{\partial f}{\partial x^{\gamma}}-x^{\gamma}\frac{\partial f}{\partial x^{\beta}}\right),\qquad \beta,\gamma=1,2,\ldots,p. \tag{10}$$

Ținînd seama că :

$$(X_{\alpha}, Y_{\beta\gamma})=\frac{4}{K}\delta_{\alpha}^{\gamma}X_{\beta}-\frac{4}{K}\delta_{\alpha}^{\beta}X_{\gamma} \tag{11}$$

$$(Y_{\alpha\beta}, Y_{\gamma\delta})=\frac{4}{K}\delta_{\delta}^{\alpha}Y_{\gamma\beta}-\frac{4}{K}\delta_{\gamma}^{\alpha}Y_{\delta\beta}+\frac{4}{K}\delta_{\delta}^{\beta}Y_{\alpha\gamma}-\frac{4}{K}\delta_{\gamma}^{\beta}Y_{\alpha\delta} \tag{12}$$

rezultă că dacă parametrii $a_{\alpha}(\alpha=1,2,\ldots,p)$ sînt esențiali, în mod necesar și parametrii $C_{\gamma}^{\beta}(\beta,\gamma=1,2,\ldots,p)$ trebuie să fie esențiali.

În acest caz, ținînd seama de (6), trebuie să avem :

$$\left(\frac{r^{2}}{2}-\frac{2}{K}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x^{\alpha}}=x^{\alpha}\left(1+x^{s}\frac{\partial\psi}{\partial x^{s}}\right) \tag{13}$$

$$x^{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\beta}}=x^{\beta}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\alpha}}\qquad \alpha,\beta=1,\ldots,p<n. \tag{13'}$$

Este suficient să integrăm sistemul (13) deoarece sistemul (13′) este o consecință a sistemului (13).

Considerînd $\alpha=1$, $\gamma=2$ avem :

$$x^{1}\frac{\partial\psi}{\partial x^{2}}-x^{2}\frac{\partial\psi}{\partial x^{1}}=0. \tag{13''}$$

Să considerăm variabilele $x^{3},\ldots,x^{n}$ constante. Sistemul diferențial asociat ecuației (13″) este :

$$\frac{\mathrm{d}x^{1}}{-x^{2}}=\frac{\mathrm{d}x^{2}}{x^{1}}=\frac{\mathrm{d}\psi}{0}$$

și admite integralele prime $(x^{1})^{2}+(x^{2})^{2}=C_{1}$; $\psi=C_{2}$. Soluția generală a ecuației (13″) este deci :

$$\psi=f[(x^{1})^{2}+(x^{2})^{2}, x^{3},\ldots,x^{n}] \tag{13'''}$$

Considerînd $\alpha=1$, $\beta=3$, rezultă din (13′) :

$$x^{1}\frac{\partial\psi}{\partial x^{3}}-x^{3}\frac{\partial\psi}{\partial x^{1}}=0.$$

Ţinînd seama de (13''') rezultă că :

$$(13^{\mathrm{IV}}) \qquad \frac{\partial f}{\partial x^3} - 2x^3 \frac{\partial f}{\partial u} = 0, \qquad \text{unde } u = (x^1)^2 + (x^2)^2.$$

Sistemul diferenţial asociat ecuaţiei (13^{IV}) este :

$$\frac{\mathrm{d}u}{-2x^3} = \frac{\mathrm{d}x^3}{1} = \frac{\mathrm{d}f}{0}$$

cu integralele prime $u + (x^3)^2 = C_1$; $f = C_2$ deci avem :

$$f = f[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2, x^4, \dots, x^n].$$

Rezultă deci că soluţia generală a sistemului (13') este :

$$(14) \qquad \psi = f[(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^p)^2, x^{p+1}, \dots, x^n].$$

Ţinînd seama de (14) şi notînd $z = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^p)^2,$ ecuaţiile (13) se scriu :

$$2x^\alpha \left(\frac{r^2}{2} - \frac{2}{K}\right) \frac{\partial f}{\partial z} = x^\alpha \left[1 + 2z \frac{\partial f}{\partial z} + x^{p+1} \frac{\partial f}{\partial x^{p+1}} + \dots + x^n \frac{\partial f}{\partial x^n}\right]$$

sau,

$$\left[(x^{p+1})^2 + \dots + (x^n)^2 - z - \frac{4}{K}\right] \frac{\partial f}{\partial z} - x^{p+1} \frac{\partial f}{\partial x^{p+1}} - \dots - x^n \frac{\partial f}{\partial x^n} - 1 = 0.$$

Punînd $F = f + \ln \left\{1 + \frac{K}{4} [z + (x^{p+1})^2 + \dots + (x^n)^2]\right\}$, obţinem :

$$(14') \qquad \left[(x^{p+1})^2 + \dots + (x^n)^2 - z - \frac{4}{K}\right] \frac{\partial F}{\partial z} - x^{p+1} \frac{\partial F}{\partial x^{p+1}} - \dots - x^n \frac{\partial F}{\partial x^n} = 0.$$

Sistemul diferenţial asociat ecuaţiei (14') este :

$$\frac{\mathrm{d}z}{(x^{p+1})^2 + \dots + (x^n)^2 - z - \dfrac{4}{K}} = \frac{\mathrm{d}x^{p+1}}{-x^{p+1}} = \dots = \frac{\mathrm{d}x^n}{-x^n} = \frac{\mathrm{d}F}{0}$$

şi admite integralele prime :

$$F = C_1 ; \qquad \frac{(x^{p+1})^2 + \dots + (x^n)^2}{\left\{1 + \dfrac{K}{4} [z + (x^{p+1})^2 + \dots + (x^n)^2]\right\}^2} = C_2$$

$$x^{p+1} = C_{p+1}\, x^n$$

$$x^{p+2} = C_{p+2}\, x^n$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x^{n-1} = C_{n-1}\, x^n.$$

Soluţia generală a ecuaţiei (14′) este:

$$F = \Phi\left[\frac{(x^{p+1})^2 + \ldots + (x^n)^2}{\left(1 + \frac{K}{4}r^2\right)^2}, \frac{x^{p+1}}{x^n}, \ldots, \frac{x^{n-1}}{x^n}\right]$$

şi ţinînd seama de cele de mai sus rezultă că avem:

$$(15) \qquad \psi = \Phi\left[\frac{(x^{p+1})^2 + \ldots + (x^n)^2}{\left(1 + \frac{K}{4}r^2\right)^2}, h(x^{p+1}, \ldots, x^n)\right] - \ln\left(1 + \frac{K}{4}r^2\right),$$

unde $h(x^{p+1}, \ldots, x^n)$ este o funcţie omogenă de grad zero.

Deci dacă considerăm esenţiali parametrii $a_1, a_2, \ldots, a_p$, rezultă din (15) în mod necesar şi suficient că metrica lui V_n are forma:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{e}^{2\Phi\left[\frac{(x^{p+1})^2 + \ldots + (x^n)^2}{\left\{1 + \frac{K}{4}[(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2]\right\}^2} \cdot h(x^{p+1}, \ldots, x^n)\right]}}{\left\{1 + \frac{K}{4}[(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2]\right\}^2}[(\mathrm{d}x^1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^n)^2],$$

unde Φ este o funcţie arbitrară, h este omogenă de grad zero, iar grupul de mişcări este dat de ecuaţiile (10), (11), (12). Numărul de parametri este deci $p + \frac{p(p-1)}{2} = \frac{p(p+1)}{2}$.

★

Să considerăm acum cazul cînd şi parametrul b este esenţial. Din (6) rezultă că trebuie să avem:

$$x^1\frac{\partial\psi}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial\psi}{\partial x^2} + \ldots + x^n\frac{\partial\psi}{\partial x^n} + 1 = 0$$

iar din (13) rezultă că $\psi = f(x^{p+1} \ldots, x^n)$.

Rezultă deci că trebuie să avem:

$$x^{p+1}\frac{\partial f}{\partial x^{p+1}} + \ldots + x^n\frac{\partial f}{\partial x^n} + 1 = 0$$

de unde $f = \varphi(x^{p+1}, \ldots, x^n) - \frac{1}{2}\ln[(x^{p+1})^2 + \ldots + (x^n)^2]$, unde φ este o funcţie omogenă de gradul zero.

Metrica spaţiului se scrie deci:

$$(16') \qquad \mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{e}^{2\varphi(x^{p+1}, \ldots, x^n)}}{(x^{p+1})^2 + \ldots + (x^n)^2}[(\mathrm{d}x^1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^n)^2].$$

În acest caz mai rezultă că şi parametrii C^1, $C^2, \ldots, C^p$ sînt esenţiali. Grupul conţine deci operatorii:

$$
(16'')\qquad
\begin{aligned}
X_\alpha &= \left(\frac{r^2}{2} - \frac{2}{K}\right)\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - x^\alpha x^s \frac{\partial f}{\partial x^s} \\
Y_{\beta\gamma} &= -\frac{4}{K}\left(x^\beta \frac{\partial f}{\partial x^\gamma} - x^\gamma \frac{\partial f}{\partial x^\beta}\right) \\
Z &= x^s \frac{\partial f}{\partial x^s} \\
Z_\gamma &= \frac{\partial f}{\partial x^\gamma} \qquad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, p
\end{aligned}
$$

iar ecuaţiile de structură sînt:

$$
(16''')\qquad
\begin{aligned}
&(X_\alpha, X_\beta) = Y_{\alpha\beta} \\
&(X_\alpha, Y_{\beta\gamma}) = \frac{4}{K}\delta^\gamma_\alpha X_\beta - \frac{4}{K}\delta^\beta_\alpha X_\gamma \\
&(X_\alpha, Z) = - X_\alpha - \frac{4}{K} Z_\alpha \\
&(X_\alpha, Z_\gamma) = - \frac{4}{K} Y_{\alpha\gamma} + \delta^\alpha_\gamma Z \\
&(Y_{\beta\gamma}, Y_{\alpha\delta}) = \frac{4}{K}\delta^\beta_\delta Y_{\alpha\gamma} - \frac{4}{K}\delta^\beta_\alpha Y_{\delta\gamma} + \frac{4}{K}\delta^\gamma_\delta Y_{\beta\alpha} - \frac{4}{K}\delta^\gamma_\alpha Y_{\beta\delta} \\
&(Y_{\beta\gamma}, Z) = 0 \\
&(Y_{\alpha\beta}, Z_\gamma) = \frac{4}{K}\delta^\alpha_\gamma Z_\beta - \frac{4}{K}\delta^\beta_\gamma Z_\alpha \\
&(Z, Z_\gamma) = - Z_\gamma \\
&(Z_\gamma, Z_\delta) = 0. \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, p.
\end{aligned}
$$

Grupul conţine deci $p + \dfrac{p(p-1)}{2} + 1 + p = \dfrac{(p+1)(p+2)}{2}$ parametri.

Să presupunem acum că parametrii $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sînt esenţiali iar parametrul b nu este esenţial. Vom arăta că nici unul din parametrii C^1, $C^2, \ldots, C^n$ nu este esenţial.

Într-adevăr, $C^1, C^2, \ldots, C^n$ nu pot fi toţi esenţiali deoarece din (6) ar rezulta că ψ este o constantă, deci spaţiul V_n ar fi euclidian.

Să presupunem acum că $C^1, C^2, \ldots, C^m$, $m < p$, sînt esenţiali. Deci grupul de mişcări ar conţine operatorii:

$$
(17)\qquad Z_h = \frac{\partial f}{\partial x^h}, \qquad h = 1, 2, \ldots, m.
$$

Considerînd parantezele lui Poisson (X_α, Z_h), obținem :

$$(X_\alpha, Z_h) = -\frac{K}{4} Y_{\alpha h} + \delta^\alpha_h Z. \tag{17'}$$

Din (17') ar rezulta că grupul ar conține operatorul $(X_\alpha, Z_\alpha) = Z$ ceea ce conform cu (5) ar fi posibil numai dacă parametrul b ar fi esențial.

Să presupunem acum că C^{h_1}, $h_1 > p$, ar fi esențial ar rezulta atunci din (16''') că grupul conține operatorul $(X_\alpha, Z_{h_1}) = -\frac{K}{4} Y_{\alpha h_1}$. Dar din (16''') ar rezulta că grupul conține operatorul $X_{h^1} = -\frac{K}{4} (X_\alpha, Y_{\alpha h_1})$ cu $h_1 > p$ ceea ce este imposibil

★

Vom considera acum cazul cînd nici unul din parametrii a^1, $a^2, \ldots, a^n$ nu este esențial. În acest caz ecuațiile (5) și (6) ne dau :

$$\xi^i = \frac{1}{2} C^m_s (\delta^i_m x^s - \delta^i_s x^m) - b x^i + C^i \tag{17''}$$

$$\frac{1}{2} C^m_s \left(x_s \frac{\partial \psi}{\partial x^m} - x^m \frac{\partial \psi}{\partial x^s} \right) - b \left(x^s \frac{\partial \psi}{\partial x^s} + 1 \right) + C^s \frac{\partial \psi}{\partial x^s} = 0. \tag{17'''}$$

Să considerăm acum cazul cînd toți parametrii C^i_j $(i, j = 1, \ldots, n)$ sînt esențiali. Avem deci operatorii :

$$Y_{ij} = x^i \frac{\partial f}{\partial x^j} - x^j \frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{18}$$

iar din (17') rezultă :

$$x^i \frac{\partial \psi}{\partial x^j} - x^j \frac{\partial \psi}{\partial x^i} = 0$$

de unde conform unor calcule analoage, avem :

$$\psi = f[(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2]. \tag{18'}$$

Deci dacă considerăm esențiali parametrii C^i_j, rezultă că metrica spațiului este :

$$ds^2 = e^{2f[(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2]} [(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2]. \tag{19}$$

Operatorii grupului sînt dați de (18), ecuațiile de structură sînt :

$$(Y_{ij}, Y_{kl}) = \delta^i_l Y_{kj} - \delta^i_h Y_{lj} + \delta^j_l Y_{ik} - \delta^j_k Y_{il} \tag{20}$$

iar grupul conține $\frac{n(n-1)}{2}$ parametri.

Să presupunem acum că nu numai parametrii C^i_j sînt esenţiali, ci şi b este esenţial. În acest caz din (17‴) rezultă că $\psi = f(r^2)$ trebuie să verifice ecuaţia:

$$x^1 \frac{\partial\psi}{\partial x^1} + \ldots + x^n \frac{\partial\psi}{\partial x^n} + 1 = 0 \tag{20'}$$

de unde rezultă $\psi = -\frac{1}{2} \ln k^2 r^2$, unde k este o constantă. Rezultă că metrica spaţiului este:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{(\mathrm{d}x^1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^n)^2}{k^2 [(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2]}. \tag{21}$$

Deoarece b este esenţial, grupul conţine şi operatorul:

$$Z = x^s \frac{\partial f}{\partial x^s} \equiv x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + \ldots + x^n \frac{\partial f}{\partial x^n}. \tag{21'}$$

Ecuaţiile de structură ale grupului de mişcări al spaţiului (21) sînt:

$$\begin{aligned} &(Y_{ij}, Y_{kl}) = \delta^i_l Y_{kj} - \delta^i_k Y_{lj} + \delta^j_l Y_{ik} - \delta^j_k Y_{il} \\ &(Y_{ij}, Z) = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

iar numărul de parametri este $\frac{n(n-1)}{2} + 1$.

Vom arăta acum că dacă C_j sînt esenţiali, atunci nici unul din parametrii $C^1, C^2, \ldots, C^n$ nu poate fi esenţial. Într-adevăr, să presupunem de exemplu că C^1 ar fi esenţial. Ar rezulta atunci din (17‴) că $\frac{\delta\psi}{\partial x^1} = \frac{\partial f(r^2)}{\partial x^1} = 0$, deci spaţiul ar fi euclidian.

★

Să considerăm acum cazul cînd sînt esenţiali numai C^α_β ($\alpha, \beta = 1, \ldots, q < n$) parametri. Grupul conţine operatorii:

$$Y_{\alpha\beta} = x^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\beta} - x^\beta \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \tag{23}$$

iar din (17‴) rezultă

$$x^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x^\beta} - x^\beta \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} = 0. \qquad \alpha, \beta = 1, \ldots, q$$

Dacă considerăm esenţiali numai parametrii C^α_β, ($\alpha, \beta = 1, \ldots, q$), conform unor calcule analoage rezultă că avem:

$$\psi = f[(x^1)^2 + \ldots + (x^q)^2, x^{q+1}, \ldots, x^n]. \tag{23'}$$

În acest caz metrica spaţiului este:

$$\mathrm{d}s^2 = e^{2f[(x^1)^2 + \ldots + (x^q)^2, x^{q+1}, \ldots, x^n]} [(\mathrm{d}x^1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^n)^2] \tag{24}$$

iar ecuaţiile de structură sînt:

$$(Y_{\alpha\beta}, Y_{\gamma\delta}) = \delta_{\delta}^{\alpha} Y_{\gamma\beta} - \delta_{\gamma}^{\alpha} Y_{\delta\beta} + \delta_{\delta}^{\beta} Y_{\alpha\gamma} - \delta_{\gamma}^{\beta} Y_{\alpha\delta}. \tag{25}$$

Să mai presupunem acum că şi parametrul b este esenţial. În acest caz din (17‴) rezultă $x^s \dfrac{\partial\psi}{\partial x^s} + 1 = 0$, deci conform celor de mai sus trebuie să avem:

$$\psi = \varphi(x^1, \ldots, x^n) - \frac{1}{2} \ln r^2, \tag{26}$$

unde φ este o funcţie omogenă de grad zero. Deci în acest caz din (26) şi (23′) rezultă:

$$2z \frac{\partial f}{\partial z} + x^{q+1} \frac{\partial f}{\partial x^{q+1}} + \ldots + x^n \frac{\partial f}{\partial x^n} + 1 = 0,$$

unde am notat

$$z = (x^1)^2 + \ldots + (x^q)^2.$$

Rezultă deci că metrica spaţiului se scrie:

$$ds^2 = \frac{e^{2H\left[\frac{(x^1)^2 + \ldots + (x^q)^2}{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2},\, h(x^{q+1}, \ldots, x^n)\right]}}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2} [(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2], \tag{27}$$

unde h este omogenă de grad zero, iar H este o funcţie arbitrară. Ecuaţiile de structură se scriu:

$$\begin{aligned} &(Y_{\alpha\beta}, Y_{\gamma\delta}) = \delta_{\delta}^{\alpha} Y_{\gamma\beta} - \delta_{\gamma}^{\alpha} Y_{\delta\beta} + \delta_{\delta}^{\beta} Y_{\alpha\gamma} - \delta_{\gamma}^{\beta} Y_{\alpha\delta} \\ &(Y_{\alpha\beta}, Z) = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

iar numărul de parametri este $\dfrac{q(q-1)}{2} + 1$.

Să mai presupunem acum că şi parametrii $C^{p+1}, \ldots, C^{m+p}$ sînt esenţiali.

În acest caz din (17‴) rezultă că $\dfrac{\partial\psi}{\partial x^{p+1}} = \ldots = \dfrac{\partial\psi}{\partial x^{m+p}} = 0$.

Efectuînd calcule analoage cu cele de mai sus, rezultă că metrica spaţiului este:

$$ds^2 = \frac{e^{2H\left[\frac{(x^1)^2 + \ldots + (x^q)^2}{(x^1)^2 + \ldots + (x^q)^2 + (x^{m+p+1})^2 + \ldots + (x^n)^2},\, h(x^{m+p+1}, \ldots, x^n)\right]}}{[(x^1)^2 + \ldots + (x^q)^2 + (x^{m+p+1})^2 + \ldots + (x^n)^2]} [(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2)]. \tag{29}$$

unde h este o funcţie omogenă de grad zero iar H o funcţie arbitrară.

Ecuaţiile de structură sînt :

$$
\begin{aligned}
&(Y_{\alpha\beta},\ Y_{\gamma\delta}) = \delta^{\alpha}_{\delta}\, Y_{\gamma\beta} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\, Y_{\delta\beta} + \delta^{\beta}_{\delta}\, Y_{\alpha\gamma} - \delta^{\beta}_{\gamma}\, Y_{\alpha\delta} \\
&(Y_{\alpha\beta},\ Z) = 0 \\
(30)\qquad &(Y_{\alpha\beta},\ Z_h) = -\,\delta^{\alpha}_{h} Z_{\beta} + \delta^{\beta}_{h} Z_{\alpha} \\
&(Z_h\,,\ Z_k) = 0 \qquad \alpha,\ \beta = 1,\ \ldots,\ q;\ h = p+1,\ \ldots,\ m+p \\
&(Z\,,\ Z_h) = -\,Z_h
\end{aligned}
$$

iar numărul de parametri este

$$\frac{q(q-1)}{2} + 1 + m + p - q.$$

Din aceste ecuaţii rezultă în particular că dacă parametrii $C^1, \ldots,$ $\ldots, C^2$ sînt esenţiali, metrica spaţiului se scrie :

$$(31)\qquad \mathrm{d}s^2 = F^2\,(x^{q+1},\ \ldots,\ x^n)\ [(\mathrm{d}x^1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^n)^2],$$

unde F^2 este omogenă de gradul minus doi, iar ecuaţiile de structură sînt date de (30), unde $h = 1, 2, \ldots, q$. Se observă însă că spaţiile (29) şi (31) sînt de forma (16′), deci rezultă că ecuaţiile de structură ale grupului maxim sînt ecuaţiile (16‴).

★

Să considerăm acum cazul cînd numai parametrii C^{α}_{β} $(\alpha, \beta = 1, \ldots,$ $\ldots, q)$ şi $C^{t+1}, \ldots, C^{t+m}$ sînt esenţiali. În acest caz, conform cu (23′) trebuie să avem :

$$(32)\qquad \psi = f\,[(x^1)^2 + \ldots + (x^q)^2,\ x^{q+1}, \ldots,\ x^n]$$

iar grupul admite operatorii $Z_h = \dfrac{\partial f}{\partial x^h}$ $(h = t, \ldots, m + t)$ şi avem $\dfrac{\partial \psi}{\partial x^r} = 0,$ $(r = t, \ \ldots,\ m + t)$.

Dacă $t = q$, rezultă din (32) că metrica spaţiului se scrie :

$$(32')\qquad \mathrm{d}s^2 = f\,(x^{m+t+1},\ \ldots,\ x^n)\ [(\mathrm{d}x^1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^n)^2],$$

unde f este o funcţie arbitrară. De aici rezultă însă că $m + t + 1$ este cel mult egal cu $q + 1$ deoarece dacă $m + t + 1 > q + 1$, ar rezulta că există parametrii esenţiali C^{α}_{β} cu $\alpha,\ \beta > q$.

Deci conform cu (32′) metrica spaţiului se scrie :

$$(33)\qquad \mathrm{d}s^2 = f\,(x^{q+1},\ \ldots,\ x^n)\ [(\mathrm{d}x^1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^n)^2]$$

iar grupul de mişcări este dat de :

$$
\begin{aligned}
&(Y_{\alpha\beta},\ Y_{\gamma\delta}) = \delta^{\alpha}_{\delta}\, Y_{\gamma\beta} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\, Y_{\delta\beta} + \delta^{\beta}_{\delta}\, Y_{\alpha\gamma} - \delta^{\beta}_{\gamma}\, Y_{\beta\delta} \\
(34)\qquad &(Y_{\alpha\beta},\ Z_h) = -\,\delta^{\alpha}_{h} Z_{\beta} + \delta^{\beta}_{b} Z_{\alpha} \\
&(Z_h,\ Z_k) = 0
\end{aligned}
$$

şi conţine $\dfrac{q(q-1)}{2} + q = \dfrac{q(q+1)}{2}$ parametri.

Dacă $t > q$, metrica spațiului se scrie:

$$(35)\quad \mathrm{d}s^2 = f\,[(x^1)^2 + \ldots + (x^q)^2,\ x^{m+t+1}, \ldots, x^n]\,[(\mathrm{d}x^1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^n)^2]$$

iar ecuațiile de structură sînt:

$$(36)\quad \begin{aligned} &(Y_{\alpha\beta},\ Y_{\gamma\delta}) = \delta^{\alpha}_{\gamma}\, Y_{\beta\delta} - \delta^{\alpha}_{\delta}\, Y_{\beta\gamma} + \delta^{\beta}_{\delta}\, Y_{\alpha\gamma} - \delta^{\beta}_{\gamma}\, Y_{\alpha\delta} \\ &(Y_{\alpha\beta},\ Z_h) = 0 \\ &(Z_h,\ Z_k) = 0 \end{aligned}$$

și numărul de parametri este

$$\frac{q(q-1)}{2} + m + t - q.$$

★

Să considerăm acum cazul cînd nici unul din parametrii C^{α}_{β} nu este esențial.

Să presupunem că parametrul b este esențial. În acest caz avem $x^s \dfrac{\partial\psi}{\partial x^s} + 1 = 0$ de unde rezultă că metrica spațiului este:

$$(37)\quad \mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{e}^{2\varphi(x^1,\ldots,x^n)}}{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2}\,[(\mathrm{d}x^1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^{n2})],$$

unde φ este o funcție omogenă de grad zero.

Să observăm că nu mai putem avea esențiali decît unul din parametrii $C^1, C^2, \ldots, C^n$ de exemplu C^1, deoarece dacă am avea esențiali parametrii C^1, C^2, grupul ar conține operatorul Y_{12}.

Deci metrica spațiului în cazul cînd numai b și C^1 sînt esențiali este:

$$(37')\quad \mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{e}^{2\varphi(x^2,\ldots,x^n)}}{(x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2}\,[(\mathrm{d}x^1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^n)^2]$$

Dar și acest spațiu este de forma (16′), deci și parametrul a^1 este esențial.

Operatorii grupului sînt $Z = x^s \dfrac{\partial f}{\partial x^s}$ și $Z_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x^1}$, $X_1 = \left(\dfrac{r^2}{2} - \dfrac{2}{K}\right) \dfrac{\partial f}{\partial x^1} - x^1 x^s \dfrac{\partial f}{\partial x^s}$ iar ecuațiile de structură sînt:

$$(X_1,\ Z_1) = 0\,;\ (Z,\ Z_1) = -Z_1\,;\ (X_1,\ Z) = -X_1 - \frac{4}{K} Z_1.$$

Mai avem de considerat cazul cînd numai unul din parametrii $a^1, \ldots, a^n$ este esențial, de exemplu a^1. În acest caz nu mai rezultă că ar fi esențial unul din parametrii C^i_j.

Ecuaţia (13) ne dă:

$$(37'')\quad \left[\frac{-(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2}{2}-\frac{2}{K}\right]\frac{\partial\psi}{\partial x^1}-x^1\,x^2\,\frac{\partial\psi}{\partial x^2}-$$

$$-\ldots-x^1x^n\,\frac{\partial\psi}{\partial x^n}-1=0.$$

Punînd $\psi=f-\ln\left(1+\frac{K}{4}r^2\right)$, ecuaţia (37) devine:

$$(37''')\quad \left[\frac{-(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2}{2}-\frac{2}{K}\right]\frac{\partial f}{\partial x^1}-x^1\,x^2\,\frac{\partial f}{\partial x^2}-$$

$$-\ .\ .\ .-x^1\,x^n\,\frac{\partial f}{\partial x^n}=0.$$

Sistemul diferenţial asociat ecuaţiei (37''') este:

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{\dfrac{-(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2}{2}}=\frac{\mathrm{d}x^2}{-x^1\,x^2}=\ldots=\frac{\mathrm{d}x^n}{-x^1\,x^n}=\frac{\mathrm{d}f}{0}$$

şi admite integralele prime:

$$\begin{array}{ll} x^2=C_2\,x^n & \\ x^3=C_3\,x^n & \dfrac{\left(1+\dfrac{K}{4}r^2\right)^2}{(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2}=C_1 \\ .\ .\ .\ .\ . & \\ x^{n-1}=C_{n-1}\,x^n & f=C_n. \end{array}$$

Prin urmare $\psi=F\left[\dfrac{\left(1+\dfrac{K}{4}r^2\right)^2}{(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2},\ h\,(x^2,\ldots,x^n)\right]-$

$-\ln\left(1+\dfrac{K}{4}\,r^2\right)$, unde h este o funcţie omogenă de grad zero.

Metrica spaţiului este deci:

$$\mathrm{d}s^2=\frac{\mathrm{e}^{2F\left[\dfrac{\left(1+\frac{K}{4}\,r^2\right)^2}{(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2}\,h(x^2,\ldots,x^n)\right]}}{\left(1+\dfrac{K}{4}\,r^2\right)^2}\,[(\mathrm{d}x^1)^2+\ldots+(\mathrm{d}x^n)^2].$$

(38)

Să arătăm că nu putem avea alţi parametri esenţiali în afară de C^1 şi b.

Într-adevăr, dacă parametrul C^{h_1} $(h_1 \neq 1)$ ar fi esențial, ar rezulta că grupul ar conține operatorul:

$$(X_1, Z_{h_1}) = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^{h_1}} - x^{h_1} \frac{\partial f}{\partial x^1}$$

ceea ce ar însemna că parametrul $C^1{}_{h_1}$ ar fi esențial.

În cazul cînd parametrul C^1 este esențial, ecuația de structură este:

$$(X_1, Z_1) = 0 \tag{39}$$

iar metrica spațiului este:

$$ds^2 = \frac{e^{2h(x^2, \ldots, x^n)}}{(x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2} [(dx^1)^2 + \ldots + (dx)^2]. \tag{40}$$

Dar în acest caz rezultă că și parametrul b este esențial, deci ecuațiile de structură sînt:

$$(X_1, Z_1) = 0 \tag{40'}$$

$$(X_1, Z) = - X_1 - \frac{4}{K} Z_1 \tag{40)'}$$

$$(Z, Z_1) = - Z_1.$$

În sfîrșit, să arătăm că nu putem avea esențiali numai parametrii $C^1, \ldots, C^m$.

Într-adevăr, din (17''') rezultă că în acest caz metrica spațiului se scrie:

$$ds^2 = e^{2f(x^{m+1}, \ldots, x^n)} [(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2], \tag{41}$$

unde f este o funcție arbitrară:

În acest caz rezultă că grupul conține operatorii

$$Y_{hk} = x^h \frac{\partial f}{\partial x^k} - x^k \frac{\partial f}{\partial x^h} \quad h,k=1,2,\ldots,m,$$

deci metrica (41) este de forma dată de (33).

★

Vom arăta acum că în afară de spațiile date de formulele (37) și (38), toate spațiile conform euclidiene considerate de noi sînt subproiective.

Într-adevăr, ecuațiile diferențiale ale geodezicelor unui spațiu conform euclidian sînt:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + 2 \frac{d\psi}{dt} \frac{dx^i}{dt} - a\, e^{-2\psi} \frac{d\psi}{dx^i} = 0, \tag{42}$$

unde a este o constantă.

Dacă parametrii C^α_β $(\alpha, \beta = 1, \ldots, p)$ sînt esențiali, atunci din ecuațiile (13') rezultă:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} = \lambda\, x^\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, p)$$

iar ecuaţiile (42) ne dau:

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t}-\lambda\, a\, \mathrm{e}^{2\psi}x^\alpha=0,\quad (\alpha=1,2,\ldots,p). \tag{42'}$$

Deci $x^1, x^2, \ldots, x^p$ verifică o ecuaţie diferenţială liniară şi omogenă de ordinul doi. Dar o ecuaţie liniară de ordinul doi, admite numai două soluţii independente, deci trebuie să avem:

$$x^\alpha = C_1^\alpha x_1 + C_2^\alpha x_2 \qquad (\alpha=1,2,\ldots,p), \tag{42''}$$

unde x_1 şi x_2 sînt două soluţii independente, iar C_1^α, C_2^α sînt constante.

Eliminînd x_1 şi x_2, rezultă că soluţiile $x^1, x^2, \ldots, x^p$ ale ecuaţiilor geodezicilor se găsesc în varietatea liniară:

$$\begin{vmatrix} x^\alpha & x^\beta & x^\gamma \\ C_1^\alpha & C_1^\beta & C_1^\gamma \\ C_2^\alpha & C_2^\beta & C_2^\gamma \end{vmatrix} = 0, \qquad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, p \tag{43}$$

deci spaţiile sînt subproiective. Excepţie pot face doar spaţiile de metrici:

$$\mathrm{d}s^2=\frac{\mathrm{e}^{2h(x^1,\ldots x^n)}}{(x^1)^2+\ldots+(x^n)^2}\,[(\mathrm{d}x^1)^2+\ldots+(\mathrm{d}x^n)^2]$$

$$\mathrm{d}s^2=\frac{\mathrm{e}^{2F\left[\frac{\left(1+\frac{K}{4}r^2\right)^2}{(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2}\,\cdot\, h(x^2,\ldots,x^n)\right]}}{\left(1+\frac{K}{4}r^2\right)^2}\,[(\mathrm{d}x^1)^2+\ldots+(\mathrm{d}x)^2]$$

$$\mathrm{d}s^2=\frac{\mathrm{e}^{2h(x^2,\ldots,x^n)}}{(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2}\,[(\mathrm{d}x^1)^2+\ldots+(\mathrm{d}x^n)^2].$$

(unde F este o funcţie arbitrară iar h este o funcţie omogenă de grad zero), deoarece şi spaţiile de metrici (31) şi (32) sînt subproiective [3].

Primită la redacţie la 1 aprilie 1968

Liceul P.T.T., Bucureşti

SUR LE GROUPE DE MOUVEMENTS DES ESPACES CONFORMES EUCLIDIENS

(RÉSUMÉ)

On retrouve les transformations infinitésimales du groupe de mouvements d'un espac conforme euclidien en intégrant les équations de Killing. Les solutions de ce système dépendent de $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ constantes arbitraires, les espaces conformes euclidiens qui admettent des mouvements étant donnés par le système des équations $\xi_h^i \frac{\partial\psi}{\partial x^i} = a_h^i x^i + b_h$.

En supposant que l'ensemble des paramètres du groupe de mouvements est un sous-ensemble d'ensembles des constantes d'intégration des équations de Killing, on trouve les espaces qui admettent des mouvements et on écrit les équations de structure du groupe. On montre qu'en dehors de trois exceptions, tous les espaces qui admettent des mouvements (l'ensemble des paramètres du groupe est un sous-ensemble de l'ensemble des constantes d'intégration des équations de Killing) sont sous-projectifs, c'est-à-dire des équations différentielles des géodésiques admettant un certain nombre d'intégrales premières linéaires.

BIBLIOGRAFIE

1. JACK LEVINE, *Groups of motions in conformally flat spaces.* Bull. Amer. Math. Soc., 42 (1936).
2. C. TELEMAN, *Sur les groupes des mouvements d'un espace de Riemann.* Journal Math. Soc. Japan, *15* (1962).
3. G. VRĂNCEANU, *Lecţii de geometrie diferenţială*, vol. I, II, Ed. Academiei R.P.R., Bucureşti. 1952.

ASUPRA UNUI OPERATOR ÎNRUDIT CU OPERATORUL LUI SESTIER DIN ANALIZA ALGEBRICĂ CONTEXTUALĂ

DE

ELEONORA TOMA MARCU

În acest articol introducem şi studiem un operator contextual care diferă de operatorul lui Sestier [5], [7], [8] prin faptul că operaţia de intersecţie este înlocuită cu operaţia de reuniune. Se stabilesc legăturile dintre noul operator, pe de o parte, şi operatorul lui Sestier şi operatorul categoriei morfologice [4] pe de altă parte.

§ 1. DEFINIŢII, NOTAŢII ŞI REZULTATE ANTERIOARE

În această lucrare vom folosi terminologia şi notaţiile din [4] şi [5] precum şi unele rezultate din [7]. Le amintim aici:

Considerăm o mulţime finită şi nevidă V (vocabularul). O frază pe V este un şir finit de elemente din V. Mulţimea frazelor pe V constituie un *limbaj* L. Operaţia de compunere a frazelor este asociativă şi necomutativă: dacă f, g, h sînt fraze pe V, avem $(fg)\,h = f\,(gh)$, dar, în general, $fg \neq gf$. Fraza vidă va fi notată prin 0.

Orice pereche ordonată $<f, g>$ de fraze pe V constituie un *context* pe vocabularul V. Mulţimea tuturor contextelor pe V o vom nota cu $\mathfrak{L}$. Fiind dat un limbaj L pe V spunem că un cuvînt $x \in V$ este acceptat de contextul $<u, v>$ dacă şi numai dacă $uxv \in L$.

Fie $X \subseteq V$. Notăm prin $\alpha(x)$ mulţimea tuturor contextelor care acceptă cuvîntul $x \in X$. Punem

$$\alpha(X) = \bigcap_{x \in X} \alpha(x)$$

şi

$$\beta(x) = \bigcup_{x \in X} \alpha(x)$$

$\alpha(X)$ este deci mulţimea contextelor care acceptă toate cuvintele $x \in X$, iar $\beta(X)$ este mulţimea contextelor care acceptă cel puţin un cuvînt din X.

Fie $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{L}$. Notăm prin $\alpha^{-1}(y)$ mulţimea tuturor cuvintelor care sînt acceptate de contextul $y \in \mathcal{J}$. Punem

$$\alpha^{-1}(\mathcal{J}) = \bigcap_{y \in \mathcal{J}} \alpha^{-1}(y)$$

şi

$$\beta^{-1}(\mathcal{J}) = \bigcup_{y \in \mathcal{J}} \alpha^{-1}(y)$$

$\alpha^{-1}(\mathcal{J})$ este deci mulţimea cuvintelor care sînt acceptate de toate contextele din $\mathcal{J}$, iar $\beta^{-1}(\mathcal{J})$ este mulţimea cuvintelor care sînt acceptate de cel puţin un context din $\mathcal{J}$. Mulţimea

$$\varphi(X) = \alpha^{-1}[\alpha(X)]$$

este, prin definiţie, *închiderea* lui X [7] (în lucrarea de faţă o vom numi închidere Sestier). Mulţimea

$$\Phi(X) = \beta^{-1}[\beta(X)]$$

este, prin definiţie, β-*închiderea* lui X. În mod analog se definesc mulţimile

$$\Psi(\mathcal{J}) = \alpha[\alpha^{-1}(\mathcal{J})]$$

care, prin definiţie, reprezintă *închiderea* lui $\mathcal{J}$ [7] şi

$$\theta(\mathcal{J}) = \beta[\beta^{-1}(\mathcal{J})]$$

care, prin definiţie, reprezintă β-*închiderea* lui $\mathcal{J}$.

În lucrarea de faţă considerăm că fiecare cuvînt al vocabularului V este admis de cel puţin un context din $\mathcal{L}$. Prin urmare, pentru orice mulţime $X \subseteq V$, avem $\beta(X) \neq 0$. Este evident faptul că $\alpha(0) = \beta(0) = \mathcal{L}$, $\alpha^{-1}(0) = \beta^{-1}(0) = V$, $\Phi(0) = V$ şi, în ipoteza că nu există un cuvînt admis de orice context, $\varphi(0) = 0$. De asemenea, pentru orice mulţime $X \subseteq V$, avem $X \subseteq \varphi(X)$, $X \subseteq \Phi(X)$ şi $\varphi(X) \subseteq \Phi(X)$.

Fiind dat un limbaj L pe V şi două cuvinte x şi y, spunem că *x domină y* şi scriem $x \rightarrow y$ dacă pentru orice context $<u, v>$ pentru care $uxv \in L$ avem $uyv \in L$. Evident, relaţia de dominare depinde de L.

Fie A şi B două mulţimi de cuvinte. Spunem că *A domină pe B* şi scriem $A \rightarrow B$ dacă pentru toate cuvintele $a \in A$ şi $b \in B$ avem $a \rightarrow b$. Mulţimea A se numeşte *iniţială* dacă pentru orice cuvînt x pentru care $x \rightarrow A$, avem $x \in A$ [1], [2].

Fie A o mulţime iniţială; notăm cu A_1 mulţimea cuvintelor x pentru care $A \rightarrow x$. Reuniunea $\mathcal{G}(A) = A \cup A_1$ este, prin definiţie, *categoria morfologică* (gramaticală) *generată de mulţimea A* [3]. Din punct de vedere lingvistic, această noţiune corespunde noţiunii de categorie morfologică din gramatica tradiţională [4].

O mulţime A este, prin definiţie, *involutivă* dacă $A_1 \subseteq A$, [4].

LEMA 1. (vezi [6]). ***Fiind dată o mulţime*** $X \subseteq V$, ***necesar şi suficient ca*** X ***să fie o închidere Sestier este ca egalitatea*** $X = \varphi(X)$ ***să fie satisfăcută.***

LEMA 2. (*vezi* [6]). ***Necesar şi suficient ca*** $A \subseteq V$ ***să fie o categorie morfologică este ca să fie satisfăcută egalitatea*** $A = \mathcal{G}(A)$.

§ 2. PROPRIETĂŢI ALE OPERATORILOR β ŞI β^{-1}

PROPOZIŢIA 1. *Dacă* A *şi* B *sînt două mulţimi de cuvinte astfel încît* $A \subseteq B$, $A \neq 0$, avem $\beta(A) \subseteq \beta(B)$.

Demonstraţie. Deoarece $A \neq 0$, există cel puţin un cuvînt $a \in A$. Deoarece $A \subseteq B$, rezultă că orice context care acceptă pe a, acceptă cel puţin un cuvînt din B, deci $\beta(A) \subseteq \beta(B)$.

Observaţia 1. Dacă $A = 0$ avem $\beta(A) = \beta(0) = \mathcal{L} \supseteq \beta(B)$.

PROPOZIŢIA 2. *Există cazuri în care* $A \subset B$ *şi* $\beta(A) = \beta(B)$.

Demonstraţie. Fie $V = \{a, b, c, d, e\}$, $L = \{cad, cbd, dae\}$. Să luăm $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$. Avem $\beta(A) = \alpha(a) = \{<c, d>, <d, e>\}$, $\beta(B) = \alpha(a) \cup \alpha(b) = \{<c, d>, \{d, e>\} = \beta(A)$.

Observaţia 2. Pentru operatorul α incluziunea din propoziţia 1 nu are loc totdeauna, după cum rezultă din observaţia la lema 1 din [8].

PROPOZIŢIA 3. *Fie* A *şi* B *două mulţimi nevide de cuvinte. Are loc*

$$\beta(A \cup B) = \beta(A) \cup \beta(B). \tag{1}$$

Demonstraţie. Avem $A \subseteq A \cup B \supseteq B$. A şi B fiind nevide, putem aplica propoziţia 1. Obţinem $\beta(A) \subseteq \beta(A \cup B) \supseteq \beta(B)$, deci

$$\beta(A) \cup \beta(B) \subseteq \beta(A \cup B). \tag{2}$$

Să stabilim incluziunea inversă. Pentru orice context $<u, v> \in \beta(A \cup B)$, există cel puţin un cuvînt $x \in A \cup B$ pentru care $uxv \in L$; dacă $x \in A$, rezultă $<u, v> \in \beta(A) \subseteq \beta(A) \cup \beta(B)$; dacă $x \in B$, rezultă $<u, v> \in \beta(B) \subseteq \beta(A) \cup \beta(B)$. Prin urmare, în ambele cazuri, avem

$$\beta(A \cup B) \subseteq \beta(A) \cup \beta(B). \tag{3}$$

Din (2) şi (3) rezultă (1).

PROPOZIŢIA 4. *Dacă una din cele două mulţimi* A *şi* B *este vidă, are loc* $\beta(A \cup B) \subseteq \beta(A) \cup \beta(B)$.

Demonstraţie. Fie $A = 0$. Avem $A \cup B = B$, $\beta(A \cup B) = \beta(B) \subseteq \beta(A) \cup \beta(B)$.

Observaţie. În cazul operatorului α, egalitatea (1) nu are loc totdeauna (vezi propoziţia 2 din [8]); în general $\alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cap \alpha(B)$ după cum rezultă din propoziţia 3 din [8].

PROPOZIŢIA 5. *Fiind date două mulţimi de cuvinte a căror intersecţie este nevidă, avem*

$$\beta(A \cap B) \subseteq \beta(A) \cap \beta(B). \tag{4}$$

Demonstraţia este o consecinţă a faptului că $A \cap B \neq 0$, $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$ şi a propoziţiei 1.

COROLAR. *Avem*

$$\beta(A \cap B) \subseteq \beta(A) \cup \beta(B). \tag{5}$$

Observaţia 1. Dacă $A = 0$ avem, evident, $\beta(A) \cup \beta(B) = \beta(0) \cup \beta(B) = \mathcal{L} = \beta(A \cap B) = \beta(0) \supseteq \beta(A) \cap \beta(B)$.

Observaţia 1′. În aceleaşi condiţii, în cazul operatorului α avem $\alpha(A \cap B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$ (vezi propoziţia 6 din [8]).

Observaţia 2. În cazul operatorului α incluziunea (4) nu are loc totdeauna, după cum rezultă din propoziţia 5 din [8].

PROPOZIŢIA 6. *Există două mulţimi A şi B astfel încît incluziunea (4) să fie strictă.*

Demonstraţie. Fie $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$ $L = \{eaf, fbg, ecf, abc, abb\}$. Avem $A \cap B = \{b\}$, $\beta(A) = \sigma(a) \cup$

$$\cup\, \alpha(b) = \{\langle e,f\rangle, \langle 0, bc\rangle, \langle 0, bb\rangle, \langle f, g\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, b\rangle, \langle ab, 0\rangle\},\ \beta(B) =$$

$$= \alpha(b) \cup \alpha(c) = \{\langle f, g\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, b\rangle, \langle ab, 0\rangle, \langle e,f\rangle\},\ \beta(A \cap B) =$$

$$\alpha(b) = \{\langle f, g\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, b\rangle, \langle ab, 0\rangle\} \subset \{\langle e,f\rangle, \langle f, g\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, b\rangle,$$

$$\langle ab, 0\rangle\} = \beta(A) \cap \beta(B).$$

PROPOZIŢIA 7. *Există două mulţimi A şi B astfel încît* $\beta(A \cap B) = \beta(A) \cap \beta(B)$.

Demonstraţie. Fie $V = \{a, b, c\}$. Să luăm $A = \{b\}$, $B = \{a, b\}$, $L =$

$$= \{aac, abc, acc, bac\}.\ \text{Avem } \beta(A) = \alpha(b) = \{\langle a, c\rangle, \langle 0, ac\rangle\},\ \beta(B) =$$

$$= \alpha(a) \cup \alpha(b) = \{\langle a, c\rangle, \langle 0, ac\rangle, \langle 0, bc\rangle, \langle 0, cc\rangle, \langle b, c\rangle\},\ \beta(A \cap B) =$$

$$= \beta(b) = \alpha(b) = \{\langle a, c\rangle, \langle 0, ac\rangle\} = \beta(A) \cap \beta(B).$$

Observaţie. Folosind acelaşi exemplu, se arată în [8] că există cazuri în care $\alpha(A \cap B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$ (vezi propoziţia 7 din [8]).

Operatorul β definit pe mulţimea V cu valori în $\mathcal{L}$ are ca dual operatorul β^{-1} definit pe mulţimea $\mathcal{L}$ cu valori în V. Prin analogie cu propoziţiile de mai sus relative la operatorul β vom da, în continuare, unele proprietăţi ale operatorului β^{-1}.

PROPOZIŢIA 8. *Fie $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ două mulţimi de contexte, astfel încît $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \neq 0$. Are loc $\beta^{-1}(\mathcal{A}) \subseteq \beta^{-1}(\mathcal{B})$.*

Demonstraţie. Deoarece $\mathcal{A} \neq 0$, există cel puţin un context $\langle u, v\rangle \varepsilon \in \mathcal{A}$. Deoarece $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, rezultă că orice cuvînt acceptat de $\langle u, v\rangle$, este acceptat de cel puţin un context din $\mathcal{B}$, deci $\beta^{-1}(\mathcal{A}) \subseteq \beta^{-1}(\mathcal{B})$.

PROPOZIŢIA 9. *Dacă $\mathcal{A} = 0$ avem, evident,* $\beta^{-1}(\mathcal{A}) = \beta^{-1}(0) = V \supseteq \beta^{-1}(\mathcal{B})$.

PROPOZIŢIA 10. *Există cazuri în care $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ şi $\beta^{-1}(\mathcal{A}) = \beta^{-1}(\mathcal{B})$.*

Demonstraţie. Fie $V = \{a, b, c, d\}$, $L = \{cad, cbd, aad, abd\}$. Să luăm $\mathcal{A} = \{\langle c, d\rangle\}$, $\mathcal{B} = \{\langle c, d\rangle, \langle a, d\rangle\}$. Avem $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, $\beta^{-1}(\mathcal{A}) = \alpha^{-1}(\langle c, d\rangle) = \{a, b\}$; $\beta^{-1}(\mathcal{B}) = \alpha^{-1}(\langle c, d\rangle) \cup \alpha^{-1}(\langle a, d\rangle) = \{a, b\}$.

Observaţie. Pentru operatorul α^{-1}, incluziunea din propoziţia 8 nu are loc totdeauna, după cum rezultă din observaţia care urmează lemei 2 din [8].

Propoziţia 3 relativă la operatorul β îşi are un analog relativ la β^{-1}. Într-adevăr, are loc

PROPOZIŢIA 11. *Fie $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ două mulţimi nevide de contexte. Avem*

$$\beta^{-1}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \beta^{-1}(\mathcal{A}) \cup \beta^{-1}(\mathcal{B}). \tag{6}$$

Demonstraţie. Avem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \supseteq \mathcal{B}$. Aplicînd propoziţia 8 ($\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ fiind nevide prin ipoteză) se obţine $\beta^{-1}(\mathcal{A}) \subseteq \beta^{-1}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \supseteq \beta^{-1}(\mathcal{B})$, deci

$$\beta^{-1}(\mathcal{A}) \cup \beta^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \beta^{-1}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}). \tag{7}$$

Să stabilim incluziunea inversă. Orice cuvînt $x \in \beta^{-1}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ este admis de cel puţin un context $\langle u, v\rangle \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$; dacă $\langle u, v\rangle \in A$, atunci $x \in \beta^{-1}(\mathcal{A}) \subseteq \beta^{-1}(\mathcal{A}) \cup \beta^{-1}(\mathcal{B})$; dacă $\langle u, v\rangle \in \mathcal{B}$, rezultă $x \in \beta^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \beta^{-1} \subseteq (\mathcal{A}) \cup \beta^{-1}(\mathcal{B})$. Cum x este un cuvînt arbitrar din $\beta^{-1}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$, rezultă

$$\beta^{-1}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \subseteq \beta^{-1}(\mathcal{A}) \cup \beta^{-1}(\mathcal{B}) \tag{8}$$

din (7) şi (8) rezultă (6).

PROPOZIŢIA 12. *Dacă una din cele două mulţimi* $\mathcal{A}$ *şi* $\mathcal{B}$ *este vidă, are loc* $\beta^{-1}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \subseteq \beta^{-1}(\mathcal{A}) \cup \beta^{-1}(\mathcal{B})$.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{A} = 0$. Avem $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B}$, $\beta^{-1}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \beta^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \beta^{-1}(\mathcal{A}) \cup \beta^{-1}(\mathcal{B})$.

PROPOZIŢIA 13. *Egalitatea* (6) *nu mai rămîne adevărată totdeauna, dacă înlocuim operatorul* β^{-1} *prin* α^{-1}. *Într-adevăr, există două mulţimi de contexte* $\mathcal{A}$ *şi* $\mathcal{B}$ *astfel încît să avem*

$$\alpha^{-1}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \subset \alpha^{-1}(\mathcal{A}) \cup \alpha^{-1}(\mathcal{B}).$$

Demonstraţie. Vom folosi exemplul din propoziţia 11 din [8]. Fie $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $\mathcal{A} = \{<e, f>, <e, g>\}$, $\mathcal{B} = \{<e, f>, <f, g>\}$ $L = \{eaf, ebf, ecf, eag, ebg, fag\}$. Avem : $\alpha^{-1}(\mathcal{A}) = \alpha^{-1}(<e, f>) \cap \alpha^{-1}(<e, g>) = \{a, b\}$, $\alpha^{-1}(\mathcal{B}) = \alpha^{-1}(<e, g>) \cap \alpha^{-1}(<f, g>) = \{a\}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{<e, g>, <e, f>, <f, g>\}$, $\alpha^{-1}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \{a\} \subset \{a, b\} = \alpha^{-1}(\mathcal{A}) \cup \alpha^{-1}(\mathcal{B})$.

Analogul propoziţiei 5 de la operatorul β este reprezentat în cazul operatorului β^{-1} de

PROPOZIŢIA 14. *Fiind date două mulţimi de contexte* $\mathcal{A}$ *şi* $\mathcal{B}$ *astfel încît* $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq 0$, *are loc*

$$\beta^{-1}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \subseteq \beta^{-1}(\mathcal{A}) \cap \beta^{-1}(\mathcal{B}). \tag{9}$$

Demonstraţia este o consecinţă a faptului că $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq 0$ şi a propoziţiei 8.

COROLAR. *Avem*

$$\beta^{-1}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \subseteq \beta^{-1}(\mathcal{A}) \cup \beta^{-1}(\mathcal{B}). \tag{10}$$

PROPOZIŢIA 15. *Dacă una din mulţimile* $\mathcal{A}$ *şi* $\mathcal{B}$ *este vidă, are loc* $\beta^{-1}(\mathcal{A}) \cap \beta^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \beta^{-1}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{A} = 0$. Avem $\mathcal{A} \cap B = 0$, $\beta^{-1}(\mathcal{A}) \cap \beta^{-1}(\mathcal{B}) = \beta^{-1}(0) \cap \beta^{-1}(\mathcal{B}) = V \cap \beta^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq V = \beta^{-1}(0)$.

Observaţie. Incluziunea (9) nu rămîne adevărată atunci cînd operatorul β^{-1} este înlocuit prin α^{-1}, aşa cum rezultă din propoziţia 11 din [8].

PROPOZIŢIA 16. *Există cazuri în care incluziunea (9) este strictă.*

Demonstraţie. Fie $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $L = \{eaf, ebf, fcg, gde, ebh\}$, $\mathcal{A} = \{<e, f>, <f, g>\}$, $\mathcal{B} = \{<f, g>, <g, e>, <e, h>\}$. Avem $\beta^{-1}(\mathcal{A}) = \alpha^{-1}(<e, f>) \cup \alpha^{-1}(<f, g>) = \{a, b, c\}$, $\beta^{-1}(\mathcal{B}) = \alpha^{-1}(<f, g>) \cup \alpha^{-1}(<g, e>) \cup \alpha^{-1}(<e, h>) = \{b, c, d\}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = (<f, g>)$, $\beta^{-1}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \alpha^{-1}(<f, g>) = \{c\} \subset \{b, c\} = \beta^{-1}(\mathcal{A}) \cap \beta^{-1}(\mathcal{B})$.

PROPOZIŢIA 17. *Există două mulţimi* $\mathcal{A}$ *şi* $\mathcal{B}$ *astfel încît* $\beta^{-1}(\mathcal{A}) \cap \cap \beta^{-1}(\mathcal{B}) = \beta^{-1}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$.

Demonstraţie. Fie $V = \{a, b, c, d,\}$, $\mathcal{A} = \{< a, b >, < a, c >\}$, $\mathcal{B} = \{< a, b >, < 0, ac >\}$, $L = \{aab, acb, abc, aac, abb, acc, dac\}$. Avem $\beta^{-1}(\mathcal{A}) = \alpha^{-1}(< a, b >) \cup \alpha^{-}(< a, c >) = \{a, b, c\}$, $\beta^{1-}(\mathcal{B}) = \alpha^{-1}(< a, b >) \cup \cup \alpha^{-1}(< 0, ac >) = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{< a, b >\}$, $\beta^{-1}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = = \alpha^{-1}(< a, b >) = \{a, b, c\} = \beta^{-1}(\mathcal{A}) \cap \beta^{-1}(\mathcal{B})$.

§ 3. PROPRIETĂŢI ALE OPERATORULUI Φ DEFINIT DE β-ÎNCHIDEREA UNEI MULŢIMI

PROPOZIŢIA 18. *Orice* β-*închidere este o categorie morfologică. Anume, pentru orice* $X \subseteq V$ avem

$$\mathcal{G}(\Phi(X)) = \Phi(X) \tag{11}$$

(vezi lema 2).

Demonstraţie. E suficient să arătăm că $\Phi(X)$ este o mulţime involutivă, adică

$$[\Phi(X)]_1 \subseteq \Phi(X) \tag{12}$$

Avem $\Phi(X) \rightarrow [\Phi(X)]_1$. Orice cuvînt $x \in [\Phi(X)]_1$ este dominat de toate cuvintele din $\Phi(X)$, adică este acceptat de toate contextele din $\beta(\Phi(X)) \supseteq \supseteq \beta(X)$; prin urmare x este acceptat de toate contextele din $\beta(X)$ deci $x \in \alpha^{-1}(\beta(X)) \subseteq \beta^{-1}(\beta(X)) = \Phi(X)$. Am arătat că pentru orice $x \in [\Phi(X)]_1$ rezultă $x \in \Phi(X)$ şi astfel incluziunea (12) este stabilită. Avem $\mathcal{G}[\Phi(X)] = = \Phi(X) \cup [\Phi(X)]_1 = \Phi(X)$.

PROPOZIŢIA 19. *Închiderea Sestier a unei mulţimi* A *pentru care* $\alpha(A) \neq 0$, *este inclusă* în β-*închiderea acestei mulţimi.*

Demonstraţie. Avem, evident, $\alpha(A) \subseteq \beta(A)$. Deoarece $\alpha(A) \neq 0$ prin ipoteză, putem aplica acestei incluziuni propoziţia 8. Obţinem $\beta^{-1}(\alpha(A)) \subseteq \beta^{-1}(\beta(A)) = \Phi(A)$. Dar $\varphi(A) = \alpha^{-1}(\alpha(A)) \subseteq \beta^{-1}(\alpha(A)) \subseteq \subseteq \Phi(A)$.

PROPOZIŢIA 20. *Fiind dată o mulţime* $X \subseteq V$ *avem, evident,*

$$\Phi(X) \subseteq \varphi[\Phi(X)]. \tag{13}$$

PROPOZIŢIA 21. *Există cazuri în care incluziunea (13) este strictă.*

Demonstraţie. Fie $V = \{a, b, c, d, e, f\}$, $X = \{a, b\}$, $L = \{eaf, ebf, ecf, dae, dde, fde\}$. Avem $\alpha(a) = \{< e, f >, < d, e >\}$, $\alpha(b) = \{< e, f >\}$, $\alpha(X) = \alpha(a) \cap \alpha(b) = \{< e, f >\}$, $\varphi(X) = \alpha^{-1}(< e, f >) = \{a, b, c\}$, $\beta(X) = \alpha(a) \cup \alpha(b) = \{< e, f >, < d, e >\}$, $\Phi(X) = \{a, b, c, d\}$, $\varphi[\Phi(X)] = \alpha^{-1}[\alpha[\Phi(X)]] = \alpha^{-1}(0) = V \supset \{a, b, c, d\} = \Phi(X)$.

CONSECINŢĂ. *Există o* β-*închidere care nu este închidere Sestier.*

PROPOZIŢIA 22. *Dacă* E *şi* F *sînt două mulţimi de cuvinte astfel încît* $E \subseteq F$, $E \neq 0$, *atunci* $\Phi(E) \subseteq \Phi(F)$.

Demonstraţie. Deoarece $E \neq 0$ prin ipoteză, putem aplica incluziunii $E \subseteq F$ propoziţia 1. Obţinem $\beta(E) \subseteq \beta(F)$. Aplicînd, în continuare, propoziţia 8, obţinem $\beta^{-1}(\beta(E)) \subseteq \beta^{-1}(\beta(F))$, adică incluziunea din enunţ.

PROPOZIŢIA 23. *Dacă* $E = 0$ *şi dacă presupunem că fiecare cuvînt al vocabularului* V *este admis de cel puţin un context din* $\mathcal{L}$, *atunci incluziunea din propoziţia 22 nu mai are loc totdeauna.*

Demonstraţie. Avem $E = 0$, $\beta(E) = \beta(0) = \mathcal{L}$, $\beta^{-1}(\mathcal{L}) = V$, $\Phi(E) = \beta^{-1}[\beta(0)] = V \supseteq \Phi(F)$.

Observaţie. Pentru operatorul φ incluziunea din propoziţia 22 este adevărată şi în cazul cînd $E = 0$ (vezi propoziţia 12 din [8]).

PROPOZIŢIA 24. *Reciproca propoziţiei 22 nu este adevărată.*

Pentru demonstraţie vom folosi acelaşi exemplu din observaţia la propoziţia 12 din [8].

Fie $V = \{a, b, c, d\}$, $L = \{bac, bcc, bbc, bdc, aad, abd\}$. Avem: $\alpha(a) = \{<b, c>, <a, d>, <0, ad>, <0, bd>\}$, $\alpha(b) = \{<0, ac>, <0, cc>, <b, c>, <0, bc>, <0, dc>, <a, d>\}$, $\alpha(c) = \{<ba, 0>, <b, c>, <bc, 0>, <bb, 0>, <bd, 0>\}$, $\alpha(d) = \{<b, c>, <aa, 0>, <ab, 0>\}$. Să luăm $E = \{a, b\}$, $F = \{c, d\}$. Avem $E \not\subseteq F$ dar $\Phi(E) = \{a, b, c, d\} = \Phi(F)$.

PROPOZIŢIA 25. *Dacă* A *şi* B *sînt două mulţimi de cuvinte a căror intersecţie este nevidă, avem*

$$\Phi(A \cap B) \subseteq \Phi(A) \cap \Phi(B) \tag{14}$$

Demonstraţia este o consecinţă a faptului că $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$, $A \cap B \neq 0$, şi a propoziţiei 22.

Observaţie. Dacă $A \cap B = 0$, incluziunea (14) nu mai are loc totdeauna. În acest caz avem, evident, $\Phi(A) \cap \Phi(B) \subseteq \Phi(A \cap B) = V$.

PROPOZIŢIA 26. *Există cazuri în care incluziunea (14) este strictă.*

Demonstraţie. Fie $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $L = \{eaf, fbg, fcg, gce, gde\}$, $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c\}$. Avem $\beta(A) = \alpha(a) \cup \alpha(b) = \{<e, f,><f, g>\}$, $\Phi(A) = \alpha^{-1}(<e, f>) \cup \alpha^{-1}(<f, g>) = \{a, b, c\}$; $\beta(B) = \alpha(a) \cup \alpha(c) = \{<e, f>, <f, g><g, e>\}$, $\Phi(B) = \alpha^{-1}(<e, f>) \cup \alpha^{-1}(<f, g>) \cup \alpha^{-1}(<g, e>) = \{a, b, c, d\}$, $A \cap B = \{a\}$, $\beta(A \cap B) = \beta(a) = (<e, f>)$, $\Phi(A \cap B) = \{a\} \subset \{a, b, c\} = \Phi(A) \cap \Phi(B)$.

Observaţia 1. Utilizînd exemplul din propoziţia 14 din [8] se poate arăta că există cazuri în care $\Phi(A \cap B) = \Phi(A) \cap \Phi(B)$.

Observaţia 2. Pentru operatorul φ incluziunea (14) este adevărată şi în cazul cînd $A \cap B = 0$ (vezi propoziţia 13 din [8]).

PROPOZIŢIA 27. *Fie* A *şi* B *două mulţimi nevide. Avem*

$$\Phi(A \cup B) = \Phi(A) \cup \Phi(B). \tag{15}$$

Demonstraţie. Avem $A \subseteq A \cup B \supseteq B$; aplicînd acestor incluziuni propoziţia 22 (A şi B fiind nevide prin ipoteză) se obţine $\Phi(A) \subseteq \Phi(A \cup B) \supseteq \Phi(B)$ de unde rezultă

$$\Phi(A) \cup \Phi(B) \subseteq \Phi(A \cup B). \tag{16}$$

Să arătăm incluziunea inversă. Fie $x \in \Phi(A \cup B)$; aceasta înseamnă că există cel puţin un context $y \in \beta(A \cup B)$ care acceptă pe x; dar $\beta(A \cup B) = \beta(A) \cup \beta(B)$ (vezi propoziţia 3). Dacă $y \in \beta(A)$, rezultă

$x \in \Phi(A) \subseteq \Phi(A) \cup \Phi(B)$; dacă $y \in \beta(B)$, rezultă $x \in \Phi(B) \subseteq \Phi(A) \cup \Phi(B)$. În ambele cazuri avem

$$\Phi(A \cup B) \subseteq \Phi(A) \cup \Phi(B). \tag{17}$$

Din (16) şi (17) rezultă (15).

Observaţia 1. Dacă una din cele două mulţimi este mulţimea vidă, de exemplu $A = 0$, avem, evident,

$$V = \Phi(A) \cup \Phi(B) \supseteq \Phi(A \cup B).$$

Observaţia 2. În cazul operatorului φ, propoziţia 27 nu este totdeauna adevărată, după cum rezultă din propoziţia 17 din [8].

Propoziţia 19 din [8] rămîne adevărată şi în cazul operatorului Φ. Avem astfel

PROPOZIŢIA 28. *Fie A o mulţime de cuvinte şi $\complement(A)$ complementara, în raport cu V, a mulţimii A. Are loc*

$$\complement[\Phi(A)] \subseteq \Phi[\complement(A)] \tag{18}$$

Demonstraţia urmează aceeaşi cale din demonstrarea propoziţiei 19 din [8], înlocuind operatorul φ prin Φ.

Următoarea propoziţie este evidentă,

PROPOZIŢIA 29. *Dacă A şi B sînt mulţimi de cuvinte şi dacă $\beta(A) = \beta(B)$, avem $\Phi(A) = \Phi(B)$.*

Observaţie. Propoziţia 18 din [8] nu mai rămîne adevărată dacă în locul operatorului φ considerăm pe Φ, după cum rezultă din următorul exemplu :

Fie $V = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A = \{a\}$, $B = \{b, c\}$, $L = \{daf, dcf, dbf, fbe\}$. Avem $\beta(A) = \alpha(a) = \{\langle d, f\rangle\}$, $\beta(B) = \alpha(b) \cup \alpha(c) = \{\langle d, f\rangle, \langle f, e\rangle\} \supset \{\langle d, f\rangle\} = \beta(A)$. Însă $\Phi(A) = \alpha^{-1}(\langle d, f\rangle) = \{a, b, c\} = \alpha^{-1}(\langle d, f\rangle) \cup \alpha^{-1}(\langle f, e\rangle) = \Phi(B)$.

PROPOZIŢIA 30. *Fie A şi B două mulţimi de cuvinte astfel încît*

$$a)\ \beta(A) - \beta(B) \neq 0 \neq \beta(B) - \beta(A).$$

Pentru ca $\Phi(A) = \Phi(B)$ este necesar şi suficient ca

$$b)\ \beta(A) \cap \beta(B) \neq 0$$

$$c)\ \beta^{-1}[\beta(A) - \beta(B)] \subseteq \Phi(B) \text{ şi}$$

$$d)\ \beta^{-1}[\beta(B) - \beta(A)] \subseteq \Phi(A)$$

Demonstraţie. I. Să arătăm că dacă sînt îndeplinite condiţiile din enunţ, avem $\Phi(A) = \Phi(B)$.

Vom demonstra mai întîi incluziunea $\Phi(A) \subseteq \Phi(B)$. Orice cuvînt $x \in \Phi(A)$ este admis, prin definiţie, de cel puţin un context $< u, v > \in \beta(A)$; în baza condiţiei (a) poate avea loc una din situaţiile $< u, v > \in \beta(A)$ şi $< u, v > \notin \beta(B)$, de unde, conform condiţiei (c), rezultă $x \in \Phi(B)$, sau $< u, v > \in \beta(A) \cap \beta(B)$ de unde rezultă $x \in \Phi(B)$. În ambele cazuri din $x \in \Phi(A)$ rezultă $x \in \Phi(B)$ şi incluziunea este stabilită. Pentru demonstrarea incluziunii $\Phi(B) \subseteq \Phi(A)$ se urmează aceeaşi cale ca mai sus, utilizîndu-se condiţia (d). Din cele două incluziuni rezultă $\Phi(A) = \Phi(B)$.

II. Avem $\Phi(A) = \Phi(B)$, $\beta(A) - \beta(B) \neq 0 \neq \beta(B) - \beta(A)$.

Să demonstrăm relaţiile din enunţ. Faptul că $\beta(A) \cap \beta(B) \neq 0$ este o consecinţă evidentă a egalităţii $\Phi(A) = \Phi(B)$. Să arătăm că $\beta^{-1}(\beta(A) - \beta(B)) \subseteq \Phi(B)$. Fie $x \in \beta^{-1}(\beta(A) - \beta(B))$; de aici rezultă $x \in \Phi(A)$ (x fiind un cuvînt admis de cel puţin un context din $\beta(A)$), dar $\Phi(A) = \Phi(B)$ deci $x \in \Phi(B)$ şi incluziunea este stabilită. La fel se stabileşte şi incluziunea $\beta^{-1}(\beta(B) - \beta(A)) \subseteq \Phi(A)$.

PROPOZIŢIA 31. *Dacă A şi B sînt două mulţimi de cuvinte astfel încît $A \subseteq B$, $A \neq 0$, necesar şi suficient ca $\Phi(A) = \Phi(B)$ este ca $\beta^{-1}(\beta(B) - \beta(A)) \subseteq \Phi(A)$.*

Demonstraţie. I. Avem $\beta^{-1}(\beta(B) - \beta(A)) \subseteq \Phi(A)$, să arătăm că $\Phi(A) = \Phi(B)$.

Incluziunea $\Phi(A) \subseteq \Phi(B)$ este o consecinţă a condiţiilor din enunţ $A \subseteq B$, $A \neq 0$ şi a propoziţiei 22. Să stabilim incluziunea $\Phi(B) \subseteq \Phi(A)$. Pentru orice cuvînt $x \in \Phi(B)$ rezultă faptul că există cel puţin un context $< f, g > \in \beta(B)$ pentru care $fxg \in L$.

Poate avea loc una din situaţiile : $< f, g > \in \beta(B)$ şi $< f, g > \notin \beta(A)$ de unde, conform condiţiei din enunţ, rezultă $x \in \Phi(A)$ sau $< f, g > \in \beta(A) \cap \beta(B)$, deci $x \in \Phi(A)$. În ambele cazuri pentru orice $x \in \Phi(B)$ rezultă $x \in \Phi(A)$ şi deci incluziunea este stabilită. Din cele două incluziuni rezultă $\Phi(A) = \Phi(B)$.

II. Avem $\Phi(A) = \Phi(B)$; să arătăm că $\beta^{-1}(\beta(B) - \beta(A)) \subseteq \Phi(A)$. Pentru orice cuvînt $x \in \beta^{-1}[\beta(B) - \beta(A)]$ rezultă că x este acceptat de cel puţin un context $<u, v> \in \beta(B) - \beta(A)$. Din faptul că $< u, v > \in \beta(B)$ rezultă $x \in \Phi(B) = \Phi(A)$, deci, incluziunea este stabilită.

PROPOZIŢIA 32. *Există două mulţimi A şi B astfel încît* $\Phi(A) = \Phi(B)$, $\beta(A) \cap \beta(B) \neq 0$ şi $\Phi(B) \subset \beta^{-1}[\beta(A) - \beta(B)]$.

Demonstraţie. Fie $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A = \{a, b\}$, $B = \{c\}$, $L = \{eaf, fbg, fcg, edf, ecg, edg, ecf\}$. Avem $\beta(A) = \alpha(a) \cup \alpha(b) = \{< e, f >, < f, g >\}$, $\Phi(A) = \alpha^{-1}(< e, f >) \cup \alpha^{-1}(< f, g >) = \{a, b, c, d\}$, $\beta(B) = \alpha(c) = \{< f, g >, < e, g >, < e, f >\}$, $\Phi(B) = \{a, b, c, d\} = \Phi(A)$. Avem $\beta(A) - \beta(B) = 0$ şi $\beta^{-1}(0) = V \supset \Phi(B)$.

Următoarea propoziţie este evidentă.

PROPOZIŢIA 33. *Pentru orice mulţime A are loc*

$$\Phi(A) \subseteq \Phi[\Phi(A)]. \tag{19}$$

Observaţie. Există cazuri în care incluziunea (19) este strictă.

Demonstraţie. Fie $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $L = \{eaf, ebf, ecf, dcf, ebg, edg\}$, $A = \{a\}$. Avem $\beta(A) = \alpha(a) = \{< e, f >\}$, $\Phi(A) = \alpha^{-1}(< e, f >) = \{a, b, c\}$; $\beta[\Phi(A)] = \alpha(a) \cup \alpha(b) \cup \alpha(c) = \{< e, f >, < d, f >, < e, g >\}$, $\Phi[\Phi(A)] = \alpha^{-1}(< e, f >) \cup \alpha^{-1}(< d, f >) \cup \alpha^{-1}(< e, g >) = \{a, b, c, d,\} \supset \{a, b, c\} = \Phi(A)$.

Primită la redacţie la 26 martie 1968

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”,
Bucureşti, str. Polizu nr. 1

SUR UNE MODIFICATION DE L'OPÉRATEUR DE SESTIER CONCERNANT L'ANALYSE ALGÉBRIQUE CONTEXTUELLE

(RÉSUMÉ)

Dans cet article on étudie un opérateur contextuel Φ qui s'obtient de l'opérateur de Sesţier [5], [7], [8] en remplaçant l'opération d'intersection par celle de réunion. En désignant par $\Phi(A)$ le résultat de l'application de l'opérateur Φ à l'ensemble A et par $G(A)$ la catégorie morphologique engendrée par A [4], on montre entre autres, que $G(\Phi(A)) = \Phi(A)$. On étudie le comportement de l'opérateur Φ par rapport à diverses opérations algébriques et par rapport à la fermeture de Sestier.

BIBLIOGRAFIE

1. R. L. Dobruşin, *Elementarnaja grammaticeskaja Kategorija*. Bjulleten Obedinenija po problemam masinnago perevoda, *5*, 19—21 (1957).
2. R. L. Dobruşin, *Matematiceskie metody v lingvistike Prilozenie*. Matematiceskoe prosvescenie, **6**, p. 52—59 (1961).
3. S. Marcus, *Sur un modèle logique de la catégorie grammaticale élémentaire*. I. Revue de mathématiques pures et appliquées, **7**, *1*, 91—107 (1962).
4. S. Marcus, *Lingvistică matematică*. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1966.
5. S. Marcus, *Catégories de Dobrušin, fermetures de Sestier et voisinages de Sakai*, Glossa, **1**, *1* (1967).
6. S. Marcus, *Catégories morphologiques et analyse contextuelle dans la linguistique algébrique*, 2ème Conférence Internationale sur le traitement automatique des langues. Grenoble, 23—25 août 1967, article 39, p. 1—8.
7. A. Sestier, *Contribution à une théorie ensembliste des classifications linguistiques*, Actes du Premier Congrès de l'AFCAL, 1960, Paris, 1961, p. 293—305.
8. E. Toma-Marcu, *Proprietăţi ale închiderilor Sestier din teoria algebrică a gramaticii*. St. cerc. mat. **19**, *9* (1967).

INTRODUCEREA UNOR INVARIANŢI DIFERENŢIALI INTRINSECI ÎNTR-O VARIETATE RIEMANNIANĂ

DE

C. N. UDRIŞTE

În această lucrare se precizează unele rezultate din teoria hipersuprafeţelor unui spaţiu euclidian şi se dă un procedeu prin care, în anumite condiţii, unui spaţiu riemannian V_n $(n \geqslant 3)$ i se pot ataşa n invarianţi diferenţiali intrinseci Δ_α şi n invarianţi numerici I_α.

1) Fie V_n un spaţiu riemannian de clasa unu de metrică

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta .$$

În acest caz, tensorul lui Riemann satisface ecuaţiile lui Gauss:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = b_{\alpha\gamma}\, b_{\beta\delta} - b_{\beta\gamma}\, b_{\alpha\delta}, \tag{1}$$

unde rang $\| b_{\alpha\beta} \| \geqslant 2$. În [6] se arată că dacă rang $\| b_{\alpha\beta} \| \geqslant 3$, atunci ecuaţiile (1) se pot rezolva în raport cu $b_{\alpha\beta}$. De altfel, acest lucru rezultă uşor din identitatea [2]

$$\begin{aligned} 2b_{\beta\mu}\,(b_{\gamma\tau}\, R_{\alpha\delta\sigma\rho} + b_{\gamma\rho}\, R_{\alpha\delta\tau\sigma} + b_{\gamma\sigma}\, R_{\alpha\delta\rho\tau}) &= R_{\alpha\beta\mu\sigma}\, R_{\gamma\delta\rho\tau} + R_{\alpha\beta\mu\tau}\, R_{\gamma\delta\sigma\rho} + \\ + R_{\alpha\beta\mu\rho}\, R_{\gamma\delta\tau\sigma} - R_{\delta\beta\mu\sigma}\, R_{\gamma\alpha\rho\tau} - R_{\delta\beta\mu\tau}\, R_{\gamma\alpha\sigma\rho} &- R_{\delta\beta\mu\rho}\, R_{\gamma\alpha\tau\sigma} - R_{\alpha\delta\mu\tau}\, R_{\gamma\beta\rho\sigma} - \\ &- R_{\alpha\delta\mu\rho}\, R_{\gamma\beta\sigma\tau} - R_{\alpha\delta\mu\sigma}\, R_{\gamma\beta\tau\rho} . \end{aligned} \tag{2}$$

care se mai poate scrie

$$2b_{\beta\mu}\, M\binom{\tau\sigma\rho}{\gamma\alpha\delta} = T_{\alpha\beta\mu\sigma\gamma\delta\rho\tau}, \tag{3}$$

unde $M\binom{\tau\sigma\rho}{\gamma\alpha\delta}$ este un minor de ordinul trei diferit de zero al matricii $\| b_{\alpha\beta} \|$ $(\tau, \sigma, \rho$ — coloane, γ, α, δ — linii). Or, se vede uşor că

$$M\binom{\tau\sigma\rho}{\gamma\alpha\delta} = \begin{vmatrix} R_{\alpha\delta\sigma\rho} & -R_{\alpha\delta\tau\rho} & R_{\alpha\delta\tau\sigma} \\ -R_{\gamma\delta\sigma\rho} & R_{\gamma\delta\tau\rho} & -R_{\gamma\delta\tau\sigma} \\ R_{\gamma\alpha\sigma\rho} & -R_{\gamma\alpha\tau\rho} & R_{\gamma\alpha\tau\sigma} \end{vmatrix}^{1/2}, \tag{4}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 3, P. 509—514, BUCUREŞTI, 1969

şi deci relaţia (3) arată că $b_{\beta\mu}$ se exprimă în funcţie de $g_{\alpha\beta}$ şi derivatele sale.

2) Fie acum

$$|b_{\alpha\beta} - cg_{\alpha\beta}| = 0, \tag{5}$$

ecuaţia care ne dă curburile normale principale. Să observăm că pe lîngă cei n invarinaţi c_α, putem să-i ataşem lui V_n alţi n invarianţi Δ_α $(\alpha=1,2, \ldots, n)$ prin sistemul simetric fundamental:

$$\begin{aligned} H = c_1 + c_2 + \ldots + c_n &= \Delta_1, \\ c_1 c_2 + c_1 c_3 + \ldots + c_{n-1} c_n &= \Delta_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1 c_2 \ldots c_k + c_1 c_2 \ldots c_{k-1} c_{k+1} + \ldots &= \Delta_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K_T = c_1 c_2 \ldots c_n &= \Delta_n. \end{aligned} \tag{6}$$

unde $(-1)^k \Delta_k$ reprezintă coeficientul lui c^{n-k} din ecuaţia (5) pe care în prealabil am împărţit-o cu $(-1)^n\, g$. Invariantul K_T se numeşte curbură totală, iar invariantul H se numeşte curbură medie.

Dacă spaţiul este un V_2, atunci se ştie că invarianţii c_1, c_2, $\Delta_1 = c_1 + c_2$ sînt invarianţi rigizi (adică se exprimă cu ajutorul coeficienţilor ambelor forme fundamentale ale spaţiului de clasa unu). Invariantul $K_T = \Delta_2 = c_1 c_2$ este invariant intrinsec (teorema Egregium a lui Gauss).

Să considerăm că avem un spaţiu V_n $(n \geqslant 3)$ în care rang $\| b_{\alpha\beta} \| = n$. În acest caz în baza celor arătate mai sus, $b_{\alpha\beta}$ se exprimă cu $g_{\alpha\beta}$ şi derivatele sale şi deci atît invarianţii $c_1, c_2, \ldots, c_n$ cît şi $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ sînt invarianţi intrinseci (adică se exprimă cu ajutorul lui $g_{\alpha\beta}$ şi a derivatelor sale). Aceasta arată că unui V_n $(n \geqslant 3)$ putem să-i ataşem n invarianţi intrinseci $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ chiar dacă el nu se poate scufunda în E_{n+1}.

Pentru a găsi expresii comode în calcule pentru invarianţii $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ $\ldots, \Delta_n$ facem mai întîi observaţia că $(-1)^k \Delta_k$, care este coeficientul lui c^{n-k} în ecuaţia (5), este format din minorii de ordinul n-k ai matricii $\| g_{\alpha\beta} \|$, din determinantul $g = | g_{\alpha\beta} |$ şi din minorii de ordinul k ai matricii $\| b_{\alpha\beta} \|$ (coeficientul lui c^n este unu, iar coeficientul lui c^0 este $\dfrac{b}{(-1)^n g}$).

Dacă $n = 2p$, atunci se observă uşor că

$$K_T = \Delta_{2p} = \frac{b}{g}$$

are expresia

$$K_T = \frac{R_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2} \ldots R_{\alpha_{2p-1}\alpha_{2p}\beta_{2p-1}\beta_{2p}}\, \varepsilon^{\alpha_1\cdots\alpha_{2p}}\, \varepsilon^{\beta_1\cdots\beta_{2p}}}{(2p)!\, 2^p\, g}. \tag{7}$$

(se dezvoltă b după minorii de ordinul doi şi se ţine cont de relaţia (1)). Acest invariant intrinsec diferenţial joacă un rol deosebit în studiul proprietăţilor globale ale unui spaţiu V_{2p} închis şi orientabil, deoarece el este legat de caracteristica lui Euler-Poincaré a spaţiului prin formula lui Gauss-Bonnet [1], [3], [4], [7]

$$\int_{V_{2p}} K_T \,\mathrm{d}v = \omega_{2p} \frac{\chi}{2}.$$

Fie $n = 2p + 1$ şi $b = |b_{\alpha\beta}|$ determinantul de ordinul $2p+1$ format cu componentele celui de-al doilea tensor fundamental. Dezvoltăm acest determinant după regula lui Laplace folosind minorii de ordinul trei şi complemenţii lor algebrici. De exemplu vom avea

$$(8)\qquad b = \sum_{\alpha_i<\alpha_j<\alpha_k} (-1)^l M\binom{\alpha_i\alpha_j\alpha_k}{1\,2\,3} M_{1\,2\,3.}^{\alpha_i\alpha_j\alpha_k}\; l = 1 + 2 + 3 + \alpha_i + \alpha_j + \alpha_k,$$

unde $M\binom{\alpha_i\alpha_j\alpha_k}{1\,2\,3}$ are o valoare analogă cu (4), iar $M_{1\,2\,3}^{\alpha_i\alpha_j\alpha_k}$ sînt minorii de ordinul $2p - 2$ formaţi din liniile $4,5,\ldots,2p+1$ şi coloanele $1,2,\ldots,\alpha_{i-1}$, $\alpha_{i+1},\ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}\ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1},\ldots, 2p + 1$. Observăm că $M_{1\,2\,3}^{\alpha_i\alpha_j\alpha_k}$ sînt determinanţi de ordin par şi dezvoltîndu-i după minorii de ordinul doi în baza lui (1), avem

$$(9)\qquad M_{1\,2\,3}^{\alpha_i\alpha_j\alpha_k} = \frac{R_{\gamma_1\gamma_2\delta_1\delta_2}\ldots R_{\gamma_{m-1}\gamma_m\,\delta_{m-1}\,\delta_m}\,\varepsilon^{\gamma_1\ldots\gamma_m}\,\varepsilon^{\delta_1\ldots\delta_m}}{[2\,(p-1)]!\,2^{p-1}}.$$

Astfel se vede că expresia lui $K_T = \Delta_{2p+1}$ este

$$(10)\qquad K_T = \Delta_{2p+1} = \frac{1}{g} \sum_{\alpha_i<\alpha_j<\alpha_k} (-1)^l\, M\binom{\alpha_i\alpha_j\alpha_k}{1\,2\,3}\, M_{1\,2\,3}^{\alpha_i\alpha_j\alpha_k}.$$

Acest invariant poate fi ataşat lui V_{2p+1} chiar dacă nu este scufundat în E_{2p+2}. Dar în [7] se precizează că în cazul cînd spaţiul V_n este cu un număr impar de dimensiuni, caracteristica lui Euler -Poincaré este nulă şi nu se ştie dacă pentru aceste spaţii se poate da o formulă analogă cu aceea a lui Gauss-Bonnet.

Analog putem găsi expresii comode în calcule pentru invarianţii $\Delta_2,\ldots, \Delta_{n-1}$, căci după cum am văzut mai sus, un minor de orice ordin $k \geqslant 2$ din matricea $\|b_{\alpha\beta}\|$ se poate exprima prin minorii de ordinul doi şi deci prin $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Minorii de ordinul k ai matricii $\|b_{\alpha\beta}\|$ vor avea forma (9) sau (8) după cum k este par respectiv impar. În ceea ce priveşte găsirea lui Δ_1 trebuie să facem apel la relaţiile (3).

Dacă $3 \leqslant \operatorname{rang} \|b_{\alpha\beta}\| < n$, atunci unii dintre invarianţii Δ_α sînt zero.

Să presupunem că rang $\|b_{\alpha\beta}\| = 2$, $n \geqslant 3$. În acest caz $\Delta_n = \ldots = \Delta_3 = 0$, şi putem afirma că în spaţiu avem invariantul intrinsec Δ_2.

Fie $n \geqslant 3$. Dacă spaţiul V_n este închis şi orientabil, atunci îi putem ataşa n invarianţi numerici :

$$I_\alpha = \int_{V_n} \Delta_\alpha\, \mathrm{d}v.$$

3) Să presupunem că avem o varietate riemanniană V_n şi în ea un sistem de congruenţe ortogonale. În acest caz, metrica spaţiului devine

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_a (ds^a)^2$$

şi corespunzător tensorului $R_{ij,kl}$ vom avea coeficienţii lui Ricci cu patru indici

$$\gamma^a_{bcd} = R_{ijkl}\, \mu^i_a\, \mu^j_b\, \mu^k_c\, \mu^l_d.$$

Dacă $n = 2p$, atunci invariantul (7) are expresia [7],

$$K_T = \Delta_{2p} = \frac{\gamma^{a_1}_{a_2 b_1 b_2} \cdots \gamma^{a_{2p-1}}_{a_{2p} b_{2p-1} b_{2p}} \varepsilon^{a_1 \dots a_{2p}} \varepsilon^{b_1 \dots b_{2p}}}{(2p)!\, 2^p}. \tag{7'}$$

Dacă $n = 2p + 1$, atunci

$$M\binom{a_i a_j a_k}{1\ 2\ 3} = \begin{vmatrix} \gamma^2_{3a_j a_k} & -\gamma^2_{3a_i a_k} & \gamma^2_{3a_i a_j} \\ -\gamma^1_{3a_j a_k} & \gamma^1_{3a_i a_k} & -\gamma^1_{3a_i a_j} \\ \gamma^1_{2a_j a_k} & -\gamma^1_{2a_i a_k} & \gamma^1_{2a_i a_j} \end{vmatrix}$$

şi

$$M^{a_i a_j a_k}_{1\ 2\ 3} = \frac{1}{[2(p-1)]!\, 2^{p-1}} \left(\gamma^{c_1}_{c_2 d_1 d_2} \cdots \gamma^{c_{m-1}}_{c_m d_{m-1} d_m} \varepsilon^{c_1 \dots c_m} \varepsilon^{d_1 \dots d_m}\right).$$

În acest caz, invariantul (10) este dat de

$$K_T = \Delta_{2p+1} = \sum_{a_i < a_j < a_k} (-1)^l\, M\binom{a_i a_j a_k}{1\ 2\ 3} M^{a_i a_j a_k}_{1\ 2\ 3}. \tag{10'}$$

Să presupunem că V_n este scufundat în E_{n+1} (adică este de clasa unu) şi că a doua formă fundamentală a fost redusă la forma canonică

$$\varphi = c_a\, (ds^a)^2.$$

unde c_a sînt curburile normale principale ale hipersuprafeţei. Se vede uşor că toţi coeficienţii lui Ricci cu patru indici sînt zero în afară de

$$\gamma^a_{bab} = c_a\, c_b.$$

Dacă $n = 2p$, atunci avem [7]

$$K_T = \Delta_{2p} = \gamma^1_{212} \gamma^3_{434} \cdots \gamma^{2p-1}_{2p\, 2p-1\, 2p} = c_1 c_2 \ldots c_{2p}.$$

Dacă $n = 2p + 1$, atunci expresia (10′) se reduce la

$$K_T = \Delta_{2p+1} = (\gamma^1_{212} \gamma^1_{313} \gamma^2_{323})^{1/2} \gamma^4_{545} \cdots \gamma^{2p}_{2p+1\, 2p\, 2p+1} = c_1 c_2 \ldots c_{2p+1}.$$

Făcînd raţionamente analoge putem să găsim şi expresiile invarianţilor $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$ în sistemul de congruenţe ales. (Invariantul Δ_1 este intrinsec numai dacă $b_{\alpha\beta}$ se poate exprima prin $g_{\alpha\beta}$ şi derivatele sale).

În ipoteza că spaţiul V_n este de clasa unu, se poate arăta că invariantul K_T se exprimă cu componentele ξ^i ale cîmpului vectorial normal lui V_n în E_{n+1} şi cu derivatele acestor componente [1], [5].

4) Să presupunem că $n = 3$. În acest caz în spaţiu se pot introduce trei invarianţi intrinseci Δ_3, Δ_2, Δ_1. Avem

$$\Delta_3 = K_T = \begin{vmatrix} \gamma^2_{323} & -\gamma^2_{313} & \gamma^2_{312} \\ -\gamma^1_{323} & \gamma^1_{313} & -\gamma^1_{312} \\ \gamma^1_{223} & -\gamma^1_{213} & \gamma^1_{212} \end{vmatrix}^{1/2} = \Delta^{1/2},$$

unde Δ este invariantul introdus de acad. Gh. Vrănceanu în [7], vol. II, pg. 354. De asemenea,

$$\Delta_2 = \gamma^{1}_{212} + \gamma^{1}_{313} + \gamma^{2}_{323}\,; \quad \Delta_1 = \frac{1}{2\,\Delta_3}\sum_{a=1}^{3} E_a, \text{ dacă } \Delta_3 \neq 0,$$

unde

$$E_a = \gamma^{2}_{aa2}\,\gamma^{1}_{331} + \gamma^{2}_{aa1}\,\gamma^{1}_{323} + \gamma^{2}_{aa3}\,\gamma^{1}_{312} - \gamma^{3}_{aa2}\,\gamma^{1}_{231} - \gamma^{3}_{aa1}\,\gamma^{1}_{223} - \gamma^{3}_{aa3}\,\gamma^{1}_{212} - \\ - \gamma^{2}_{3a1}\,\gamma^{1}_{a32} - \gamma^{2}_{3a3}\,\gamma^{1}_{a21} - \gamma^{2}_{3a2}\,\gamma^{1}_{a13}\,.$$

De exemplu, dacă spaţiul V_3 este un tor cu trei dimensiuni cu metrica [7]

$$ds^2 = du^2 + (2 + \cos u)^2\, dv^2 + (4 + 2\cos v + \cos u \cos v)^2\, dw^2$$

u,v,w variind între 0 şi 2π, atunci introducînd congruenţele ortogonale

$$ds^1 = du,$$
$$ds^2 = (2 + \cos u)\, dv$$
$$ds^3 = (4 + 2\cos v + \cos u \cos v)\, dw$$

avem

$$\Delta_3 = \frac{\cos^2 \cos v}{(2 + \cos u)\,(4 + 2\cos v + \cos u \cos v)},$$

$$\Delta_2 = \frac{\cos u}{2 + \cos u} + \frac{\cos u \cos v}{4 + 2\cos v + \cos u \cos v} + \frac{\cos^2 u \cos v}{(2 + \cos u)(4 + 2\cos v + \cos u \cos v)},$$

$$\Delta_1 = 1 + \frac{\cos u}{2 + \cos u} + \frac{\cos u \cos v}{4 + 2\cos v + \cos u \cos v}.$$

De asemenea avem

$$I_3 = I_2 = 0,\ I_1 = 64\,\pi^3.$$

Să presupunem $n = 4$. În general într-un spaţiu riemannian V_4 se pot introduce patru invarianţi diferenţiali intrinseci Δ_4, Δ_3, Δ_2, Δ_1.

Astfel vom avea

$$\Delta_4 = \gamma^{1}_{212}\,\gamma^{3}_{434} - \gamma^{1}_{213}\,\gamma^{3}_{424} + \gamma^{1}_{214}\,\gamma^{3}_{423} + \gamma^{1}_{223}\,\gamma^{3}_{414} - \gamma^{1}_{224}\,\gamma^{3}_{413} + \gamma^{1}_{234}\,\gamma^{3}_{412},$$

$$\Delta_3 = \sum_{a=3,4} \begin{vmatrix} \gamma^{2}_{a2a} & -\gamma^{2}_{a1a} & \gamma^{2}_{a12} \\ -\gamma^{1}_{a2a} & \gamma^{1}_{a1a} & -\gamma^{1}_{a12} \\ \gamma^{1}_{22a} & -\gamma^{1}_{21a} & \gamma^{1}_{212} \end{vmatrix}^{1/2} + \sum_{a=1,2} \begin{vmatrix} \gamma^{3}_{434} & -\gamma^{3}_{4a4} & \gamma^{3}_{4a3} \\ -\gamma^{a}_{434} & \gamma^{a}_{4a4} & -\gamma^{a}_{4a3} \\ \gamma^{a}_{334} & -\gamma^{a}_{3a4} & \gamma^{a}_{3a3} \end{vmatrix}^{1/2},$$

$$\Delta_2 = \gamma^{1}_{212} + \gamma^{1}_{313} + \gamma^{1}_{414} + \gamma^{2}_{323} + \gamma^{2}_{424} + \gamma^{3}_{434},$$

$$\Delta_1 = \frac{\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{a=1}^{4} E_a}{\begin{vmatrix} \gamma^{2}_{323} & -\gamma^{2}_{313} & \gamma^{2}_{312} \\ -\gamma^{1}_{323} & \gamma^{1}_{313} & -\gamma^{1}_{312} \\ \gamma^{1}_{223} & -\gamma^{1}_{213} & \gamma^{1}_{212} \end{vmatrix}^{1/2}}$$

şi corespunzător acestora se introduc invarianţii numerici I_4, I_3, I_2 şi I_1.

Primită la redacţie la 2 aprilie 1968

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”,
Str. Polizu nr. 1,
Catedra de Matematici IV

L'INTRODUCTION DE QUELQUES INVARIANTS DIFFÉRENTIELS INTRINSÈQUES DANS UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail on précise quelques résultats de la théorie des hypersurfaces d'un espace euclidien et on donne une méthode avec laquelle, dans certaines conditions, à un espace riemannien V_n $(n \geqslant 3)$ on peut attacher n invariants différentiels intrinsèques Δ_α. Dans le cas où V_n est de classe 1, les invariants Δ_α se réduisent aux fonctions symétriques fondamentales formées à l'aide des courbures normales principales. Si V_n est fermé et orientable, avec Δ_α on peut construire n invariants numériques I_α.

BIBLIOGRAFIE

1. Allendoerfer, C. B., *Global Theorems in Riemannian Geometry*. Bulletin of the American Mathematical Society, **54**, 249 (1948).
2. Allendoerfer, C. B., *Einstein spaces of class one*. Bulletin of the American Mathematical Society, **XLIII**, 265–270 (1937).
3. Allendoerfer, C. B., Weil, A., *The Gauss — Bonnet Theorem for Riemannian polyhedron*. Transactions of the American Math. Soc., **53**, 101–129 (1943).
4. Shiin-Shen Chern, *A Simple Intrinsec Proof Of the Gauss-Bonnet Formula for closed Riemannian Manifolds*. Annals of Mathematics, **45**, 747 (1944).
5. Gheorghiu, Gh. Th., *Hipersuprafeţe Ţiţeica*. Lucrările ştiinţifice ale Institutului Pedagogic Timişoara 1959.
6. Thomas, T. Y., *Riemann spaces of class one and their characterization*. Acta Mathematica, **67**, 169–211 (1936).
7. Vrănceanu, Gh., *Lecţii de geometrie-diferenţială*, Vol. II şi III, Bucureşti, 1961.
8. Vrănceanu, Gh., *Despre corespondenţa izometrică a două spaţii riemanniene de categoria n — 1*. St. cerc. mat. *10*, 1207 (1964).

GRUPURI DE MIŞCĂRI ÎN SPAŢII RIEMANN DE CLASA UNU

DE

C. N. UDRIŞTE

În această lucrare se studiază unele proprietăţi ale grupurilor de mişcări dintr-un spaţiu riemannian de clasa unu.

1. Fie U o vecinătate simplu conexă a spaţiului aritmetic n dimensional şi un spaţiu Riemann V_n definit în această vecinătate astfel încît coeficienţii primei forme fundamentale

$$ds^2 = g_{ij}(x)\, dx^i\, dx^j \tag{1}$$

să fie funcţii C^2 pentru $x \in U$.

Un spaţiu Riemann n dimensional care nu este euclidian se numeşte de clasa unu dacă poate fi scufundat într-un spaţiu euclidian $n+1$ dimensional. Avem teorema :

Un spaţiu Riemann V_n definit într-o vecinătate U este de clasa unu dacă şi numai dacă tensorul său de curbură nu se anulează şi poate fi găsită o valoare a lui e (± 1) şi un grup de funcţii $b_{ij}(x)$ de clasa C^1 care satisfac

$$R_{ijkl} = e\,(b_{ik}b_{jl} - b_{jl}b_{jk}) \quad \text{(ecuaţiile lui Gauss)}, \tag{2}$$

$$b_{ij,k} - b_{ik,j} = 0 \qquad \text{(ecuaţiile lui Codazzi)}, \tag{3}$$

pentru $x \in U$ ([5] şi [7]).

Proprietăţile unui spaţiu de clasa unu sînt caracterizate de forma (1) şi de a doua formă fundamentală

$$\psi = b_{ij}(x)\, dx^i\, dx^j. \tag{4}$$

Ne propunem să studiem unele proprietăţi ale grupurilor de mişcări dintr-un spaţiu de clasa unu folosind tensorul al doilea fundamental $b_{ij}(x)$. În acest scop presupunem că componentele tensorului lui Riemann ca şi componentele celui de-al doilea tensor fundamental sînt funcţii C^∞ pentru $x \in U$.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 3, P. 515–524, BUCUREŞTI, 1969

2. O transformare infinitezimală

$$\bar{x}^i = x^i + v^i \delta t \tag{5}$$

se numeşte mişcare în V_n dacă

$$\underset{v}{\pounds} g_{ij} = 0 \quad \text{(ecuaţiile lui Killing).} \tag{6}$$

Se arată uşor că dacă un V_n admite o mişcare (5), atunci el admite şi grupul G_1 de mişcări generat de (5). De asemenea se ştie că dacă (5) este o mişcare, atunci ea este şi o coliniaţie afină, adică

$$\underset{v}{\pounds} \left\{ {k \atop ij} \right\} = 0. \tag{7}$$

De aici se găseşte că dacă într-un spaţiu V_n acţionează un grup G_1 de mişcări, atunci se anulează derivata lui Lie a tensorului lui Riemann şi a derivatelor covariante ale tensorului lui Riemann ([2], [7], [11]):

$$\underset{v}{\pounds} R_{ijkl} = 0, \underset{v}{\pounds} R_{ijkl,m} = 0, \ldots, \underset{v}{\pounds} R_{ijkl,m\ldots a} = 0, \ldots \tag{8}$$

Să ţinem seama acum că spaţiul V_n este de clasa unu, adică de faptul că tensorul lui Riemann este dat de (2). Din (8.1) avem:

$$b_{jl} (\underset{v}{\pounds} b_{ik}) + b_{ik} (\underset{v}{\pounds} b_{jl}) - b_{jk} (\underset{v}{\pounds} b_{il}) - b_{il} (\underset{v}{\pounds} b_{jk}) = 0\,. \tag{9}$$

Să presupunem acum că rangul lui $\|b_{jk}\|$ este trei. Atunci putem întotdeauna să presupunem că $|b_{\alpha\beta}|$, α, $\beta = 1,2,3$, este minorul de ordinul trei diferit de zero, deoarece raţionamentul cu oricare alt minor este analog. Deoarece $|b_{\alpha\beta}| \neq 0$, putem să definim numerele $b^{\alpha\beta}$ astfel încît

$$b^{\alpha\beta} b_{\alpha\gamma} = \delta^{\beta}_{\gamma}, \; b^{\alpha\beta} b_{\gamma\beta} = \delta^{\alpha}_{\gamma}. \tag{10}$$

Să alegem acum din toate ecuaţiile (9) pe acelea pentru care toţi indicii iau valorile 1,2, 3:

$$b_{\alpha\beta} (\underset{v}{\pounds} b_{\gamma\delta}) + b_{\gamma\delta} (\underset{v}{\pounds} b_{\alpha\beta}) - b_{\alpha\delta} (\underset{v}{\pounds} b_{\beta\gamma}) - b_{\beta\gamma} (\underset{\alpha}{\pounds} b_{\alpha\delta}) = 0. \tag{11}$$

Multiplicînd cu $b^{\alpha\beta}$, sumînd şi ţinînd cont de (10) găsim

$$\underset{v}{\pounds} b_{\gamma\delta} + b_{\gamma\delta} b^{\alpha\beta} (\underset{v}{\pounds} b_{\alpha\beta}) = 0, \tag{11.a}$$

iar din (11.a) prin acelaşi procedeu rezultă că

$$b^{\alpha\beta} (\underset{v}{\pounds} b_{\alpha\beta}) = 0,$$

adică ţinînd cont de (11.a) avem

$$(\underset{v}{\pounds} b_{\gamma\delta}) = 0 \qquad (\gamma, \delta = 1,2,3). \tag{12}$$

Din ecuaţiile (9) alegem acum pe acelea pentru care unul din indicii lui $\underset{v}{\pounds} b_{ik}$ ia valori de la 1 pînă la n, iar toţi ceilalţi indici iau valorile 1,2,3. Dacă vom ţine cont de (12) aceste ecuaţii se reduc la

$$b_{\alpha\beta}\,(\underset{v}{\pounds}\, b_{\gamma k}) - b_{\gamma\beta}\,(\underset{v}{\pounds}\, b_{\alpha k}) = 0.$$

Multiplicînd cu $b^{\alpha\beta}$ sumînd şi ţinînd cont de (10) avem

$$\underset{v}{\pounds}\, b_{\gamma k} = 0 \qquad (\gamma = 1,2,3\,;\ k = 1,2,\ldots,n). \tag{13}$$

Deoarece tensorul b_{ij} este simetric automat vom avea şi

$$\underset{v}{\pounds}\, b_{k\gamma} = 0\,.$$

Să luăm din (9) ecuaţiile în care ambii indici ai lui $\underset{v}{\pounds}\, b_{ik}$ iau valorile $1,2,\ldots, n$ şi să ţinem cont de (12) şi (13). Vom găsi că aceste ecuaţii se reduc la

$$b_{\alpha\beta}\,(\underset{v}{\pounds}\, b_{ik}) = 0.$$

Cum unele dintre numerele $b_{\alpha\beta}$ sînt diferite de zero, rezultă că

$$\underset{v}{\pounds}\, b_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1,2,\ldots,n) \tag{14}$$

Cu aceste determinări se vede că restul ecuaţiilor din (9) sînt satisfăcute identic.

Ecuaţia (14) ne arată că $b_{ik}(\bar{x})$ sînt aceleaşi funcţii de $\bar{x}$ cum sînt $b_{ik}(x)$ funcţii de x. Avem astfel

Teorema 2.1. *Dacă un spaţiu de clasa unu admite o mişcare şi dacă rang* $\|b_{ij}\| = 3$, *atunci în mod necesar tensorul al doilea fundamental se transformă în el însuşi prin mişcarea respectivă.*

Analog se demonstrează :

Teorema 2.2. *Dacă un spaţiu Riemann de clasa unu admite o mişcare şi dacă rang* $\|b_{ij}\| = p$, $3 \leqslant p \leqslant n$, *atunci în mod necesar tensorul al doilea fundamental se transformă în el însuşi.*

Ţinînd cont de (8.2), (14) şi

$$R_{ijkl,m} = b_{jl}\, b_{ik,m} + b_{ik}\, b_{jl,m} - b_{il,m}\, b_{jk} - b_{il}\, b_{jk,m} \tag{15}$$

deducem

$$b_{jl}\,(\underset{v}{\pounds}\, b_{ik,m}) + b_{ik}\,(\underset{v}{\pounds}_{jl,m}) - b_{jk}\,(\underset{v}{\pounds}\, b_{il,m}) - b_{il}\,(\underset{v}{\pounds}\, b_{jk,m}) = 0. \tag{16}$$

Se vede că (16) sînt ecuaţii de acelaşi tip cu (9) şi în aceleaşi ipoteze avem

$$\underset{v}{\pounds}\, b_{ik,m} = 0. \tag{17}$$

Continuînd acest procedeu deducem :

Teorema 2.3. *Dacă într-un spaţiu* V_n *de clasa unu pentru care* $3 \leqslant$ *rang* $\|b_{ik}\| \leqslant n$, *acţionează un grup* G_1 *de mişcări, atunci se anulează derivata lui Lie a lui* b_{ik} *şi a derivatelor covariante ale lui* b_{ik}, *adică*

$$\underset{v}{\pounds}\, b_{ik} = 0,\quad \underset{v}{\pounds} b_{ik,\,m} = 0, \ldots,\ \underset{v}{\pounds} b_{ik,\,m\ldots q} = 0, \ldots \tag{18}$$

Se vede că folosind pe (18) putem exprima condiţiile de integrabilitate ale ecuaţiilor lui Killing (6). Teorema care se obţine are loc în condiţiile în care au fost demonstrate relaţiile (18) şi este analogă teoremei cunoscute ([2] şi [11]).

Un caz special este acela în care ecuaţiile (14) sînt identic satisfăcute ca urmare a lui (6). Deoarece v^i şi $v_{i,j} - v_{j,i}$ sînt arbitrare, rezultă că va trebui să avem

$$b_{ij,m} = 0,\ b_j^h \delta_i^l + b_i^l \delta_j^l - b_j^l \delta_i^h - b_i^l \delta_j^h = 0,\ g^{lk} b_{ki} = b_i^l,$$

din care deducem

$$b_{ij} = \rho g_{ij}$$

adică spaţiul este cu curbură constantă şi posedă un grup de mişcări cu $\frac{n(n+1)}{2}$ parametrii (se ştie că singurele spaţii de clasa unu care au curbura riemanniană constantă sînt hipercuadricele fundamentale).

Facem observaţia că rezultatele precedente sînt strîns legate de teorema binecunoscută : dacă $3 \leqslant \text{rang}\ \| b_{ij} \| \leqslant n$, atunci oricare două hipersuprafeţe ale spaţiului neted S_{n+1}, care au această proprietate, nu pot fi aplicabile [5].

3. Ne propunem să găsim ordinul maxim al unui grup de mişcări dintr-un spaţiu de clasa unu care nu este spaţiu cu curbură constantă.

În acest scop facem mai întîi observaţia că orice V_2 este un spaţiu de clasa unu şi că dacă V_2 nu este cu curbură constantă, atunci grupul complet de mişcări are ordinul 2.

Pentru a vedea ce se întîmplă în cazul cînd $3 \leqslant \text{rang}\ \| b_{ij} \| \leqslant n$ ne folosim de rezultatul obţinut în teorema 2.2 şi anume că dacă $\underset{v}{\pounds} f$ este operatorul unei mişcări, atunci

$$\underset{v}{\pounds} b_{mk} = 0.$$

Dar această ecuaţie se mai scrie

$$\underset{v}{\pounds} b_{mk} = v^\alpha b_{mk,\alpha} + (b_m^\alpha \delta_k^\beta + b_k^\alpha \delta_m^\beta) v_{\alpha,\beta} = 0. \tag{19}$$

Să ţinem însă cont că v^α satisface pe (6), adică

$$v_{(\alpha,\beta)} = 0\,.$$

Folosind această observaţie, relaţia (19) este echivalentă cu

$$\underset{v}{\pounds} b_{mk} = v^\alpha b_{mk,\alpha} + \sum_{\alpha_j > \alpha_i}^{1,\ldots,n} T_{mk}^{\alpha_j \alpha_i} v_{\alpha_i,\alpha_j} = 0, \tag{20}$$

unde

$$T_{mk}^{\alpha_j \alpha_i} = 4\, \delta_{(m}^{[\alpha_j} b_{k)}^{\alpha_i]}. \tag{21}$$

Cu ajutorul lui (21) formăm o matrice M ale cărei linii sînt date de mk şi ale cărei coloane sînt date de $\alpha_j\ \alpha_i$. Rangul acestei matrici se numeşte mk-rang (sau $\alpha_j\ \alpha_i$-rang) [4].

Să presupunem că în spaţiul considerat acţionează un grup de mişcări al cărui ordin este mai mare decît $\frac{n(n-1)}{2}+1$. În acest caz *mk*-rangul matricei M trebuie să fie mai mic decît $n-1$.

Să considerăm următoarele elemente ale matricei M :

$$\begin{array}{c|cc} {}_{mk}\diagdown^{\alpha_j\alpha_i} & \alpha_2\,\alpha_1 & \alpha_r\,\alpha_2 \\ \hline \alpha_1\,\alpha_1 & -2\,b^{\alpha_2}_{\alpha_1} & 0 \\ \alpha_s\,\alpha_1 & * & \delta^r_s\,b^{\alpha_2}_{\alpha_1} \end{array} \qquad (r, s = 3,4,\ldots, n).$$

Întrucît rangul lui M este inferior lui $n-1$, trebuie ca minorul de ordinul $n-1$ format cu elementele precedente să fie zero, adică

$$b^{\alpha_2}_{\alpha_1} = 0. \tag{22}$$

Să considerăm acum următoarele elemente ale lui M :

$$\begin{array}{c|cccc} {}_{mk}\diagdown^{\alpha_j\alpha_i} & \alpha_{j_1}\alpha_{i_1} & \alpha_{j_2}\alpha_{i_2} & \ldots & \alpha_{j_n}\alpha_{i_n} \\ \hline \alpha_{j_1}\alpha_{i_1} & b^{\alpha_{i_1}}_{\alpha_{i_1}} - b^{\alpha_{j_1}}_{\alpha_{j_1}} & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{j_2}\alpha_{i_2} & 0 & b^{\alpha_{i_2}}_{\alpha_{i_2}} - b^{\alpha_{j_2}}_{\alpha_{j_2}} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \alpha_{j_n}\alpha_{i_n} & 0 & 0 & . & b^{\alpha_{i_n}}_{\alpha_{i_n}} - b^{\alpha_{j_n}}_{\alpha_{j_n}} \end{array}$$

Cum toţi determinanţi de ordinul $n-1$ formaţi cu aceste elemente trebuie să fie zero, rezultă că numărul diferenţelor $b^{\alpha_i}_{\alpha_i} - b^{\alpha_j}_{\alpha_j}$ care nu sînt zero este cel mult $n-2$ şi deci

$$b^1_1 = b^2_2 = \ldots = b^n_n. \tag{23}$$

Din (22) şi (23) deducem

$$b_{mk} = \rho\, g_{mk}. \tag{24}$$

Dacă rang $\| b_{mk} \| < n$, atunci relaţia (24) nu poate să aibă loc căci rang $\| g_{mk} \| = n$. Dacă rang $\| b_{mk} \| = n$ atunci spaţiul este cu curbură constantă (vezi punctul 2). Rezultă că grupul complet de mişcări al unui spaţiu de clasa unu cu $3 \leqslant$ rang $\| b_{ij} \| \leqslant n$, care nu-i spaţiu cu curbură constantă, nu poate să depăşească ordinul $\frac{n(n-1)}{2}+1$.

Facem observaţia că dacă $n > 2$ şi rang $\| b_{ij} \| = 2$, atunci acest rezultat este o consecinţă a teoremelor din [1], [7], [9].

Într-adevăr, în aceste ipoteze, din

$$R_{jk} = e\,(b^i_k - b\,\delta^i_k)b_{ji},$$

unde $b = g^{ij}\,b_{ij}$, rezultă că spaţiul nu poate fi spaţiu Einstein.

Fie acum spaţiul V_n de metrică ([1], [7], [9])

$$ds^2 = (dx^1)^2 + d\sigma^2,$$

unde $d\sigma^2$ este metrica unui spaţiu V_{n-1} cu curbură constantă pozitivă (spaţiu conf. euclidian). Se vede uşor că clasa reală a unui astfel de spaţiu este unu şi că el admite un grup de mişcări cu $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ parametrii.

De asemenea spaţiul conform euclidian cu metrica

$$ds^2 = \frac{1}{kr}(e_i\, dx^i)^2,\ r = e_i(x^i)^2,\ k = \text{const.},$$

este de clasa unu cu

$$b_{ij} = \frac{1}{n-2}\left(\frac{e}{k}\right)^{1/2} R_{ij}\ (e = \pm 1,\ ek > 0,\ R_{ij} = \text{tensorul lui Ricci}),$$

şi admite grupul de mişcări cu $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ parametrii ai cărui generatori sînt [3]:

$$S_{ij} = e_i x^i p_j - e_j x^j p_i \text{ (grupul rotaţiilor)},$$

$$U = \Sigma\, x^i p_i \text{ (grupul dilatărilor)}.$$

Din cele precedente rezultă că pentru spaţiile de clasa unu avem

TEOREMA 3.1. *Ordinul maxim al unui grup complet de mişcări al unui spaţiu riemannian de clasa unu, care nu este spaţiu cu curbură constantă, este* $\frac{n(n-1)}{2} + 1$.

Acest rezultat este în strînsă legătură cu teoremele lui Egorov [1], [11], care în [7], [9] sînt demonstrate prin metoda congruenţelor.

Din teoremele lui Egorov [1] rezultă că există spaţii Einstein care admit un grup complet de mişcări de ordinul $\frac{n(n-1)}{2} + 2$. Aceste spaţii au fost studiate de acad. Gh. Vrănceanu [9]. De aici şi din teorema 3.1 avem

CONSECINŢĂ. *Clasa spaţiilor Einstein care admit un grup complet de mişcări cu* $\frac{n(n-1)}{2} + 2$ *parametrii nu poate fi unu.*

4. Să presupunem că avem o transformare infinitezimală (5) astfel încît

$$\underset{v}{\mathfrak{L}} b_{ik} = 0 \text{ şi } \underset{v}{\mathfrak{L}}\, b_{ik,m} = 0. \tag{25}$$

În acest caz din formula

$$\underset{v}{\mathfrak{L}}(b_{ij,l}) - (\underset{v}{\mathfrak{L}}\, b_{ij})_{,l} = -\, b_{hj}\left(\underset{v}{\mathfrak{L}} \left\{ {h \atop il} \right\}\right) - b_{ih}\left(\underset{v}{\mathfrak{L}} \left\{ {h \atop jl} \right\}\right) \tag{26}$$

deducem că

$$b_{hj}(\underset{v}{\mathfrak{L}} \left\{ {h \atop il} \right\}) + b_{ih}(\underset{v}{\mathfrak{L}} \left\{ {h \atop jl} \right\}) = 0. \tag{27}$$

Pe de altă parte, dacă vom ţine cont de ecuaţiile lui Codazzi:

$$b_{ij,l} = b_{il,j}$$

din formula (26) găsim că

$$b_{hj}(\underset{v}{\mathfrak{L}} \left\{ {h \atop il} \right\}) - b_{ih}(\underset{v}{\mathfrak{L}} \left\{ {h \atop jl} \right\}) = 0. \tag{28}$$

Dar ecuaţiile (27) şi (28) se reduc prin adunare la

$$b_{hj}(\underset{v}{\mathfrak{L}} \left\{ {h \atop il} \right\} = 0. \tag{29}$$

care va admite soluţia banală

$$\underset{v}{\mathfrak{L}} \left\{ {h \atop il} \right\} = 0,$$

dacă şi numai dacă rang $\|b_{hj}\| = n$. Rezultă

Teorema 4.1. *Dacă rang $\|b_{hj}\| = n$ şi dacă există o transformare care să satisfacă pe (25), atunci ea este în mod necesar o coliniaţie afină.*

Ştim însă că dacă într-un V_n acţionează o coliniaţie afină, atunci tensorul R^i_{jkl} se transformă în el însuşi [11].

Pe de altă parte, orice transformare care transformă pe $b_{ij}(x)$ în $b_{ij}(\bar{x})$, va transforma pe $R_{ijkl}(x)$ în $R_{ijkl}(\bar{x})$.

Avem deci:

$$\underset{v}{\mathfrak{L}} R_{mjkl} = 0 \text{ şi } \underset{v}{\mathfrak{L}} R^i_{jkl} = 0.$$

Din acestea deducem că

$$R^i_{jkl}(\underset{v}{\mathfrak{L}} g_{im}) = 0, \tag{30}$$

iar aceasta va admite numai soluţia banală căci matricea $\|R^i_{jkl}\|$, unde i dă numărul de coloane, iar *jkl* numărul de linii, are rangul *n* [5].

Teorema 4.2. *Într-un spaţiu Riemann de clasa unu pentru care rang $\|b_{ij}\| = n$, orice transformare (5) pentru care (25) sînt satisfăcute este necesar şi o mişcare.*

Facem observaţia că rezultatele din acest paragraf se menţin şi pentru spaţii V_2 căci ele cer ca rangul matricei $\|b_{ij}\|$ să fie egal cu dimensiunea spaţiului.

5. Să considerăm ecuaţia determinant

$$|b_{ij} - cg_{ij}| = 0 \tag{31}$$

ale cărei rădăcini sînt curburile normale. Această ecuaţie se mai poate scrie

$$|b_{ij}| - cg_{ij}B^{ij} + \ldots + (-1)^{n-1} c^{n-1} b_{ij}G^{ij} + (-1)^n c^n |g_{ij}| = 0, \tag{31'}$$

unde B^{ij} sînt complemenţii algebrici ai elementelor b_{ij} din determinantul $|b_{ij}|$ (analog G^{ij}).

Dacă rădăcinile lui (31′) sînt simple, atunci în baza rezultatelor precedente avem :

$$-g_{ij}B^{ij}(\underset{v}{\pounds}c_h)+\ldots+(-1)^{n-1}(n-1)c_h^{n-2}b_{ij}G^{ij}(\underset{v}{\pounds}c_h)+(-1)^n n c_h^{n-1}|g_{ij}|(\underset{v}{\pounds}c_h)=0,$$

de unde

$$\underset{v}{\pounds}c_h=0 \qquad (h=1,2,\ldots,n). \tag{32}$$

Dacă o rădăcină a lui (31′) este multiplă de ordinul p, atunci se face mai întîi derivata de ordinul $p-1$ a lui (31′) şi apoi se aplică ecuaţiei care rezultă derivata lui Lie. Ca şi în (32) avem

$$\underset{v}{\pounds}c_\alpha=0(\alpha=1,2,\ldots,p\,;c_1=\ldots=c_p).$$

Rezultă

TEOREMA 5.1. *Dacă avem un spaţiu de clasa unu cu* $3\leqslant$ *rang* $\|b_{ij}\|\leqslant n$ *şi în el acţionează un grup de mişcări, atunci curburile normale sînt în dependenţă funcţională.*

TEOREMA 5.2. *Dacă într-un spaţiu de clasa unu pentru care rang* $\|b_{ij}\|=n$ *avem o transformare (5) care satisface pe (25), atunci curburile normale sînt în dependenţă funcţională.*

A doua teoremă se aplică şi spaţiilor V_2 dintr-un S_3 şi de aceea spaţiile V_2 din S_3 care au proprietăţile specificate în teoremă sînt suprafeţe W.

Rezultatele din acest paragraf întăresc o teoremă obţinută de A. Tonolo în anul 1943 (vezi [6]).

Să observăm însă că rădăcinile c_h ale ecuaţiei (31) sînt invarianţi absoluţi ai spaţiului şi în general

$$c_h=c_h(x).$$

Ecuaţiile (32) ne arată că în V_n putem avea un grup de mişcări dacă cel mult $n-1$ dintre aceste funcţii sînt independente, adică dacă spaţiul este cel mult de categoria $n-1$. Astfel rezultatul obţinut de noi în acest paragraf se încadrează într-un rezultat mai general obţinut de acad. Gh. Vrănceanu în [8].

6. Se ştie că dacă rădăcinile lui (26) sînt reale şi dacă divizorii elementari sînt simpli, există o transformare reală a variabilelor x^i astfel încît într-un punct P formele (1) şi (4) sînt reductibile respectiv la

$$ds^2=a_i(dx^i)^2,\quad \psi=c_i a_i(dx^i)^2, \tag{33}$$

unde a-urile sînt constante nenule, iar c_i sînt rădăcinile ecuaţiei (31) care pot fi şi multiple.

Să presupunem că în spaţiul V_n de clasa unu acţionează un grup de mişcare G_r care se bucură de proprietatea că

$$\text{rang}\,\|v_\alpha^i\|=q<r\binom{i=1,2,\ldots,n}{\alpha=1,2,\ldots,r}.$$

Fie v^i_a $(a = 1,2,\ldots, q)$ vectorii independenţi şi v^i_m $(m = q+1,\ldots,r)$ vectorii care se exprimă cu primii :

$$v^i_m = \omega^a_m \, v^i_a . \tag{34}$$

Din (6) rezultă că există $r - q$ tensori de ordinul doi antisimetrici

$$\Omega_{m|ji} = g_{hj} \, v^h_a \, \omega^a_{m,i} \tag{35}$$

ale căror componente nu sînt toate nule. Aceasta arată de fapt că avem ecuaţiile

$$g_{hj} \, v^h_a \, \omega^a_{m,i} + g_{hi} \, v^h_a \, \omega^a_{m,j} = 0. \tag{36}$$

Pe de altă parte, dacă $3 \leqslant \text{rang} \, \| b_{ij} \| \leqslant n$, atunci din (14) găsim că

$$b^h_i \, \Omega_{m|hj} + b^h_j \, \Omega_{m|hi} = 0. \tag{37}$$

Dacă ne vom situa într-un punct P, atunci conform observaţiilor de la începutul acestui paragraf şi a lui (36), din (37) găsim

$$(b^i_i - b^j_j) \, \Omega_{m|ij} = 0. \tag{38}$$

Deoarece în general ω-urile sînt funcţii, rezultă că în P nu se pot anula toate componentele lui $\Omega_{m|ij}$. Deci (38) se reduce la

$$\frac{b_{ii}}{g_{ii}} = \frac{b_{jj}}{g_{jj}}.$$

Avem astfel :

TEOREMA 6.1. *Dacă într-un spaţiu Riemann de clasa unu pentru care* $3 \leqslant \text{rang} \, \| b_{ij} \| \leqslant n$ *acţionează un grup de mişcări* G_r *astfel încît rang* $\| v^i_\alpha \| = q < r$, *atunci nu toate curburile normale sînt distincte.*

Dacă într-un punct P determinăm rangul matricilor $\| \Omega_{m|ij} \|$ $(i,j = = 1,2,\ldots,n)$ atunci putem determina şi numărul rădăcinilor multiple ale lui (31) şi ordinul lor de multiplicitate.

Primită la redacţie la 2 aprilie 1968

Institutul Politehnic « Gheorghe Gheorghiu-Dej »
Bucureşti Str. Polizu nr. 1,
Seminarul de geometrie diferenţială.

GROUPES DE MOUVEMENTS DANS LES ESPACES DE RIEMANN DE CLASSE 1

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail on démontre que dans un espace riemannien V_n de classe 1 avec $\underset{v}{\mathcal{L}} \, g_{ij} = 0$ et $3 \leqslant \text{rang} \, \| b_{ij} \| \leqslant n$, on a $\underset{v}{\mathcal{L}} \, b_{ij} = 0$. On donne de même une propriété réciproque. En utilisant ce résultat on trouve l'ordre maximal d'un groupe de mouvements d'un espace riemannien de classe 1, qui n'est pas un espace à courbure constante. On donne ensuite quelques conditions nécessaires pour qu'un espace de classe 1 ait un groupe de mouvements.

BIBLIOGRAFIE

1. Egorov, I. P., *O întărire a teoremei lui Fubini asupra grupului de mişcare al unui spaţiu riemannian*. D.A.N., **66**, 793 (1949).
2. Eisenhart, L. P., *Continuous Groups of Transformations*, Dover Publications, Inc. New York, 1963.
3. Jack Levine, *Fields of parallel vectors in conformally flat spaces*, Duke Mathematical Journal, **17**, 15 (1950).
4. Schouten, J. A., Ricci Calculus, 1954.
5. Thomas, T. Y., *Riemann spaces of class one and their characterization*. Acta Mathematica, **67**, 169—211 (1936).
6. Tonolo, A., *Sulle ipersuperficie V_n le cui due forme fondamentali ammetono una stessa transformazione infinitesima Xf*. Boll. Un. Mat. Ital. **(2) 5**, 137—140 (1943).
7. Vrănceanu, Gh., *Lecţii de geometrie diferenţială* vol. I şi II, Bucureşti, 1961.
8. Vrănceanu, Gh., *Despre corespondenţa izometrică a două spaţii riemanniene de categoria $n-1$*, St. cerc. mat., **16**, *10*, 1207—1209 (1964).
9. Vrănceanu, Gh., *Grupurile de mişcări ale spaţiilor cu conexiune*, St. cerc. mat., **II**, 415 (1951).
10. Vrănceanu, Gh., *Variétés différentiables et transformations ponctuelles*. C. R. Acad. Sc. Paris, **264**, 65—66 (1967).
11. Yano, K., *The Theory of Lie Derivatives and its Application*, 1955.
12. Yano, K. and Bochner, S., *Curvature and Betti numbers*, Princeton, University Press, 1953.

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date din text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa Comitetului de redacţie, Calea Griviţei nr. 21, Bucureşti 12.

1969 APR 14

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, A. DELEANU, M. JURCHESCU, **Topologie, Categorii, Suprafeţe riemanniene**, 1967, 394 p., 21,50 lei.

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.

I. COLOJOARĂ, **Elemente de teorie spectrală**, 1968, 311 p., 19,50 lei.

ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.

I. CUCULESCU, **Procese Markov şi funcţii excesive**, 1968, 356 p., 19 lei.

N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, **Metode matematice în hidrogazodinamica subterană**, 1966, 582 p., 31 lei.

AL. GHIKA, **Analiza funcţională**, 1967, 594 p., 31 lei.

ALEXANDRU GHIKA, **Opera matematică**, 1968, 955 p., 50 lei.

S. GUIAŞU şi R. THEODORESCU, **Teoria matematică a informaţiei**, 1966, 227 p., 8,25 lei.

S. GUIAŞU, **Aplicaţii ale teoriei informaţiei**. (Sisteme dinamice — Sisteme cibernetice), 1968, 350 p., 17 lei.

A. HALANAY, D. WEXLER, **Teoria calitativă a sistemelor cu impulsuri**, 1968, 313 p., 13 lei.

M. IOSIFESCU şi P. TĂUTU, **Procese stohastice şi aplicaţii în biologie şi medicină**, 1968, 345 p., 22 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

N. RADU, **Inele locale, vol. I**, 1968, 378 p., 19 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, vol. II, 1966, 669 p., 38 lei.

S. STOILOV, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

IVAN SINGER, **Cea mai bună aproximare în spaţii vectoriale normate prin elemente din subspaţii vectoriale**, 1967, 386 p., 23 lei.

MARIUS I. STOKA, **Geometrie integrală**, 1967, 240 p., 9,70 lei.

SIMION SANIELEVICI, **Opera matematică**, 1968, 298 p., 15,50 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 3, P. 369—524, BUCUREŞTI, 1969

I. P. I. — c. 6233

43831

Lei 20.

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

4

TOMUL 21

1969

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACŢIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — **redactor responsabil;**
ACAD. GR. C. MOISIL — **redactor responsabil adjunct;**
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAŞ — secretar de redacţie.

La revue „STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE" paraît 10 fois par an. Le prix d'un abonnement annuel est de $ 10.—; £ 4.4.0; F.F.49. —; D.M.40. —.
Toute commande de l'étranger sera adressée à CARTIMEX, Boite postale 134—135, Roumanie, cu à ses représentants à l'étranger. En Roumanie, vous pourrez vous abonner par les bureaux de poste ou chez votre facteur.
În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondenţă, se trimit la Comitetul de redacţie al revistei pe adresa: Calea Griviţei nr. 21, Bucureşti 12.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

TOM. 21, Nr. 4
1969

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

SUMAR

Pag.

ANDREI BARSONY-NAGY, Asupra problemei mixte din teoria aripii circulare cu jet 527

N. BOJA, Despre curbele Bertrand din N_3 537

NICOLAE BOTH, Monotonia în calculul propoziţional 543

DAN BUTCULESCU, Generalizarea unei probleme de mişcare plană cu linii libere 553

CORNEL CÎŞLARU, Configuraţii de ordin infinit 561

ANDREI DUMA, Elemente de geometrie analitică peste un corp valutat nearhimedian 571

I. P. ELIANU, Asupra formulei mediei a lui Cauchy 591

D. IEŞAN, Asupra deformării plane generalizate 595

B. JANKÓ, F. FORNWALD şi A. GAIDICI, Asupra rezolvării ecuaţiilor funcţionale neliniare 611

ALEXANDRU GH. RADU, Categoria fasciculelor în topologia epică (VII) 617

ALEXANDRU GH. RADU, Morfisme şi comorfisme de situri preaditive (VIII) 631

MARCEL N. ROŞCULEŢ şi PAUL COCÂRLAN, Transformări de tip lord Kelvin 637

C. SIMIONESCU, Tensori armonici ai spaţiilor Riemann cu grup de mişcări simplu tranzitiv 645

NICOLAE ŞONERIU, Însumarea a trei numere rotunjite 653

ION D. TEODORESCU şi STERIU IANUŞ, Spaţii A_2 de prima speţă cu caracteristice drepte 665

IOAN TOMESCU, Un algoritm pentru sinteza funcţiilor booleene simetrice 675

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 4, P. 525–682, BUCUREŞTI, 1969

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

ASUPRA PROBLEMEI MIXTE DIN TEORIA ARIPII CIRCULARE CU JET

DE

ANDREI BARSONY – NAGY

Se găseşte o familie de soluţii a problemei care apare în studiul teoriei profilului circular cu jet. Din familie se separă soluţia căreia i se poate aplica teorema lui Kutta şi Jukovski, soluţie ce e regăsită prin metoda lui Levi Civita şi se transpun rezultatele pentru profilul rectiliniu cu jet.

I. Considerăm o aripă circulară de rază a raportată la doi diametrii ai săi (fig. 1), care emite un jet pe porţiunea ADB (A de afix $a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, B de afix $a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$; $-\pi < \beta < \alpha < \pi$). Fluidul din jet şi din exterior este acelaşi, incompresibil, de densitate ρ, perfect, viteza la infinit în jet, şi în exteriorul lui e aceeaşi V_∞, paralelă cu axa Ox, mişcarea e permanentă şi regizată de acelaşi potenţial complex $f(z) = \varphi(x, y) + \mathrm{i}\,\psi(x, y)$ atît în jet cît şi exteriorul lui.

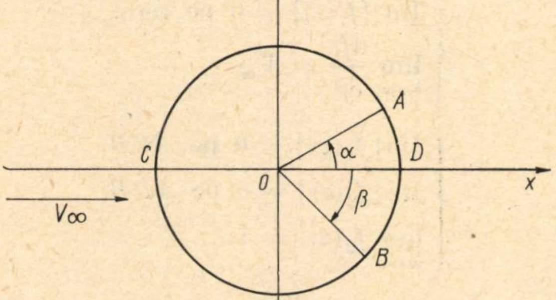


Fig. 1

ŞT. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 4, P. 527—536, BUCUREŞTI, 1969

Condiţiile la limită ale problemei vor fi:

$$\left\{\begin{aligned} &\psi(x, y) = \text{const. pe } ACB \\ &\arg\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = a(\sigma);\ a(\sigma) \text{ o funcţie cunoscută pe } ADB. \\ &\lim_{z\to\infty}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = V_\infty. \end{aligned}\right. \tag{1.1}$$

Cînd jetul se emite normal pe arcul ADB, luînd convenabil constanta aditivă arbitrară din $f(z)$, condiţiile (1.1) se scriu:

$$\left\{\begin{aligned} &\psi(x, y) = 0 \text{ pe } ACB \\ &\varphi(x, y) = 0 \text{ pe } ADB \\ &\lim\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = V_\infty. \end{aligned}\right. \tag{1.2}$$

Presupunem, cum e şi firesc, că $f(z)$ nu are singularităţi pe arcele deschise ACB şi ADB. Cum se poate observa uşor, condiţiile la limită (1.2) nu determină în mod unic soluţia problemei. Vom construi o familie de soluţii depinzînd de şase parametrii reali. Din această familie vom deduce soluţia pentru care $\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)^2$ nu are singularităţi neintegrabile pe cerc astfel ca teorema lui Kutta-Jukovski să fie aplicabilă.

Să observăm că dacă am cunoaşte funcţiile analitice şi uniforme în exteriorul cercului $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_1'(z)$ şi $f_2'(z)$ satisfăcînd condiţiile:

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{Im}\{f_1(z)\} = 0 \text{ pe cerc.} \\ &\lim_{z\to\infty}\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}z} = V_\infty \end{aligned}\right. \tag{1.3}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{Im}\{f_2(z)\} = 0 \text{ pe } ACB \\ &\operatorname{Re}\{f_2(z)\} = 0 \text{ pe } ADB \\ &\lim_{z\to\infty} f_2(z) = 1. \end{aligned}\right. \tag{1.4}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{Re} f_1'(z) = 0 \text{ pe cerc} \\ &\lim_{z\to\infty}\frac{\mathrm{d}f_1'}{\mathrm{d}z} = V_\infty \end{aligned}\right. \tag{1.3'}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{Re}\{f_2'(z)\} = 0 \text{ pe } ACB \\ &\operatorname{Im}\{f_2'(z)\} = 0 \text{ pe } ADB \\ &\lim_{z\to\infty} f_2'(z) = 1 \end{aligned}\right. \tag{1.4'}$$

atunci fiecare din produsele $f_1(z)\cdot f_2(z)$ şi $f_1'(z)\cdot f_2'(z)$ sînt soluţii ale problemei formulate pe condiţiile (1.2). Primele două condiţii (1.2) sînt evident satisfăcute, iar condiţia la infinit e şi ea satisfăcută deoarece $f_1(z)$ şi $f_1'(z)$ au la mari distanţe dezvoltări de forma

$$V_\infty z+\frac{\alpha_1}{z}+\frac{\alpha_2}{z^2}+\cdots$$

şi $f_2(z)$ şi $f_2'(z)$ de forma:

$$1+\frac{\beta_1}{z}+\frac{\beta_2}{z^2}+\cdots$$

şi deci

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(f_1(z)f_2(z))=\lim_{z\to\infty}\left(\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}z}f_2(z)\right)+\lim_{z\to\infty}\left(f_1(z)\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}z}\right)=V_\infty$$

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(f_1'(z)f_2'(z))=V_\infty \tag{1.5}$$

Funcţii satisfăcînd condiţiile (1.3) şi (1.3′) se găsesc aplicînd teorema cercului funcţiei $V_\infty z$ şi se obţine

$$f_1(z)=V_\infty\left(z+\frac{a^2}{z}+K_1\right) \tag{1.6}$$

$$f_1'(z)=V_\infty\left(z-\frac{a^2}{z}+\mathrm{i}K_1'\right), \tag{1.6′}$$

unde K_1 şi K_1' sînt două constante reale. Funcţiile $f_1(z)$ şi $f_1'(z)$ reprezintă potenţialele complexe ale mişcărilor avînd viteza la infinit $\vec{V}_\infty$ pentru care cercul ei este respectiv impermeabil sau linie echipotenţială, cu constantele aditive alese potrivit. Funcţiile

$$f_2(z)=\frac{z-a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\sqrt{(z-a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})\,(z-a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})}} \tag{1.7}$$

$$f_2(z)=\frac{z+a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\sqrt{(z-a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})\,(z-a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})}} \tag{1.7′}$$

satisfac respectiv condiţiile (1.4) şi (1.4′), lucru ce se poate verifica direct. Din punct de vedere mecanic, aceste funcţii reprezintă potenţialele mişcărilor în jurul profilului cu jet, în absenţa curentului de la infinit cînd jetul se emite normal pe porţiunea *ADB* iar *ACB* e impermeabil sau jetul se emite normal pe *ACB* iar *ADB* e impermeabil.

Ele se pot obţine prin transformarea Kelvin din rezultatele din lucrarea [2] sau prin reducerea problemei la o problemă mixtă pentru semiplan lucru ce e posibil din cauza simetriei.

Fie acum funcţiile

$$\frac{\mathrm{d}f_3}{\mathrm{d}z} = \frac{i}{z} f_2(z) \tag{1.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}f'_3}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{z} f'_2(z). \tag{1.8'}$$

Ele dau două cîmpuri de viteze, care se anulează la infinit şi care sînt tangente la arcul ACB şi normale la arcul ADB.

Într-adevăr, dacă $z = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma}$

$$\arg \frac{\mathrm{d}f_3}{\mathrm{d}z} = \frac{\pi}{2} + \arg \frac{1}{z} + \arg f_2(z) = \begin{cases} -\sigma + \pi \text{ sau } -\sigma \text{ pe } ADB \\ -\sigma + \dfrac{\pi}{2} \text{ sau} - \sigma - \dfrac{\pi}{2} \text{ pe } ACB \end{cases}$$

$$\arg \frac{\mathrm{d}f'_3}{\mathrm{d}z} = \arg \frac{1}{z} + \arg f'_2(z) = \begin{cases} -\sigma - \pi \text{ sau } -\sigma \text{ pe } ADB \\ -\sigma + \dfrac{\pi}{2} \text{ sau} - \sigma - \dfrac{\pi}{2} \text{ pe } ACB. \end{cases}$$

Prin integrare se obţine

$$f_3(z) = \ln \frac{\sqrt{\dfrac{z - a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{z - a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}} - a\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\alpha-\beta)}{2}}}{\sqrt{\dfrac{z - a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{z - a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}} + a\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\alpha-\beta)}{2}}} \; \frac{\sqrt{\dfrac{z - a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{z - a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}} + 1}{\sqrt{\dfrac{z - a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{z - a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}} - 1} + \text{const.} \tag{1.9}$$

$$f'_3(z) = \ln \frac{\sqrt{\dfrac{z - a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{z - a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}} + a\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\alpha-\beta)}{2}}}{\sqrt{\dfrac{z - a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{z - a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}} - a\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\alpha-\beta)}{2}}} \; \frac{\sqrt{\dfrac{z - a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{z - a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}} + 1}{\sqrt{\dfrac{z - a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{z - a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}} - 1} + \text{const.} \tag{1.9'}$$

Funcţiile $f_3(z)$ şi $f'_3(z)$ au şi ele interpretare mecanică. $f_3(z)$ reprezintă potenţialul mişcării în jurul profilului cu jet avînd debit nul şi cu circulaţia -2π ; iar $f'_3(z)$ potenţialul mişcării cu circulaţie nulă şi cu debit $2\pi\rho$ în absenţa curentului de la infinit. Ele se pot obţine de asemenea reducînd problema mixtă pentru exteriorul cercului la o problemă mixtă pentru semiplan, folosind simetria conformaţiei, iar problema pentru semiplan se rezolvă cu metoda din lucrarea [1].

Din cele de mai sus rezultă că funcţia:

$$f(z) = \lambda[\lambda_1 f_1(z) f_2(z) + \lambda'_1 f'_1(z) f'_2(z)] + \lambda_3 f_3(z) + \lambda'_3 f'_3(z) =$$

$$= \lambda V_\infty \left[\lambda_1 \left(z + \frac{a^2}{z} + K_1 \right) \frac{z - a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\sqrt{(z - a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})(z - a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})}} + \right. \tag{1.10}$$

$$\left. + \lambda'_1 \left(z - \frac{a^2}{z} + i K'_1 \right) \frac{z + a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\sqrt{(z - a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})(z - a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})}} \right] + \lambda_3 f_3(z) + \lambda'_3 f'_3(z)$$

cu λ, λ_1, λ_1', $\lambda_3\,\lambda_3'$ constante reale, e o soluţie a problemei (1.2). Ca şi condiţia de la infinit să fie satisfăcută trebuie ca

$$\lambda(\lambda_1 + \lambda_1') = 1 \tag{1.11}$$

şi deci $f(z)$ dat de relaţia (1.10) depinde efectiv de şase parametri reali.

Vom căuta să determinăm aceşti parametrii astfel ca $\left(\frac{df}{dz}\right)^2$ să nu aibe singularităţi neintegrabile pe cerc. Dacă termenul din paranteza mare are efectiv singularităţi de forma $\frac{1}{\sqrt{(z - a\,e^{i\alpha})\,(z - a\,e^{i\beta})}}$, atunci prin derivare s-ar obţine singularităţi de forma $\frac{1}{(z - a\,e^{i\alpha})^{3/2}\,(z - a\,e^{i\beta})^{3/2}}$ şi cum ceilalţi termeni au singularităţi numai de forma $\frac{1}{\sqrt{(z - a\,e^{i\alpha})\,(z - a\,e^{i\beta})}}$ ele n-ar putea să se reducă. Termenul din paranteză fiind

$$\frac{(\lambda_1 + \lambda_1')\,z^3 + \left[K_1\,\lambda_1 + i\,K_1'\,\lambda_1' - a\,e^{\frac{i(\alpha+\beta)}{2}}\,(\lambda_1 - \lambda_1')\right] z^2 +}{z\sqrt{(z - a\,e^{i\alpha})\,(z - a\,e^{i\beta})}}$$

$$\frac{+\,a z\left[a(\lambda_1 - \lambda_1') - e^{\frac{i(\alpha+\beta)}{2}}\,(K_1\,\lambda_1 - i\,K_1'\,\lambda_1')\right] - (\lambda_1 + \lambda_1')\,a^3\,e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}}{z\sqrt{(z - a\,e^{i\alpha})\,(z - a\,e^{i\beta})}}$$

rezultă că polinomul de la numărător trebuie să aibe rădăcinile $a\,e^{i\alpha}$ şi $a\,e^{i\beta}$ şi deci se obţin patru ecuaţii reale pentru constantele $\lambda_1\,\lambda_1'\,K_1\,K_1'$. Se poate arăta că acest sistem are într-adevăr soluţii reale. Rezolvarea efectivă a lui nici nu e necesară fiindcă cea de-a treia rădăcină a polinomului de la numărător e evident $a\,e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}$. Deci relaţia (1.10), ţinînd cont şi de relaţia (1.11), devine

$$f(z) = V_\infty \frac{\left(z - a\,e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}\right)\sqrt{(z - a\,e^{i\alpha})\,(z - a\,e^{i\beta})}}{z} + \lambda_3 f_3(z) + \lambda_3' f_3'(z). \tag{1.12}$$

Ţinînd cont de relaţiile (1.8) şi (1.8′) şi efectuînd calculele se obţine

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \frac{V_\infty\,a\,e^{-\frac{i(\alpha+\beta)}{2}}\sqrt{(z - a\,e^{i\alpha})\,(z - a\,e^{i\beta})}}{z^2} + \\ &+ z^{-1}(z - a\,e^{i\alpha})^{-\frac{1}{2}}\,(z - a\,e^{i\beta})^{-\frac{1}{2}}\Big\{V_\infty\,z^2 - \Big[V_\infty\,a\Big(e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}} + \frac{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}{2}\Big) - \\ &\quad - \lambda_3' - i\,\lambda_3\Big]z + \frac{1}{2}\,V_\infty\,a^2\,e^{-\frac{i(\alpha+\beta)}{2}}\,(e^{i\alpha} + e^{i\beta}) + a\,e^{\frac{i(\alpha+\beta)}{2}}\,[\lambda_3 - \lambda_3'\,i]\Big\} \end{aligned} \tag{1.13}$$

Pentru ca $\left(\frac{df}{dz}\right)^2$ să nu aibe singularităţi neintegrabile, mai trebuie ca polinomul de la numărătorul termenului al doilea din relaţia (1.13) să aibe rădăcinile $a\,e^{i\alpha}$ şi $a\,e^{i\beta}$. Din aceste condiţii se determină λ_3 şi λ_3'. În general acest lucru nu ar fi posibil fiindcă se obţin 4 relaţii reale pentru două necunoscute. În cazul nostru însă se obţine

$$\lambda_3' + i\,\lambda_3 = -\,V_\infty\, a\left[\frac{e^{i\alpha}+e^{i\beta}}{2} - e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}\right] \tag{1.14}$$

şi relaţia (1.13) devine

$$\frac{df}{dz} = \frac{\left(z + a\,e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}\right)\sqrt{(z - a\,e^{i\alpha})(z - a\,e^{i\beta})}}{z^2}. \tag{1.15}$$

Din relaţia (1.14) rezultă

$$\lambda_3 = -\,V_\infty\, a \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left[1 + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right] \tag{1.16}$$

$$\lambda_3' = V_\infty\, a \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left[1 - \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right]. \tag{1.16'}$$

Din interpretarea dată lui $f_3(z)$ şi $f_3'(z)$ sau prin calcul direct se obţine:

$$Q = 2\pi V_\infty\, \rho\, a \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left[1 - \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right] \tag{1.17}$$

$$\Gamma = 2\pi V_\infty\, a \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left[1 + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right] \tag{1.18}$$

unde Q şi Γ sînt debitul şi circulaţia în jurul profilului. Teorema lui Kutta-Jukovski dă componentele rezultantei forţelor aerodinamice:

$$R_x = -\,Q\,V_\infty = -\,2\pi\, V_\infty^2\, a\, \rho \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left[1 - \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right] \tag{1.19}$$

$$R_y = -\,\Gamma\, V_\infty\, \rho = -\,2\pi\, V_\infty^2\, a\, \rho \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left[1 + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right]. \tag{1.20}$$

II. Relaţia (1.15), precum şi o generalizare a ei, se poate obţine prin metoda lui Levi-Civita. Punem

$$\frac{df}{dz} = V_\infty\, e^{-i\omega(z)} \tag{2.1}$$

$$\omega(z) = \theta(x,\, y) + i\,\tau(x,\, y) \tag{2.2}$$

$\omega(z)$ fiind o funcţie analitică în exteriorul cercului şi regulată la infinit. Avem

$$(2.3)\qquad \begin{cases} \theta = -\arg \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} \\[2ex] \tau = \ln \dfrac{V}{V_\infty} \end{cases}$$

V fiind modulul vitezei.

Vom considera că jetul nu se mai emite normal, ci că viteza pe arcul ADB formează un unghi $\frac{\mu\pi}{2}$ cu norma la exterioară. Atunci $\theta(\sigma)$ pe circumferinţă va lua valorile:

$$(2.4)\qquad \begin{cases} \theta(\sigma) = \sigma + \dfrac{3\pi}{2}, & -\pi < \sigma < -\pi + \gamma \\[2ex] \theta(\sigma) = \sigma + \dfrac{\pi}{2}, & -\pi + \gamma < \sigma < \beta \\[2ex] \theta(\sigma) = \sigma + \dfrac{\mu\pi}{2}, & \beta < \sigma < \alpha \\[2ex] \theta(\sigma) = \sigma - \dfrac{\pi}{2}, & \alpha < \sigma < \pi. \end{cases}$$

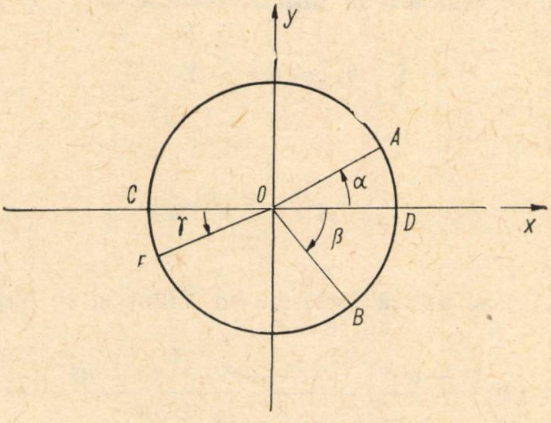


Fig. 2

Unghiul γ e cel indicat în figura 2, E fiind punctul de anulare a vitezei necesar în considerente mecanice. S-a luat această determinare pentru $\theta(\sigma)$ fiindcă luăm pe $\sigma \in [-\pi, \pi]$, σ are în C un salt de -2π, iar $\theta(\sigma)$ trebuie să fie continuu în acel punct. Pentru a ocoli integrări complicate care apar dacă aplicăm direct formula lui Villat pentru funcţia $\omega(z)$, considerăm funcţia

$$\omega_1(z) = i \ln \frac{(z+a)^2}{z^2}, \tag{2.5}$$

analitică în exteriorul cercului şi regulată la infinit. Avem

$$\omega_1(a\,e^{i\sigma}) = \sigma + i \ln \left(4 \cos^2 \frac{\sigma}{2}\right), \tag{2.6}$$

Deci dacă punem

$$\omega_2(z) = \omega(z) - \omega_1(z) = \theta_2(x, a) + i\,\tau_2(x, y) \tag{2.7}$$

$\omega_2(x, y)$ ia pe circumferinţă valorile

$$\left\{\begin{array}{ll} \theta_2(\sigma) = \dfrac{3\pi}{2}, & -\pi < \sigma < -\pi + \gamma \\[2ex] \theta_2(\sigma) = \dfrac{\pi}{2}, & -\pi + \gamma < \sigma < \beta \\[2ex] \theta_2(\sigma) = \dfrac{\mu\pi}{2}, & \beta < \sigma < \alpha \\[2ex] \theta_2(\sigma) = -\dfrac{\pi}{2}, & \alpha < \sigma < \pi. \end{array}\right. \tag{2.8}$$

$\omega_2(z)$ fiind o funcţie regulată la infinit, trebuie ca

$$\int_{-\pi}^{\pi} \theta_2(\sigma)\, d\sigma = 0, \tag{2.9}$$

de unde

$$\gamma = -\frac{(1+\mu)\,\alpha + (1-\mu)\,\beta}{2}; \tag{2.10}$$

pentru funcţia $\omega_2(z)$ se aplică formula lui Villat şi se obţine

$$\omega_2(z) = i \ln \frac{(z - a e^{i\alpha})^{\frac{1+\mu}{2}} (z - a e^{i\beta})^{\frac{1-\mu}{2}} \left(z + a e^{-i\frac{(1+\mu)\alpha + (1-\mu)\beta}{2}}\right)}{(z+a)^2} \tag{2.11}$$

şi deci

$$\omega(z) = i \ln \frac{(z - a e^{i\alpha})^{\frac{1+\mu}{2}} (z - a e^{i\beta})^{\frac{1+\mu}{2}} \left(z + a e^{-i\frac{(1+\mu)\alpha + (1-\mu)\beta}{2}}\right)}{z^2} \tag{2.12}$$

din relaţia (2.1) şi (2.12) rezultă

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = V_\infty \frac{(z - a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})^{\frac{1+\mu}{2}} (z - a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})^{\frac{1-\mu}{2}} \left(z + a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{(1+\mu)\alpha+(1=\mu)\beta}{2}}\right)}{z^2}. \tag{2.13}$$

Dacă jetul e emis efectiv către exteriorul profilului, atunci $-1 < \mu < 1$ şi deci $\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)^2$ nu are singularităţi neintegrabile pe cerc. Prin dezvoltarea în jurul punctului de la infinit se obţine

$$\left\{\begin{aligned} \Gamma &= 2\pi a V_\infty \left[\sin\frac{(1+\mu)\alpha + (1-\mu)\beta}{2} + \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \right. \\ &\qquad \left. + \mu \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right], \\ Q &= 2\pi a V_\infty \rho \left[\cos\frac{(1+\mu)\alpha + (1-\mu)\beta}{2} - \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \right. \\ &\qquad \left. + \mu \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right]. \end{aligned}\right. \tag{2.14}$$

Teorema lui Kutta şi Jukovski aplicabilă în acest caz dă

$$\left\{\begin{aligned} R_x &= -V_\infty Q \\ R_y &= -\Gamma V_\infty \rho. \end{aligned}\right. \tag{2.15}$$

Relaţiile (2.13), (2.14), (2.15) sînt identice pentru $\mu = 0$ cu (1.15), (1.17), (1.18), (1.19) şi (1.20).

Observaţie. Făcînd transformarea conformă

$$\zeta = z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} + \frac{a^2}{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}. \tag{2.16}$$

exteriorul cercului din planul z se transformă pe exteriorul segmentului $[-2a, 2a]$ de pe axa reală din planul ζ. Dacă pentru fixarea ideilor presupunem $\beta \leqslant -\delta \leqslant \alpha$, atunci corespondenţa frontierelor e cea indicată de figura 3.

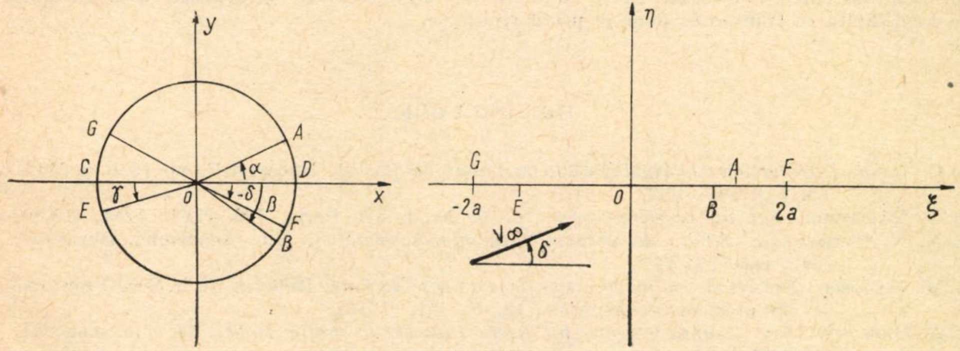


Fig. 3

Potențialul complex $f(z)$ devine o funcție $f(\zeta)$ care este potențialul mișcării în jurul plăcii de lungime $4a$, care emite un jet pe porțiunile AF și BF formînd un unghi $\frac{\mu\pi}{2}$ cu normala exterioară la placă și se află într-un curent uniform la mari distanțe care formează un unghi δ cu sensul pozitiv al axei $O\xi$. Avem

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta} = \tag{2.17}$$

$$= V_{\infty}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta} \frac{(z - a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})^{\frac{1+\mu}{2}} (z - a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})^{\frac{1-\mu}{2}} \left(z + a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{(1+\mu)\alpha+\mu)\beta}{2}}\right)}{(z - a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta})(z + a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta})}.$$

Teorema lui Kutta — Jukovski nu e aplicabilă. Pentru calculul rezultantei forțelor aerodinamice se folosește fie generalizarea acestei teoreme, fie direct formula de tip Blazius-Ciaplîghin din lucrările [1] sau [5]:

$$R_{\xi} - i\,R_{\eta} = \frac{i\,\rho}{2}\int_{FAGEBF}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 \mathrm{d}\xi$$

Cazul $\alpha = \delta = \mu = 0$ e studiat în lucrările [1] și [4].

Primită la redacție la 26 iunie 1968

Institutul de matematică al
Academiei Republicii Socialiste România,
Calea Griviței nr. 21, București 12

SUR LE PROBLÈME MIXTE DE LA THÉORIE DU PROFIL CIRCULAIRE AVEC UN JET

(RÉSUMÉ)

On étudie le problème mixte avec une singularité donnée à l'infini, qui se retrouve dans la théorie du profil circulaire avec un jet normal. On construit une famille de solutions dont on sépare celle avec des singularités intégrables sur le profil et on peut appliquer le théorème de Kutta-Joukovski. Cette solution est retrouvée et généralisée à la méthode de Levi-Civita et transposée pour le profil rectiligne.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Iacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides.* Bucarest-Paris, 1959, p. 211—214 și 680—692.
2. V. Vâlcovici, *Sur un problème mixte.* C. R. Acad. Sci. Paris, **190**, 1264—1267, (1930).
3. N. N. Patraulea, *Studii de aerodinamica hipersustentației.* Ed. Academiei, București, 1962, cap. I și II.
4. M. Kadosch, *Théorie de profils avec soufflage au bord de fuite.* Bulletin de la Soc. Française des Mécaniciens 5-ème année, **18**, 15—31, (1955).
5. A. Barsony-Nagy, *Asupra teoremei lui Kutta-Jukovski la profile cu jet.* St. cerc. mat., **21**, *2* (1969).

DESPRE CURBELE BERTRAND DIN N_3

DE

N. BOJA
(Timişoara)

Într-un spaţiu neeuclidian N_3, de curbură $\varepsilon = \frac{1}{q}$, este considerată o clasă de curbe de tip Bertrand.

Se arată că distanţa neeuclidiană dintre polii planelor rectificante în orice pereche de puncte corespondente pe două curbe asociate este constantă.

Se stabilesc relaţii între curburi şi torsiuni şi se verifică că, la fel ca în E_3, unghiul tangentelor în puncte corespondente şi produsul torsiunilor sînt constante.

Se notează prin (x°, x^1, x^2, x^3) coordonatele omogene ale unui punct M din spaţiul neeuclidian N_3. Pentru punctele M situate pe absolut este verificată ecuaţia

$$M^2 = (x^\circ)^2 + \varepsilon^2 [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2] = 0, \tag{I}$$

unde $\varepsilon = \frac{1}{q}$ este curbura spaţiului, iar pentru celelalte puncte se introduce [1] normarea

$$M^2 = 1. \tag{II}$$

Fiind dată curba $M = M(s)$ şi notînd cu T, N, B conjugatele faţă de (I) ale punctului curent M pe tangentă, normala principală şi binormala curbei, avem [1] formulele lui Frenet:

$$M' = \frac{T}{q}, \quad T' = \frac{N}{\rho} - \frac{M}{q}, \quad N' = -\frac{T}{\rho} + \frac{B}{\tau}, \quad B' = -\frac{N}{\tau}, \tag{III}$$

unde ρ şi τ sînt razele de curbură şi torsiune în M.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 4, P. 537–542, BUCUREŞTI, 1969

1°. Fie MN normala principală a curbei (C), $M = M(s)$ şi pe ea punctul M_1 care descrie o nouă curbă (C_1) de ecuaţie $M_1 = M_1(s_1)$ şi pentru care să avem

$$(1) \qquad \begin{aligned} M_1 &= \alpha M + \beta N \\ N_1 &= \xi M + \eta N. \end{aligned}$$

Relaţiile (1) exprimă condiţia ca normala principală a unei curbe să fie normala principală şi pentru a doua curbă, în care N şi N_1 sînt ortogonalele punctelor M şi M_1 pe această dreaptă.

Vom zice că (C_1) este asociata Bertrand a curbei (C).

Fiecare din tetraedrele $MNTB$ şi $M_1N_1T_1B_1$ sînt autoduale.

Are loc teorema:

Distanţa neeuclidiană dintre polii planelor rectificante în punctele corespondente a două curbe asociate Bertrand este constantă.

Notînd distanţa $NN_1 = \lambda$, avem $N \cdot N_1 = \cos \frac{\lambda}{q}$. Cum M şi N sînt ortogonale şi determină normala principală, iar pe de altă parte din (1) obţinem $\eta = \cos \frac{\lambda}{q}$, ţinînd seama de normare avem

$$(1') \qquad \begin{aligned} N_1 &= -\sin \frac{\lambda}{q} M + \cos \frac{\lambda}{q} N \\ M_1 &= \alpha M + \sqrt{1-\alpha^2}\, N. \end{aligned}$$

De aici, derivînd relaţia a doua în raport cu arcul s,

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\left(M - \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} N\right) + \left(\frac{\alpha}{q} - \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\rho}\right) T + \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\tau} B,$$

unde am ţinut cont de formulele (III).

Astfel, pentru tangenta la curba (C_1), calculăm derivata

$$(3) \qquad \frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}s} = \frac{T_1}{q} \cdot \frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}s}.$$

Pe direcţia tangentei la (C_1), T_1 fiind polul dreptei M_1N_1 şi deci, al dreptei MN, avem

$$(4) \qquad T_1 \cdot M = T_1 \cdot N = 0.$$

Astfel, dreptele TT_1 şi MM_1 sînt conjugate în raport cu absolutul.

Ţinînd cont de (4), după ce înlocuim relaţia (3) în (2) şi înmulţim scalar cu M în ambele părţi, găsim

$$(5) \qquad \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = 0, \quad \alpha = \text{const.},$$

valoarea constantei, în general fiind diferită de zero, cînd $M_1 \neq N$. Vedem însă că există în particular şi posibilitatea ca $\alpha = 0$, dacă înmulţim (2) scalar cu N şi ţinem seama de (4). Rezultă, din (1'), că în acest caz punctul N descrie curba (C_1).

În continuare, vom obţine o relaţie de legătură între parametrii α şi λ introduşi de (1'), prin înmulţirea lor scalară şi folosind faptul că M_1 şi N_1 sînt ortogonale. Găsim,

$$\alpha = \cos\frac{\lambda}{q}. \tag{6}$$

Deci, cu (5), rezultă $\lambda = \text{const.}$, ceea ce justifică teorema.

2°. Raportînd toate punctele spaţiului la reperul $MTNB$, putem pune

$$T_1 = \alpha_1 M + \beta_1 T + \gamma_1 N + \delta_1 B$$

şi însemnînd prin θ unghiul tangentelor, cu T şi T_1 ortogonalele punctelor lor de intersecţie cu perpendiculara comună MM_1, avem,

$$\cos\theta = T\cdot T_1. \tag{7}$$

Obţinem, cu (4),

$$T_1 = \cos\theta\, T + \sin\theta\, B. \tag{8}$$

Derivînd (7) în raport cu s,

$$T\cdot\frac{dT_1}{ds} + T_1\cdot\frac{dT}{ds} = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds},$$

deoarece

$$T\cdot\frac{dT_1}{ds} = T\cdot\left(-\frac{M_1}{q} + \frac{N_1}{\rho}\right) = 0$$

şi analog

$$T_1\cdot\frac{dT}{ds} = 0,$$

rezultă

$$\sin\theta\cdot\frac{d\theta}{ds} = 0.$$

Rămîne $\theta = \text{const.} \neq 0$.

Unghiul tangentelor a două curbe asociate Bertrand, în două puncte corespondente, este constant.

Această proprietate este cunoscută ([2] şi [3]) şi pentru cazul euclidian.

Se explicitează apoi valoarea lui T_1 din (3) şi se ţine seama de expresia (2), din care dispar primii doi termeni în baza lui (5). Expresia găsită pentru T_1 se compară cu exprimarea sa dată de (8), găsind relaţiile:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \left(\frac{\alpha}{q} - \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\rho}\right) q \frac{ds}{ds_1} \\ \sin\theta &= \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\tau} q \frac{ds}{ds_1}, \end{aligned} \tag{9}$$

care, împărţite membru cu membru, conduc la

$$\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\tau}\operatorname{ctg}\theta\right) = \frac{1}{q}$$

sau

$$\frac{a}{\rho} + \frac{b}{\tau} = \frac{1}{q}, \tag{10}$$

unde, ţinînd cont de (6), s-a notat

$$a = \operatorname{tg}\frac{\lambda}{q}, \qquad b = \operatorname{tg}\frac{\lambda}{q}\operatorname{ctg}\theta.$$

Relaţia (10) este caracteristică pentru curba (C) a cărei asociată este (C_1), într-un spaţiu neeuclidian.

La limită, pentru $q \to \infty$, ea devine relaţia cunoscută din E_3.

În adevăr, notînd, în conformitate cu cele de mai sus, prin λ_e şi λ_n distanţele din E_3 respectiv N_3, avem [1],

$$\lambda_e = q \operatorname{tg}\frac{\lambda_n}{q} \tag{*}$$

şi făcînd, pentru trecerea la euclidian, înlocuirile [4]

$$\rho_n \to \rho_e, \quad \tau_n \to \tau_e$$

obţinem

$$\frac{\lambda_e}{\rho_e} + \frac{\lambda_e \operatorname{ctg}\theta}{\tau_e} = 1. \tag{11}$$

Pentru ca afirmaţia făcută să fie complet verificată, mai trebuie arătat că $MM_1 = \lambda$. Aceasta rezultă imediat din (6) şi prima relaţie (1).

3°. Potrivit definiţiei însăşi dată pentru asociata (C_1) a unei curbe (C), rezultă că, invers, şi curba (C) este asociata Bertrand a curbei (C_1).

Raportînd toate punctele spaţiului la reperul $M_1T_1N_1B_1$ se inversează formulele (1′) care, în baza lui (6), pot fi privite ca o transformare unimodulară ce duce punctele M, N legate de (C) în punctele M_1, N_1 referitoare la curba (C_1).

Se stabileşte apoi şi relaţia

$$T = \cos\theta\, T_1 - \sin\theta\, B_1,$$

analoagă lui (8), obţinînd pentru (C_1),

$$(10_1) \qquad \frac{-a}{\rho_1} + \frac{b}{\tau_1} = \frac{1}{q}$$

cu $a_1 = -a$, $b_1 = b$.

Din prima formulă (9) şi analoaga sa pentru (C_1), prin înmulţire, găsim

$$(12) \qquad 1 - q\,\mathrm{tg}\frac{\lambda}{q}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right) - q^2\mathrm{tg}^2\frac{\lambda}{q}\,\frac{1}{\rho\rho_1} = \left(\frac{\cos\theta}{\cos\frac{\lambda}{q}}\right)^2$$

relaţia de legătură între curburile a două curbe asociate Bertrand.

Analog, pentru torsiunile lor, avem

$$(13) \qquad \frac{1}{\tau\tau_1} = \frac{1}{q^2}\left(1 + \frac{1}{a^2}\right)\sin^2\theta,$$

sau

$$\frac{1}{\tau\tau_1} = \frac{1}{q^2}\cdot\frac{1 + a^2}{a^2 + b^2}.$$

Deci produsul torsiunilor a două curbe asociate Bertrand este o constantă pozitivă.

Scriind (13) sub forma

$$(14) \qquad \frac{1}{\tau\tau_1} = \frac{1}{q^2}\,\frac{\sin^2\theta}{\mathrm{tg}^2\frac{\lambda}{q}\,\cos^2\frac{\lambda}{q}},$$

obţinem, pentru cazul euclidian, cu (*) şi făcînd $q \to \infty$, formula cunoscută

$$\frac{1}{\tau\tau_1} = \frac{\sin^2\theta}{(MM_1)^2}.$$

Adunînd (12) cu (14) rezultă

$$(15) \qquad 1 - q\,\mathrm{tg}\frac{\lambda}{q}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right) - q^2\mathrm{tg}^2\frac{\lambda}{q}\left(\frac{1}{\rho\rho_1} - \frac{1}{\tau\tau_1}\right) = \frac{1}{\cos^2\frac{\lambda}{q}},$$

şi trecînd la E_3,

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\rho}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{\rho_1}\right) + \frac{\lambda^2}{\tau\tau_1} = 1.$$

Formula (15) prezintă avantajul că stabileşte o relaţie de legătură între curburile şi torsiunile a două curbe asociate Bertrand din N_3, independentă de unghiul θ al tangentelor în două puncte corespondente.

În particular, dacă tangentele la (C) şi (C_1) sînt ortogonale, din (14) rezultă relaţia

$$\tau\tau_1 = q^2 \sin^2 \frac{\lambda}{q} \tag{16}$$

cu care (15) se scrie

$$\left(1 - q \operatorname{tg} \frac{\lambda}{q} \cdot \frac{1}{\rho}\right)\left(1 + q \operatorname{tg} \frac{\lambda}{q} \cdot \frac{1}{\rho_1}\right) = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuaţii de gradul doi în $q \cdot \operatorname{tg} \frac{\lambda}{q}$ fiind ρ şi $-\rho_1$, cum $|\rho| = |\rho_1|$, găsim în baza lui (16)

$$\frac{\tau\tau_1}{\rho^2} = \cos^2 \frac{\lambda}{q}. \tag{15'}$$

Această formulă înlocuieşte pe (15) (valabilă pentru orice θ), în cazul curbelor cu tangente ortogonale în puncte corespondente.

Ea permite calculul curburii şi torsiunii curbei (C_1) asociata Bertrand a unei curbe (C) dată (ρ şi τ — cunoscute în M), fără a mai fi necesară calcularea coordonatelor punctului M_1, corespondentul lui M.

În E_3, pentru $q \to \infty$, îi corespunde $\tau\tau_1 = \rho^2$, cunoscută.

Primită la redacţie la 25 mai 1968

Institutul politehnic Timişoara

SUR LES COURBES DE BERTRAND DANS N_3

(RÉSUMÉ)

On considère une classe de courbes de type Bertrand, dans un espace non euclidien à courbure $\varepsilon = \frac{1}{q}$.

On montre que la distance des pôles des plans rectificants dans chaques paire de points correspondants sur deux courbes associées est constante.

On établit des relations entre les courbures et les torsions et on vérifie que l'angle des tangentes dans les points correspondants et le produit des torsions sont constants, comme dans E_3.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Mihăileanu, *Geometrie diferenţială neeuclidiană*. Ed. Acad., Bucureşti, 1964.
2. A. Dobrescu, *Geometrie diferenţială*. Ed. didactica şi pedagogică, Bucureşti, 1963.
3. L. Bianchi, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*. Leipzig u. Berlin, Teubner, 1910.
4. N. Mihăileanu, *Relaţii între formulele din geometria diferenţială euclidiană şi neeuclidiană*. Matematica, Filiala Iaşi, **X**, *2*, (1959).

MONOTONIA ÎN CALCULUL PROPOZIȚIONAL

DE

NICOLAE BOTH

(Cluj)

Lucrarea aprofundează studiul monotoniei formulelor calculului propozițional, pe care apoi o utilizează la generalizarea metodei substituției în acest calcul.

§ 1. ORDINUL PĂRȚILOR UNEI FORMULE

DEFINIȚIA 1.1. a) În formulele: $\overline{\mathcal{A}}$, $\mathcal{B}_1 \& \mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2$ și $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, părțile $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$ și $\mathcal{B}_2$ se numesc *părți de ordinul I* ale acestor formule și anume, $\mathcal{A}$ este *parte negativă* iar celelalte — *pozitive*.

b) $\mathcal{A}$ este *parte de ordinul n* a formulei $\mathcal{E}$ dacă este parte de ordinul I a unei părți de ordin $n - 1$ a acestei formule.

c) Considerăm că formula însăși — ca parte improprie a sa — are ordinul zero.

Observația 1.1. Partea de ordin n se află în domeniul a n operatori ai formulei, adică are *adîncimea* n în formula dată ([1], § 26).

Prin aceasta am definit inductiv ordinul părților unei formule date.

Vom folosi notația $\mathcal{A} \underset{n}{\in} \mathcal{E}$ sau $\mathcal{E} \underset{n}{\ni} \mathcal{A}$ iar în general pentru cazul $n = 1$ omitem indicele.

DEFINIȚIA 1.2. Șirul $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ îl numim *lanț* (de lungime $n + 1$) al formulei $\mathcal{E}$ dacă:

$$\mathcal{E} = \mathcal{A}_0 \ni \mathcal{A}_1 \ni \ldots \ni \mathcal{A}_n$$

iar termenii șirului, *verigi*, dintre care ultima ($\mathcal{A}_n$) este *vîrf*.

Observația 1.2. Veriga de ordin k, ($\mathcal{A}_k$), este parte de ordinul $k - j$ a verigii de ordinul j din același lanț, unde $j \leqslant k$. (Rezultă din definiția 1.1 și definiția 1.2.).

DEFINIȚIA 1.3. Două lanțuri din aceeași formulă sînt *secante* dacă au verigi necomune identice și sînt *tangente* dacă au vîrfuri identice. Evi-

ȘT. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 4, P. 543–551, BUCUREȘTI, 1969

dent că toate lanţurile formulei $\mathcal{S}$ au prima verigă comună şi anume $\mathcal{S} = \mathcal{A}_0^{(1)} = \mathcal{A}_0^{(2)} = \ldots = \mathcal{A}_0^{(m)}$.

Observaţia 1.3. Lanţurile secante au sublanţuri tangente (acestea avînd ca vîrfuri chiar verigile identice respective).

LEMA 1.1. *Nu există verigi identice în acelaşi lanţ.*

Adică:

$$j \neq k \rightarrow \mathcal{A}_j \neq \mathcal{A}_k .$$

Într-adevăr, $j \neq k \rightarrow j < k \vee k < j$. În cazul $j < k$, din observaţia 1.2 rezultă $\mathcal{A}_j \ni_{k-j} \mathcal{A}_k$, iar în cazul $k < j$ rezultă $\mathcal{A}_k \in_{j-k} \mathcal{A}_j$. Deoarece $j \neq k$, $|k - j| \neq 0$ şi deci $\mathcal{A}_j \neq \mathcal{A}_k$ întrucît orice formulă este diferită de oricare parte proprie a sa.

DEFINIŢIA 1.4. Formula care nu conţine lanţuri secante o numim *formulă izolată.*

TEOREMA 1.1. *Formula izolată nu conţine părţi identice.*

Dacă ar conţine părţi identice, acestea ar aparţine sau aceluiaşi lanţ sau unor lanţuri distincte. Prima posibilitate este exclusă de lema 1.1, iar a doua de definiţia 1.4 şi definiţia 1.3.

§ 2. FORMULE COMPARABILE

DEFINIŢIA 2.1. Formulele $\mathcal{S}_1$ şi $\mathcal{S}_2$ sînt *comparabile* ([2], § 4) dacă $\vdash \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ sau $\vdash \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1$. În primul caz zicem că $\mathcal{S}_1$ este *mai tare* ca $\mathcal{S}_2$ ([3], cap. II, §5).

Observaţia 2.1. Identitatea este mai slabă iar contradicţia este mai tare decît orice formulă. Aceasta rezultă din $\vdash B \rightarrow \mathfrak{R}$ ([3], cap. II, §2) respectiv $\vdash \mathfrak{F} \rightarrow A$ ([3], cap. II, §4), unde $\mathfrak{R}$ este identitate iar $\mathfrak{F}$, contradicţie.

Observaţia 2.2. Două identităţi sau două contradicţii sînt comparabile în ambele sensuri — deci sînt sintactic echivalente.

TEOREMA 2.1. *Conjuncţia şi disjuncţia a două formule comparabile este echivalentă cu cea mai tare respectiv cu cea mai slabă dintre ele* ([2], §4).

Demonstraţia o facem utilizînd axiomele din [3], cap. II, § 2.

Fie, conform ipotezei:

$$(1) \qquad \vdash \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2 .$$

O formă a axiomei II.1 este

$$(a) \qquad \vdash \mathcal{S}_1 \,\&\, \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1$$

iar o formă a axiomei II.3 este

$$(2) \qquad \vdash (\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1) \rightarrow ((\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2) \rightarrow (\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1 \,\&\, \mathcal{S}_2)) .$$

Separînd cu $\vdash \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1$ (care este o formă a teoremei 2 din [3], cap. II, §2) şi cu (1) în (2), obţinem

$$(b) \qquad \vdash \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1 \,\&\, \mathcal{S}_2 .$$

Din (a) şi (b) rezultă $\vdash \mathcal{S}_1 \,\&\, \mathcal{S}_2 \equiv \mathcal{S}_1$.

În aceeaşi ipoteză (1), ţinînd cont de axioma III.2 obţinem

(a′) $$\vdash \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2$$

iar din axioma III.3 se deduce

(2′) $$\vdash (\mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2) \rightarrow ((\mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_2) \rightarrow (\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_2))$$

din care prin separaţie cu (1) şi cu $\vdash \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_2$ rămîne

(b′) $$\vdash \mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_2$$

iar din (a′) şi (b′) rezultă $\vdash \mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_2$ şi astfel teorema este complet demonstrată.

TEOREMA 2.2. *Dacă formulele $\mathcal{E}_1$ şi $\mathcal{E}_2$ sînt comparabile, atunci dualele lor $\mathcal{E}_1$ şi $\mathcal{E}_2$ sînt comparabile în sens invers.*

Aceasta rezultă imediat din $\vdash (\mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2) \Rightarrow \vdash (\mathcal{E}_2' \rightarrow \mathcal{E}_1')$([1], § 27).

TEOREMA 2.3. *Pentru orice formulă, există cel puţin o formulă mai tare şi una mai slabă, care să conţină variabile arbitrare.*

De exemplu formula $p_1 \,\&\, \overline{p}_1 \vee \overline{p}_2 \,\&\, \overline{p}_2 \vee \ldots \vee p_n \,\&\, \overline{p}_n$ este o contradicţie, deci mai tare ca orice formulă, iar duala sa fiind identitate este mai slabă ca orice formulă (observaţia 2.1).

§ 3. SUBSTITUŢIE

DEFINIŢIA 3.1. Numim *substituţie* operaţia $\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \mathcal{E}(\mathcal{A})$, unde $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{E}(\mathcal{A})$ sînt formule şi care se defineşte astfel:

$$1°. \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \mathcal{C}\,| = \begin{cases} \mathcal{B} \text{ dacă } \mathcal{A} = \mathcal{C} \\ \mathcal{C} \text{ dacă } \mathcal{A} \underset{n}{\not\equiv} \mathcal{C}. \end{cases}$$

2°. Dacă $\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \mathcal{E}_1(\mathcal{A})\,| = \mathcal{E}_1(\mathcal{B})$ iar $\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \mathcal{E}_2(\mathcal{A})\,| = \mathcal{E}_2(\mathcal{B})$, unde $\mathcal{E}_1(\mathcal{B})$ şi $\mathcal{E}_2(\mathcal{B})$ sînt formule, atunci:

$$\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} (\mathcal{E}_1(\mathcal{A}) \,\&\, \mathcal{E}_2(\mathcal{A}))\,| = \mathcal{E}_1(\mathcal{B}) \,\&\, \mathcal{E}_2(\mathcal{B})$$

$$\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} (\mathcal{E}_1(\mathcal{A}) \vee \mathcal{E}_2(\mathcal{A}))\,| = \mathcal{E}_1(\mathcal{B}) \vee \mathcal{E}_2(\mathcal{B})$$

$$\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} (\mathcal{E}_1(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{E}_2(\mathcal{A}))\,| = \mathcal{E}_1(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{E}_2(\mathcal{B})$$

$$\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \mathcal{E}_1(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{E}}_1(\mathcal{B}).$$

Observația 3.1. Am notat prin $\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \mathcal{E}(\mathcal{A})$ operația de substituție iar prin $\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \mathcal{E}(\mathcal{A})\,|$ rezultatul ei. Anumite simboluri aferente substituției, în cazul că nu ne interesează, le vom omite în notație.

Teorema 3.1. *Dacă* $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ *este o formulă, atunci și* $\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \mathcal{E}(\mathcal{A})\,|$ *este formulă.*

Demonstrație. Definiția 3.1 punctul 1° arată că rezultatul substituției cu formula însăși sau cu o parte ce nu figurează în ea este tot o formulă. Punctul 2° arată că substituția într-o formulă se reduce la substituția în părțile sale de ordinul I, al cărei rezultat este tot o formulă, conform definiției inductive a formulei ([3], cap. II, § 1).

Admițînd că substituția în părțile de ordin $n-1$ are ca rezultat o formulă, substituția într-o parte de ordinul n reprezentînd substituție în părțile de ordinul I ale celor de ordinul $n-1$ (definiția 1.1.b) are ca rezultat de asemenea o formulă.

Se observă deci că $\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \mathcal{E}(\mathcal{A})$ constă în înlocuirea părții $\mathcal{A}$ din $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ prin formula $\mathcal{B}$.

Definiția 3.2. Dacă $\mathcal{A} \underset{n}{\in} \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \mathcal{E}(\mathcal{A})\,|$ substituția este *parțială* și o notăm prin $\underset{-}{\int}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \mathcal{E}(\mathcal{A})$, iar dacă se referă la anumite locuri ale părții $\mathcal{A}$ din $\mathcal{E}(\mathcal{A})$, o numim *locală* și o notăm prin $\underset{-}{\int}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \mathcal{E}(\mathcal{A})$.

În cazul că $\mathcal{A}$ este o variabilă propozițională, $\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \mathcal{E}(\mathcal{A})$ devine substituție *simplă.*

Observația 3.2. Orice substituție locală este și parțială.

Definiția 3.3. Substituția $\int_{\mathcal{A}_n}^{\mathcal{B}_n} \int_{\mathcal{A}_{n-1}}^{\mathcal{B}_{n-1}} \ldots \int_{\mathcal{A}_1}^{\mathcal{B}_1} \mathcal{E}(\mathcal{A}_1 \ldots, \mathcal{A}_{n-1}, \mathcal{A}_n)\,|\ldots|$ o numim substituție *succesivă* iar $\int_{\mathcal{A}_1 \ldots \mathcal{A}_n}^{\mathcal{B}_1 \ldots \mathcal{B}_n} \mathcal{E}(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n)$ se numește substituție *simultană.*

Definiția 3.4. Două substituții sînt *echivalente* dacă aplicate aceleiași formule conduc la același rezultat.

Teorema 3.2. *Orice substituție succesivă simplă este echivalentă cu substituția simultană corespunzătoare* ([2], § 3).

Definiția 3.5. Substituția care conservă identitățile o numim substituție *permisă.* Prin urmare substituția este permisă dacă și numai dacă din $\vdash (\mathcal{E}(\mathcal{A}) \equiv \mathfrak{R})$ rezultă $\vdash \left(\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \mathcal{E}(\mathcal{A})\,| \equiv \mathfrak{R}\right)$.

Observația 3.3. Substituția simplă este permisă prin definiția adevărului sintactic ([3], cap. II, § 2).

Dacă $\underline{\int}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \mathcal{E}(\mathcal{A})$ este permisă, atunci şi $\underline{\int}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \mathcal{E}(\mathfrak{A})$ este permisă.

TEOREMA 3.3. *Dacă* $\vdash \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, *atunci* $\underline{\int}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \mathcal{E}(\mathcal{A})$ *este permisă.*

În teorema de echivalenţă ([3], cap. II, § 6):

$$\vdash (\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}) \to (\mathcal{E}(\mathcal{A}) \equiv \mathcal{E}(\mathcal{B}))$$

separînd cu $\vdash (\mathcal{A} \equiv \mathcal{B})$ obţinem

$$\vdash \mathcal{E}(\mathcal{A}) \equiv \mathcal{E}(\mathcal{B}), \text{ unde } \mathcal{E}(\mathcal{B}) \equiv \underline{\int}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \mathcal{E}(\mathcal{A}).$$

Deci dacă $\vdash \mathcal{E}(\mathcal{A}) \equiv \mathfrak{N}$ adică $\vdash \mathcal{E}(\mathcal{A})$, separăm în ultima relaţie şi obţinem $\vdash \mathcal{E}(\mathcal{B})$ sau $\vdash \mathcal{E}(\mathcal{B}) \equiv \mathfrak{N}$.

COROLARUL 3.1. *Dacă* $\mathcal{A}$ *şi* $\mathcal{B}$ *sînt ambele identităţi sau contradicţii atunci* $\underline{\int}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ *este permisă.*

Din observaţia 2.2 rezultă $\vdash \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ iar cu aceasta, din teorema 3.3 rezultă concluzia.

COROLARUL 3.2. *Dacă* $\vdash \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, *atunci* $\underline{\int}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}\&\mathcal{B}}$, $\underline{\int}_{\mathcal{A}\&\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$, $\underline{\int}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}\vee\mathcal{B}}$ *şi* $\underline{\int}_{\mathcal{A}\vee\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ *sînt permise.*

Aceasta rezultă din definiţia 2.1, teorema 2. 1 şi teorema 3.3.

§ 4. MONOTONIA

DEFINIŢIA 4.1. Formula $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ este *monoton crescătoare* după $\mathcal{A}$ dacă

$$\vdash (\mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2) \to (\mathcal{E}(\mathcal{A}_1) \to \mathcal{E}(\mathcal{A}_2)),$$

unde $\mathcal{E}(\mathcal{A}_i) = \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}_i} \mathcal{E}(\mathcal{A})$, $(i = 1, 2)$, $\mathcal{A}_i$ fiind formule arbitrare şi este *monoton descrescătoare* după $\mathcal{A}$ dacă

$$\vdash (\mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2) \to (\mathcal{E}(\mathcal{A}_2) \to \mathcal{E}(\mathcal{A}_1))$$

sau din motive de simetrie

$$\vdash (\mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_1) \to (\mathcal{E}(\mathcal{A}_1) \to \mathcal{E}(\mathcal{A}_2)).$$

Observaţia 4.1. Orice formulă este monoton crescătoare după ea însăşi adică $\vdash (\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2) \to (\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2)$.

Aceasta rezultă din $\vdash A \to A$ ([3], cap. II, § 2) prin $\int_{A}^{\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2} (A \to A)$.

DEFINIŢIA 4.2. Părţile care produc acelaşi tip de monotonie (crescătoare sau descrescătoare) într-o formulă le numim părţi *izotipice în* acea formulă iar formulele avînd părţi care produc acelaşi tip de monotonie le vom numi formule *izotipice peste* acele părţi.

LEMA 4.1. *Orice formulă este monotonă după fiecare parte a sa de ordinul I și anume: crescătoare după părțile pozitive și descrescătoare după cele negative.*

Demonstrația se efectuează ținînd seama de definiția 1.1. a și analizînd fiecare caz în parte, ([3], cap. II, § 5).

LEMA 4.2. a) *Dacă formula* $\mathcal{E}$ *este monoton crescătoare* (*descrescătoare*) *după* $\mathcal{A}$ *iar* $\mathcal{A}$ *este monoton crescătoare* (*descrescătoare*) *după* $\mathcal{B}$ *astfel că*

$$(\forall \mathcal{B})\quad (\mathcal{B} \in \mathcal{A}), \tag{4.1}$$

atunci $\mathcal{E}$ *este monoton crescătoare după* $\mathcal{B}$.

b) *Dacă formula* $\mathcal{E}$ *este monoton crescătoare* (*descrescătoare după* $\mathcal{A}$ *iar* $\mathcal{A}$ *este monoton descrescătoare* (*crescătoare*) *după* $\mathcal{B}$ *cu condiția* (*4.1*), *atunci* $\mathcal{E}$ *este monoton descrescătoare după* $\mathcal{B}$.

Demonstrație. Din monotonia crescătoare a părții $\mathcal{A}$ după $\mathcal{B}$:

$$\vdash (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) \to (\mathcal{A}(\mathcal{B}_1) \to \mathcal{A}(\mathcal{B}_2)) \tag{4.2}$$

și din monotonia crescătoare a formulei $\mathcal{E}$ după $\mathcal{A}$

$$\vdash (\mathcal{A}(\mathcal{B}_1) \to \mathcal{A}(\mathcal{B}_2)) \to (\mathcal{E}(\mathcal{A})\mathcal{B}_1)) \to \mathcal{E}(\mathcal{A}(\mathcal{B}_2))) \tag{4.3}$$

prin tranzitivitate, ținînd cont de (4.1), obținem

$$\vdash (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) \to (\mathcal{E}(\mathcal{B}_1) \to \mathcal{E}(\mathcal{B}_2))$$

deci $\mathcal{E}$ este monoton crescătoare după $\mathcal{B}$.

În cazul că ambele monotonii sînt descrescătoare avem:

$$\vdash (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) \to (\mathcal{A}(\mathcal{B}_2) \to \mathcal{A}(\mathcal{B}_1)) \text{ respectiv} \tag{4.2'}$$

$$\vdash (\mathcal{A}(\mathcal{B}_2) \to \mathcal{A}(\mathcal{B}_1)) \to (\mathcal{E}(\mathcal{A}(\mathcal{B}_1)) \to \mathcal{E}(\mathcal{A}(\mathcal{B}_2))) \tag{4.3'}$$

care prin tranzitivitate, pe baza acelorași considerente, ne conduc la aceeași concluzie.

Analog se demonstrează și punctul b.

Remarcă. În cazul că prin $\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}_1} \mathcal{E}(\mathcal{A})$, sau $\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}_2} \mathcal{E}(\mathcal{A})$ se produce coliziune, adică unele variabile din $\mathcal{B}_1$ sau $\mathcal{B}_2$ figurează și în restul formulei $\mathcal{E}(\mathcal{B}_1)$ respectiv $\mathcal{E}(\mathcal{B}_2)$, lema rămîne valabilă. Într-adevăr, pe baza teoremei 2.3, pentru $\mathcal{B}_1$ și $\mathcal{B}_2$ există $\mathcal{B}'_1$ și $\mathcal{B}'_2$ care să conțină variabile arbitrare (deci putem alege acele variabile care nu produc coliziune) și astfel încît:

$$\vdash \mathcal{B}'_1 \to \mathcal{B}_1 \tag{1}$$

respectiv

$$\vdash \mathcal{B}_2 - \mathcal{B}'_2 \tag{2}$$

Din (1), (2) și $\vdash \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ rezultă $\vdash \mathcal{B}'_1 \to \mathcal{B}'_2$, cu care se elimină coliziunea. Or, lema nu depinde de alegerea părților $\mathcal{B}_1$ și $\mathcal{B}_2$.

COROLARUL 4.1. *Dacă* $\mathcal{E}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *este monoton crescătoare* (*descrescătoare*) *după* $\mathcal{A}$ *și* $\mathcal{B}$ *iar acestea la rîndul lor sînt monoton crescătoare* (*descrescătoare*) *după* $\mathcal{C}$, *cu condiția*

$$(\forall \mathcal{C})\quad (\mathcal{C} \in \mathcal{A} \vee \mathcal{C} \in \mathcal{B}) \tag{4.4}$$

atunci $\mathcal{E}$ *este monoton crescătoare* (*descrescătoare*) *după* $\mathcal{C}$.

Demonstrație. Cu notația:

$$\mathcal{C} = \begin{cases} \mathcal{C}_{\mathcal{A}} \text{ dacă } \mathcal{C} \in \mathcal{A} \\ \mathcal{C}_{\mathcal{B}} \text{ dacă } \mathcal{C} \in \mathcal{B} \end{cases}$$

condiția (4.4) devine: $(\forall \mathcal{C}_{\mathcal{A}})\ (\forall \mathcal{C}_{\mathcal{B}})\ (\mathcal{C}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}\ \&\ \mathcal{C}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B})$.

Aplicăm lema 4.2. a formulei $\mathcal{E}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ pentru $\mathcal{A}$ și obținem că $\mathcal{E}(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}, \mathcal{B})$ este monoton crescătoare (descrescătoare) după $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$, apoi aplicînd aceeași lemă pentru $\mathcal{B}$, obținem că $\mathcal{E}(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}, \mathcal{C}_{\mathcal{B}}) = \mathcal{E}(\mathcal{C})$ este monoton crescătoare (descrescătoare) după $\mathcal{C}$.

Cu lema 4.2.b se demonstrează la fel următorul:

COROLARUL 4.2. *Dacă* $\mathcal{E}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *este monoton crescătoare* (*descrescătoare*) *după* $\mathcal{A}$ *și* $\mathcal{B}$ *iar acestea sînt monoton descrescătoare* (*crescătoare*) *după* $\mathcal{C}$, *cu condiția* (4.4), *atunci* $\mathcal{E}$ *este monoton descrescătoare după* $\mathcal{C}$.

Generalizare. Dacă în $\mathcal{E}(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m)$ părțile $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m$ sînt izotipice în $\mathcal{E}$ și peste $\mathcal{C}$ cu condiția

$$(\forall \mathcal{C})\,(\bigvee_{i=1}^{m}(\mathcal{C} \in \mathcal{A}_i)),$$

atunci $\mathcal{E}(\mathcal{C})$ este monoton crescătoare sau descrescătoare după $\mathcal{C}$ așa cum monotonia lui $\mathcal{E}$ după $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m$ este sau nu de același tip cu monotonia părților respective.

Observația 4.2. Simbolul „$\in$" poate fi înlocuit peste tot cu „$\underset{n}{\in}$".

TEOREMA 4.1. *Orice formulă izolată este monotonă după fiecare parte a sa.*

Demonstrație. Pentru părțile de ordinul I rezultă din lema 4.1.

Admitem că orice formulă izolată este monotonă după toate părțile sale de ordinul $n - 1$. Conform definiției 1.1.b, părțile de ordin n sînt părți de ordinul I ale celor de ordin $n - 1$. Așadar, părțile de ordinul $n - 1$ sînt monotone după cele de ordinul n. Aplicînd lema 4.2 obținem că formula însăși este monotonă după părțile sale de ordin n. Deci ea este monotonă după toate părțile sale, de orice ordin.

DEFINIȚIA 4.3. Monotonia după vîrful unui lanț o vom numi monotonie *indusă*.

DEFINIȚIA 4.4. Lanțul cu un număr impar de verigi negative îl numim *lanț negativ* iar celelalte — *lanțuri pozitive.*

Observația 4.3. Lanțurile corespunzătoare din formulele $\mathcal{E}$ și $\overline{\mathcal{E}}$ sînt contrare (căci orice lanț din $\mathcal{E}$ va avea în $\overline{\mathcal{E}}$ cu o verigă negativă mai mult și anume chiar pe $\overline{\mathcal{E}}$).

TEOREMA 4.2. *Dacă* $\mathcal{E}$ *este izolată, atunci orice lanț pozitiv* (*negativ*) *al său induce monotonie crescătoare* (*descrescătoare*).

Demonstrație. Formula fiind izolată, din definiția 4.3 și teorema 4.1 rezultă că orice lanț al său induce o monotonie. Din lema 4.1 rezultă că fiecare verigă pozitivă (negativă) produce în precedenta sa monotonie crescătoare (descrescătoare), care pe baza lemei 4.2 se transmite din verigă în verigă schimbînd tipul monotoniei ori de cîte ori se referă la o verigă negativă. Dacă vîrful unui lanţ pozitiv este pozitiv, monotonia produsă de acest vîrf în veriga precedentă, fiind crescătoare şi schimbîndu-se de un număr par de ori, rămîne crescătoare. Dacă vîrful unui asemenea lanţ este negativ, monotonia produsă de acest vîrf fiind descrescătoare şi schimbîndu-se de un număr impar de ori (deoarece în afara vîrfului au rămas un număr impar de verigi negative), devine crescătoare.

Cazul în care lanţul este negativ se tratează la fel.

TEOREMA 4.3. *Dacă toate lanţurile tangente ale formulei* $\mathcal{S}$ *sînt de acelaşi tip* (*pozitive sau negative*), *atunci formula este monotonă după orice parte a sa.*

Demonstraţie. Dacă formula este izolată, concluzia rezultă din teorema 4.1. Fie deci: $\mathcal{S}(\mathcal{A}) = \mathcal{S}(\mathcal{A}^{(1)}, \ldots, \mathcal{A}^{(m)})$, unde

$$\mathcal{A}^{(1)} = \ldots = \mathcal{A}^{(m)} = \mathcal{A} \tag{4.5}$$

numai că aparţin exclusiv la m lanţuri diferite. Aceste lanţuri sau sînt tangente în $\mathcal{A}^{(k)} = \mathcal{A}$ şi deci trebuie să fie de acelaşi tip, sau sînt secante în $\mathcal{A}$ şi atunci există sublanţuri tangente în $\mathcal{A}$ (observaţia 1.3) care de asemenea trebuie să fie de acelaşi tip.

Aşadar, $\mathcal{A}^{(1)}, \ldots, \mathcal{A}^{(m)}$ sînt izotipice în $\mathcal{S}$ (prin ipoteză) şi peste $\mathcal{A}$ (conform observaţiei 4.1, ţinînd cont de (4.5)) şi cum $\forall(\mathcal{A}) \left(\bigvee_{k=1}^{m} (\mathcal{A} \underset{0}{\in} \mathcal{A}^{(k)})\right)$ (după (4.5) şi definiţia 1.1.c) cu observaţia 4.2, condiţiile generalizării sînt satisfăcute, deci şi concluzia — în cazul $\mathcal{C} = \mathcal{A}$ — adică teorema.

★

În paragrafele precedente am dat definiţii şi am expus cîteva criterii de comparabilitate şi monotonie a formulelor. Aceste criterii se pot utiliza pentru unele simplificări în practica demonstraţiilor după cum rezultă şi din următoarea

TEOREMĂ FUNDAMENTALĂ. *Condiţia necesară şi suficientă ca substituţia* $\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \mathcal{S}(\mathcal{A})$ *să fie permisă este ca* $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ *să fie monoton crescătoare* (*descrescătoare*) *după* $\mathcal{A}$ *iar* $\mathcal{A}$ *să fie mai tare* (*mai slabă*) *ca* $\mathcal{B}$.

Demonstraţie. Fie $\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \mathcal{S}(\mathcal{A})$ permisă. În cazul că $\vdash \mathcal{S}(\mathcal{A}) \equiv \mathfrak{R}$ rezultă $\vdash \mathcal{S}(\mathcal{B}) \equiv \mathfrak{R}$, unde $\mathcal{S}(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \mathcal{S}(\mathcal{A}) \,|$. Aplicînd în $\vdash B \rightarrow \mathfrak{R}$ substituţia $\int_{B\ \ \mathfrak{R}}^{\mathcal{S}(\mathcal{A})\ \mathcal{S}(\mathcal{B})} (B \rightarrow \mathfrak{R})$, care este permisă conform observaţiei 3.3 şi teoremei 3.3, rezultă că $\vdash \mathcal{S}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{B})$ şi cu atît mai mult

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \vdash \mathcal{S}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{B}) \text{ sau}$$

$$\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \vdash \mathcal{S}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{B})$$

care cu teorema deducţiei ([3], cap. II, § 3) ne dau condiţiile de monotonie.

Dacă $\vdash \mathcal{S}(\mathcal{A}) = \mathfrak{F}$, aplicăm substituția permisă $\int_{\mathfrak{F}\quad(\mathcal{A})}^{\mathcal{S}(\mathcal{A})\,\mathcal{S}(\mathcal{B})} (\mathfrak{F} \to A)$ și obținem $\vdash \mathcal{S}(\mathcal{A}) \to \mathcal{S}(\mathcal{B})$, din care în același mod rezultă condițiile de monotonie.

Conform cu $\vdash (A \equiv \mathfrak{R}) \vee (A \equiv \mathfrak{F})$ ([3], cap. II, § 7), cazurile sînt epuizate și necesitatea demonstrată.

Fie $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ monoton crescătoare după $\mathcal{A}$ și $\mathcal{A}$ mai tare ca $\mathcal{B}$, deci

$$\vdash (\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{S}(\mathcal{A}) \to \mathcal{S}(\mathcal{B})) \qquad \text{(definiția 4.1.) și}$$

$$\vdash \mathcal{A} \to \mathcal{B}.$$

Prin separație obținem $\vdash \mathcal{S}(\mathcal{A}) \to \mathcal{S}(\mathcal{B})$. Dacă $\vdash \mathcal{S}(\mathcal{A}) \equiv \mathfrak{R}$ adică $\vdash \mathcal{S}(\mathcal{A})$, separăm încă o dată în formula obținută și rezultă $\vdash \mathcal{S}(\mathcal{B})$, deci $\vdash \mathcal{S}(\mathcal{B}) \equiv \mathfrak{R}$ și conform definiției 3.5 substituția $\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \mathcal{S}(\mathcal{A})$ este permisă.

În cazul monotoniei descrescătoare, suficiența se demonstrează la fel.

Primită la redacție la 15 februarie 1968

Institutul pedagogic Cluj

LA MONOTONIE DANS LE CALCUL DES PROPOSITIONS

(RÉSUMÉ)

Dans la première partie du travail on donne quelques définitions concernant les parties d'une formule du calcul des propositions. Avec celles-ci on passe à l'étude de la comparabilité et surtout de la monotonie générale, c'est-à-dire concernant les parties — non seulement celles élémentaires — de la formule.

De même on généralise la méthode de la substitution dans ce calcul, en traitant le cas de la substitution permise — c'est-à-dire celle qui conserve les identités. Enfin, on énonce et démontre une condition nécessaire et suffisante pour qu'une substitution quelconque soit permise.

BIBLIOGRAFIE

1. Клини С. К., *Введение в метаматематику*, Москва, 1957.
2. Asser G., *Einführung in die mathematische Logik*, t. I, Leipzig, 1965.
3. Novikov P. S., *Elemente de logica matematică*. București, 1966.

GENERALIZAREA UNEI PROBLEME DE MIȘCARE PLANĂ CU LINII LIBERE

DE

DAN BUTCULESCU

În cadrul teoriei mișcărilor cu suprafețe de discontinuitate, lucrarea generalizează o problemă studiată de Iu. M. Kurepanov [1]. Considerînd două izvoare pe axa de simetrie a mișcării, se obțin formulele din [1] prin trecere la limită.

1. Schema mișcărilor cu suprafețe de discontinuitate imaginată de Helmholtz pentru a înlătura paradoxul lui d'Alembert în cadrul teoriei fluidelor perfecte nu a încetat de a fi în atenția cercetătorilor. Recent Iu. M. Kurepanov a studiat o problemă care constituie o generalizare a cazului clasic studiat de Helmholtz. În cele ce urmează vom da o extindere a problemei considerate în [1], ceea ce poate prezenta interes cel puțin din punct de vedere teoretic.

2. Fie un fluid perfect incompresibil în mișcare staționară irotațională plană animat la infinit de viteza $\vec{V}_\infty$ paralelă la axa Ox. Pe axa Ox la distanțe date de origine, L_1 și L_2 ($L_1 < L_2$), considerăm două izvoare de debite date $-q$ și q, iar pe axa Oy o placă de lungime dată 1 (fig. 1).

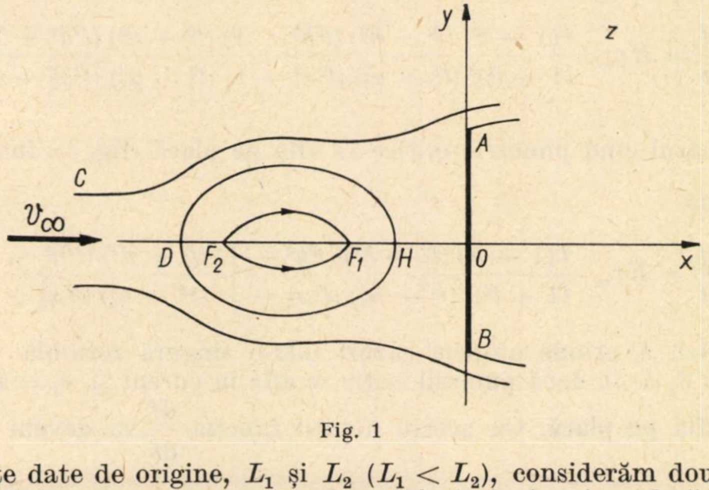


Fig. 1

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 4, P. 553–559, BUCUREȘTI, 1969

Problema va consta în determinarea transformării conforme a domeniului de variaţie a potenţialului complex f şi a funcţiei $\frac{1}{v_\infty}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$ pe un anumit domeniu canonic. Acest domeniu va fi luat ca în [2], semicercul unitar superior cu centrul în originea axelor de coordonate ale

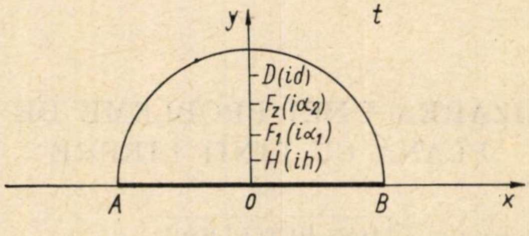


Fig. 2

unui plan ajutător $t = t_1 + it_2$ (fig. 2). Vom nota punctele corespunzătoare cu aceleaşi litere ca în planul fizic $z = x + iy$.

Să observăm că dacă se cunosc singularităţile şi zerourile funcţiei $f(t)$ în semicerc, folosind principiul simetriei [3] (ceea ce este posibil deoarece pe frontiera domeniului $\mathrm{Im}\,\{f\} = 0$) vom putea şti care sînt zerourile şi punctele singulare ale acestei funcţii în tot planul t.

Se vede că pe axa de simetrie vom avea punctele de viteză nulă D, H şi O iar în punctele F_1 şi F_2 vom avea singularităţi logaritmice. Astfel funcţia $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ va fi o funcţie raţională, avînd poluri de ordinul 3 în punctele i şi $-i$, poluri de ordinul întîi în punctele $i\alpha_1$, $-i\alpha_1$; $i\alpha_1^{-1}$, $-i\alpha_1^{-1}$ şi $i\alpha_2$, $-i\alpha_2$; $i\alpha_2^{-1}$, $-i\alpha_2^{-1}$, iar în punctele 0, 1, -1; id, $-id$; id^{-1}, $-id^{-1}$ şi ih, $-ih$; ih^{-1}, $-ih^{-1}$ vor exista zerouri. Deci

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = Kv_\infty \frac{t(1-t^2)(t^2+h^2)(t^2h^2+1)(t^2+d^2)(t^2d^2+1)}{(1+t^2)^3(t^2+\alpha_1^2)(t^2\alpha_1^2+1)(t^2+\alpha_2^2)(t^2\alpha_2^2+1)}. \tag{1}$$

În cazul cînd punctele critice se află pe placă (fig. 3), funcţia $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ va avea forma

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = Kv_\infty \frac{t(1-t^2)(t^2-h^2)(t^2h^2-1)(t^2+d^2)(t^2d^2+1)}{(1+t^2)^3(t^2+\alpha_1^2)(t^2\alpha_1^2+1)(t^2+\alpha_2^2)(t^2\alpha_2^2+1)}. \tag{2}$$

Pentru a prinde ambele cazuri într-o singură formulă vom pune $\delta_1 = id$ şi $\delta_2 = ih$ dacă punctul critic se află în curent şi $\delta_1 = id$, $\delta_2 = h$ dacă se află pe placă. Cu aceste notaţii funcţia $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ va deveni

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = Kv_\infty \frac{t(1-t^2)(t^2-\delta_1^2)(t^2\delta_1^2-1)(t^2-\delta_2^2)(t^2\delta_2^2-1)}{(1+t^2)^3(t^2+\alpha_1^2)(t^2\alpha_1^2+1)(t^2+\alpha_2^2)(t^2\alpha_2^2+1)}. \tag{3}$$

Cunoscînd punctele critice ale mişcării putem determina funcţia $\frac{1}{v_\infty}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$, ţinînd seama că $\mathrm{Re}\left[\frac{1}{v_\infty}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right] = 0$ pe axa reală şi că $\left|\frac{1}{v_\infty}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right| = 1$ pe $|t| = 1$. În interiorul domeniului, zerourilor le vor corespunde zerouri iar polurilor poluri, în exterior prin inversiune faţă de cerc zerourilor

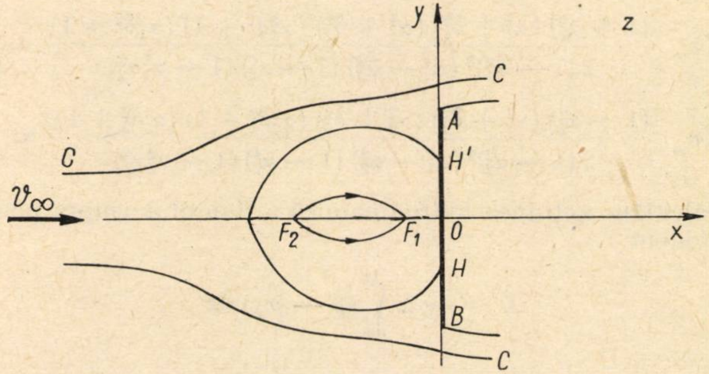


Fig. 3

le vor corespunde poluri, iar polurilor zerouri; în definitiv funcţia $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$ va avea următoarea formă:

$$\frac{1}{v_\infty}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = -i\,\frac{t(t^2-\delta_1^2)(t^2-\delta_2^2)(1+\alpha_1^2t^2)(1+\alpha_2^2t^2)}{(1+\delta_1^2t^2)(1-\delta_2^2t^2)(t^2+\alpha_1^2)(t^2+\alpha_2^2)}. \tag{4}$$

Din formulele (3) şi (4) găsim:

$$z(t) = \frac{1}{v_\infty}\int_0^t \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}f}\cdot\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}.\,\mathrm{d}t = iK\int_0^t \frac{(1-t^2)(1-\delta_1^2t^2)(1-\delta_2^2t^2)^2}{(1-t^2)^3(1+\alpha_1^2t^2)^2(1+\alpha_2^2t^2)^2}\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Avînd transformarea conformă putem scrie relaţiile care leagă datele problemei (L_1, L_2, l, q, v_∞) de parametrii necunoscuţi δ_1, δ_2, α_1, α_2 şi K.

În primul rînd

$$l = 2K\int_0^1 \frac{(1-t^2)(1-\delta_1^2t^2)^2(1-\delta_2^2t^2)^2}{(1+t^2)^3(1+\alpha_1^2t^2)^2(1+\alpha_2^2t^2)^2}\,\mathrm{d}t, \tag{6}$$

$$L_1 = iK\int_0^{i\alpha_1} \frac{(1-t^2)(1-\delta_1^2t^2)^2(1-\delta_2^2t^2)^2}{(1+t^2)^3(1+\alpha_1^2t^2)^2(1+\alpha_2^2t^2)^2}\,\mathrm{d}t, \tag{7}$$

$$L_2 = iK\int_0^{i\alpha_2} \frac{(1-t^2)(1-\delta_1^2t^2)^2(1-\delta_2^2t^2)^2}{(1+t^2)^3(1+\alpha_1^2t^2)(1+\alpha_2^2t^2)^2}\,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

Condiția că debitele celor două izvoare sînt date se exprimă scriind că

$$\mathrm{Re}\, z \left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right]_{t=i\alpha_1} = \frac{q}{2\pi}, \quad \mathrm{Re}\, z \left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right]_{t=i\alpha_2} = -\frac{q}{2\pi} \tag{9}$$

adică

$$Kv_\infty \frac{(1+\alpha_1^2)(\alpha_1^2+\delta_1^2)(\alpha_1^2+\delta_2^2)(\alpha_1^2\delta_1^2+1)(\alpha_1^2\delta_2^2+1)}{2(1-\alpha_1^2)^3(\alpha_1^2-\alpha_2^2)(1-\alpha_1^4)(1-\alpha_1^2\alpha_2^2)} = \frac{q}{2\pi}$$

$$Kv_\infty \frac{(1+\alpha_2^2)(\alpha_2^2+\delta_1^2)(\alpha_2^2+\delta_2^2)(\alpha_2^2\delta_1^2+1)(\alpha_2^2\delta_2^2+1)}{2(1-\alpha_2^2)^3(\alpha_1^2-\alpha_2^2)(1-\alpha_2^4)(1-\alpha_2^2\alpha_1^2)} = -\frac{q}{2\pi}. \tag{9'}$$

Să calculăm acțiunea hidrodinamică a fluidului asupra plăcii. Avem în mod evident

$$X = -2i\int_0^A (p-p_\infty)\,\mathrm{d}z$$

adică

$$X = -i\rho v_\infty^2 \int_0^A \left(1-\frac{v^2}{v_\infty^2}\right)\mathrm{d}z = -\rho v_\infty \int_0^A \mathrm{d}z + i\rho\int_0^A \frac{\overline{\mathrm{d}f}}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{\rho v_\infty l}{2} + i\rho\int_0^1 \frac{\overline{\mathrm{d}f}}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t.$$

Deoarece pe placă

$$\frac{\overline{\mathrm{d}f}}{\mathrm{d}t} = iv_\infty \frac{t(t^2-\delta_1^2)(t^2-\delta_2^2)(1+\alpha_1^2t^2)(1+\alpha_2^2t^2)}{(1-\delta_1^2t^2)(1-\delta_2^2t^2)(t^2+\alpha_1^2)(t^2+\alpha_2^2)},$$

atunci

$$X = \frac{\rho v_\infty l}{2}\left[1-2\frac{K}{l}\int_0^1 \frac{t^2(1-t^2)(t^2-\delta_1^2)^2(t^2-\delta_2^2)^2}{(1+t^2)^3(t^2+\alpha_1^2)^2(t^2+\alpha_2^2)^2}\,\mathrm{d}t\right]. \tag{10}$$

Punînd în (5) $t = e^{i\rho}$ și separînd partea reală de cea imaginară, obținem ecuațiile parametrice ale liniilor libere (AC, BC). Notînd cu:

$$\Psi = 2\left[\operatorname{arctg}\frac{-(\alpha_1^2+\delta_1^2)\sin 2\varphi}{(1-\alpha_1^2\delta_1^2)+(\alpha_1^2-\delta_1^2)\cos 2\varphi} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arctg}\frac{-(\alpha_2^2+\delta_2^2)\sin 2\varphi}{(1-\alpha_2^2\delta_2^2)+(\alpha_2^2-\delta_2^2)\cos 2\varphi}\right],$$

se găseşte

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{l} &= \frac{\displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}\, \frac{(1-2\delta_1^2\cos 2\varphi+\delta_1^4)(1-2\delta_2^2\cos 2\varphi+\delta_2^4)}{(1+2\alpha_1^2\cos 2\varphi+\alpha_1^4)(1+2\alpha_2^2\cos 2\varphi+\alpha_2^4)} \sin(2\varphi-\Psi)\,\mathrm{d}\varphi}{\displaystyle 8\int_0^1 \frac{(1-t^2)(1-\delta_1^2t^2)^2(1-\delta_2^2t^2)^2}{(1+t^2)^3(1+\alpha_1^2t^2)^2(1+\alpha_2^2t^2)^2}\,\mathrm{d}t}, \\ \frac{y}{l} &= \frac{\displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}\, \frac{(1-2\delta_1^2\cos 2\varphi+\delta_1^4)(1-2\delta_2^2\cos 2\varphi+\delta_2^4)}{(1+2\alpha_1^2\cos 2\varphi+\alpha_2^4)(1+2\alpha_2^2\cos 2\varphi+\alpha_2^4)} \cos(2\varphi-\Psi)\,\mathrm{d}\varphi}{\displaystyle 8\int_0^1 \frac{(1-t^2)(1-\delta_1^2t^2)^2(1-\delta_2^2t^2)^2}{(1+t^2)^3(1+\alpha_1^2t^2)^2(1+\alpha_2^2t^2)^2}\,\mathrm{d}t}. \end{aligned}\right.$$

3. Făcînd $\alpha_1 \to \alpha_2 = \alpha$ vom obţine un caz limită al problemei precedente şi anume acela al existenţei în curent a unui dipol. Pentru aceasta să observăm că dacă $\alpha_1 \to \alpha_2$, atunci $q \to \infty$ (formula (9′)) iar distanţa

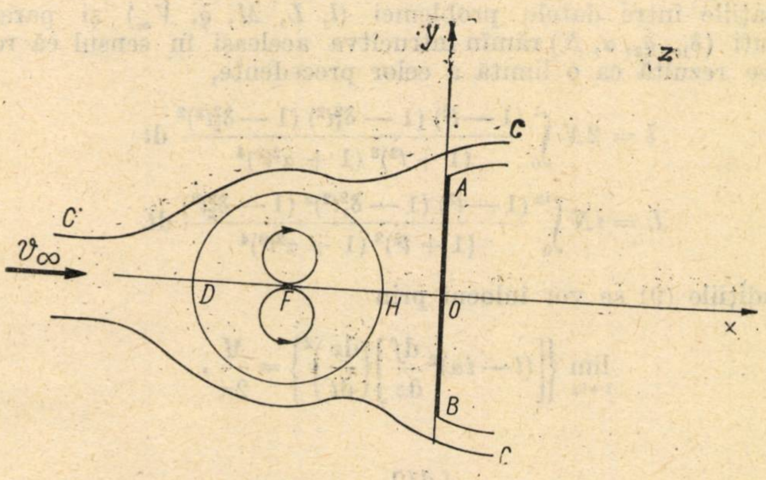


Fig. 4

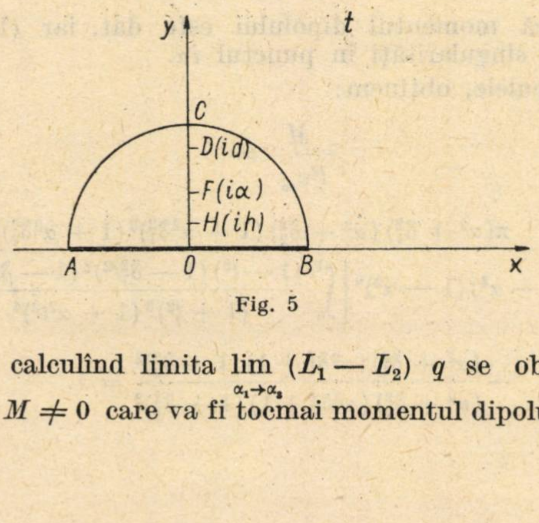


Fig. 5

$L_1 - L_2 \to 0$, şi calculînd limita $\lim\limits_{\alpha_1\to\alpha_2} (L_1 - L_2)\, q$ se observă că este o constantă finită $M \neq 0$ care va fi tocmai momentul dipolului (fig. 4 şi 5).

Prin trecere la limită formula (3) devine

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = Nv_\infty \frac{t(1-t^2)(t^2-\delta_1^2)(t^2-\delta_2^2)(t^2\delta_1^2-1)(t^2\delta_2^2-1)}{(1+t^2)^3(t^2+\alpha^2)^2(t^2\alpha^2+1)^2}, \tag{12}$$

unde constanta N satisface la condiția

$$\lim_{\alpha_1\to\alpha_2} K = N.$$

În mod analog se obțin expresiile vitezei complexe și a lui z ca funcție de t

$$\frac{1}{v_\infty}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = -i\,\frac{t(t^2-\delta_1^2)(t^2-\delta_2^2)(1+\delta\alpha^2t^2)^2}{(1-\delta_1^2t^2)(1-\delta_2^2t^2)(t^2+\alpha^2)^2}, \tag{13}$$

$$z(t) = iN\int_0^t \frac{(1-t^2)(1-\delta_1^2t^2)^2(1-\delta_2^2t^2)^2}{(1+t^2)^3(1+\alpha^2t^2)^4}\,\mathrm{d}t. \tag{14}$$

Relațiile între datele problemei (l, L, M, q, V_∞) și parametrii necunoscuți (δ_1, δ_2, α, N) rămîn întrucîtva aceleași în sensul că relațiile geometrice rezultă ca o limită a celor precedente,

$$l = 2N\int_0^1 \frac{(1-t^2)(1-\delta_1^2t^2)(1-\delta_2^2t^2)^2}{(1+t^2)^3(1+\alpha^2t^2)^4}\,\mathrm{d}t \tag{15}$$

$$L = iN\int_0^{i\alpha} \frac{(1-t^2)(1-\delta_1^2t^2)^2(1-\delta_2^2t^2)}{(1+t^2)^3(1+\alpha^2t^2)^4}\,\mathrm{d}t. \tag{16}$$

Condițiile (9) se vor înlocui prin

$$\lim_{t\to i\alpha}\left\{\left[(t-i\alpha)^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right]\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\} = \frac{M}{2\pi}, \tag{17}$$

și

$$\operatorname{Re} z\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right]_{t=i\alpha} = 0; \tag{18}$$

(17) exprimînd că momentul dipolului este dat, iar (18) că funcția f nu mai are alte singularități în punctul $i\alpha$.

Făcînd calculele, obținem:

$$\frac{M}{l^2v_\infty} =$$

$$= -\frac{\pi(\alpha^2+\delta_1^2)(\alpha^2+\delta_2^2)(1+\alpha^2\delta_1^2)^3(1+\alpha^2\delta_2^2)^3}{8\alpha(1-\alpha^4)(1-\alpha^2)^8\left[\int_0^1 \frac{(1-t^2)(1-\delta_1^2t^2)^2(1-\delta_2^2t^2)^2}{(1+t^2)^3(1+\alpha^2t^2)^4}\,\mathrm{d}t\right]^2} \tag{17'}$$

$$-\frac{(\alpha^2+\delta_1^2)(\alpha^2\delta_1^2+1)(1+\delta_2^2)^2}{(\alpha^2+\delta_2^2)(\alpha^2\delta_2^2+1)(1+\delta_1^2)^2} = 1. \tag{18'}$$

Punînd în (14) $t = e^{i\varphi}$ şi separînd partea reală de cea imaginară (sau pur şi simplu $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ în (11)), obţinem ecuaţiile parametrice ale liniilor libere

$$\frac{x}{l} = \frac{\displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi} \cdot \frac{(1-2\delta_1^2\cos 2\varphi + \delta_1^4)(1-2\delta_2^2\cos 2\varphi + \delta_2^4)}{(1+2\alpha^2\cos 2\varphi + \alpha^4)^2} \sin(2\varphi-\Phi)\,\mathrm{d}\varphi}{\displaystyle 8\int_0^1 \frac{(1-t^2)(1-\delta_1^2t^2)^2(1-\delta_2^2t^2)^2}{(1+t^2)^3(1+\alpha^2t^2)^4}\,\mathrm{d}t},$$

$$\frac{y}{l} = \frac{\displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi} \frac{(1-2\delta_1^2\cos 2\varphi + \delta_1^4)(1-2\delta_2^2\cos 2\varphi + \delta_2^4)}{(1+2\alpha^2\cos 2\varphi + \alpha^4)^2} \cos(2\varphi-\Phi)\,\mathrm{d}\varphi.}{\displaystyle 8\int_0^1 \frac{(1-t^2)(1-\delta_1^2t^2)^2(1-\delta_2^2t^2)^2}{(1+t^2)^3(1+\alpha^2t^2)^4}\,\mathrm{d}t.} \tag{19}$$

unde

$$\Phi = \lim_{\alpha_1\to\alpha_2} \Psi. \tag{20}$$

Menţionăm că formulele (12) — (19) au fost obţinute de Iu. M. Kurepanov.

Primită la redacţie la 25 mai 1968

PROBLÈME DE MOUVEMENT PLAN AVEC DES LIGNES LIBRES

(RÉSUMÉ)

Dans le cadre des mouvements avec des surfaces de discontinuité, ce travail généralise un problème étudié par Iu. M. Kurepanov [1]. En considérant deux sources sur l'axe de symétrie du mouvement, on obtient les formules de [1] par un processus de passage aux limites.

BIBLIOGRAFIE

1. Ю. М. Курепанов, *Струйное обтекание пластинки при наличии в потоке неподвижного диполя*, Труды Семинара по краевым задачам, вып. 3, Kazan, 1966, p. 18.
2. М. И. Гуревич, *Теория струй идеальной жидкости*, Физматгиз, Moscova, 1961.
3. М. А. Лаврентиев и Б. В. Шабат, *Методы теории функции комплексного переменного*, Физматгиз, Moscova, 1958.

CONFIGURAȚII DE ORDIN INFINIT

DE

CORNEL CÎȘLARU

Se continuă cercetările din [1] și [4] referitoare la configurații transfinite, apoi se arată că un limbaj care conține configurații de orice ordin finit nu poate fi generat de o gramatică cu un număr finit de stări.

§ 1. DEFINIȚII ȘI NOTAȚII

Vom aminti cîteva definiții și notații din teoria algebrică a gramaticii [6].

Un limbaj L este un triplet $\{V, P, F\}$, unde V este o mulțime finită (vocabular), P o partiție a lui V și F o parte a semigrupului liber generat de V. Elementele din F se numesc fraze marcate.

O structură este un șir finit de elemente din partiție.

Se numește P-structură a unei fraze $A = x_1 x_2 \ldots x_n$ cu $x_i \in V$ imaginea acestei fraze în aplicația $x_i \rightarrow P(x_i)$, $P(x_i)$ fiind acel termen al partiției care-l conține pe x_i; vom folosi termenul de structură în aceeași accepție. O structură este marcată dacă este imaginea unei fraze marcate.

Notăm cu $\$_0$ mulțimea structurilor (le vom numi de rang 0).

Dacă x este o structură, prin $|x|$ înțelegem lungimea sa.

Structurile x și y sînt echivalente față de o mulțime $\$ \subseteq \$_0$ dacă oricare ar fi $u, v \in \$_0$ astfel ca $uxv, uyv \in \$$, structurile uxv și uyv sînt simultan marcate sau nemarcate. Vom nota

$$x \sim y\ (\$).$$

O structură x este parazită față de $\$$ dacă pentru orice $u, v \in \$_0$ astfel ca $uxv \in \$$, uxv este nemarcată [6].

O structură x se numește configurație (P-configurație) Kulagina de rangul 1 [3] cu element rezultant $a \in V$ dacă

1) $|x| \geqslant 2$

2) $x \sim a\ (\$_0)$.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 4, P. 561—570, BUCUREȘTI, 1969

Vom scrie în acest caz $x \rightarrow a$.

O structură x este de rangul 1 dacă nu conţine configuraţii de rangul 1. Notăm cu $\mathcal{S}_1$ mulţimea structurilor de rangul 1. Presupunem că pentru $i < n$, $i \geqslant 1$ s-a definit configuraţia Kulagina de rangul i.

O structură x_n se numeşte configuraţie Kulagina de rang n cu rezultantă $a_n \in V$ dacă

1) $|x_n| \geqslant 2$

2) $x_n \sim a_n \quad (\mathcal{S}_{n-1})$

Vom scrie în acest caz $x_n \rightarrow a_n$.

O structură x este de rangul n dacă nu conţine configuraţii de rangul 1, 2, ..., n. Fie $\mathcal{S}_n$ mulţimea structurilor de rang n.

Fie $x_n \rightarrow a_n$, $n \geqslant 1$, o configuraţie Kulagina de rangul n; dacă a_n este conţinut în x_n (adică există două structuri b şi c pentru care $x_n = b a_n c$), atunci configuraţia se numeşte semiregulată [6].

În [6] s-a arătat că există următoarele incluziuni:

(1) $\mathcal{S}_0 \supseteq \mathcal{S}_1 \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{S}_n \supseteq \ldots$

(2) $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{C}_n \subseteq \ldots$

unde prin $\mathcal{C}_i$ s-a notat mulţimea configuraţiilor de rangul i.

Rangul minim al unei configuraţii este ordinul configuraţiei, iar rangul maxim al unei structuri este ordinul structurii.

Notăm $\mathcal{S}_\infty = \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathcal{S}_i$. O structură x este configuraţie Kulagina de rang infinit [6] cu element rezultant $a \in V$ dacă

1) $|x| \geqslant 2$

2) $x \sim a \quad (S_\infty)$.

Definiţia configuraţiei Gladkiĭ de rangul 1 [2] este la fel cu a configuraţiei Kulagina de rangul 1. Fie $i < n$, $i \geqslant 1$ şi fie definite configuraţiile Gladkiĭ de rangul i.

Structura x_n este o configuraţie Gladkiĭ de rangul n cu rezultantă $a_n \in V$ dacă pentru orice u, $v \in \mathcal{S}_0$ avem

1) $|x_n| \geqslant 2$;

2) dacă $u\, a_n\, v \in F$, atunci $u\, x_n\, v \in F$

dacă $u\, x_n\, v \in F \cap \mathcal{S}_{n-1}$, atunci $u\, a_n\, v \in F$.

O structură x se numeşte configuraţie Marcus (comunicare orală) de rangul 1 cu element rezultant $a \in V$ dacă pentru orice u, $v \in \mathcal{S}_0$ avem

1) $|x| \geqslant 2$;

2) dacă $u\, x\, v \in F$, atunci $u\, a\, v \in F$.

În mod recursiv o structură x_n se numeşte configuraţie Marcus de rangul n cu element rezultant a_n dacă pentru orice $u, v \in \$_0$ avem

1) $|x_n| \geqslant 2$;

2) dacă $u x_n v \in F \cap \$_{n-1}$, atunci $u a_n v \in F$.

O structură x este configuraţie Novotny [7], [8] de rangul 1 cu element rezultant y dacă

1) $|x| > |y|$;

2) $x \sim y$ $(\$_0 \cap F)$;

3) x nu e structură parazită.

Prin inducţie, o structură x_n este o configuraţie Novotny de rang n cu rezultantă y_n dacă:

1) $|x_n| > |y_n|$;

2) $x_n \sim y_n$ $(\$_{n-1} \cap F)$;

3) x nu e structură parazită.

Este vizibil că o configuraţie Novotny de rang n cu element rezultant y_n este configuraţie de rangul 1 pentru limbajul $L_{n-1} = \{V, F \cap \$_{n-1}\}$ şi reciproc.

§ 2. CONFIGURAŢII NOVOTNY PARTICULARE

Vom considera un caz particular de configuraţie Novotny, cazu în care $y = |1|$, adică $y = a \in V$.

PROPOZIŢIA 1. *O configuraţie Novotny particulară de rangul n, $n \geqslant 1$, este configuraţie Kulagina de rang n.*

Demonstraţie. Fie $x_n \to a$ o configuraţie Novotny particulară de rangul n, $n \geqslant 1$. Să arătăm că este configuraţie Kulagina de rang n, adică oricare ar fi $u, v \in \$_0$,

$$u x_n v, \quad u a_n v \in \$_{n-1} \tag{3}$$

Dacă

$$u x_n v \in F, \tag{4}$$

atunci

$$u a_n v \in F. \tag{5}$$

Într-adevăr, din (3) şi (4) rezultă că

$$u x_n v \in F \cap \$_{n-1} \tag{6}$$

şi deoarece x_n este configuraţie Novotny particulară de rangul 1 faţă de L_{n-1}, rezultă că

$$u a_n v \in F \cap \$_{n-1} \tag{7}$$

adică relaţia (5).

Dacă

$$u\,x_n v \notin F, \tag{8}$$

atunci

$$u\,a_n v \notin F. \tag{9}$$

Presupunem că

$$u\,a_n v \in F. \tag{10}$$

Din relaţiile (3) şi (10) rezultă că

$$u\,a_n v \in F \cap \mathcal{S}_{n-1} \tag{11}$$

folosind faptul că $x_n \to a_n$, obţinem

$$u\,x_n v \in F \cap \mathcal{S}_{n-1} \subset F. \tag{12}$$

Relaţiile (8) şi (12) sînt contradictorii deci avem (9).

Reciproca acestei propoziţii nu este adevărată, cum rezultă din exemplul următor:

Exemplul 1. Fie $L = \{V, F\}$, $V = \{a, b, c, d\}$, $F = \{c, abd^m b, d^n b, ad^k b, cd^m b\}$, unde $n, m, k = 0, 1, 2, \ldots$

Avem $ab \to c$ configuraţia Kulagina de rang 1

Fie $L_1 = \{V, F \cap \mathcal{S}_1\}$, unde

$$F \cap \mathcal{S}_1 = \{c, d^n b, ad^k b, cd^m b\} \text{ cu } n, m = 0, 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots$$

$db \to b$ configuraţie Kulagina de ordinul 2, dar nu este şi configuraţie Novotny particulară deoarece $adb \in \mathcal{S}_1 \cap F$ dar $ab \notin \mathcal{S}_1 \cap F$.

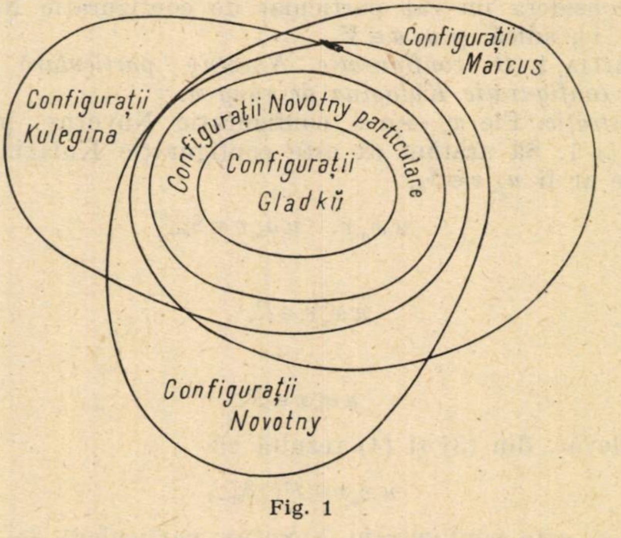

Configuraţii Marcus
Configuraţii Kulegina
Configuraţii Novotny particulare
Configuraţii Gladkiĭ
Configuraţii Novotny

Fig. 1

PROPOZIŢIA 2. *Orice configuraţie Gladkiĭ de rang n este configuraţie Novotny particulară de rang n; reciproca nefiind adevărată.*

Demonstraţia este similară celei date teoremei 8, cap. V din [6].

Raportul dintre cele cinci tipuri de configuraţii este dat în figură.

§ 3. CONFIGURAŢIILE REUNIUNII A DOUĂ LIMBAJE

Vom relua problema din [1] cu observaţia că în propoziţia 4 din [1] dintr-o eroare a autorului trebuie $L_3 = \{V, P, F_2 - F_3\}$ şi nu $L_3 = \{V, P, F_3\}$ cum apare în [1].

Ne vom ocupa de ordinul configuraţiilor ce se obţin după reuniune. Rezultatele din acest paragraf se aplică pentru toate configuraţiile de mai sus. O configuraţie de rangul 1 este şi de ordinul 1.

Prin recurenţă presupunem definite configuraţiile de ordin $k \leqslant n - 1$.

DEFINIŢIA 1. O configuraţie de rangul n, $x_n \to a_n$ este de ordinul n dacă şi numai dacă există o structură $x \in \mathcal{S}_{n-1} \cap F$ cu proprietăţile:

a) x conţine pe x_n şi o configuraţie de ordinul $n - 1$;

b) dacă $x = u\, x_n v \in \mathcal{S}_{n-1}$ şi fie

$$y = u\, a_n v \in \mathcal{S}_{n-1}$$

atunci

$$y \notin F.$$

Notăm $\mathcal{R}(x_n) = \langle x_n, x \rangle$. Rezultă că unei configuraţii de ordinul n i se poate ataşa un şir:

$$\mathcal{R}_1(x_2),\ \mathcal{R}_2(x_3),\ \ldots,\ \mathcal{R}_{n-1}(x_n) = \mathcal{R}(x_n) \tag{13}$$

cu proprietatea că în şirul de configuraţii $x_2, x_3, \ldots, x_n$ nu găsim două configuraţii de acelaşi ordin. Din acest motiv, toate şirurile ce se pot ataşa unei configuraţii de ordinul n nu au mai mult de $n - 1$ termeni.

Fie $L_1 = \{V, F_1\}$, $L_2 = \{V, F_2\}$ două limbaje şi fie $L = \{V, F_1 \cup F_2\}$. Notăm cu $\mathcal{C}_n^1$, $n \geqslant 1$, mulţimea configuraţiilor de rang n ale lui L_1 şi cu $\mathcal{C}_n^2$, $n \geqslant 1$, mulţimea configuraţiilor de rang n ale lui L_2.

PROPOZIŢIA 3. *Dacă*

a) $\mathcal{C}_{k_1}^1 - \mathcal{C}_{k_1-1}^1 = \mathcal{C}_{k_2}^2 - \mathcal{C}_{k_2-1}^2; \qquad k_1 < k_2$

b) *alte configuraţii de diferite ordine egale nu mai sînt*;

c) *toate configuraţiile lui L_1 şi L_2 sînt configuraţii pentru L*

d) *L nu are alte configuraţii decît cele provenite din L_1 şi L_2, atunci*

1) *configuraţiile de ordin k ale lui L_2 rămîn configuraţii de ordin k în L*;

2) *configuraţiile de ordin $k < k_1$ ale lui L_1 rămîn configuraţii de ordin k în L*;

3) *configuraţiile de ordin $k = k_1 + s$, $s \geqslant 0$ ale lui L_1 devin configuraţii de ordin $k_2 + s$ în L.*

Demonstraţie. Unei configuraţii de ordin k, $k < k_1$, din L_1 i se asociază un şir de lungime maximă $k - 1$, deoarece nu poate fi configuraţie pentru L_2 datorită condiţiilor b) şi d), rezultă că acelaşi şir maxim rămîne şi în L, deci configuraţia îşi păstrează ordinul.

O configuraţie de ordin k_1 din L_1 este şi configuraţie de ordin k_2 în L_2; rezultă că i se asociază un şir de lungime maximă $k_1 - 1$ în L_1 şi de lungime maximă $k_2 - 1$ în L_2, deci în L şirul de lungime maximă are $k_2 - 1$ termeni şi configuraţia are ordinul k_2.

Configuraţia de ordin $k_1 + s$, $s \geqslant 0$, în L_1 este legată cu un şir de lungime maximă $s - 1$ de o configuraţie de ordin k_1 în L_1; deoarece configurația de ordin k_1 din L_1 devine de ordin k_2 în L rezultă afirmația din teoremă.

O configurație de ordin $k \neq k_2$ a lui L_2 nu poate fi configurație şi pentru L_1, deci acelaşi şir de lungime maximă i se asociază atît în L_2 cît şi în L, deci configurația îşi păstrează acelaşi ordin. Configurației de ordin k_2 din L_2 i se asociază în L două şiruri, deoarece după a) este configurație şi pentru L_1. Deoarece $k_1 < k_2$, şirul de lungime maximă este $k_2 - 1$ şi configurația rămîne cu acelaşi ordin.

§ 4. CONFIGURAŢII DE ORDIN INFINIT

În [4] se demonstrează existența configurațiilor Gladkiĭ de ordin finit oricît de mare. Exemplul dat, generat de o gramatică independentă de context, poate fi uşor transformat pentru a obține configurații de ordin infinit.

PROPOZIŢIA 4. *Există configurații Novotny particulare de ordin infinit.*

Demonstrația este dată de exemplul următor, diferit de cel din [4]. În exemplul nostru configurațiile sînt semiregulate iar în [4] nu.

Exemplul 2. Fie $L = \{V, F\}$, unde

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

$$F = \left\{ \begin{array}{l} fg^n a \\ fg^k ad^{m_{11}} \\ fg^k ad^{m_{21}} (cb)^{m_{22}} \\ fg^k ad^{m_{31}} (cb)^{m_{32}} (ced)^{m_{33}} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ fg^k ad^{m_{2n-1,1}} (cb)^{m_{2n-1,2}} \ldots (c^n e^{n-1} b)^{m_{2n-1,2n-1}} \\ fg^k ad^{m_{2n,1}} (cb)^{m_{2n,2}} \ldots (c^n e^n d)^{m_{2n,2n}} \\ \vdots \end{array} \right\}$$

cu n, $m_{ij} = 0, 1, 2, 3, \ldots$; $i \geqslant j$; $k = 0, 1$.

Avem următoarele configurații:

$ad \longrightarrow a$ configurație Novotny particulară de ordinul 1
$acb \longrightarrow a$ „ „ „ „ „ 2
$aced \longrightarrow a$ „ „ „ „ „ 3

. . . .

$ac^n e^{n-1} b \to a$ „ „ „ „ „ $2n$
$ac^n e^n d \longrightarrow a$ „ „ „ „ „ $2n+1$

. . . .

$fg \to f$ „ „ „ „ „ ω

Alte configurații nu există. Într-adevăr, nu putem avea $c^r \to c$, $e^r \to e$ $r \geqslant 2$, deoarece c şi e intră numai în structuri de forma $c^n e^{n-1}$ sau $c^n e^n$.

Nu putem avea $bc \to a$, $bc \to b$, $bc \to c$, $bc \to d$ $bc \to e$ deoarece pentru $k = 0$, $m_{31} = 0$, $m_{32} = m_{33} = 1$ avem $facbced \in F$ în timp ce $facaed \notin F$; $facbed \notin F$; $fac^2ed \notin F$; $facded \notin F$ $face^2d \notin F$ şi în mod analog pentru dc.

Structurile marcate ale limbajului $L_n = \{V, F \cap \mathcal{S}_n\}$ sînt de aceeaşi formă cu ale limbajului L, deci avem configuraţii de acelaşi tip. Mai mult, aceste structuri sînt configuraţii Kulagina. Limbajul L poate fi generat de gramatica dependentă de context următoare:

$$G = \langle V, V_N, P, S \rangle \text{ unde}$$

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, S, A, B, C, I\} \text{ vocabularul total}$$

$$V_N = \{S, A, B, C\} \text{ vocabularul neterminal}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{lll} S \to fA & & S \to faB \\ A \to SgA & & S \to fgaB \\ A \to a & & B \to c^n e^n dC, n \geqslant 0 \\ & & B \to c^{n+1} e^n bC, n \geqslant 0 \\ C \to c^{n+s} e^{n+s} dC & \text{în contextul} & (c^n e^n d - I)\, s \geqslant 0, n \geqslant 0 \\ C \to c^{n+s+1} e^{n+s} bC & \text{în contextul} & (c^n e^n d - I)\, s \geqslant 0, n \geqslant 0 \\ C \to c^{n+s+1} e^{n+s+1} \mathrm{d}C & \text{în contextul} & (c^{n+1} e^n b - I)\, s \geqslant 0, n \geqslant 0 \\ C \to c^{n+s+1} e^{n+s} bC & \text{în contextul} & (c^{n+1} e^n b - I)\, s \geqslant 0, n \geqslant 0 \\ C \to I & & \end{array} \right\}$$

Prin → înţelegem operaţia de rescriere a gramaticii, S este axioma, iar I simbolul unitate. Vom arăta că limbajul L nu poate fi generat cu o gramatică independentă de context.

Presupunem prin absurd că există o gramatică G' independentă de context care generează pe L.

Fie

$$G' = \{V', V'_{N'}, P', S\}$$

$$V' = \{S, A_1, A_2 \ldots, A_r\}$$

$$V' - V'_N = V - V_N.$$

$$P' = \left\{ \begin{array}{l} S \to x_j^0,\ j = 1, 2, \ldots, j_0 \\ A_i \to x_j^i \quad j = 1, 2, \ldots, j_i \end{array} \right\}$$

r, j_0, j_i sînt numere finite iar x_j^0, $x_j^i \in V^*$.

Dacă notăm cu

$$z_{2n+1} = c^n e^n d, \; n \geqslant 0 \tag{14}$$

$$z_{2n+2} = c^{n+1} e^n b$$

limbajul L conţine următoarele fraze marcate:

$$y_i = faz_i, \; i = 1, 2, 3, \ldots \tag{15}$$

Frazele (15) fiind marcate, există o derivaţie de la S la y_i, notată $S \Rightarrow y_i$. În această derivaţie fie A_i simbolul neterminal cel mai la dreapta cu proprietatea că există derivaţia $A_i \Rightarrow u_i$, unde u_i este o frază pe vocabularul terminal care conţine sau coincide cu z_i. Avem deci

(16) $$S \Rightarrow w_i A_i \Rightarrow w_i u_i = y_i = faz_i ; u_i , w_i \in (V - V_N)^*$$

Deoarece numărul simbolurilor neterminale este finit, frazele (15) în număr infinit, avem

(17) $$A_{i_1} \Rightarrow u_{i_1}$$

$$A_{i_2} \Rightarrow u_{i_2} \text{ cu } i_1 < i_2 \text{ şi } A_{i_1} = A_{i_2}.$$

Limbajul L conţine şi frazele marcate

(18) $$\overline{y}_i = faz_1 z_2 \dots z_i , \qquad i = 1, 2, 3, \dots$$

Analog cu (16) şi folosind relaţiile (17) avem derivaţia

(19) $$S \Rightarrow v_1 A_{i_1} v_2 A_{i_2} \Rightarrow v_1 u_{i_1} v_2 u_{i_2} = \overline{y}_{i_2} \in F ; v_1 , v_2 \in (V - V_N)^*$$

dar şi derivaţia

(20) $$S \Rightarrow v_1 A_{i_2} v_2 A_{i_2} \Rightarrow v_1 u_{i_2} v_2 u_{i_1} \in F.$$

Din (20) rezultă că fraza $v_1 u_{i_2} v_2 u_{i_1}$ este marcată, dar în acelaşi timp ea nu aparţine lui L avîndu-l pe z_{i_2} înaintea lui z_{i_1}, rezultat absurd ce demonstrează că nu există gramatica G' independentă de context.

PPOPOZIŢIA 5. *Există configuraţii de ordin* $\omega + k$, 2ω, ..., $k\omega$, *unde* k *este un număr finit.*

Fie limbajele L din exemplul 2 şi $L_1 = \{V_1, F_1\}$ cu $V_1 = \{a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, g_1\}$ iar F_1 se obţine din F înlocuind pe a cu a_1, b cu $b_1, \dots g$ cu g_1. Dacă punem $a_1 = f$ şi $b_1 = g$ atunci configuraţia $fg \rightarrow f$ în L este de ordinul ω iar în L_1 de ordinul 1. Reuniunea L^* a lui L cu L_1 îndeplineşte condiţiile propoziţiei 3; deci configuraţia $fg \rightarrow f$ de ordinul 1 în L_1 va fi de ordinul ω în L^*, configuraţia $fc_1^n e_1^{n-1} g \rightarrow f$ de ordinul $2n$ în L_1 va fi de ordinul $\omega + 2n$ în L^* iar configuraţia $f_1 g_1 \rightarrow f_1$ de ordinul ω în L_1 va fi de ordinul 2ω în L^*.

În continuare vom da cîte un exemplu de configuraţie proprie Marcus şi Novotny de ordin infinit.

Exemplul 3. Fie $L = \{V, F\}$, unde

$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$F = \{a, e, a^2, d^2, bd^n c, bd^m cbd^p c, abd^2 c ; n \geqslant 0, m \geqslant 0, p > m, q \geqslant 1\},$$

conţine configuraţiile Marcus:

$bc \rightarrow a$ de ordinul 1

$bdc \rightarrow a$ de ordinul 2

$bd^n c \rightarrow a$ de ordinul $n + 1$

. . . .

$dd \rightarrow e$ de ordinul ω

Exemplul 4. Fie $L^* = \{V^*, F^*\}$, unde

$$V^* = \{a_1, a_2, b, c, d, e, f_1, f_2, g\}.$$

F^* se obţine din F de la exemplul 2 înlocuind pe a cu $a_1 a_2$ şi f cu $f_1 f_2$ şi adăugînd fraza marcată $f_1 a_1$.

Obţinem configuraţiile Novotny:

$a_1 a_2 d \rightarrow a_1 a_2$ de ordinul 1

$a_1 a_2 cb \rightarrow a_1 a_2$ de ordinul 2

. . . .

$a_1 a_2 c^n e^{n-1} b \rightarrow a_1 a_2$ de ordinul $2n$

$a_1 a_2 c^n e^n d \rightarrow a_1 a_2$ de ordinul $2n + 1$

. . . .

$f_1 f_2 g \rightarrow f_1 f_2$ de ordinul ω.

§ 5. NATURA LIMBAJELOR CARE CONŢIN CONFIGURAŢII DE ORDIN INFINIT

Are loc următoarea propoziţie valabilă pentru toate tipurile de configuraţii considerate mai sus.

PROPOZIŢIA 6. *Limbajul L care conţine configuraţii de orice ordin finit nu poate fi generat de o gramatică cu un număr finit de stări.*

Demonstraţie. Presupunem că există o gramatică $G = \{\mathcal{S}, \Sigma, \mathcal{T}\}$, unde $\mathcal{S}$ este o mulţime finită din n elemente—mulţimea stărilor, Σ o mulţime finită din m elemente — vocabularul, iar $\mathcal{T}$ o parte a produsului cartezian $N \times M \times N$, unde $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ şi $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, astfel ca $L = L_G$ [5]. Fără a restrînge generalitatea, putem lua $G \in F_4$ şi integral productivă. Conform teoremei 1, cap. II, [5], fiecare propoziţie din L este indusă de un singur ciclu fundamental. Numărul de cicle fundamentale ireductibile este finit, fie k numărul lor; de asemenea numărul ciclelor nefundamentale este finit, fie l numărul lor. (Pentru terminologie vezi [5], capitolul II.].

Notăm cu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ ciclele fundamentale ireductibile şi cu $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ ciclele nefundamentale ireductibile. Un ciclu α_i, $1 \leqslant i \leqslant k$ produce o propoziţie K_i. Această propoziţie poate să conţină configuraţia de ordin γ_i. Notăm cu δ_i ordinul minim al configuraţiei conţinute de propoziţia K_i. Dacă K_i nu conţine nici o configuraţie, atunci $\delta_i = 0$.

Un cliclu β_s, $1 \leqslant s \leqslant l$, este inclus într-un ciclu fundamental, deoarece gramatica este integral productivă. Notăm cu K_{sj} propoziţia obţinută prin parcurgerea de j ori a ciclului β'_s. Dacă K_{sj} conţine o configuraţie de ordin γ_{sj}, atunci notăm cu δ'_s ordinul configuraţiei conţinute de propoziţia K_{sj}, unde j este minim. Dacă oricare ar fi j, $\gamma'_{sj} = 0$, atunci $\delta'_s = 0$.

Fie $a = \max\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant s \leqslant l}} \{\delta_i, \delta'_s\}$. Vom arăta că

$$\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_{a+1}. \tag{21}$$

Din (1) avem

$$\mathbb{S}_a \supset \mathbb{S}_{a+1}. \tag{22}$$

Fie $x \in \mathbb{S}_a - \mathbb{S}_{a+1}$, adică x nu conţine configuraţii de ordin mai mic sau egal cu a, dar conţine cel puţin o configuraţie de ordinul $a + 1$. Există cel puţin o propoziţie x care este marcată, în caz contrar configuraţia de ordinul $a + 1$ este parazită.

Propoziţia x nu poate fi generată prin parcurgerea unui ciclu fundamental α_i, deoarece ar produce şi o configuraţie de ordinul $\delta_i \leqslant a$.

De asemenea nu poate fi produsă prin parcurgerea unui ciclu nefundamental β_s, din acelaşi motiv. Rezultă că

$$\mathbb{S}_{a+1} \leqslant \mathbb{S}_a \tag{22}$$

şi propoziţia (21) este adevărată, aplicînd teorema 2 şi consecinţa 1, cap. V, [6], rezultă că nu avem configuraţii de ordin mai mare decît a, rezultat absurd.

Primită la redacţie la 2 iulie 1968

Institutul politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej” Bucureşti

CONFIGURATIONS DE L'ORDRE INFINI

(RÉSUMÉ)

On continue les recherches des [1] et [4] concernant les configurations transfinies et les configurations de la réunion de deux langages, pour démontrer ensuite qu'un langage contenant des configurations, quel que soit l'ordre fini, ne peut pas être généré par une grammaire ayant un nombre fini d'états.

BIBLIOGRAFIE

1. Cîşlaru C., *Configuraţiile reuniunii a două limbaje.* St. cerc. mat., **19**, *5*, (1957).
2. ГЛАДКИЙ А. В., *Конфигурационные характеристики языков*, *Проблемы кибернетики* 10, (1963).
3. КУЛАГИНА О. С., *Об одном способе определения грамматических понятий на базе теории множеств*, Проблемы кибернетики, I (1958).
4. ЛУЧКИН В. Д., *О рангах конфигураций контестно-свободных языков*, Алгеба и Логика, **5**, *3* (1966).
5. Marcus S., *Gramatici şi automate finite.* Ed. Academiei, Bucureşti, 1964.
6. Marcus S., *Algebraic Linguistics. Analytical Models.* Academic Press, New York, 1967.
7. Novotny M., *Über endlich charakterisierbare Sprachen.* Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. Purkyné, Brno, 468 (1965).
8. Novotny M., *Algebraic structures of mathematical linguistics.* Bulletin mathématique de la Société de sciences mathématiques de la Roumanie (1968).

ELEMENTE DE GEOMETRIE ANALITICĂ PESTE UN CORP VALUAT NEARHIMEDIAN

DE

ANDREI DUMA

În ultimul deceniu au apărut o serie de articole şi lucrări privind analiza funcţională, teoria funcţiilor şi geometria analitică, pe spaţii corespunzătoare, considerate peste un corp valuat nearhimedian.

În lucrarea de faţă ne propunem să prezentăm teoria spaţiilor analitice rigide, avînd în vedere — în primul rînd — lucrările lui J. Tate, H. Grauert şi R. Remmert, R. Kiehl, L. Gerritzen.

În prima parte a lucrării vom prezenta noţiunile şi rezultatele de bază din teoria spaţiilor vectoriale normate şi a algebrelor normate peste un corp valuat nearhimedian.

Am schiţat aproape toate demonstraţiile pentru a facilita lectura lucrării şi a nu trimite cititorul mereu la bibliografie.

I. ELEMENTE DE ANALIZĂ NEARHIMEDIANĂ

§ 1. CORPURI VALUATE NEARHIMEDIENE

DEFINIŢIA 1.1. Fie K un corp; o funcţie $|\ |: K \to R^+ = [0, +\infty)$ se numeşte o valuare nearhimediană, dacă:

(i) $|c| = 0 \Leftrightarrow c = 0$.

(ii) $|c_1 \cdot c_2| = |c_1| \cdot |c_2| (\forall)\, c_1, c_2 \in K$

(iii) $|c_1 + c_2| \leqslant \text{Max}\ (|c_1|,\ |c_2|) (\forall)\, c_1, c_2 \in K$.

Axioma (iii) înlocuieşte obişnuita axiomă a inegalităţii triunghiului; uneori se foloseşte termenul de valuare ultrametrică în loc de nearhimediană.

Observaţii. 1.2. i). $|1| = 1$.

ii) Dacă $|c_1| \neq |c_2|$, atunci în (iii) avem egalitate.

iii) Valuarea trivială: $|c| = 1\ (\forall)\, c \in K \setminus \{0\} = K^*$ este evident nearhimediană; ea va fi *exclusă* din consideraţiile noastre.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 4, P. 571–589, BUCUREŞTI, 1969

iv) Un corp valuat nearhimedian este în mod natural înzestrat cu o structură de spaţiu metric în care distanţa:

$$d(c_1, c_2) = |c_1 - c_2| \ (\forall) \ c_1, c_2 \in K$$

îndeplineşte o axiomă mai puternică decît inegalitatea triunghiului, anume: $d(c_1, c_2) \leqslant \{\text{Max}(d(c_1, c_3), d(c_2, c_3))\} \ (\forall) \ c_1, c_2, c_3 \in K$ (şi de aceea se numeşte o ultradistanţă).

Remarcăm că într-un spaţiu metric în care distanţa este o ultradistanţă: orice triunghi este isoscel (baza fiind mai mică decît laturile egale), orice punct al unei sfere este centru în aceea sferă, în orice patrulater există două laturi egale, distanţa între două puncte ale unui cerc mai mică decît raza etc.

Vom da un criteriu care stabileşte dacă o valuare este arhimediană sau nearhimediană. Reamintim că întregii unui corp sînt elementele de forma $n.1$, unde 1 este unitatea din K, iar $n \in Z$.

PROPOZIŢIA 1.3. *O valuare* $|\ |: K \to R^+$ *este nearhimediană dacă şi numai dacă valorile întregilor lui* K *sînt mărginite.*

Demonstraţie. Fie $c_1, c_2 \in K$ arbitrar şi m un număr natural. Avem:

$$|c_1 + c_2|^m = |(c_1 + c_2)^m| = |c_1^m + C_m^1 c_1^{m-1} c_2 + \cdots + c_2^m| \leqslant$$
$$\leqslant |c_1|^m + |C_m^1 \cdot 1| \cdot |c_1|^{m-1} \cdot |c_2| + \cdots + |c_2|^m$$

Dacă $|n.1| \leqslant M \ (\forall) \ n \in Z$, rezultă:

$$|c_1 + c_2|^m \leqslant (m+1) \cdot M \cdot [\max(|c_1|, |c_2|)]^m,$$

de unde făcînd m să tindă către infinit, rezultă:

$$|c_1 + c_2| \leqslant \max(|c_1|, |c_2|).$$

Reciproc, dacă valuarea este nearhimediană, $|n.1| \leqslant |1| = 1 \ (\forall) \ n \in Z$.

COROLARUL 1.4. *Singurele valuări nearhimediene pe corpul numerelor raţionale sînt valuările p-adice.*

Într-adevăr, fie $|\ |$ o valuare netrivială.

Cum $|n| \leqslant 1 \ (\forall) \ n \in Z$, fie p cel mai mic număr natural ca proprietatea $|p| < 1$. Afirmăm: p este prim; în adevăr, dacă $p = p' \cdot p''$ cu $1 < p' < p$ şi $1 < p'' < p$, rezultă $|p| = |p'| \cdot |p''| = 1$ — absurd.

Fie $n \in N$ oarecare: atunci: $n = pq + r$ cu $0 \leqslant r \leqslant p-1$. Dacă $r \neq 0$, atunci : $|n| = 1$, căci:

$$|pq| = |p + \ldots + p| \leqslant |p| < 1 \text{ şi } |r| = 1.$$

Fie acum $\frac{a}{b}$ un număr raţional oarecare; atunci $\frac{a}{b} = p^i \frac{a'}{b'}$, unde $i \in Z$, iar p nu divide nici a' nici b'.

Rezultă $\frac{a}{b} = |p|^i$.

Întrucît vom lucra numai cu valuări nearhimediene, vom spune mai departe valuare în loc de valuare nearhimediană.

Este imediată următoarea:

PROPOZIŢIA 1.5. *Fie* $(K, |\ |)$ *un corp valuat*; *atunci* $A = \{c \in K;$

$|c| \leqslant 1\}$ *este un inel de valuare, al cărui ideal maximal este:* $\underline{m} = \{c \in K;\ |c| < 1\}$ *(prin k vom nota corpul rezidual* $A/\underline{m}$*).*

DEFINIŢIA 1.6. Două valuări $|\ |_1$ şi $|\ |_2$ pe K se spun echivalente, dacă: $|c|_1 < 1 \Rightarrow |c|_2 < 1$.

LEMA 1.7. *Dacă* $|\ |_1$ *este echivalentă cu* $|\ |_2$*, atunci:* $|c|_1 = 1 \Rightarrow |c|_2 = 1$. Într-adevăr, cum $|\ |_1$ este netrivială, există $0 \neq c' \in K$ cu $|c'| < 1$. Deci:

$$|c^n c'|_1 = |c|_1^n \cdot |c'|_1 < 1, \text{ adică } |c^n c'|_2 < 1.$$

Rezultă: $|c|_2 < \left(\frac{1}{|c'|_2}\right)^{1/n}$ — şi prin trecere la limită $|c|_2 \leqslant 1$. Analog $\left|\frac{1}{c}\right|_2 \leqslant 1$, căci $\left|\frac{1}{c}\right|_1 = 1$ şi deci $|c|_2 = 1$.

Relaţia de echivalenţă a valuărilor este evident reflexivă şi tranzitivă, iar din lemă rezultă că este şi simetrică.

Următoarele două rezultate tranşează problema valuărilor echivalente şi neechivalente.

PROPOZIŢIA 1.8. *Dacă* $|\ |_1$ *şi* $|\ |_2$ *sînt echivalente, atunci există* $\alpha \in R^+$ *cu* $|\ |_2 = |\ |_1^{\alpha}$.

Demonstraţie. Fie c' cu $|c'|_1 > 1$ fixat şi $c \in K$ arbitrar nenul. Este adevărată relaţia

$$|c|_1 = |c'|_1^{\frac{\lg|c|_1}{\lg|c'|_1}}.$$

Considerăm un şir descrescător de numere raţionale $\left(\frac{n_i}{m_i}\right)$, $i \geqslant 0$, care aproximează pe $\frac{\lg|c|_1}{\lg|c'|_1}$; rezultă

$$|c|_1 < |c'|_1^{\frac{n_i}{m_i}}, \text{ adică } \left|\frac{c^{m_i}}{c'^{n_i}}\right|_1 < 1,$$

şi deci $\left|\frac{c^{m_i}}{c'^{n_i}}\right|_2 < 1$, de unde $|c|_2 < |c'|_2^{\frac{n_i}{m_i}}$.

Analog pentru un şir crescător de numere raţionale $\left(\frac{p_i}{q_i}\right)$, $i \geqslant 0$ care aproximează pe $\frac{\lg|c|_1}{\lg|c'|_1}$ rezultă: $|c|_2 > |c'|_2^{\frac{p_i}{q_i}}$ şi deci $|c|_2 = |c'|_2^{\frac{\lg|c|_1}{\lg|c'|_1}}$; de aici se obţine:

$$\frac{\lg|c|_1}{\lg|c|_2} = \frac{\lg|c'|_1}{\lg|c'|_2} \quad (\forall)\ 0 \neq c \in K.$$

Rămîne să notăm $\alpha = \frac{\lg|c'|_2}{\lg|c'|_1}$ şi propoziţia este demonstrată.

PROPOZIŢIA 1.9. (Teorema de aproximare). *Fie n valuări neechivalente* $(|\,|_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ *pe* K *şi* $c_1, \ldots, c_n \in K$. *Pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există* $c \in K$ *astfel încît:*

$$|c - c_i|_i < \varepsilon\ (\forall)\ i = 1,2,\ldots,n\,.$$

Demonstraţie. Este necesar ca în prealabil să stabilim două leme;

LEMA 1.10. *În ipotezele propoziţiei, există* $d \in K$ *astfel ca*: $|d|_1 > 1$ *şi* $|d|_i < 1$, $j = 2, \ldots, n$.

Într-adevăr, există d', $d'' \in K$ ca: $|d'|_1 > 1$, $|d'|_2 \leqslant 1$, $|d''|_1 \leqslant 1$ şi $|d'|_2 > 1$. Punînd: $d = \dfrac{d'}{d''}$, lema este probată pentru $n = 2$.

Fie că am demonstrat lema pentru n—1 valuări neechivalente; găsim deci:

e', $e'' \in K$ cu $|e'|_1 > 1$, $|e'|_j < 1$, $j = 2,3, \ldots, n-1$ şi $|e''|_1 > 1$, $|e''|_n < 1$.

Vom nota cu p un număr natural suficient de mare astfel ca:

$$|e'|_j^p\, |e''|_j < 1 \text{ unde } j = 2, \ldots, n-1.$$

Dacă $|e'^p \cdot e''|_n < 1$, atunci $d = e'^p \cdot e''$; dacă nu, rezultă $|e'|_n > 1$ şi de aceea $|e^{p+1} \cdot e''|_n > 1$.

Este adevărată deci relaţia:

$$\left|\frac{e'^q \cdot e''}{1 + e'^q}\right|_j \leqslant 1 \text{ pentru } j = 2, \ldots, n \text{ şi } q \geqslant p + 1.$$

De asemenea $\left|\dfrac{e'^q}{1 + e'^q} - 1\right|_1 = \dfrac{1}{|e'|_1^q} \to 0$ pentru $q \to \infty$.

Din cele de mai sus rezultă: $\dfrac{e'^q \cdot e''}{1 + e'^q} \to e''$ în $|\,|_1$ şi deci pentru q_0 suficient de mare: $\left|\dfrac{e'^{q_0} e''}{1 + e'^{q_0}}\right|_1 > 1$. Vom pune în acest caz: $d = \dfrac{e'^{q_0} \cdot e''}{1 + e'^{q_0}}$ şi prima lemă este probată.

LEMA 1.11. *În condiţiile teoremei, există* $b \in K$ *cu:*

$$|b - 1|_1 < \varepsilon \text{ şi } |b|_j < \varepsilon,\ j = 2,3, \ldots, n.$$

(*adică demonstrăm propoziţia pentru cazul* $c_1 = 1$, $c_j = 0$, $j = 2, \ldots, n$).

Fie d găsit în lema 1.7 şi $b_p = \dfrac{d^p}{1 + d^p}$.

Observăm că $|b_p - 1|_1 \to 0$ pentru $p \to \infty$ şi $|b_p|_j \to 0$ pentru $p \to \infty$ şi $j = 2, \ldots, n$.

Pentru p suficient de mare, $b_p = b$ îndeplineşte condiţiile impuse în enunţul lemei.

În fine, acum demonstraţia propoziţiei este imediată: fie $\eta < \dfrac{\varepsilon}{\underset{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}{\operatorname{Max}} |c_j|_i}$; există $d_1, \ldots, d_n \in K$ astfel ca:

$$|d_i - 1|_i < \eta \text{ şi } |d_i|_j < \eta\ (\forall)\ j \neq i.$$

Afirmăm că $c = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i d_i$ satisface cerinţele propoziţiei; într-adevăr, $|c - c_i|_i = |c_1 d_1 + \ldots + c_i (d_i - 1) + \ldots + c_n d_n|_i \leqslant \eta \cdot \operatorname*{Max}\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |c_j|_i < \varepsilon$ pentru $i = 1, \ldots, n$.

1.12. Din teoria generală a completării rezultă că orice corp valuat $(K, |\ |)$ se poate completa unic (pînă la un izomorfism) la un corp valuat complet $(\hat{K}, |\ |^\wedge)$ astfel ca: $|\ |^\wedge|_K = |\ |$.

Dacă valuarea iniţială este nearhimediană, la fel este şi valuarea completatului. În plus, spre deosebire de cazul arhimedian, rezultă: $\hat{K}|^\wedge = |K|$. Într-adevăr, fie $0 \neq c \in \hat{K}$ şi fie $(c_n)_{n \in N}$ un şir de elemente din K tinzînd către c în $\hat{K}$. Rezultă: $|c_n| = |c_n|^\wedge = |c + (c_n - c)|^\wedge = |c|^\wedge$ căci pentru n suficient de mare, $|c_n - c|^\wedge < |c|^\wedge$.

Pentru consideraţiile ulterioare este utilă şi următoarea:

PROPOZIŢIA 1.13. *Fie* $(K, |\ |)$ *un corp valuat nearhimedian şi* $(K_a, |\ |_a)$ *închiderea sa algebrică. Atunci* $|K_a|_a$ *este dens în* R^+ *şi orice* $\alpha \in |K_a|_a$ *ridicat la o putere convenabilă aparţine lui* $|K|$.

Demonstraţie. Într-adevăr, $0 \neq a \in K$ cu $|a| \neq 1$.

Deci rezolvarea ecuaţiilor $X^n - a = 0$ şi $Y^n - \frac{1}{a} = 0$ se obţin două şiruri $(x_n)_{n \in N}$ şi $(y_n)_{n \in N}$ unul strict crescător, celălalt strict desrescător şi: $\lim\limits_{n \to \infty} |x_n|_a = \lim\limits_{n \to \infty} |y_n|_a = 1$.

Cum în $|K_a|_a$ există de asemenea numere oricît de mari şi oricît de mici, rezultă — cu un raţionament standard—densitatea lui $|K_a|_a$ în R^+.

Fie acum $\beta \in |K_a|_a$; există deci $b \in K_a$ cu $|b|_a = \beta$.

Considerăm polinomul minimal al lui b: $\sum\limits_{i=0}^{p} a_i X^{p-i} \in K[X]$.

Deoarece $\sum\limits_{i=0}^{p} a_i b^{p-i} = 0$, rezultă că Max $(|a_i| \cdot |b|_a^{n-i})$ se atinge cel puţin de două ori, adică există $1 \leqslant i < j \leqslant n$ cu

$$|a_i|\,|b|_a^{n-i} = |a_j| \cdot |b|_a^{n-j}; \text{ de aici } |b|_a^{j-i} = \left|\frac{a_j}{a_i}\right|.$$

§ 2. MODULE ŞI SPAŢII VECTORIALE NORMATE

Fie A un inel comutativ, integru, cu unitate, înzestrat cu o valuare nearhimediană, netrivială. Vom nota prin $Q(A)$ corpul total de fracţii al lui A.

DEFINIŢIA 2.1. a) Fie M un A-modul; o aplicaţie $\|\ \| : M \to R^+$ se numeşte *o normă de A-modul pe M* (sau dacă nu este pericol de confuzie — o normă pe M), dacă:

(i) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$;

(ii) $\|a \cdot x\| = |a| \cdot \|x\|$ $(\forall)\ a \in A,\ x \in M$.

(iii) $\|x + y\| \leqslant \max(\|x\|, \|y\|)$ $(\forall)\ x,\ y \in M$.

b) Un A-modul înzestrat cu o normă se numeşte *normat*. Un A-modul topologic se numeşte *normabil*, dacă această topologie provine dintr-o normă.

Din definiţie se observă:

i) $\|x+y\| = \max(\|x\|, \|y\|)$ dacă $\|x\| \neq \|y\|$.

ii) Orice modul normabil este separat.

Ca în cazul spaţiilor vectoriale complexe, orice aplicaţie A liniară mărginită între două A module normate este continuă. Reciproca *nu* este adevărată în general. Dacă există însă $a', a'' \in A$ cu proprietatea $0 \neq |a'| < 1 < |a''|$, atunci orice aplicaţie liniară şi continuă între două A-module este mărginită. Într-adevăr, fie $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ liniară şi continuă, dar nemărginită. Există deci şirul $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ în A astfel ca $\|x_i\| \leqslant 1$, dar $\|\varphi(x_i)\| \geqslant i \cdot |a''|^i$.

Atunci şirul $y_i = (a'^i \cdot x_i)_{i \in N}$ converge către zero în M_1 dar

$$\|\varphi(y_i)\| = |a'|^i \cdot \|\varphi(x_i)\| \geqslant i \cdot (|a'| \cdot |a''|)^i.$$

Întrucît putem presupune $|a' \cdot a''| \geqslant 1$, rezultă contradicţia căutată.

Se spune că două norme $\| \ \|_1$ şi $\| \ \|_2$ pe M sînt echivalente, dacă topologiile pe care ele le definesc pe M sînt egale. În cazul în care există $a', a'' \in A$ cu: $0 \neq |a'| < 1 < |a''|$, echivalenţa normelor revine la o relaţie de tipul:

$$\alpha \cdot \| \ \|_1 \leqslant \| \ \|_2 \leqslant \beta \| \ \|_1$$

cu $\alpha, \beta > 0$.

Cum orice valuare pe A se extinde unic la o valuare pe $Q(A)$, la fel orice A-normă pe M se extinde la o $Q(A)$-normă de spaţiu vectorial pe $Q(M) = M \otimes_A Q(A)$. De asemenea orice aplicaţie A-liniară şi mărginită de A-module se extinde la o aplicaţie $Q(A)$-liniară şi mărginită de $Q(A)$-spaţii vectoriale.

Mai remarcăm că fiecare A-modul finit şi fără torsiune M se poate înzestra cu o normă; într-adevăr, există un A-modul liber, finit F care conţine pe M; atunci M se înzestrează cu norma indusă de norma produs a lui F.

O problemă interesantă pentru un spaţiu vectorial normat este aceea de a stabili dacă orice subspaţiu finit dimensional al său este închis.

Vom da răspuns afirmativ pentru cazul în care corpul este complet în propoziţia următoare, iar în § 3 şi § 4 vom stabili condiţii echivalente în cazul spaţiilor de dimensiune cel mult numărabilă.

PROPOZIŢIA 2.2. *Fie W un spaţiu vectorial finit dimensional peste un corp valuat complet K. Atunci toate normele de K-spaţiu vectorial pe W sînt echivalente.*

Demonstraţie. Vom proba că orice normă $\| \ \|$ pe W este echivalentă cu norma produs $\| \ \|_0$, asociată unei baze $w_1, \ldots, w_n$ a lui W. Pentru orice $w \in w$, $\|w\|_0 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |c_i|$, unde $w = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i w_i$, $c_i \in K$. Dacă: $\beta = \sum\limits_{i=1}^{n} \|w_i\|$, rezultă evident:

$$\| \ \| \leqslant \beta \cdot \| \ \|_0.$$

Vom demonstra prin inducție după dimensiunea lui W că există $\alpha > 0$ cu: $\alpha \| \ \|_0 \leqslant \| \ \|$.

Pentru $n = 1$ este imediat, căci orice $w \in W$ se scrie unic $w = c_1 w_1$ cu $c_1 \in K$ și deci:

$$\|w\| = |c_1| \cdot \|w_1\| = \|w_1\| \cdot \|w\|_0 \text{ și punem } \alpha = \|w_1\|.$$

Presupunem relația stabilită pentru orice spațiu n—1 dimensional; fie deci $W' = \sum_{i=1}^{n-1} K w_i$. Normele $\| \ \|$, $\| \ \|_0$ sînt echivalente pe W' — și cum $\| \ \|_0$ este completă, rezultă $\| \ \|$ completă — deci W' este închis în W în ambele norme (căci evident W este separat).

Cum $0 \notin w_n + W'$ și $w_n + W'$ este o submulțime închisă în W, rezultă că există $\gamma_n > 0$ ca:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n-1} c_j w_j + w_n \right\| \geqslant \gamma_n \, (\forall) \, c_j \in K.$$

De aici $\left\| \sum_{i=1}^{n} c_j \, w_j \right\| \geqslant \gamma_n \cdot |c_n| \, (\forall) \, c_j \in K.$

Raționînd analog se obțin $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ cu:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} c_j \, w_j \right\| \geqslant \gamma_i \, |c_i| \, (\forall) \, c_j \in K \; (1 \leqslant i \leqslant n-1).$$

$\alpha = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \gamma_i$ este cel căutat.

COROLARUL 2.3. *Orice subspațiu finit dimensional al unui spațiu vectorial normat peste un corp valuat complet este complet și deci și închis.*

§ 3. SPAȚII VECTORIALE CONTINUU ȘI LINIAR SEPARATE

DEFINIȚIA 3.1. i) Fie A un inel și M un A-modul; M se spune *liniar separat* dacă oricare ar fi $0 \neq x \in M$, există o formă liniară $M \xrightarrow{\varphi} A$ cu $\varphi(x) \neq 0$.

ii) Fie K un corp valuat (nearhimedian) și V un K-spațiu vectorial; V se spune *continuu liniar separat*, dacă pentru orice $x \in V$, există o formă liniară și continuă: $V \xrightarrow{\varphi} K$ cu $\varphi(x) \neq 0$.

Rezultă că orice subspațiu vectorial (resp. submodul) al unui spațiu vectorial continuu liniar separat (resp. modul liniar separat) are aceeași proprietate.

De asemenea aceste proprietăți se transferă unei sume directe sau produs direct — în categoriile respective.

În particular, orice modul finit, fără torsiune peste un inel integru este liniar separat. Corpul total de fracții al unui inel integru (care *nu* este corp) nu este liniar separat peste inelul respectiv.

Dacă M este A modul liniar separat, rezultă că

$$M[[X_1, \ldots, X_n]] = \left\{ \sum_{i_1, \ldots, i_n \geqslant 0} m_{i_1 \ldots i_n} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n} ; \, m_{i_1, \ldots, i_n} \in M \right\}$$

este $A\,[[X_1, \ldots, X_n]]$-modul liniar separat.

Este clar că un spaţiu vectorial este continuu liniar separat numai atunci cînd toate hiperplanele sale sînt închise.

Propoziţia 3.2. a) *Dacă V este un spaţiu vectorial continuu liniar separat, atunci orice subspaţiu finit dimensional al său este închis.*

b) *Dacă V este cel mult numărabil dimensional şi fiecare subspaţiu finit dimensional al său este închis, atunci V este continuu liniar separat.*

Observaţie. Condiţia din (ii) este automat verificată pentru cazul K complet (corolarul 2.3).

Demonstraţie. a) Dacă ar exista un subspaţiu finit dimensional $W \subset V$, care să nu fie închis, atunci fie $x \in \overline{W} \setminus W$. W este dens în $W \oplus Kx$ şi în acelaşi timp închis în el, căci $W \oplus Kx$ este şi el continuu liniar separat; absurd.

b) Vom demonstra în prealabil o lemă:

Lema 3.3. *Fie V un spaţiu vectorial, W un subspaţiu al său şi $\varphi: W \to K$ o formă liniară şi continuă. Pentru orice $x \in W$ şi orice $\alpha > 1$, există o prelungire a lui φ, $\psi: W \oplus Kx \to K$ astfel ca: $\| \psi \| \leqslant \alpha \cdot \| \varphi \|$.*

Într-adevăr, cum distanţa între x şi W este strict pozitivă, există $w_0 \in W$ astfel ca $\| x + w_0 \| \leqslant \alpha \inf_{w \in W} \| x + w \|$.

Notăm: $y = x + w_0$: atunci $W \oplus Kx = W \oplus Ky$ şi definim aplicaţia liniară şi continuă $\psi(w + cy) = \varphi(w)$ $(\forall) c \in K$, $w \in W$.

Evident, $\psi|_W = \varphi$ şi $\| \psi(w + cy) \| = \| \varphi(w) \| \leqslant \| w \| \cdot \| \varphi \|$.

Dacă $\| w \| \neq \| cy \|$, atunci: $\| w \| \leqslant \| w + cy \|$; dacă: $\| w \| = \| cy \|$, atunci $\| w \| = \| cy \| \leqslant \alpha \inf_{t \in W} \| t + cy \| \leqslant \alpha \| w + cy \|$ şi deci în ambele cazuri: $\| \psi(w + cy) \| \leqslant \alpha \| \varphi \| \cdot \| w + cy \|$.

Astfel lema este demonstrată.

Afirmaţia ii) rezultă acum cu uşurinţă; fie $0 \neq x \in V$; punem $W_1 = Kx$ şi $\varphi: W_1 \to K$, $\varphi(cx) = c$. Alegem o bază: $x = v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ a lui V şi un şir strict crescător şi mărginit de numere reale $1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \beta$.

Aplicînd lema anterioară pentru $W_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} K v_i \subset W_n = \sum_{i=1}^{n} K v_i$ şi $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ $(n \geqslant 2)$, se obţin succesiv aplicaţiile liniare şi continue: $\varphi_n : W_n \to K$, $n \geqslant 2$, astfel ca $\varphi_n|_{W_{n-1}} = \varphi_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$, $\varphi_2|_{Kv_1} = \varphi$, $\| \varphi_n \| \leqslant \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} \| \varphi_{n-1} \| \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n \| \varphi \| \leqslant \beta \| \varphi \|$.

Funcţiile $\{\varphi_n\}_{n \geqslant 0}$ definesc o aplicaţie liniară şi continuă $\psi: V \to K$, cu $\psi(x) = 1$ (şi $\| \psi \| \leqslant \beta$).

§ 4. α-ORTOGONALITATE.

Definiţia 4.1. Fie K un corp, V un K-spaţiu vectorial şi $\alpha \in (0,1]$.

i) Un şir de elemente din V: $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ se numeşte α-ortogonal, dacă pentru orice serie convergentă din V : $\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$, $c_i \in K$, avem

$$(*) \quad \left\| \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \right\| \geqslant \alpha \sup_{i=1}^{\infty} (|c_i| \cdot \| e_i \|).$$

ii) Un şir α-ortogonal $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots \in V$ se numeşte o α-bază ortogonală, dacă orice vector $v \in V$ se poate scrie ca o serie convergentă: $\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i = v$.

Scrierea este evident unică, căci orice şir α-ortogonal este format din elemente liniar independente.

Observăm că în cazul $\alpha = 1$, relaţia (*) devine egalitate.

Remarcăm că subspaţiul lui V: $V_J = \left\{x = \sum_{j' \in J} c_j e_j\right\}$ este închis, oricare ar fi $J \subset N$ — finită sau infinită.

PROPOZIŢIA 4.2. *Fie V un K-spaţiu vectorial normat de dimensiune cel mult numărabilă; sînt echivalente următoarele proprietăţi:*

a) *orice subspaţiu al său finit dimensional este închis;*

b) *pentru orice $0 < \alpha < 1$, există o α-bază ortogonală a lui V.*

Demonstraţie. a) $\Rightarrow$ b). Fie $v_1, v_2, \ldots$ o bază arbitrară a lui V; printr-un procedeu de tipul Graham-Schmidt vom obţine din ea o α-bază ortonormală. Definim $e_1 = v_1$; fie $e_2, \ldots, e_{n-1}$ definite; atunci $e_n = \sum_{i=1}^{n-1} b_{n_i} v_i + v_n$, unde vom determina pe $b_{n_i} \in K$, astfel ca (*) să fie îndeplinită. Cum subspaţiul $\sum_{i=1}^{n-1} K v_i$ este închis, distanţa dintre acesta şi v_n este strict pozitivă, deci există un punct $\sum_{i=1}^{n-1} b_{n_i} v_i$ astfel ca: $\|v_n + \sum_{i=1}^{n-1} b_{n_i} v_i\| \geqslant \alpha \inf_{x \in \sum_{i=1}^{n-1} K v_i} \|v_n + x\|$.

Notăm: $e_n = v_n + \sum_{i=1}^{n-1} b_{n_i} v_i$.

Fie acum $b_n e_n + \sum_{i=1}^{n-1} b_i e_i \in \sum_{i=1}^{n} K e_i$ arbitrar; dacă $\|b_n e_n\| \neq \|\sum_{i+1}^{n-1} b_i e_i\|$, atunci: $\|b_n e_n + \sum_{i=1}^{n-1} b_i e_i\| = \max(\|b_n e_n\|, \|\sum_{i=1}^{n-1} b_i e_i\|) \geqslant \max(\|b_n e_n\|, \alpha \cdot \max_{i=1}^{n-1} \|b_i e_i\|) \alpha \max_{i=1}^{n} (\|b_i e_i\|)$.

Dacă $\|b_n e_n\| = \|\sum_{i=1}^{n-1} b_i e_i\|$ şi $b_n \neq 0$, atunci $\|b_n e_n + \sum_{i=1}^{n-1} b_i e_i\| = |b_n| \left\| e_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{b_n} e_i \right\| = |b_n| \cdot \left\| v_n + \sum_{i=1}^{n-1} b_{n_i} v_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{b_n} e_i \right\| \geqslant \alpha |b_n| \cdot \|e_n\|$.

Analog:

$$\|b_n e_n + \sum_{i-1}^{n-1} b_i e_i\| \geqslant \|\sum_{i=1}^{n-1} b_i e_i\| \geqslant \alpha \max_{i=1}^{n-1} \|b_i e_i\|,$$

deci din nou:

$$\|b_n e_n + \sum_{i=1}^{n-1} b_i e_i\| \geqslant \alpha \max_{i=1}^{n} \|b_i \cdot e_i\|.$$

b)$\Rightarrow$a). Fie $e_1,\ldots,e_n,\ldots$ o α-bază ortonormală a lui V şi W subspaţiu finit dimensional în V. Fie $v_1,\ldots,v_p$ o bază arbitrară a lui W; putem scrie:

$$v_i = \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij}\, e_j \qquad i = 1,\ldots,p.$$

Cum vectorii $v_1,\ldots,v_p$ sînt liniar independenţi, rezultă că matricea $\| c_{ij} \|_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j < \infty}}$ are rangul p şi putem presupune chiar că matricea $\| c_{ij} \|_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j < \infty}} = M$ are determinantul nenul. Este clar că $v_1, \ldots, v_p, e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots$ este o bază a lui V.

Fie $(x_n)_{n\in N}$ un şir convergent de elemente din W şi $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Să demonstrăm că $x \in W$. Dar: $x_n = \sum\limits_{i=1}^{p} d_{in} v_i$, $1 \leqslant n < \infty$, iar $x = \sum\limits_{i=1}^{p} d_i v_i + \sum\limits_{i=p+1}^{\infty} d_i e_i$. Ţinînd cont de scrierea lui v_i, rezultă:

$$x_n = \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{p} d_{in} c_{ij}\Big) e_j \text{ şi } x = \sum_{j=1}^{p} \Big(\sum_{i=1}^{p} d_i \cdot c_{ij}\Big) e_j + \sum_{j=p+1}^{\infty} \Big[\Big(\sum_{i=1}^{p} d_i c_{ij}\Big) + d_j\Big] e_j.$$

Cum $e_1,\ldots,e_n,\ldots$ este o α-bază ortonormală, rezultă că: $\sum\limits_{i=1}^{p} d_{in}\, c_{ij} \to \sum\limits_{i=1}^{p} d_i\, c_{ij}$ pentru orice $j = 1,\ldots,p$ adică: $M \begin{pmatrix} d_{1n} \\ \vdots \\ d_{pn} \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{} M \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_p \end{pmatrix}$.

Cum M^{-1} există, rezultă: $d_{in} \to d_i$ pentru $i = 1,\ldots,p$.

Observaţia 4.3. i) Implicaţia b) $\Rightarrow$ a) are loc şi pentru $\alpha = 1$.

ii) Dacă un spaţiu vectorial normat admite o α-bază ortonormală pentru un $\alpha \in (0,1]$, atunci admite cel puţin o bază pentru orice $\beta \in (0,1)$.

iii) Din demonstraţie rezultă că orice vector nenul poate face parte dintr-o α-bază ortonormală, dacă proiecţia pe subspaţiul unidimensional definit de el este continuă — şi astfel se obţine o nouă demonstraţie a propoziţiei 3.2 b).

DEFINIŢIA 4.4. Un spaţiu vectorial topologic se spune *de tip numărabil*, dacă conţine un subspaţiu dens, de dimensiune cel mult numărabilă.

Prin urmare din propoziţia anterioară rezultă:

COROLARUL 4.5. *Orice spaţiu vectorial normat de tip numărabil peste un corp valuat nearhimedian complet, admite pentru orice* $0 < \alpha < 1$ *o* α*-bază ortonormală.*

Se pot acum caracteriza spaţiile vectoriale normate, complete (Banach) infinit dimensionale şi de tip numărabil peste un corp normat complet. Orice astfel de spaţiu este homeomorf ca spaţiu vectorial topologic cu spaţiul şirurilor:

$$c_0(K) = \{x = (x_1, x_2,\ldots);\ x_i \in K,\ \lim_{i\to\infty} x_i = 0\},$$

cu norma: $\| x \| = \max \{ | x_i | \}$.

§ 5. TEOREMA HAHN BANACH PENTRU SPAŢII VECTORIALE NORMATE PESTE UN CORP VALUAT NEARHIMEDIAN

Fie K un corp valuat nearhimedian şi V un K-spaţiu vectorial normat (norma lui V nefiind presupusă şi ea nearhimediană). Se spune că V verifică teorema Hahn Banach sau că are *proprietatea Hahn Banach*, dacă orice funcţională liniară definită pe un subspaţiu a lui V se poate extinde la V cu păstrarea normei.

Lema 5.1. *Fie V un K spaţiu vectorial normat care verifică teorema Hahn-Banach. Atunci norma lui V este nearhimediană.*

Demonstraţie. Fie $x, y \in V$ cu $x+y \neq 0$. Există o funcţională liniară $f\colon V \to K$ astfel ca: $\|f\| = \dfrac{1}{\|x+y\|}$ şi $f(x+y)=1$. Prin urmare:

$$\|f\|\cdot \|x+y\| = 1 = |f(x+y)| = |f(x)+f(y)| \leqslant \max(|f(x)|, |f(y)|) \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|\cdot \max(\|x\|, \|y\|);\ \text{deci}\ \|x+y\| \leqslant \max(\|x\|, \|y\|).$$

Din nou toate normele considerate vor fi nearhimediene.

Definitia 5.2. (i) Se spune că V are *proprietatea de extindere* dacă pentru orice K spaţiu vectorial normat W, orice operator liniar de la un subspaţiu al lui W în V se prelungeşte la W cu păstrarea normei.

(ii) Un K-spaţiu vectorial normat (în particular K) se spune *sferic complet*, dacă orice mulţime de sfere ale sale, total ordonate prin relaţia de incluziune are măcar un punct comun.

(iii) Un K-spaţiu vectorial normat se spune că are *proprietatea intersecţiei binare*, dacă orice şir de sfere din el, două cîte două nedisjuncte, are măcar un punct comun.

Propozitia 5.3. *Pentru un spaţiu vectorial normat V sînt echivalente următoarele afirmaţii:*

(a) *V are proprietatea de extindere;*

(b) *V este sferic complet;*

(c) *V are proprietatea intersecţiei binare.*

Demonstraţie. (b) $\Rightarrow$ (c) evident; (c) $\Rightarrow$ (b) căci orice punct al unei sfere este centru şi orice două sfere sau sînt disjuncte sau sînt în incluziune.

(a) $\Rightarrow$ (b). Prin reducere la absurd: fie $\{S_i(\rho_i)\}_{i\in I}$ o familie de sfere din V, total ordonată prin incluziune şi fără un punct comun. Vom defini o funcţie $\varphi\colon V \to R^+$.

Fie $x \in V$ oarecare; există $i \in I$ ca $x \notin S_i(\rho_i)$ şi fie $y \in S_i(\rho_i)$; atunci: $\varphi(x) = \|x-y\|$. Este clar că definiţia este corectă (nu depinde de alegerea lui i în I şi a lui y în $S_i(\rho_i)$) şi de asemenea că $\varphi(x) \leqslant \rho_i$ dacă $x \in S_i(\rho_i)$.

Vom considera spaţiul vectorial $V \times K$ cu operaţiile obişnuite şi îl înzestrăm cu norma (verificarea proprietăţilor normei este imediată):

$$\|(x, c)\| = \begin{cases} |c|\cdot\varphi\left(\dfrac{x}{c}\right) & \text{dacă } c \neq 0 \\ \|x\| & \text{dacă } c = 0. \end{cases}$$

Privind V scufundat în $V \times K$ prin aplicaţia $x \to (x, 0)$, conform ipotezei, operatorul identitate 1_V se prelungeşte la un operator liniar, ψ, de normă 1 de la $V \times K$ în V. Fie $\psi(0,1) = (x_0, 0)$. Afirmăm că $x_0 \in S_i(\rho_i)$ $(\forall)\, i \in I$. Într-adevăr, $\psi(x, 1) = x - x_0$ şi deci: $(\forall) i$ şi $y \in S_i(\rho_i)$ avem:

$$\| y - x_0 \| = \| \psi(y, 1) \| \leqslant \| (y, 1) \| = \varphi(y) \leqslant \rho_i,$$

c) $\Rightarrow$ a). Fie W un K-spaţiu vectorial normat, W' un subspaţiu al său şi χ: $W' \to V$ un operator liniar.

Fie $x_0 \in W \setminus W'$; este suficient să prelungim χ la $W' \oplus Kx_0$ cu păstrarea normei, căci apoi se foloseşte lema lui Zorn (exact ca în cazul real sau complex).

Pentru orice $y \in W'$, notăm: $\rho(y) = \| \chi \| \cdot \| y - x_0 \|$ şi considerăm familia de sfere în E: $\{S(\chi(y), \rho(y))\}_{y \in W'}$.

Este clar că orice două sfere din această familie se intersectează, deci există un punct $z_0 \in V$ comun tuturor acestor sfere. Vom defini $\bar{\chi}$: $W' \oplus Kx_0 \to V$ punînd: $\bar{\chi}(y + cx_0) = \chi(y) + cz_0$. Operatorul $\bar{\chi}$ este liniar, prelungeşte pe χ şi are aceeaşi normă cu χ căci:

$$\| \bar{\chi}(y + cx_0) \| = |c| \cdot \left\| \chi\left(\frac{y}{c}\right) + z_0 \right\| \leqslant |c| \cdot \rho\left(-\frac{y}{c}\right) =$$

$$= |c| \cdot \| \chi \| \cdot \left\| -\frac{y}{c} - x_0 \right\| = \| \chi \| \cdot \| y + cx_0 \| \; (c \neq 0).$$

Astfel propoziţia este demonstrată.

§ 6. ALGEBRE NORMATE ŞI ALGEBRE BANACH PESTE UN CORP NEARHIMEDIAN

Prin A vom nota un inel comutativ, integru, valuat nediscret şi nearhimedian; prin $Q(A)$ vom desemna corpul fracţiilor sale — înzestrat cu valuarea provenită din valuarea lui A.

DEFINIŢIA 6.1. Fie B o A-algebră; se numeşte normă de A-algebră pe B o normă de A-modul pe B care verifică şi relaţiile:

$$\| 1 \| = 1$$

$$\| b_1 \cdot b_2 \| \leqslant \| b_1 \| \cdot \| b_2 \| \; (\forall)\, b_1, b_2 \in B.$$

Ultima condiţie implică continuitatea înmulţirii în A-algebra B. Dacă în A există a', a'' astfel încît $0 \neq |a'| < 1 < |a''|$, atunci orice normă de A-modul pe B pentru care înmulţirea este continuă se transformă printr-o omotetie într-o normă de A-algebră pe B.

Este clar că $B \otimes_A Q(A)$ are o structură naturală de $Q(A)$-algebră normată.

Mai general, dacă S este un sistem multiplicativ închis al lui A, atunci $S^{-1}A$ este în mod natural înzestrată cu o structură de A-algebră normată şi $S^{-1}B = B \underset{A}{\otimes} S^{-1}A$ are de asemenea o structură naturală de $S^{-1}A$ algebră normată.

Observăm de asemenea că o A-algebră normată este un A-modul fără torsiune, iar topologia sa este evident separată.

DEFINIȚIA 6.2. O algebră topologică se numește normabilă, dacă există o normă de algebră pe A care să inducă topologia inițială. O algebră normată completă se numește o algebră Banach.

6.3. Pentru algebra normată B vom nota

$$\overset{\circ}{B} = \{b \in B ;\ \|b\| \leqslant 1\} \text{ și } t(B) = \{b \in B ;\ \|b\| < 1\}.$$

Este clar că $\overset{\circ}{B}$ este un inel, iar $t(B)$ este un ideal; prin $\widetilde{B}$ vom nota inelul rezidual $\overset{\circ}{B}/t(B)$.

DEFINIȚIA 6.4. Se numește algebra seriilor strict convergente în n nedeterminate cu coeficienți în A, subalgebra algebrei seriilor formale în n-nedeterminate cu coeficienți în A, definită prin:

$$A \ll X_1, \cdots, X_n \gg = \{f = \sum_{i \in N^n} a_{i_1, \ldots, i_n} X_1^{n_{i_1}}, \ldots X_n^{n_{i_i}} \in A[[X_1, \ldots, X_n]] ;\ \lim_{|i| \to \infty} |a_i| = 0\}$$

(unde $|i|$ înseamnă $i_1 + \ldots + i_n$).

$A \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ se consideră întotdeauna înzestrată cu norma:

$$\|\sum_{i \in N^n} a_i X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}\| = \max_{i \in N^n} |a_i|.$$

Relativ la această normă ea este o A-algebră normată și se verifică imediat:

$$\|f \cdot g\| = \|f\| \cdot \|g\| (\forall) f, g \in A \ll X_1, \ldots, X_n \gg.$$

Dacă A este Banach, atunci și $A \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ este Banach.

De asemenea au loc relațiile:

$$A \ll X_1, \ldots, X_n \gg = \overset{\circ}{A} \ll X_1, \cdots, X_n \gg$$

$$t(A \ll X_1, \ldots, X_n \gg) = t(A) \ll X_1, \ldots, X_n \gg$$

$$A \ll X_1, \ldots, X_n \gg = \widetilde{A}[X_1, \ldots, X_n].$$

Dacă notăm prin S sistemul multiplicativ definit de $X_1, \ldots, X_n$, atunci $S^{-1}A \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ se va nota $A \ll X_1, \ldots, X_n, X_1^{-1}, \ldots, X_n^{-1} \gg$ și este deci și ea o A-algebră normată.

În mod analog, pentru $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n) \in R^n$ ($\rho_i > 0$, $i = 1 \ldots n$) considerăm:

$$A_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \ll X_1, \ldots, X_n \gg = \{f = \sum a_{i_1, \ldots, i_n} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}$$

$$\in A[[X_1, \ldots, X_n]], \lim_{|i| \to \infty} |a_i| \rho_1^{i_1} \ldots \rho_n^{i_n} = 0\}.$$

Față de norma $\|\sum a_{i_1, \ldots, i_n} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}\| = \max\limits_i |a_i| \rho_1^{i_1} \ldots \rho_n^{i_n}$,

$A_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ este o A-algebră normată (Banach-dacă A e complet).

$$A_{1, \ldots, 1} \ll X_1, \ldots, X_n \gg \text{ este chiar } A \ll X_1 \ldots X_n \gg.$$

6.5. Pentru o mulţime E, înzestrată (printre altele) cu o structură algebrică de grup abelian, vom nota $E^* = E\setminus\{0\}$.

Cu această notaţie este clar că $\|[B \otimes_A Q(A)]^*\| = \|B^*\| \cdot |Q(A)^*|$.

Numărul claselor de echivalenţă modulo $|Q(A)^*|$ din $\|B^*\| \cdot |Q(A)^*|$ se numeşte *indicele de ramificare* al normei lui B şi se notează $e_{B/A}$.

LEMA 6.6. *Dacă* $n = \dim_{Q(A)} B \underset{A}{\otimes} Q(A)$, *atunci*: $e_{B/A} \leqslant n$.

Demonstraţie. Fie $Q(A)$ complet; atunci $B \underset{A}{\otimes} Q(A)$ este înzestrat exact cu norma produs (corolarul 2.3) şi oricare ar fi $\{b_i \otimes 1\}_{1\leqslant i\leqslant 1}$ o bază a sa, rezultă că $\{\|b_1\|,\dots,\|b_n\|\}$ este un sistem de generatori în semigrupul $\|B^*\| \cdot |Q(A)^*|$ modulo $|Q(A)^*|$.

Reducerea la cazul $Q(A)$ complet este imediată prin trecere la completatul lui $Q(A)$ şi observînd că $|\overline{Q(A)}^*| = |Q(A)^*|$ (§1) şi că dimensiunea lui $B \otimes_A \overline{Q(A)}$ peste $\overline{Q(A)}$ nu depăşeşte dimensiunea lui $B \otimes_A Q(A)$ peste $Q(A)$.

DEFINIŢIA 6.7. *O normă pe B se numeşte multiplicativă la puteri* (pe scurt o *p.m. normă*), dacă:

$$\|b^n\| = \|b\|^n \; (\forall)\; b \in B.$$

În particular, B este redusă. În acest caz, dacă $e = e_{B/A} < \infty$ rezultă: $\|B^*\|^{e!} \subset |Q(A)^*|$, căci în şirul $1, \|b\|, \dots, \|b\|^e$, măcar doi termeni sînt echivalenţi modulo $|Q(A)^*|$.

Remarcăm faptul că orice două p.m. norme echivalente coincid.

6.8. Fie K un corp valuat nearhimedian şi L o extindere algebrică finită a sa. Fie $\mathcal{F}_{L/K} = \{|\;|_1, \dots, |\;|_t\}$ familia valuărilor pe L care extind valuarea lui K. Pentru orice parte $\Phi \neq I \subseteq \{1, \dots, t\}$, $\|\;\|_I = \max\limits_{i\in I} |\;|_i$ este o normă de K-algebră pe L; o astfel de normă se numeşte normă maxim pe L. Din teorema de aproximare a valuărilor neechivalente (propoziţia 1.9), rezultă că relaţia $I \neq I'$ atrage după sine neechivalenţa normelor maxim $\|\;\|_I$ şi $\|\;\|_{I'}$. Este clar că numărul normelor maxim pe L este $2^t - 1$.

6.9. Considerăm o extindere normală L a lui K. Este evident că orice K-automorfism $\sigma\colon L \to L$ defineşte o bijecţie:

$$\bar{\sigma}\colon \mathcal{F}_{L/K} \to \mathcal{F}_{L/K} \quad (\bar{\sigma}(|\;|) = |\;| \circ \sigma) \text{ şi:}$$

$$\|x\|_{\mathcal{F}_{L/K}} = \|\sigma(x)\|_{\mathcal{F}_{L/K}} \qquad (\forall)\; x \in L.$$

Mai mult, în aceste ipoteze, dacă $p = X^r \sum\limits_{j=1}^{r} p_j X^{r-j}$ este polinomul minimal al lui $x \in L$, rezultă:

$$\|x\|_{\mathcal{F}_{L/K}} = \max_{i=1}^{r} \sqrt[i]{|p_i|}.$$

Într-adevăr, fie $x_1 = x$, $x_2, \dots, x_r$ conjugatele lui x; cum L/K este extindere normală, rezultă $x_2, \dots, x_r \in L$. Din relaţiile lui Viète rezultă:

$$|p_i| \leqslant \max \|x_{j_1} x_{j_2}, \dots x_{j_i}\|_{\mathcal{F}_{L/K}}.$$

Cum $\|x_1\|_{\mathscr{F}_{L/K}} = \|x_2\|_{\mathscr{F}_{L/K}} = \dots = \|x_r\|_{\mathscr{F}_{L/K}}$, rezultă:

$$|p_i| \leqslant \|x\|^i_{\mathscr{F}_{L/K}} \quad (1 \leqslant i \leqslant r).$$

Dacă $|p_i| < \|x\|^i_{\mathscr{F}_{L/K}}$ $(\forall)\ i = 1,\dots,r$, atunci

$$\|p(x)\|_{\mathscr{F}_{L/K}} = \|x^m + \sum_{i=1}^{m} p_i x^{r-i}\| = \|x^m\|_{\mathscr{F}_{L/K}}$$

şi pe altă parte: $p(x) = 0$ absurd.

6.10. Se pune acum problema înzestrării cu diferite norme a unei algebre peste un corp valuat nearhimedian.

Mai întîi un rezultat general:

PROPOZIŢIA 6.11. *Pe orice algebră finită A peste un corp valuat nearhimedian K există o cea mai fină topologie de K algebră, separată şi normabilă.*

Demonstraţie. Fie $\{e_1,\dots,e_n\}$ o bază a K-spaţiului vectorial A. Definim

$$\|\sum_{i=1}^{n} c_i e_i\| = \max_{i=1}^{n} |c_i|$$

Este clar că topologia definită de această normă nu depinde de baza aleasă.

Mai mult, punînd: $C = \max\limits_{i,j=1}^{n} \|e_i e_j\|$, rezultă:

$$\|xy\| \leqslant C\|x\| \cdot \|y\| \ (\forall)\ x, y \in A.$$

Dacă $|||\ |||$ este o altă normă de K-algebră pe A, atunci notînd cu: $a = \max\limits_{i=L}^{n} |||e_i|||$, rezultă : $|||\ ||| \leqslant a \cdot \|\ \|$ şi proprietatea este demonstrată.

Cum orice K-algebră finită şi redusă este sumă directă finită de extinderi algebrice finite ale lui K (teorema de descompunere a lui Dedekind), se poate vorbi şi în acest caz de o normă maximă. Mai precis, fie $A = \bigoplus\limits_{\alpha=1}^{n} L_\alpha$ descompunerea K-algebrei finite şi reduse A şi fie $\mathscr{F}_{L_\alpha/K} = \{|\ |_{\alpha 1},\dots,|\ |_{\alpha n(\alpha)}\}$ familia valuărilor pe L_α ce extind valuarea lui K. O normă maximă pe A este o normă de forma:

$$\|a\|_I = \max_{\substack{\alpha=1\\ 1\leqslant i\leqslant n(\alpha)}}^{n} \|a_\alpha\|_{\alpha i},$$

unde $a = (a_1,\dots,a_n)$ şi $I = \{i_1, i_2,\dots,i_n\}$

Din nou se observă că $I \neq I'$ implică $\|\ \|_I$ şi $\|\ \|_{I'}$ sînt neechivalente; prin urmare pe algebra A există $\prod\limits_{\alpha=1}^{n}(2^{n(\alpha)}-1)$ norme maxim neechivalente.

Prin urmare am demonstrat:

PROPOZIŢIA 6.12. *Orice K-algebră finită şi redusă se poate înzestra cel puţin cu o normă de K-algebră.*

6.13. Fie B_1 și B_2 două A-algebre normate. Orice morfism mărginit de A-algebre $B_1 \xrightarrow{u} B_2$ este evident continuu. Reciproca este adevărat dacă există $a', a'' \in A$ cu $0 < |a'| < 1 < |a''|$ (vom lucra în cele ce urmează cu această ipoteză). În general:

$$\|u\| = \sup_{\|b_1\| \leqslant 1} \|u(b_1)\|.$$

Dacă A este corp și $\|B_1^*\| \subseteq |A^*|$, atunci este suficient să scriem

$$\|u\| = \sup_{\|b_1\| = 1} \|u(b_1)\|.$$

Fie că $\|u\| \leqslant 1$ (u se numește în acest caz *metric*); atunci se definesc canonic: $\mathring{u}: \mathring{B}_1 \to \mathring{B}_2$ și $\widetilde{u}: \widetilde{B}_1 \to \widetilde{B}_2$ (morfism de $\widetilde{A}$-spații vectoriale). Se demonstrează imediat următoarea:

PROPOZIȚIA 6.14. *Mulțimea morfismelor continui de A-algebre de la $B_1 \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ în B_2 sînt în corespondență biunivocă cu produsul între mulțimea morfismelor continui $B_1 \to B_2$ și mulțimea n-uplelor $(b_1, \ldots, b_n) \in B_2^n$, cu proprietatea că mulțimea $\{b_1^{i_1}, \ldots, b_n^{i_n}\}_{i=(i_1, \ldots, i_n) \in N^n}$ este mărginită. Dacă norma lui B_2 este o p.m. normă, atunci ultima mulțime devine sfera unitate din B_2^n.*

6.15. Dacă B_1 și B_2 sînt două A-algebre normate, atunci $B_1 \underset{A}{\otimes} B_2$ este și ea o algebră normată cu norma:

$$\|\beta\| = \inf_{\beta = \Sigma b_i^1 \otimes b_i^2} \cdot \inf_i \|b_i^1\| \cdot \|b_i^2\| \qquad (\beta \in B_1 \underset{A}{\otimes} B_2 \text{ și } b_i^1, b_i^2 \neq 0)$$

Dacă B_1 și B_2 sînt Banach, atunci suma lor directă în categoria A-algebrelor Banach este completatul produsului tensorial $B_1 \otimes_A B_2$.

DEFINIȚIA 6.16. Se numește *algebră topologic de tip finit* peste A orice A algebră normată izomorfă (ca algebre normate) cu o algebră factor a unei algebre de serii strict convergente cu coeficienți în A printr-un ideal închis al său.

În cele ce urmează urmărim să dăm un criteriu în care o algebră topologic de tip finit peste A este un A-modul de tip finit. Pentru aceasta semnalăm următoarele rezultate din algebra comutativă:

LEMA 6.17. *Fie I un inel, i un ideal al său și M un I-modul separat pentru topologia $\underline{i}$-adică ($\bigcap_{n=1}^{\infty} i^n M = 0$). Dacă $M = \underline{i}\, M$, atunci $M = 0$.*

COROLARUL 6.18. *În condițiile lemei, fie N un submodul al lui M. Dacă una din ipotezele*

1) *N închis în M*

2) *I complet și N de tip finit*

este verificată și dacă $M = N + \underline{i}M$, atunci: $M = N$.

COROLARUL. 6.19. *La ipotezele lemei adăugăm completitudinea lui I, în topologia $\underline{i}$-adică. Dacă $M/\underline{i}M$ este un $I/\underline{i}$-modul de tip finit, atunci M este I-modul de tip finit.*

Putem demonstra acum rezultatul anunțat. El se va dovedi — într-un anumit sens — o extindere a teoremei de pregătire a lui Weierstrass.

Fie K un corp valuat nearhimedian, complet și nediscret.

PROPOZIȚIA 6.20. *Fie* $B \approx \dfrac{A \ll X_1, \ldots, X_n \gg}{\underline{b}}$ *o A-algebră topologic de tip finit, A fiind o K-algebră completă. Dacă $\mathring{B} \otimes_{\mathring{A}} \mathring{A} / t(K) \cdot \mathring{A}$ este un $\mathring{A} / t(K) \mathring{A}$-modul finit, atunci B este un A-modul finit.*

Demonstrație. Fie $b_1, \ldots, b_n$ clasele lui $X_1, \ldots, X_n$ în B și $\widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_n$ imaginile lor în $\mathring{B} \otimes_{\mathring{A}} \mathring{A} / t(K) \mathring{A}$. Fie $P_i(Y) \in \mathring{A} / t(K) \mathring{A}\,[Y]$ polinomul minimal al lui $\widetilde{b}_i\ (1 \leqslant i \leqslant n)$.

Deci $P_i(b_i) = c_i \cdot b_i'$ cu $b_i' \in \mathring{B}$ și $c_i \in t(K)$. Inelul $\mathring{K}$ este un inel de valuare și orice ideal de tip finit al său, în particular cel generat de $c_1, \ldots, c_n$, este finit generat; fie $c \in t(K)$ un generator al său.

Rezultă că $\mathring{A} / c\mathring{A}$-modulul $\mathring{B} / c\mathring{B}$ este de tip finit.

Cum A este complet și $\mathring{A}$ închis în A, rezultă $\mathring{A}$ complet. $\mathring{A}$ este atunci complet și în topologia $c\mathring{A}$-adică. Cum $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} c^n \mathring{B} = 0$, din corolarul 6.19 rezultă că $\mathring{B}$ este $\mathring{A}$-modul de tip finit, adică $b_1, \ldots, b_n$ algebrici peste $\mathring{A}$ — deci B este A modul de tip finit, deoarece K este nediscret.

Să considerăm în particular cazul în care A este K-algebră topologică de tip finit de exemplu: $A \approx K \ll X_1, \ldots, X_n \gg / \underline{a}$. Atunci A este completă, deoarece $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ este încă completă, iar idealul prin care se factorizează este închis. Vom observa că în acest caz $t(A) = t(K) \cdot \mathring{A}$. Într-adevăr, incluziunea $t(A) \supset t(K) \cdot \mathring{A}$ este întotdeauna valabilă, fie $a \in K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ și $\hat{a}$ clasa lui a modulo $\underline{a}$. Cum $\| \hat{a} \| = \inf\limits_{\alpha \in a} \| a + \alpha \|$, $\| \hat{a} \| < 1$ și $\| K \ll X_1, \ldots, X_n \gg^* \| = \| K^* \|$, rezultă că există $c \in K$ cu $\| \hat{a} \| \leqslant |c| < 1$. Deci: $\hat{a} = c(c^{-1} \hat{a}) \in t(K) \cdot \mathring{A}$.

Analog se poate demonstra în acest caz că $t(B) = t(K) \cdot \mathring{B}$ și astfel rezultă din propoziția anterioară următorul:

COROLARUL 6.21. *Fie A o K-algebră topologic de tip finit și B o A-algebră topologic de tip finit. Dacă $\widetilde{B}$ este $\widetilde{A}$-modul finit, atunci B este A-modul finit.*

În particular, dacă $\widetilde{A}$ este $\widetilde{K}$-spațiu vectorial finit dimensional, atunci A este un K-modul finit.

Vom preciza acum structura categoriei modulelor de tip finit peste o K-algebră Banach noetheriană.

TEOREMA 6.22. *Categoria modulelor Banach de tip finit peste o K-algebră Banach noetheriană A este identică cu categoria A-modulelor de tip finit.*

Demonstrație. Vom stabili în prealabil următoarea:

LEMA 6.23. *În condițiile teoremei, fie M un A modul Banach de tip finit; atunci orice submodul al său este închis.*

Fie N un submodul al lui M și fie $n_1, \ldots, n_s$ un sistem de generatori ai lui $\overline{N}$ (cum A este noetherian, $\overline{N}$ este tot de tip finit). Se poate presupune (eventual după o înmulţire cu un element convenabil din K) că $n_1, \ldots, n_s$ sînt de normă $\leqslant 1$.

Există $a \in K$, $|a| < 1$ şi $n'_1, \ldots, n'_s \in N$ cu $\|n'_i\| \leqslant 1$ şi $\|n_i - n'_i\| \leqslant |a|$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$. Vom nota cu N' submodulul lui M generat de $n'_1, \ldots, n'_s$. Dacă folosim pentru un A-modul normat X notaţia: $\mathring{X} = \{x \in X ; \|x\| \leqslant 1\}$, atunci se observă imediat că: $\overline{\mathring{N}} \subset \mathring{N}' + a \cdot \overline{\mathring{N}}$.

Dar topologia dată de idealul $a\mathring{A}$ este aceeaşi cu topologia lui $\mathring{A}$ indusă de normă, deci $\mathring{A}$ este complet în topologia aA-adică şi $\overline{\mathring{N}}$ este separat. Rezultă deci $\overline{\mathring{N}} = \mathring{N}'$, adică $\overline{N} = N' = N$, şi lema este demonstrată.

Demonstrăm acum teorema, arătînd identitatea obiectelor şi morfismelor celor două categorii.

Mai întîi referitor la obiecte, este suficient de arătat că orice A-modul de tip finit admite o topologie şi numai una de A-modul Banach.

Fie pentru aceasta un A-modul de tip finit M şi fie $p : A^m \to M \to 0$ o surjecţie de A-module; cum $\operatorname{Ker} p$ este închis, rezultă că M înzestrat cu topologia cît este normabil şi este chiar un A-modul Banach de tip finit. Pentru a demonstra independenţa acestei topologii faţă de p, fie $p : A^m \to M$ şi $q : A^n \to M$ două surjecţii de A-module. Se poate presupune (printr-un raţionament standard), că există o surjecţie $r : A^n \to A^m$ astfel ca diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "q"'] & & A^m \arrow[dl, "p"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă. Cum r este deschisă (teorema lui Banach), rezultă că p şi q induc aceeaşi topologie pe M. În ceea ce priveşte identitatea morfismelor, este suficient să arătăm că orice A-aplicaţie liniară $M \xrightarrow{u} N$ de A-module este continuă. Conform teoremei lui Banach este suficient să demonstrăm afirmaţia pentru cazul în care u este injectiv. Există $m > 0$, p_M şi p_N surjective, astfel ca diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& & A^m \arrow[dl, "p_M"'] \arrow[dr, "p_N"] & & \\
& M \arrow[rr, "u"] \arrow[dl] & & N \arrow[dr] & \\
0 & & & & 0
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă.

Oricare ar fi D deschis în N, avem $p_M(p_N^{-1}(D)) = u^{-1}(D)$.

Cum $p_N^{-1}(D)$ este deschisă (căci p_N este continuă) şi cum p_M duce mulţimi deschise în mulţimi deschise (definiţia topologiei cît), rezultă u continuă.

Teorema este demonstrată.

Primită la redacţie la 3 august 1968

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România
Calea Griviţei nr. 21, Bucureşti 12

ÉLÉMENTS D'ANALYSE NON ARCHIMÉDIENNE

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail on donne les résultats préliminaires d'analyse non archimédienne, qui seront nécessaires pour les espaces analytiques rigides (d'après J. Tate).

BIBLIOGRAFIE

1. G. Bachman, *Introduction to p-adic numbers and valuation theory*. Academic Press.- Inc. 1964.
2. N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques* ch. I, Hermann, Paris.
3. L. Gerritzen, *Die Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf reduzierten k-affinoiden Algebren*, Journ. für eine u. a. Math., **231**, 114—120 (1968).
4. H. Grauert und R. Remmert, *Über die Methode der diskret bewerteten Ringe in der nichtarchimedischen Analysis*. Inv. Math., **2**, 87—133 (1966).
5. H. Grauert und R. Remmert, *Nichtarchimedische Funktionentheorie*. Weierstrass Festschrift, Wissenschaftl. Abh. Arbeitsgem. f. Forsch. Nordheim Westfalen, **33**, 393—476 (1966).
6. A. W. Ingleton, *The Hahn-Banach theorem for non-Archimedian valued fields*. Proc. Cambridge. Phil. Soc., **48**, 41—45 (1952).
7. A. F. Monna et T. A. Springer, *Sur la structure des espaces de Banach non archimédiens*. Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. **A 68**, 602—614 (1965).
8. A. Ostrowski, *Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper*. Math. Z. **39**, 269—404 (1935).
9. P. Samuel and O. Zariski, *Commutative algebra I, II*, Van Nostrand, 1958.
10. J. Tate, *Rigid analytic spaces*. I.H.E.S. (1962).

ASUPRA FORMULEI MEDIEI A LUI CAUCHY

DE

I. P. ELIANU

Utilizînd, în mod efectiv, formula creșterilor finite și o lemă, se dă o demonstrație pentru formula mediei a lui Cauchy, presupunînd că funcțiile f și g sînt continue pe $[a, b]$ și că f are derivată finită sau infinită, iar g are derivată finită și nenulă, în (a, b).

În mod obișnuit, formula mediei a lui Cauchy se deduce aplicînd unei funcții auxiliare convenabile, teorema lui Rolle sau — așa cum a procedat Miron Nicolescu [3, p. 309] — utilizînd teorema creșterilor finite a lui Lagrange pentru o funcție auxiliară, care satisface însă tot condițiile din teorema lui Rolle, ceea ce era evident în concordanță cu punctul de vedere adoptat, care impunea obținerea concluziei prin orice procedeu.

Adoptînd însă un alt punct de vedere și plecînd de la interpretarea geometrică a acestei formule, G. M. Fihtenholț, în [2, p. 209], face o scurtă observație intuitivă asupra posibilității obținerii sale efective din formula creșterilor finite.

În ceea ce urmează, vom demonstra că această posibilitate este reală, dacă se utilizează o lemă preliminară asupra derivatelor funcțiilor compuse, într-un anumit caz, care de obicei nu este considerat și pe care N. Bourbaki [1, p. 13] îl menționează în tratatul său, într-o altă formă și fără demonstrație.

1. Fie E și F două mulțimi din R; E' și F' derivatele lor.

LEMĂ. *Dacă funcția* $u(x)$: $E \to F$ *este strict monotonă pe* E, *continuă și are derivată (finită sau infinită) în punctul* $x_0 \in E \cap E'$, *iar funcția* $f(u)$: $F \to R$ *are derivată (finită sau infinită) în punctul* $u_0 = u(x_0) \in F \cap F'$, *atunci funcția compusă* $\varphi = f \circ u$: $E \to R$ *are derivată (finită sau infinită) în* x_0 *și există relația*

$$\varphi'(x_0) = f'[u(x_0)].u'(x_0), \tag{1}$$

cu condiția ca produsul din partea doua să aibă sens.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 4, P. 591 – 594, BUCUREȘTI, 1969

Demonstrație. Putem scrie relația

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\frac{f[u(x)]-f[u(x_0)]}{u(x)-u(x_0)}\cdot\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}, \quad (x\in E)$$

cu condiția să avem $x\neq x_0$, cînd vom avea și $u(x)\neq u(x_0)$, deoarece $u(x)$ este strict monotonă.

Dacă în relația precedentă facem pe $x\to x_0$ și ținem seama că avem

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}=u'(x_0), \quad \lim_{x\to x_0}u(x)=u(x_0)=u_0,$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f[u(x)]-f[u(x_0)]}{u(x)-u(x_0)}=\lim_{u\to u_0}\frac{f(u)-f(u_0)}{u-u_0}=f'(u_0)=f'[u(x_0)],$$

va rezulta

$$\varphi'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=f'[u(x_0)]\cdot u'(x_0),$$

cu condiția ca produsul din ultima parte să aibă sens, ceea ce este tocmai relația (1).

2. Vom enunța teorema mediei a lui Cauchy sub forma următoare:

TEOREMA. (A. L. Cauchy). *Dacă funcțiile f și g sînt continue în intervalul închis* $[a, b]$ *și f are derivată (finită sau infinită), iar g este derivabilă (are derivată finită) în intervalul deschis* (a, b) *și dacă* $g'(x)\neq 0$, *în* (a, b), *atunci există cel puțin un punct* $a<c<b$, *pentru care avem relația*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{2}$$

Demonstrație. Mai întîi, să observăm că funcția g fiind derivabilă în (a, b), derivata sa g' va avea proprietatea lui Darboux în (a, b). Deoarece avem $g'(x)\neq 0$, în (a, b), rezultă că g' va avea un semn constant în (a, b), deci funcția g — care este și continuă pe $[a, b]$ — va fi strict monotonă pe $[a, b]$. Funcția g, fiind strict monotonă pe $[a, b]$, urmează că reprezentarea parametrică

$$\xi=g(x),\ \eta=f(x),\ (a\leqslant x\leqslant b)$$

va defini o funcție

$$\eta=f\,[h(\xi)]=\psi\,(\xi),$$

unde $x=h(\xi)$ este inversa funcției $\xi=g(x)$, iar $g(a)\leqslant\xi\leqslant g(b)$, dacă g este strict crescătoare sau $g(b)\leqslant\xi\leqslant g(a)$, dacă g este strict descrescătoare.

Funcția ψ, obținută prin compunerea funcțiilor f și h, va fi continuă în intervalul închis cu extremitățile în $g(a)$ și $g(b)$, deoarece funcția h este continuă în acest interval și fiindcă funcția f este continuă pe $[a, b]$.

În virtutea lemei precedente, funcţia ψ va avea şi derivată (finită sau infinită) în intervalul deschis cu extremităţile în $g(a)$ şi $g(b)$, deoarece funcţia strict monotonă h este derivabilă şi $h'(\xi) \neq 0$, în acest interval (ca inversa funcţiei derivabile g, care satisface condiţia $g'(x) \neq 0$, în (a, b)) şi fiindcă funcţia f are derivată (finită sau infinită), în (a, b).

Aplicînd formula creşterilor finite, funcţiei ψ şi intervalului cu extremităţile în $g(a)$ şi $g(b)$, rezultă că există cel puţin un punct γ, situat între $g(a)$ şi $g(b)$, astfel încît să avem relaţia

$$\psi[g(b)] - \psi[g(a)] = [g(b) - g(a)] \cdot \psi'(\gamma), \tag{3}$$

cu $\psi'(\gamma) \neq \pm\infty$.

Dacă notăm $c = h(\gamma)$, deci $\gamma = g(c)$, atunci $a < c < b$.

Pe de altă parte, avem $g(b) - g(a) \neq 0$, fiindcă g este strict monotonă pe $[a, b]$, şi există relaţiile

$$\psi[g(a)] = f[h(g(a))] = f(a)$$

$$\psi[g(b)] = f[h(g(b))] = f(b)$$

$$\psi'(\gamma) = f'[h(\gamma)] \cdot h'(\gamma) = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

unde am ţinut seama din nou, în ultima relaţie, şi de lema precedentă. Făcînd în egalitatea (3), înlocuirile care rezultă din cele trei relaţii precedente şi împărţind cu $g(b) - g(a) \neq 0$, obţinem formula (2) din enunţul teoremei lui Cauchy.

Observaţie. Se vede imediat că în relaţia (2) avem nu numai $g'(c) \neq \pm\infty$, ci şi $f(c) \neq \pm\infty$.

3. Din demonstraţia precedentă rezultă că formula mediei a lui Cauchy, în ipotezele din enunţul de mai sus, nu este altceva decît formula creşterilor finite a lui Lagrange pentru funcţia ψ, definită de reprezentarea parametrică $\xi = g(x)$, $\eta = f(x)$, cu $a \leqslant x \leqslant b$ şi deci ea va admite aceeaşi interpretare geometrică ca şi formula creşterilor finite, numai că această interpretare geometrică va fi relativă la graficul funcţiei definită de reprezentarea parametrică menţionată [2, p. 209].

Se ştie că formula mediei a lui Cauchy este valabilă şi în cazul mai general, cînd funcţiile f şi g au derivate (finite sau infinite) în (a, b), cu condiţia ca în fiecare punct $a < x < b$ cel puţin una din derivatele $f'(x)$ şi $g'(x)$ să fie finită, aşa cum au observat M. Nicolescu, N. Dinculeanu şi S. Marcus [4, p. 271], dar acest rezultat nu poate fi obţinut din demonstraţia precedentă, care utilizează în mod esenţial proprietatea ca g să fie derivabilă în (a, b).

Primită la redacţie la 30 iulie 1968

Academia militară

SUR LA FORMULE DE LA MOYENNE DE CAUCHY

(RÉSUMÉ)

En utilisant d'une manière effective la formule des accroissements finis et un lemme, l'auteur donne une démonstration de la formule de la moyenne de Cauchy en supposant que les fonctions f et g sont continues sur $[a, b]$ et que l'une d'entre elles a une dérivée finie ou infinie et l'autre a une dérivée finie non nulle, dans (a, b).

BIBLIOGRAFIE

1. Bourbaki N., *Éléments de Mathématique. Fonctions d'une variable réelle (Théorie élémentaire)*. Act. sci. et industrielles, no. 1074 (deuxième édition), IX, Hermann et Cie Paris, 1958.
2. Fihtenholt G. M., *Curs de calcul diferențial și integral*. vol. I, Ed. tehnică, București, 1963.
3. Nicolescu Miron, *Analiza matematică*, vol. II, Ed. tehnică, București, 1958.
4. Nicolescu Miron, Dinculeanu N., Marcus S., *Manual de analiză matematică*, vol. I. Ed. didactică și pedagogică, București, 1962.

ASUPRA DEFORMĂRII PLANE GENERALIZATE

DE

D. IEŞAN
(Iaşi)

Se consideră cazul deformării termoelastice a unui mediu anizotrop. Folosind metoda potenţialului se stabilesc condiţiile necesare şi suficiente pentru existenţa soluţiei problemelor la limită în cazul unui domeniu multiplu conex.

Studiul problemelor la limită din teoria elasticităţii plane în cazul mediilor anizotrope a fost făcut în diverse lucrări dintre care amintim [1], [2], [3], [8], [11]. Vom studia starea de deformare plană generalizată a unui mediu omogen şi anizotrop folosind metoda potenţialului [2], [4], [7].

Mediul considerat ocupă un domeniu multiplu conex şi se află în prezenţa unui cîmp de temperatură dat.

Notăm prin u_i, t_{ij} şi F_i respectiv componentele vectorului deplasare, tensorului tensiune şi forţei masice iar prin T variaţia temperaturii absolute a mediului faţă de temperatura din starea nedeformată.

În cazul deformării plane generalizate avem

$$u_i = u_i\,(x_1, x_2),\ T = T\,(x_1, x_2)\ (i = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Ecuaţiile constitutive se scriu

$$t_{i\alpha} = c_{i\alpha k\rho}\, u_{k,\rho} - \beta_{i\alpha}\, T,\ (i, k = 1, 2, 3;\ \alpha, \rho = 1, 2), \tag{2}$$

unde $c_{i\alpha k\rho}$ şi $\beta_{i\alpha}$ sînt constante ce caracterizează proprietăţile elastice şi termice ale mediului. De obicei, în cele ce urmează, indicii greceşti iau valorile 1 şi 2.

Ecuaţiile de echilibru sînt

$$t_{i\alpha,\alpha} = -F_i,\ (i = 1, 2, 3), \tag{3}$$

unde [8]

$$F_\alpha = F_\alpha\,(x_1, x_2),\ F_3 = 0. \tag{4}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 4, P. 595-609, BUCUREŞTI, 1969

Din (2) şi (3) obţinem

$$c_{i\alpha k\rho}\, u_{k,\alpha\rho} = -F_i + \beta_{i\alpha}\, T_{,\alpha}. \tag{5}$$

Avînd în vedere faptul că energia de deformare este pozitiv definită, rezultă că sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale (5) este strict eliptic în sens Vishik [12]. În baza relaţiilor de mai sus rezultă că între mărimile ce caracterizează două stări de deformare, există următoarea relaţie de reciprocitate

$$\int_\Sigma [(-F_i^{(1)} + \beta_{i\alpha}\, T^{(1)}_{,\alpha})\, u_i^{(2)} - (-F_i^{(2)} + \beta_{i\alpha}\, T^{(2)}_{,\alpha})\, u_i^{(1)}]\, \mathrm{d}\sigma = \tag{6}$$

$$= \int_L [(t_{i\alpha}^{(1)} + \beta_{i\alpha}\, T^{(1)})\, u_i^{(2)} - (t_{i\alpha}^{(2)} + \beta_{i\alpha}\, T^{(2)})\, u_i^{(1)}]\, n_\alpha\, \mathrm{d}s,$$

unde Σ este domeniul ocupat de mediul considerat iar L este frontiera sa.

1. *Generalizarea formulei lui Somigliana.* Sistemul (5) poate fi scris sub forma

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\tau = \mathfrak{F}, \tag{7}$$

unde

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = L_{\alpha\beta}\,\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta}, \quad L_{\alpha\beta} = \| L^{ij}_{\alpha\beta} \|, \; L^{ij}_{\alpha\beta} = C_{i\alpha j\beta}, \; (i, j = 1, 2, 3), \tag{8}$$

iar τ şi $\mathfrak{F}$ sînt matricele cu o singură coloană

$$\tau = \| u_i \|, \; \mathfrak{F} = \| -F_i + \beta_{i\alpha}\, T_{,\alpha} \|. \tag{9}$$

Introducem operatorul

$$\mathfrak{T}_x = L_{\alpha\beta} \cos(n_x, x_\alpha)\, \frac{\partial}{\partial x_\beta}, \tag{10}$$

unde n_x este normala unitară exterioară în punctul $x\,(x_1, x_2,) \in L$. Din faptul că funcţia $T(x_1, x_2)$ este dată, rezultă că tensiunea pe frontieră este cunoscută dacă se cunoaşte expresia $\mathfrak{T}_x\, \tau$ pe frontieră. Avînd în vedere (7) şi (10), relaţia (6) se scrie

$$\int_\Sigma [\tau_1^*(x)\, \mathfrak{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\tau_2(x) - \tau_2^*(x)\, \mathfrak{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\tau_1(x)]\, \mathrm{d}\sigma = \tag{11}$$

$$\int_L [\tau_1^*(x)\, \mathfrak{T}\, \tau_2(x) - \tau_2^*(x)\, \mathfrak{T}\, \tau_1(x)]\, \mathrm{d}s,$$

unde prin τ^* s-a notat transpusa matricei τ.

Considerăm reprezentarea de tip Galerkin [10]

$$\tau = G\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi, \; \varphi = \| \varphi_k \|, \; \varphi_k = \varphi_k(x_1, x_2), \; (k = 1, 2, 3), \tag{12}$$

unde

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) G\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = G\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \mathfrak{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = E \det \mathfrak{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), \tag{13}$$

E fiind matricea unitate. Dacă

$$G\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = G_{\alpha\beta\varkappa\rho} \frac{\partial^4}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta \, \partial x_\varkappa \, \partial x_\rho}, \tag{14}$$

atunci

$$L^{kj}_{\alpha\beta} G^{jl}_{\varkappa\rho\mu\eta} \frac{\partial^6}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta \, \partial x_\varkappa \, \partial x_\rho \, \partial x_\mu \, \partial x_\eta} = \delta_{kl} \det \mathfrak{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right). \tag{15}$$

Din (7), (12) şi (13) rezultă

$$\left[\det \mathfrak{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] E\varphi = \mathfrak{F}. \tag{16}$$

Vom nota cu $\Psi(x, y)$, soluţia fundamentală a ecuaţiei eliptice

$$\det \mathfrak{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \Psi = 0. \tag{17}$$

Notăm prin $\Gamma^{(j)}$ matricele obţinute din (12) dacă $\varphi_i = \Psi_{(x,y)} \delta_{ij}$ şi considerăm matricea soluţiilor fundamentale ale sistemului (7)

$$\Gamma(x, y) = (\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \Gamma^{(3)}). \tag{18}$$

Ecuaţia caracteristică corespunzătoare ecuaţiei (17)

$$L^{kj}_{\lambda\beta} G^{jk}_{\varkappa\rho\mu\eta} \alpha^{12-(\lambda+\beta+\varkappa+\rho+\mu+\eta)} = 0, \tag{19}$$

are rădăcinile

$$\alpha_{2k-1} = p_k + iq_k, \ q_k > 0, \ \alpha_{2k} = \overline{\alpha_{2k-1}}, \ (k = 1, 2, 3; \ i = \sqrt{-1}). \tag{20}$$

Vom presupune că aceste rădăcini sînt distincte. Notăm prin d_k complementul algebric al elementului α_k^5 din determinantul

$$d = \begin{vmatrix} \alpha_1^5 & \alpha_1^4 & \ldots & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2^5 & \alpha_2^4 & \ldots & \alpha_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_6^5 & \alpha_6^4 & \ldots & \alpha_6 & 1 \end{vmatrix}, \tag{21}$$

împărţit la d.

Fie

$$\sigma_j = (x_1 - y_1)\, \alpha_j + x_2 - y_2, \ (j = 1, 2, \ldots, 6), \tag{22}$$

unde x_ρ şi y_ρ sînt coordonatele punctelor x şi y.

Soluţia fundamentală a ecuaţiei (17) are forma [9]

$$(23)\qquad \Psi(x, y) = ia \sum_{j=1}^{6} (-1)^{j}\, d_{j}\, \sigma_{j}^{4} \ln \sigma_{j},\ a = -\frac{1}{24 \det L_{11}},$$

unde $\overline{\ln\ \sigma_{2k-1}} = \ln \sigma_{2k}$.

Avem

$$\frac{\partial^{4} \Psi}{\partial x_{\lambda}\, \partial x_{\varkappa}\, \partial x_{\rho}\, \partial x_{\mu}} = 24\, ai \sum_{j=1}^{6} (-1)^{j}\, d_{j}\, \alpha_{j}^{8-(\lambda+\varkappa+\rho+\mu)} \ln \sigma_{j} +$$

$$(24)\qquad + 44\, ai \sum_{j=1}^{6} (-1)^{j}\, d_{j}\, \alpha_{j}^{8-(\lambda+\varkappa+\rho+\mu)},$$

$$\frac{\partial^{5} \Psi}{\partial x_{\beta}\, \partial x_{\lambda}\, \partial x_{\varkappa}\, \partial x_{\rho}\, \partial x_{\mu}} = 24\, ai \sum_{j=1}^{6} (-1)^{j}\, d_{j}\, \alpha_{j}^{10-(\beta+\lambda+\varkappa+\rho+\mu)} \frac{1}{\sigma_{j}}.$$

Avînd în vedere relaţiile (12), (14) şi (24), obţinem

$$(25)\qquad \Gamma(x, y) = \sum_{j=1}^{6} A_{j} \ln\ \sigma_{j} + A,$$

unde

$$(26)\qquad \begin{aligned} A_{j} &= 24\, ai\, (-1)^{j}\, d_{j}\, G_{\varkappa\rho\gamma\delta}\ \alpha_{j}^{8-(\varkappa+\rho+\gamma+\delta)}, \\ A &= 44\, ai \sum_{j=1}^{6} (-1)^{j}\, \mathrm{d}_{j}\, G_{\varkappa\rho\gamma\delta}\ \alpha_{j}^{8-(\varkappa+\rho+\gamma+\delta)}. \end{aligned}$$

Evident, matricea $\Gamma(x, y)$ este simetrică. Din (10) şi (24) avem

$$(27)\qquad \mathcal{T}_{x} \Gamma(x, y) = 24\, ai \sum_{j=1}^{6} (-1)^{j} \frac{\mathrm{d}_{j}}{\sigma_{j}} L_{\lambda\beta} \cos(n_{\varkappa}, x_{\lambda})\, G_{\varkappa\rho\mu\eta}\ \alpha_{j}^{10-(\beta+\varkappa+\rho+\mu+\eta)}.$$

Avînd în vedere (15), (19) rezultă

$$(28)\qquad L_{2\beta}\, G_{\varkappa\rho\mu\eta}\ \alpha_{j}^{10-(\beta+\varkappa+\rho+\mu+\eta)} = -\ \alpha_{j}\, L_{1\beta}\, G_{\varkappa\rho\mu\eta}\ \alpha_{j}^{10-(\beta+\varkappa+\rho+\mu+\eta)}.$$

Din (27), (28) avem

$$(29)\qquad \mathcal{T}_{x} \Gamma(x, y) = 24\, ai \sum^{6} (-1)^{j} \frac{d_{j}}{\sigma_{j}} H_{j}\, [\cos(n_{x}, x_{1}) - \alpha_{j} \cos(n_{x}, x_{2})],$$

unde

$$(30)\qquad H_{j} = L_{1\beta}\, G_{\varkappa\rho\mu\eta}\ \alpha_{j}^{10-(\beta+\varkappa+\rho+\mu+\eta)}.$$

Ţinînd seama de relaţiile

$$(31)\qquad \begin{gathered} \frac{1}{\sigma_{j}} [\cos\ (n_{x}, x_{1}) - \alpha_{j}\ \cos(n_{x}, x_{2})] = \frac{\partial \ln \sigma_{j}}{\partial s_{x}}, \\ \frac{\partial \ln \sigma_{j}}{\partial s_{x}} = \frac{\partial \ln r}{\partial\, s_{x}} + \frac{\partial}{\partial s_{x}} \ln \frac{\sigma_{j}}{\sigma} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s_{x}} \ln \frac{\overline{\sigma}}{\sigma}, \\ \frac{\partial}{\partial s_{x}} \ln \frac{\sigma_{j}}{\sigma} = \frac{(i - \alpha_{j})\, r^{2}}{\sigma \sigma_{j}} \frac{\partial \ln r}{\partial n_{x}},\ \sigma = i\, (x_{1} - y_{1}) + x_{2} - y_{2}, \\ r^{2} = (x_{1} - y_{1})^{2} + (x_{2} - y_{2})^{2}. \end{gathered}$$

din (29) obţinem

$$\mathcal{T}_x \Gamma(x, y) = K \frac{\partial \ln r}{\partial s_x} + \Pi(x, y), \tag{32}$$

unde

$$\begin{gathered} K = 24\, ai \sum_{j=1}^{6} (-1)^j d_j H_j, \\ \Pi(x, y) = 24\, ai \sum_{j=1}^{6} (-1)^j d_j H_j \left[\frac{(i - \alpha_j)\, r^2}{\sigma \sigma_j} - i \right] \frac{\partial \ln r}{\partial n_x}. \end{gathered} \tag{33}$$

Vom nota prin Σ_i domeniul finit a cărui frontieră este curba de tip Liapunov L iar prin Σ_e complementara domeniului $\Sigma_i + L$ în raport cu întreg planul. Matricea $\tau(x)$ este regulată în domeniul Σ_i (Σ_e) dacă elementele sale au derivate parţiale de ordinul întîi continue în domeniul închis $\Sigma_i + L$ $(\Sigma_e + L)$ şi derivatele parţiale de ordinul al doilea continue în $\Sigma_i(\Sigma_e)$. Pentru domeniul infinit Σ_e, matricea $\tau(x)$ trebuie să satisfacă condiţiile [7]

$$\tau(x) = O(1), \quad r^2 \frac{\partial \tau(x)}{\partial R} = O(1), \tag{34}$$

unde R este o direcţie arbitrară iar r este distanţa de la punctul x la un punct fix din Σ_i.

Fie $\sigma(x; \varepsilon)$ cercul cu centrul în punctul x, de rază ε şi circumferinţă $\gamma(x; \varepsilon)$. Presupunem că $x \in \Sigma_i$ şi considerăm ε suficient de mic încît $\sigma(x; \varepsilon)$ să fie conţinut în întregime în Σ_i.

Din (11) obţinem

$$\int\limits_{\Sigma_i - \sigma(x.\, \varepsilon)} \Gamma^*(x, y)\, \mathfrak{L}\!\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \tau(y)\, \mathrm{d}\sigma = \int\limits_{L+\gamma} [\Gamma^{*(k)}(x, y)\, \mathcal{T}_y \tau - \tau^* \mathcal{T}_y \Gamma^{(k)}(x, y)]\, \mathrm{d}s_y \tag{35}$$

unde τ este o matrice regulată.

Avînd în vedere relaţiile

$$\begin{gathered} \mathcal{T}_y \Gamma(x, y) = -24\, ai \sum_{j=1}^{6} (-1)^j \frac{d_j}{\sigma_j} L_{\lambda\beta} \cos(n_y, x_\lambda)\, G_{\varkappa\rho\mu\eta}\, \alpha_j^{10-(\beta+\varkappa+\rho+\mu+\eta)}, \\ \frac{\partial \ln \sigma_j}{\partial s_y} = \frac{1}{\sigma_j} [\alpha_j \cos(n_y, x_2) - \cos(n_y, x_1)], \\ \int\limits_{\gamma} \mathrm{d} \ln \sigma_j = (-1)^j\, 2\pi i, \end{gathered} \tag{36}$$

rezultă

$$\begin{aligned}(37)\qquad &\int_{\gamma} \mathcal{T}_y \Gamma(x, y)\, \mathrm{d}s_y = 24\, ai\, L_{1\beta} G_{\varkappa\rho\mu\eta} \sum_{j=1}^{6} (-1)^j d_j\, \alpha_j^{10-(\beta+\varkappa+\rho+\mu+\eta)} \int_{\gamma} \mathrm{d} \ln \sigma_j = \\ &= -48\, a \pi\, L_{1\beta} G_{\chi\rho\mu\eta} \sum_{j=1}^{6} d_j\, \alpha_j^{10-(\beta+\varkappa+\rho+\mu+\eta)} = -48\, a \pi\, (\det L_{11})\, E = 2\pi E.\end{aligned}$$

Analog obţinem

$$(38)\qquad \int_{L} \mathcal{T}_y \Gamma_{(x,y)}\, \mathrm{d}s_y = \begin{cases} 2\pi E & x \in \Sigma_i \\ \pi E & x \in L, \\ 0 & x \in \Sigma_e. \end{cases}$$

Considerînd şi cazurile cînd $x \in L$ şi $x \in \Sigma_e$, din (35), (38) obţinem

$$\begin{aligned}(39)\qquad \varkappa(x)\, u_k(x) = &\frac{1}{\pi} \int_{L} [\tau^* \mathcal{T}_y \Gamma^{(k)}(x, y) - \Gamma^{*(k)}(x, y)\, \mathcal{T}_y \tau]\, \mathrm{d}s_y + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma i} \Gamma^{*(k)}(x, y)\, \mathfrak{L}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \tau\, \mathrm{d}\sigma,\end{aligned}$$

unde

$$(40)\qquad \varkappa(x) = \begin{cases} 2 & x \in \Sigma_i, \\ 1 & x \in L, \\ 0 & x \in \Sigma_e. \end{cases}$$

Dacă notăm

$$(41)\qquad [\mathcal{T}_y \Gamma(x, y)]^* = \Lambda(x, y),$$

şi ţinem seama de simetria matricei $\Gamma(x, y)$, din (39) obţinem

$$\begin{aligned}(42)\qquad \varkappa(x)\, \tau(x) = &\frac{1}{\pi} \int_{L} [\Lambda(x, y)\, \tau(y) - \Gamma(x, y)\, \mathcal{T}_y \tau]\, \mathrm{d}s_y + \\ &\frac{1}{\pi} \int_{\Sigma i} \Gamma(x, y)\, \mathfrak{L}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \tau\, \mathrm{d}\sigma.\end{aligned}$$

Relaţia (42) reprezintă generalizarea formulei lui Somigliana în cazul problemei noastre.

2. *Potenţiali elastici.* Fie $\mu = \|\mu_j\|$ o matrice cu o singură coloană ale cărei elemente μ_j $(j = 1, 2, 3)$ sînt funcţii de clasă Hölder. Introducem potenţialii:

— potenţialul elastic de simplu strat

$$(43)\qquad V(x) = \frac{1}{\pi} \int_{L} \Gamma(x, y)\, \mu(y)\, \mathrm{d}s_y;$$

— potențialul elastic de dublu strat

$$W(x) = \frac{1}{\pi} \int_L \Lambda(x, y)\, \mu(y)\, ds_y; \tag{44}$$

— potențialul elastic de masă

$$U(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_i} \Gamma(x, y)\, \mu(y)\, d\sigma. \tag{45}$$

Avînd în vedere (38), analog cu cele din [7], se pot demonstra următoarele teoreme

TEOREMA 1. *Potențialul de simplu strat $V(x)$ este continuu peste tot.*

TEOREMA 2. *Potențialul de dublu strat $W(x)$ tinde la limite finite cînd punctul x tinde la punctul $x_0 \in L$, din Σ_i sau din Σ_e și aceste limite sînt egale cu*

$$\begin{aligned} W_i(x_0) &= \mu(x_0) + \frac{1}{\pi} \int_L \Lambda(x_0, y)\, \mu(y)\, ds_y, \\ W_e(x_0) &= -\mu(x_0) + \frac{1}{\pi} \int_L \Lambda(x_0, y)\, \mu(y)\, ds_y. \end{aligned} \tag{46}$$

integralele din membrul drept fiind înțelese în sensul valorii principale după Cauchy.

TEOREMA 3. *Funcția $\mathcal{T} V(x)$ tinde la limite finite cînd punctul x tinde la punctul $x_0 \in L$, din Σ_i sau din Σ_e și aceste limite sînt*

$$\begin{aligned} (\mathcal{T} V)_i &= -\mu(x_0) + \frac{1}{\pi} \int_L \mathcal{T}_{x_0} \Gamma(x_0, y)\, \mu(y)\, ds_y, \\ (\mathcal{T} V)_e &= \mu(x_0) + \frac{1}{\pi} \int_L \mathcal{T}_{x_0} \Gamma(x_0, y)\, \mu(y)\, ds_y. \end{aligned} \tag{47}$$

TEOREMA 4. *Potențialul de masă $U(x)$ satisface ecuația*

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U(x) = \mu(x), \quad x \in \Sigma_i. \tag{48}$$

Avînd în vedere (25), (32), rezultă [4]

$$W = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial W}{\partial R} = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \tag{49}$$

iar dacă

$$\int_L \mu(y)\, ds_y = 0, \tag{50}$$

atunci

$$V = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial V}{\partial R} = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \to \infty. \tag{51}$$

3. *Reducerea problemelor la limită la ecuații integrale.* În cele ce urmează vom considera sistemul de ecuații

$$(52)\qquad \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\tau = 0,$$

și următoarele probleme de frontieră:

Probleme pentru interior:

— Să se determine în domeniul Σ_i o soluție regulată a sistemului (52) care pe frontieră să satisfacă una din condițiile

$$(\mathrm{I}_1)\qquad \lim_{x\to x_0} \tau(x) = g_1(x_0),$$

$$(\mathrm{I}_2)\qquad \lim_{x\to x_0} \mathcal{T}\tau(x) = g_2(x_0),$$

unde $x \in \Sigma_i$, $x_0 \in L$, iar elementele matricelor g_α sînt funcții date de clasă H.

Probleme pentru exterior:

— Să se determine în domeniul Σ_e o soluție regulată a sistemului (52) care pe frontieră să satisfacă una din următoarele condiții

$$(\mathrm{E}_1)\qquad \lim_{x\to x_0} \tau(x) = h_1(x_0),$$

$$(\mathrm{E}_2)\qquad \lim_{x\to x_0} \mathcal{T}\tau(x) = h_2(x_0),$$

unde $x \in \Sigma_e$, $x_0 \in L$ iar elementele matricelor h_α sînt funcții date, de clasă H.

Avînd în vedere teorema 4 și faptul că potențialul de masă împreună cu derivatele sale de ordinul întîi sînt funcții de clasă H [5], studiul sistemului (7) se reduce la cazul considerat mai sus. Căutăm soluția problemelor (I_1) și (E_1) sub forma unui potențial elastic de dublu strat iar soluția problemelor (I_2) și (E_2) sub forma unui potențial de simplu strat. Ținînd seama de teoremele 2 și 3 obținem, pentru densitatea necunoscută $\mu(x)$, următoarele ecuații integrale singulare

$$(\mathrm{I}_1)\qquad \mu(x_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \Lambda(x_0, y)\,\mu(y)\,\mathrm{d}s_y = g_1(x_0),$$

$$(\mathrm{I}_2)\qquad -\mu(x_0) + \frac{1}{\pi}\int_L [\mathcal{T}_{x_0}\Gamma(x_0, y)]\,\mu(y)\,\mathrm{d}s_y = g_2(x_0),$$

$$(\mathrm{E}_1)\qquad -\mu(x_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \Lambda(x_0, y)\,\mu(y)\,\mathrm{d}s_y = h_1(x_0),$$

$$(\mathrm{E}_2)\qquad \mu(x_0) + \frac{1}{\pi}\int_L [\mathcal{T}_{x_0}\Gamma(x_0, y)]\,\mu(y)\,\mathrm{d}s_y = h_2(x_0).$$

Avînd în vedere (41), rezultă că ecuațiile (I_1) și (E_2), (I_2) și (E_1) sînt asociate între ele. Dacă t și t_0 sînt afixele punctelor y și x_0 iar $v(t)$ este unghiul între tangenta în punctul $t \in L$ și axa Ox_1, atunci

$$(53)\qquad \frac{\partial \ln r}{\partial s_y}\, ds_y = \frac{dt}{t - t_0} - i\, d\,\theta.$$

Din (32), (41), (53) rezultă că ecuația (I_1) poate fi scrisă sub forma

$$(54)\qquad \mu(t_0) + \frac{1}{\pi} K^* \int_L \frac{\mu(t)\, dt}{t - t_0} + \mathcal{K}\mu = g_1(t_0),$$

unde $\mathcal{K}$ este un operator Fredholm. Avînd în vedere (33), rezultă că (54) este un sistem de ecuații integrale singulare de tip normal al cărui indice este nul încît se pot aplica teoremele lui Fredholm. Analog se poate arăta că și indicele sistemului (I_2) este nul.

4. *Teoreme de existență.* Presupunem că domeniul considerat este multiplu conex. Considerăm cazurile

$$(a)\qquad \Sigma_i = \bigcup_{k=1}^{n} \Sigma_i^{(k)}, \quad L = \bigcup_{1}^{n} L_k,$$

unde $\Sigma_i^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sînt domenii finite, mărginite de curbele închise L_k de tip Liapunov, care nu au puncte comune,

$$(b)\qquad \Sigma_e = \bigcup_{k=0}^{m} \Sigma_e^{(k)}, \quad L = \bigcup_{k=0}^{m} L_k,$$

unde $\Sigma_e^{(k)}$ sînt domenii mărginite de curbele închise L_k de tip Liapunov care nu au puncte comune, dintre care L_0 conține în interiorul său pe toate celelalte. Domeniile $\Sigma_e^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ sînt domenii finite iar domeniul $\Sigma_e^{(0)}$ este infinit.

(a). Se știe [8] că dacă energia de deformare este nulă, atunci

$$(55)\qquad \tau(x) \equiv \tau_0(x) = \begin{pmatrix} -\omega x_2 + u_0 \\ \omega x_1 + v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = u_0 \varkappa^{(1)} + v_0 \varkappa^{(2)} + w_0 \varkappa^{(3)} + \omega \varkappa^{(4)},$$

unde

$$(56)\qquad \varkappa^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varkappa^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varkappa^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varkappa^{(4)} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

iar u_0, v_0, w_0, ω sînt constante arbitrare.

Rezultă ușor următoarea teoremă de unicitate

TEOREMA 5. *Problemele omogene* (I_1^0), (E_1^0), (E_2^0) *au numai soluția banală iar problema* (I_2^0) *are 4n soluții liniar independente*

$$(57)\qquad v_{kj}(x) = \begin{cases} \varkappa^{(k)}(x) & x \in \Sigma_i^{(j)} + L_j \\ 0 & x \notin \Sigma_i^{(j)} + L_j,\ (k = 1, 2, 3, 4;\ j = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Vom nota soluțiile (57) prin $\varphi_l(x)$, $(l = 1, 2, \ldots, 4n)$.

Să considerăm pentru început problemele (I_1) şi (E_2). Ecuaţiile omogene corespunzătoare acestora sînt

$$(I_1^0) \qquad \mu(x_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \Lambda(x_0, y)\,\mu(y)\,ds_y = 0,$$

$$(E_2^0) \qquad \mu(x_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \mathcal{T}_{x_0}\,\Gamma(x_0, y)\,\mu(y)\,ds_y = 0.$$

Să arătăm că aceste ecuaţii au numai soluţia banală. Presupunem contrarul şi fie $\mu_1(x)$ o soluţie nebanală a ecuaţiei (E_2^0). Potenţialul de simplu strat

$$V(x;\,\mu_1) = \frac{1}{\pi}\int_L \Gamma(x, y)\,\mu_1(y)\,ds_y,$$

are proprietăţile

$$1) \qquad \mathfrak{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) V(x;\,\mu_1) = 0,$$

$$2) \qquad (\mathcal{T}\,V)_e = 0,$$

3) satisface condiţia (51).

Acest din urmă fapt rezultă în urma înmulţirii ecuaţiei (E_2^0) prin ds_{x_0} şi integrînd pe L. Ţinînd seama de (38), rezultă că $\mu_1(y)$ satisface relaţia (50) şi deci avem (51).

Conform teoremei de unicitate rezultă

$$V(x;\,\mu_1) = 0,\ x \in \Sigma_e.$$

Aplicînd teorema 1 avem

$$V_e(x;\,\mu_1) = V_i(x;\,\mu_1) = 0, \text{ pe } L,$$

şi în baza teoremei de unicitate a problemei (I_1^0) rezultă

$$V(x;\,\mu_1) = 0,\ x \in \Sigma_i$$

Cu ajutorul relaţiilor (47) obţinem

$$2\,\mu_1(x_0) = (\mathcal{T}\,V)_e - (\mathcal{T}\,V)_i = 0,\ x_0 \in L,$$

fapt ce contrazice presupunerea făcută. Deoarece ecuaţiile (I_1^0) şi (E_2^0) sînt asociate, rezultă că şi ecuaţia (E_2^0) nu are soluţii nebanale. Deci ecuaţiile integrale (I_1) şi (E_2) sînt rezolvabile oricare ar fi g_1 şi h_2 de clasă H. Pentru ca soluţia problemei (E_2) să satisfacă condiţia (35), este suficient ca densitatea $\mu(y)$ să satisfacă condiţia (50). Din (E_2) şi (38) obţinem

$$2\int_L \mu(x)\,ds_x = \int_L h_2(x)\,ds_x.$$

Avem deci

TEOREMA 6. *Problema (I_1) are soluţie şi aceasta poate fi exprimată printr-un potenţial de dublu strat.*

TEOREMA 7. *Condiţia necesară şi suficientă pentru existenţa soluţiei problemei* (E_2) *este*

$$\int_L h_2(x)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{58}$$

iar dacă (58) *este satisfăcută, soluţia poate fi reprezentată printr-un potenţial de simplu strat.*

Să considerăm problemele (I_2^0) şi (E_1^0). Evident, matricea τ_0 satisface relaţiile $\mathfrak{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\tau_0 = 0$ şi $\mathcal{T}\tau_0 = 0$. Avînd în vedere (42), pentru $x\in\Sigma_i$, putem scrie

$$\tau_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_L \Lambda(x, y)\,\tau_0(y)\,\mathrm{d}s_y,\quad x\in\Sigma_i. \tag{59}$$

Dacă trecem la limită în relaţia (59) pentru x tinzînd la punctul $x_0\in L$, avînd în vedere teorema 2, obţinem

$$\tau_0(x) - \frac{1}{\pi}\int_L \Lambda(x_0, y)\,\tau_0(y)\,\mathrm{d}s_y = 0,\quad x_0\in L. \tag{60}$$

Matricea $\tau_0(x)$ satisface deci ecuaţia (E_1^0). Evident, sistemul de matrici $\varphi_l(x_0)$, $(l = 1, 2, \ldots, 4n)$, $x_0\in L$, formează $4n$ soluţii liniar independente ale ecuaţiei (E_1^0). În baza teoremei lui Fredholm, ecuaţia (I_2^0) are cel puţin $4n$ soluţii liniar independente, fie acestea Ψ_k $(k = 1, 2, \ldots, 4n)$. Procedînd ca în [7] se arată că funcţiile Ψ_k formează un sistem complet de soluţii liniar independente ale ecuaţiei (I_2^0) şi deci şi sistemul φ_k este complet. Sistemul complet φ_k de soluţii liniar independente ale ecuaţiei (E_1^0) reprezintă deplasări rigide şi deci poate fi exprimat prin combinaţii liniare de matricele $V(x;\,\Psi_k)$, $(k = 1, 2, \ldots, 4n)$. Căutăm soluţia problemei (E_1^0) sub forma [7]

$$\tau(x) = W(x) + \sum_1^{4n} c_k\, V(x;\,\Psi_k) + c, \tag{61}$$

unde c_k sînt constante arbitrare iar c este o matrice constantă. Evident, sistemul (52) este satisfăcut iar condiţia pe frontieră se reduce la

$$-\mu(x_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \Lambda(x_0, y)\,\mu(y)\,\mathrm{d}s_y = h_1(x_0) - \sum_1^{4n} c_k\, V(x;\,\Psi_k) - c \equiv h_1'. \tag{62}$$

Condiţia necesară şi suficientă pentru rezolvabilitatea acestei ecuaţii este

$$\int_L h_1'(x_0)\,\Psi_k(x_0)\,\mathrm{d}s = 0,\quad (k = 1, 2, \ldots, 4n). \tag{63}$$

Din (63) obţinem [4]

$$c_k = c_k^0 - c\int_L \Psi_k(y)\,\mathrm{d}s_y,\quad c_k^0 = \int_L h_1(x)\,\Psi_k(x)\,\mathrm{d}s_x. \tag{64}$$

Din condiţia

$$\sum_1^{4n} c_k \int_L \Psi_k \, ds = 0,$$

se determină c. Avem deci

TEOREMA 8. *Problema* (E_1) *este rezolvabilă totdeauna iar soluţia sa are forma (61).*

Pentru rezolvabilitatea ecuaţiei (I_2) este necesar şi suficient ca

$$\int_L \varphi_k(y)\, g_2(y)\, ds_y = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, 4n), \tag{65}$$

de unde, în baza relaţiei (57), obţinem

$$\int_{L_k} g_2(y)\, ds_y = 0, \quad \int_{L_k} \varkappa^{(4)}(y)\, g_2(y)\, ds_y = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{66}$$

Putem enunţa

TEOREMA 9. *Condiţiile necesare şi suficiente pentru existenţa soluţiei problemei* (I_2) *sînt date de* (66). *Dacă aceste condiţii sînt satisfăcute, atunci soluţia poate fi reprezentată printr-un potenţial de simplu strat şi este determinată pînă la o deplasare rigidă.*

(b). În acest caz are loc următoarea teoremă de unicitate.

TEOREMA 10. *Problemele omogene* (I_1^0), (E_1^0) *au numai soluţia banală, problema* (I_2^0) *are patru soluţii liniar independente*

$$\tau^{(k)}(x) = \varkappa^{(k)}(x), \quad (k = 1, 2, 3, 4), \tag{67}$$

iar problema (E_2^0) *are 4m soluţii liniar independente*

$$u_{jk}(x) = \begin{cases} \varkappa^{(j)}(x) & x \in \Sigma_e^{(k)} + L_k, \\ 0 & x \notin \Sigma_e^{(k)} + L_k, \end{cases} \quad (j = 1, 2, 3, 4;\ k = 1, 2, \ldots, m). \tag{68}$$

Vom nota aceste soluţii prin $\lambda_l(x)$, $(l = 1, 2, \ldots, 4m)$.

Similar cu cele din cazul (a) se poate arăta că ecuaţia (I_2^0) are patru soluţii liniar independente iar matricele $\eta_k(x_0) = \varkappa^k(x_0)$, $(k = 1, 2, 3, 4)$, $x_0 \in L$, constituie un sistem complet de soluţii liniar independente ale ecuaţiei (E_1^0). La fel, ecuaţia (E_2^0) are $4m$ soluţii liniar independente iar matricele $\lambda_k(x_0)$, $x_0 \in L$, $(k = 1, 2, \ldots, 4m)$ constituie un sistem complet de soluţii liniar independente ale ecuaţiei (I_1^0).

Vom căuta soluţia problemei (I_1) sub forma

$$\tau(x) = W(x) + \sum_1^{4m} a_k V(x;\, \rho_k), \tag{69}$$

unde ρ_k $(k = 1, 2, \ldots, 4m)$ reprezintă un sistem complet de soluţii liniar independente ale problemei (E_2^0) iar a_k sînt constante arbitrare. Sistemul (52) este satisfăcut iar condiţia la limită se reduce la

(70)

$${}_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \Lambda(x_0, y)\, \mu(y)\, ds_y = g_1(x_0) - \sum_1^{4m} a_k V(x;\, \rho_k) \equiv g_1'(x_0), \quad x_0 \in L.$$

Pentru rezolvabilitatea ecuaţiei (70) este necesar şi suficient ca

(71) $$\int_L g_1'(x)\,\rho_k(x)\,\mathrm{d}s_x = 0,\quad (k = 1, 2, \ldots, 4\,m).$$

Din (71) obţinem

$$a_k = \int_L g_1(x)\,\rho_k(x)\,\mathrm{d}s.$$

Avem deci

TEOREMA 11. *Soluţia problemei* (I_1) *există şi se poate reprezenta sub forma* (69).

În baza teoremei lui Fredholm şi a condiţiei (50) rezultă

TEOREMA 12. *Condiţiile necesare şi suficiente pentru existenţa soluţiei problemei* (E_2) *sînt*

$$\int_{L_0} h_2(x)\,\mathrm{d}s = \int_{L_k} h_2\,\mathrm{d}s = 0,\quad \int_{L_k} \varkappa^{(4)}(x)\,h_2(x)\,\mathrm{d}s = 0,\quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Dacă aceste condiţii sînt satisfăcute, atunci soluţia este dată de

$$\tau(x) = G^{(k)}(x),\quad x \in \Sigma_e^{(k)},\quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m),$$

unde

$$G^{(0)}(x) = \int_{L_0} \Gamma(x, y)\,\mu_0(y)\,\mathrm{d}s,\quad x \in \Sigma_e^{(0)},$$

$\mu_0(y)$ fiind soluţia ecuaţiei

$$\mu_0(x_0) + \frac{1}{\pi}\int_{L_0} [\mathcal{T}_{x_0}\,\Gamma(x_0, y)]\,\mu_0(y)\,\mathrm{d}s = h_2(x_0),\quad x_0 \in L_0,$$

iar, pînă la o deplasare rigidă,

$$G^{(k)}(x) = \int_{L_k} \Gamma(x, y)\,\mu_k(y)\,\mathrm{d}s,\quad x \in \Sigma_e^{(k)},\quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

unde $\mu_k(x)$ este soluţia ecuaţiei

$$-\mu_k(x) + \frac{1}{\pi}\int_{L_k} [\mathcal{T}_{x_0}\,\Gamma(x_0, y)]\,\mu_k(y)\,\mathrm{d}s = h_2(x_0),\quad x_0 \in L_k\ (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Pentru problemele (I_2) şi (E_1) obţinem

TEOREMA 13. *Condiţiile necesare şi suficiente pentru existenţa soluţiei problemei* (I_2) *sînt*

$$\int_L g_2(y)\,\mathrm{d}s = 0,\quad \int_L g_2(y)\,\varkappa^{(4)}(y)\,\mathrm{d}s = 0.$$

Soluţia se reprezintă printr-un potenţial de simplu strat şi este determinată pînă la o deplasare rigidă.

TEOREMA 14. *Problema* (E_1) *este totdeauna rezolvabilă iar soluţia sa este dată de*

$$\tau(x) = H^{(k)}(x),\ x \in \Sigma_e^{(k)},\ (k = 0, 1, \ldots, m),$$

unde $H^{(0)}(x)$ *este soluţia problemei* (E_1) *în cazul* (a) *pentru* $n = 1$ *şi* $L = L_0$,

$$H^{(0)}(x) = \int_{L_0} \Lambda(x, y)\, \nu_0(y)\, \mathrm{d}s + \sum_1^4 c_k \int_{L_0} \Gamma(x, y)\, \Psi_k(y)\, \mathrm{d}s + c,$$

iar

$$H^{(k)}(x) = \int_{L_k} \Lambda(x, y)\, \nu_k(y)\, \mathrm{d}s,\ x \in \Sigma_e^{(k)},\ (k = 1, 2, \ldots, m),$$

ν_k fiind soluţia ecuaţiei

$$\nu_k(x_0) + \frac{1}{\pi} \int_{L_k} \Lambda(x_0, y)\, \nu_k(y)\, \mathrm{d}s = h_2(x_0),\ x_0 \in L_k,\ (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Primită la redacţie la 12 septembrie 1968.

Universitatea „Al. I. Cuza" Iaşi
Facultatea de matematică — mecanică

SUR LA DÉFORMATION PLANE GÉNÉRALISÉE

(RÉSUMÉ)

On considère le cas de la déformation thermoélastique d'un milieu anisotrope. En utilisant la méthode du potentiel [2], [7], [4], on établit des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de la solution des problèmes aux limites dans le cas d'un domaine multiplement connexe.

BIBLIOGRAFIE

1. БАШЕЛЕИШВИЛИ М. О., *Решение первой основной граничной задачи статики для ортотропного упругого тела в случае многосвязных областей*, Сообщ. АН Груз ССР, **13**, 577 (1955).
2. БАШЕЛЕИШВИЛИ М. О., *Решение плоских граничных задач статики анизотропного упругого тела*, Тр. Вычисл. центра АН Груз ССР, *3*, 91 (1963).
3. BORŞ, C. I., *Déformations planes dans les corps anisotropes.* An. şt. Univ. „Al. I. Cuza", Iaşi, $\mathbf{XI}_{\mathrm{B}}$ 545 (1965).
4. БУРЧУЛАДЗЕ Т. В., *Применение сингулярных интегральных уравнений для решения некоторых граничных задач.* Тр. Тбилисского мат. инст., **28**, 21 (1962).
5. GUNTHER N. M., *Théorie du potentiel.* Gauthier-Villars, Paris, 1934.
6. КИПРАДЗЕ В. Д. и БАШЕЛЕИШВИЛИ М. О., *Новые интегральные уравнения анизотропной теории упругости и их применения для решения граничных задач.* Сообщ. АН Груз ССР, **15**, *6*, 1954.

7. Купрадзе В. Д., *Методы потенциала в теории упругости*. Москва, 1963.
8. Лехницкий С. Г., *Теория упругости анизотропного тела*. Москва-Ленинград, 1950.
9. Levi E. E., *Sulle equazioni lineari totalmente ellitiche alle derivate parziali*. Rend. Circ. Mat. Palermo, **24**, 275 (1907).
10. Moisil Gr. C., *Teoria preliminară a sistemelor de ecuații cu derivate parțiale lineare cu coeficienți constanți*. Bul. științ. Acad. R.P.R., Seria Mat. Fiz. Chim., **4**, 319 (1952).
11. Шерман Д. И., *Плоская задача теории упругости для анизотрпной среды*. Тр. Сейсмологического инст., *86* (1938).
12. Вишик М. И., *О сильных эллиптических системах дифференциальных уравнений*. Математ. сб. **29** (**71**), 615 (1951).

7. [illegible]

8. [illegible]

9. [illegible]

10. [illegible]

11. [illegible]

12. [illegible]

ASUPRA REZOLVĂRII ECUAȚIILOR FUNCȚIONALE NELINIARE

DE

B. JANKÓ, F. FORNWALD și A. GAIDICI

(Cluj)

Se consideră ecuația $F(x) = 0$, $F(x)$ fiind o funcțională neliniară definită în domeniul S complet și convex dintr-un spațiu Banach X. Funcționala $F(x)$ este continuă și admite derivate în sens Frèchet pînă la ordinul 3. În teoremele 1, 2 și 3 se stabilesc noi condiții de existență a soluției $x^* = \lim x_n$ față de cele din lucrările [2] și [6]. În partea a 3-a a lucrării se dă o nouă metodă de iterație pentru rezolvarea ecuației funcționale $F(x) = 0$, obținută prin transcrierea metodei respective folosită în cazul rezolvării ecuației operaționale $P(x) = \theta$, [5] și [4].

Considerăm ecuația funcțională neliniară

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

unde despre funcționala neliniară $F(x)$ vom presupune că îndeplinește condițiile:

a) este definită și continuă în domeniul S complet și convex din spațiul Banach X;

b) admite derivate în sens Frechet pînă la ordinul trei;

c) este astfel încît pentru șirul de elemente $y_n \in X$ să aibă loc relația [1]

$$|F'(x_n)\, y_n| = \|F'(x_n)\|, \quad \|y_n\| = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

În cele ce urmează vom da cîteva teoreme ce se referă la existența soluției ecuației (1), folosind trei metode de iterație și în fiecare caz vom indica rapiditatea convergenței metodei respective. Pentru demonstrarea teoremelor, în toate cazurile se procedează la fel, adică se pornește de la aproximația inițială x_0 supusă unor condiții și se arată că aproximațiile succesive x_n satisfac aceleași condiții.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 4. P. 611—616, BUCUREȘTI, 1969

În cursul demonstraţiilor ne vom folosi de următoarele formule

$$\text{(A)}\quad \left| F(x') - F(x'') - F'(x'')(x' - x'') - \frac{1}{2} F''(x'')(x' - x'')^2 \right| \leqslant \leqslant \frac{1}{3\,!} \sup_{\overline{x} \in S} \| F'''(\overline{x}) \| \, \| x' - x'' \|^3$$

$$\text{(B)}\quad \| F'(x') - F'(x'') \| \leqslant \sup \| F''(\overline{x}) \| \cdot \| x' - x'' \|$$

$$x',\ x'' \in S,\ \overline{x} = x' + t(x'' - x') \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

1. *Cazul metodei hiperbolelor tangente.* Pentru rezolvarea ecuaţiei (1) vom aplica metoda [2]

$$\text{(I)}\quad x_{n+1} = x_n - \frac{1}{1 - \dfrac{1}{2} \dfrac{F''(x_n)\, y_n^2 F(x_n)}{(F'(x_n)\, y_n)^2}} \frac{F(x_n)}{F'(x_n)\, y_n} y_n .$$

TEOREMA 1. *Dacă pentru aproximaţia iniţială x_0 sînt satisfăcute următoarele condiţii:*

1°. $\dfrac{1}{\| F'(x_0) \|} \leqslant B_0$

2°. $\dfrac{| F(x_0) |}{\| F'(x_0) \|} \leqslant \eta_0$

3°. $\| F''(x) \| \leqslant M, \quad \| F'''(x) \| \leqslant N$

pentru orice $x \in S$, unde S este o sferă din spaţiul X definită de inegalitatea $\| x - x_0 \| \leqslant \dfrac{\eta_0}{h_0}$

4°. $h_0 = B_0 M \eta_0 < \dfrac{2}{3}$

5°. $E_0 h_0 < 1$, *unde*

$$E_n^2 = \frac{\dfrac{1}{(2 - h_n)^2} + \dfrac{4}{3} \dfrac{N}{M^2 B_n (2 - h_n)^3}}{H_n^2}, \qquad H_n = 1 - \frac{2h_n}{2 - h_n}$$

atunci ecuaţia (1) admite o soluţie $x^* \in S\left(x_0, \dfrac{\eta_0}{h_0}\right)$. Rapiditatea convergenţei este dată de relaţia

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \frac{\eta_0}{h_0} (E_0 h_0)^{3^n - 1} H_0^n .$$

Demonstraţie. Ţinînd seama de condiţiile 1°—4° şi aplicînd formula (A) $(x' = x_1,\ x'' = x_0)$ rezultă

$$\text{(2)}\quad | F'(x_1) | \leqslant \frac{(E_0 h_0)^2 H_0^2 \eta_0}{B_0} .$$

Avînd în vedere identitatea

$$F'(x_1) = F'(x_0) - (F'(x_0) - F'(x_1))$$

formula (B) şi condiţiile 1°—4°, obţinem

(3) $$\frac{1}{\|F(x_1)\|} \leqslant \frac{B_0}{H_0} = B_1 .$$

Din (2) şi (3) deducem

(4) $$\eta_1 = \frac{|F(x_1)|}{\|F'(x_1)\|} \leqslant (E_0 h_0)^2 H_0 \eta_0 < \eta_0 .$$

În continuare avem

(5) $$h_1 = B_1 M \eta_1 \leqslant (E_0 h_0)^2 h_0 = \frac{1}{E_0} (E_0 h_0)^3 < h_0 .$$

Cu ajutorul relaţiilor stabilite se arată uşor următoarele inegalităţi

$$E_1 < E_0 , \quad H_0 < H_1 \quad \text{şi} \quad E_1 H_1 < E_0 H_0 .$$

Aşadar condiţiile 1°—5° rămîn satisfăcute pentru aproximaţia x_1.

Prin inducţie completă se arată că

(6) $$\eta_n \leqslant (E_0 h_0)^{3^n - 1} H_0^n \eta_0$$

(7) $$h_n \leqslant \frac{1}{E_0} (E_0 h_0)^{3^n}$$

(8) $$B_n \leqslant \frac{B_0}{H_0^n} .$$

Utilizînd relaţiile

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant \frac{2\eta_n}{2 - h_n} \leqslant \frac{2\eta_n}{2 - h_0} \qquad \text{şi (6)}$$

obţinem delimitarea

(9) $$\| x_{n+p} - x_n \| \leqslant \frac{\eta_0}{h_0} (E_0 h_0)^{3^n - 1} H_0^n (1 - H_0^p)$$

de unde trecînd la limită pentru $p \to \infty$ găsim

(10) $$\| x^* - x_n \| \leqslant \frac{\eta_0}{h_0} (E_0 h_0)^{3^n - 1} H_0^n .$$

Inegalitatea

$$\| x_0 - x_n \| \leqslant \| x_0 - x_1 \| + \cdots + \| x_{n-1} - x_n \| \leqslant \frac{\eta_0}{h_0}$$

arată că aproximaţiile x_n nu ies din sfera considerată.

În acelaşi mod în care am obţinut (2) deducem

$$|F(x_n)| \leqslant \frac{(E_0 h_0)^{3^n-1} H_0^{n+1} \eta_0}{B_{n-1}}. \tag{11}$$

Se observă din (10) şi (11) că pentru $n \to \infty$, avînd în vedere că domeniul S este complet şi pe baza continuităţii lui $F(x)$ avem $F(x^*) = 0$.

În teorema precedentă am presupus că pentru elementul x este satisfăcută condiţia

$$\frac{1}{\|F'(x_0)\|} \leqslant B_0$$

În cazul cînd această condiţie este satisfăcută pentru orice element $x \in S$ adică

$$\frac{1}{\|F'(x)\|} \leqslant B,$$

condiţia 4° poate fi slăbită.

Teorema 2. *Dacă pentru aproximaţia* x_0 *sînt satisfăcute următoarele condiţii:*

1°. $\dfrac{1}{\|F'(x)\|} \leqslant B$

2°. $\dfrac{|F(x_0)|}{\|F'(x_0)\|} \leqslant \eta_0$

3°. $\|F''(x)\| \leqslant M$, $\|F'''(x)\| \leqslant N$, $x \in S$, $\|x - x_0\| \leqslant \dfrac{2\eta_0}{2-h_0} H$,

$$H = \sum_{i=0}^{\infty} (G_0 h_0)^{3^i-1}.$$

4°. $h_0 = B_0 M \eta_0 < 2$

5°. $G_0 h_0 < 1$, *unde*

$$G_n^2 = \frac{1}{(2-h_n)^2} + \frac{4}{3} \frac{N}{M^2 B (2-h_n)^3},$$

atunci ecuaţia (*1*) *admite o soluţie* $x^* \in S\ (x_0, r)$. *Rapiditatea convergenţei este dată de relaţia*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{2\eta_0}{2-h_0} (G_0 h_0)^{3^n-1} H.$$

Demonstraţia este analoagă cu cea a teoremei 1.

2. *Cazul metodei parabolelor tangente.* Pentru rezolvarea ecuaţiei (1) se poate aplica metoda [3]

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{F''(x_n)\, y_n^2\, F(x_n)}{(F'(x_n)\, y_n)^2}\right) \frac{F(x_n)}{F'(x_n)\, y_n}\, y_n. \tag{II}$$

TEOREMA 3. *Dacă sînt îndeplinite condiţiile 1°, 2°, 3° şi 5° ale teoremei 1 şi dacă în locul condiţiei 4° avem*

$$4^\circ \ h_0 = B_0 M\eta_0 < \sqrt{3} - 1,$$

unde

$$E_n^2 = \frac{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{h_n}{4}\right) + \frac{N}{6M^2 B_n}\left(1 + \frac{h_n}{2}\right)^3}{H_n^2}, \quad H_n = 1 - h_n\left(1 + \frac{h_n}{2}\right),$$

atunci ecuaţia (1) admite o soluţie $x^* \in S\left(x_0, \frac{\eta_0}{h_0}\right)$. *Rapiditatea convergenţei este caracterizată de relaţia*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \frac{\eta_0}{h_0} (E_0 h_0)^{3^n - 1} H_0^n .$$

3. Pentru rezolvarea ecuaţiei (1) se mai poate aplica metoda

$$\text{(III)} \qquad x_{n+1} = x_n - \left[1 + \frac{\frac{1}{2} \frac{F''(x_n)\, y_n^2 F(x_n)}{(F'(x_n)\, y_n)^2}}{1 - \frac{F''(x_n)\, y_n^2 F(x_n)}{(F'(x_n)\, y_n)^2}} \right] \frac{F'(x_n)}{F'(x_n)\, y_n} y_n$$

ce se poate obţine în cazul rezolvării ecuaţiilor funcţionale din lucrarea [4].

TEOREMA 4. *Dacă sînt satisfăcute condiţiile 1°, 2°, 3° şi 5° ale teoremei 1 şi dacă în locul condiţiei 4° avem*

$4^\circ.\ h_0 = B_0 M\eta_0 < 2 - \sqrt{2}$, *unde*

$$E_n^2 = \frac{\frac{h_n}{8(1 - h_n)^2} + \frac{1}{48} \frac{N(2 - h_n)^3}{MB_n(1 - h_n)^3}}{H_n^2}, \quad H_n = 1 - \frac{h_n(2 - h_n)}{2(1 - h_n)},$$

atunci ecuaţia (1) admite o soluţie $x^* \in S\left(x_0, \frac{\eta_0}{h_0}\right)$. *Rapiditatea convergenţei este dată de relaţia*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \frac{\eta_0}{h_0} (E_0 h_0)^{3^n - 1} H_0^n, \qquad \| x - x_0 \| \leqslant \frac{2 - h_0}{2(1 - h_0)} \eta_0 H.$$

TEOREMA 5. *Dacă sînt îndeplinite condiţiile 1°, 2°, 3° şi 5° ale teoremei 2 şi dacă în locul condiţiei 4° avem*

$4^\circ.\ h_0 = BM\eta_0,\ \ h_0 \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$, *unde*

$$G_n^2 = \frac{h_n}{8(1 - h_n)^2} + \frac{1}{48} \frac{N(2 - h_n)^3}{M^2 B(1 - h_n)^3},$$

atunci ecuaţia (1) admite o soluţie $x^* \in S(x_0, v)$. Rapiditatea convergenţei este caracterizată de relaţia

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \frac{2 - h_0}{2(1 - h_0)} \eta_0 (G_0 h_0)^{3^n - 1} H.$$

Observaţii: 1. Condiţiile 2° şi 4° ale teoremelor 1 şi 2 sînt diferite faţă de cele din lucrarea [2].

2. În teorema 3, condiţia 4° ($h_0 \leqslant \sqrt{3} - 1$) este îmbunătăţită faţă de aceeaşi condiţie din lucrarea [6] $\left(h_0 \leqslant \frac{1}{2}\right)$.

3. Deoarece în formulele (I), (II), (III) nu intervine derivata $F'''(x)$, condiţia $\|F'''(x)\| \leqslant N$ poate fi înlocuită printr-o condiţie de tip Lipschitz $\|F''(x') - F''(x'')\| \leqslant K \|x' - x''\|$. În acest caz teoremele rămîn valabile cu condiţia să se înlocuiască N prin K. Pentru demonstraţie în locul formulei (A) se va utiliza formula [7]

$$F(x') - F(x'') - F'(x'')(x' - x'') - \frac{1}{2} F''(x'')(x' - x'')^2 \Big| \leqslant \frac{K \| x' - x'' \|^3}{3!}.$$

Primită la redacţie la 15 aprilie 1968

Institutul pedagogic Baia Mare

ON THE SOLVING OF NON-LINEAR FUNCTIONAL EQUATIONS

(ABSTRACT)

Consider the equation $F(x) = 0$, where $F(x)$ is a non-linear functional defined in a convex and complete domain S from a Banach space X. The functional $F(x)$ is continuous and it admits the derivatives in the sense of Fréchet to order 3. The theorems 1, 2, and 3 establish new conditions for the existence of the solution $x^* = \lim x_n$. In the third part of the paper a new iterative method for solving the functional equation $F(x) = 0$ is given, which may be obtained by applying the used method for solving the operational equation $P(x) = \theta$, [5] and [4].

BIBLIOGRAFIE

1. M. ALTMAN, *Concerning approximate solutions of non-linear functional equations*. Bull. de l'Acad. Polon de Sci., **V**, *5* (1957).
2. B. JANKO, *Despre o nouă generalizare a metodei hiperbolelor tangente pentru rezolvarea ecuaţiilor funcţionale neliniare definite în spaţii Banach*. St. şi cerc. de mat. (Cluj), **XI**, *2* (1960).
3. M. ALTMAN, *An iterative method of solving functional equations*. Bull. de l'Acad. Polon de Sci., **IX**, *2* (1961).
4. Ю. Я. КААЗИК, *Об одном классе итерационных процессов для приближенного решения операторных уравнений*, ДАН ССР, **112**, *4* (1957).
5. L. VOHANDU, *Iteratsioonimeetoditest vorrandite lahendamisel*. Dissertatsioon, Tartu, (1955).
6. B. JANKO, *Asupra metodei generalizate a lui Cebîşev (I)*. St. şi cerc. de mat. (Cluj), **XIII**, *1*, (1962)
7. Б. А. ВЕРТГЕЙМ, *Об условиях применениях метода Нютона* ДАН СССР, **110**, *5* (1956)).

CATEGORIA FASCICULELOR ÎN TOPOLOGIA EPICĂ (VII)

DE

ALEXANDRU GH. RADU

Se defineşte topologia epică pe o categorie preaditivă mică şi se caracterizează fasciculele în această topologie; se arată că functorul incluziune de la fascicule la prefascicule comută cu limitele inductive filtrate; se obţine rezultatul important că orice categorie abeliană mică se scufundă exact într-un topos abelian local de tip finit şi reciproc, orice topos abelian cu o familie de generatori proiectivi şi de tip finit este echivalent cu o categorie de fascicule peste un sit mic aditiv cu conuclee. În concluzie se dă o demonstraţie a teoremei lui Giraud pentru toposurile abeliene.

1. Fie $\mathcal{C}$ o U-categorie preaditivă mică şi pentru fiecare $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, fie $\operatorname{Cov}(X)$ mulţimea epimorfismelor universale de adresă X.

Asocierea

$$X \rightsquigarrow \operatorname{Cov}(X), \quad X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$$

defineşte pe $\mathcal{C}$ o pretopologie; topologia generată de această pretopologie se numeşte topologia epică.

Dacă pentru orice $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, $\operatorname{Cov}(X)$ constă din toate epimorfismele secţionabile cuarabile de adresă X, atunci asocierea

$$X \rightsquigarrow \operatorname{Cov}(X), \quad X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$$

defineşte pe $\mathcal{C}$ o pretopologie pentru care topologia generată coincide cu topologia discretă.

Prin definiţie, orice epimorfism universal este acoperitor în topologia epică.

Dacă $\mathcal{C}$ este abeliană, atunci orice epimorfism este efectiv universal şi prin urmare topologia epică este mai puţin fină ca topologia canonică şi coincide cu ea dacă $\mathcal{C}$ este cu sume directe.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 4, P. 617–629, BUCUREŞTI, 1969

În acest caz există o diagramă comutativă

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C}^{\sim} \arrow[dr, "i"] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "\tilde{h}"] \arrow[rr, "h"] & & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

de unde rezultă că $\tilde{h}$ este deplin fidel şi în plus $\tilde{h} = ah$. Mai mult, functorul $\tilde{h}$ este aditiv şi exact.

Într-adevăr, dacă $0 \to X' \to X \xrightarrow{p} X'' \to 0$ este un şir exact în $\mathcal{C}$, atunci şirul

$$(*) \quad 0 \to \tilde{h}(X') \to \tilde{h}(X) \xrightarrow{\tilde{h}(p)} \tilde{h}(X'')$$

este exact în $\mathcal{C}^{\sim}$ căci $\tilde{h} = ah$ este exact la stînga.

Mai mult, $\tilde{h}(p)$ este epimorfism căci $\mathrm{Im}\,(h_p) \xrightarrow{p} h\,(X'')$ este un ciur acoperitor al lui X'' şi prin urmare $a\,(j)$ este izomorfism, şi deci $\tilde{h}$ este un functor exact.

2. TEOREMĂ. *Un obiect F din $\overline{\mathcal{C}}$ este fascicul în topologia epică dacă şi numai dacă este un functor exact la stînga.*

Demonstraţie. Presupunem că F este fascicul în topologia epică şi fie

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0$$

un şir exact în $\mathcal{C}$.

Din şirul exact în $\mathcal{C}^{\sim}$

$$0 \to \tilde{h}(X') \to \tilde{h}(X) \to \tilde{h}(X'') \to 0$$

rezultă şirul exact în $\mathfrak{U}$-Ab

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\sim}}(\tilde{h}(X'')),F) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\sim}}(\tilde{h}(X),F) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\sim}}(\tilde{h}(X'),F)$$

adică şirul exact

$$0 \to iF(X'') \to iF(X) \to iF(X')$$

de unde şirul exact

$$0 \to F(X'') \to F(X) \to F(X')$$

căci i este deplin fidel şi a este exact.

Reciproc, dacă $R \to X$ este o rafinare a lui X în topologia epică, există o diagramă comutativă

$$\begin{tikzcd} & & R \arrow[ddr] & \\ & \mathrm{Im}\, h_p \arrow[ur] \arrow[drr] & & \\ h_Y \arrow[ur] \arrow[rrr, "h_p"'] & & & h_X \end{tikzcd}$$

cu p epimorfism.

Din şirul exact

$$0 \to Z \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{p} X \to 0, \quad Z = \operatorname{Ker} p$$

rezultă şirul exact

$$0 \to F(X) \xrightarrow{F(p)} F(Y) \to F(Z)$$

adică şirul exact

$$(*)\ 0 \to \operatorname{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_X, F) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_p,F)} \operatorname{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_Y, F) \xrightarrow{\rho = \operatorname{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_j,F)} \operatorname{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_Z, F).$$

Însă

$$\operatorname{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_p,F) = \operatorname{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_X, F) \xrightarrow{\omega} \operatorname{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(R,F) \to \operatorname{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_Y, F)$$

şi deci ω este monomorfism, adică F este prefascicul separat. Arătăm că ω este şi epimorfism.

Dacă t: $R \to F$, din diagrama comutativă şi exactă

$$\begin{tikzcd}
 & & \operatorname{Ker} h_p \arrow[ddr] & & & R \arrow[dd] \\
 & \operatorname{Im} hj \arrow[ur, dashed] \arrow[drr] & & & \operatorname{Im} h_p \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
h_Z \arrow[ur] \arrow[rrr, "hj"] & & & h_Y \arrow[ur] \arrow[rr, "hp"] & & h_X
\end{tikzcd}$$

rezultă

$$h_Y \to \operatorname{Im}(h_p) \to R \to F \in \operatorname{Ker} \rho$$

şi din şirul exact (*) rezultă t': $h_X \to F$ cu $R \xrightarrow{t} F = R \to h X \xrightarrow{t'} F$.

3. TEOREMĂ. *Obiectul F din $\overline{\mathcal{C}}$ este fascicul în topologia epică dacă şi numai dacă pentru orice $X \in Ob\, \mathcal{C}$ şi orice epimorfism $y \xrightarrow{p} X$ din $\mathcal{C}$, diagrama exactă*

$$Y \underset{X}{\times} Y \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{p} X \to 0$$

induce diagrama exactă

$$(*) \quad 0 \to F(X) \xrightarrow{F(p)} F(Y) \overset{F(p_1)}{\underset{F(p_2)}{\rightrightarrows}} F(Y \underset{X}{\times} Y).$$

Demonstraţie. Deoarece topologia epică este generată de o pretopologie, teorema rezultă imediată din ([3], p. 5).

4. COROLAR. *Dacă $(F_i, f_{ij})_{i \in I}$ este un sistem inductiv filtrat de obiecte din $\mathcal{C}^{\sim}$, atunci $F = \varinjlim_{I} i(F_i)$ este încă un obiect din $\mathcal{C}^{\sim}$.*

Demonstraţie. Conform teoremei precedente, pentru orice $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ pentru orice epimorfism $Y \xrightarrow{p} X$ şi pentru orice $i \in I$ există diagrama exactă

$$0 \to F_i(X) \xrightarrow{F_i(p)} F_i(Y) \overset{F_i(p_1)}{\underset{F_i(p_2)}{\rightrightarrows}} F_i(Y \underset{X}{\times} Y)$$

de unde prin trecere la limită inductivă, ţinînd seama că functorul i este exact la stînga şi că limitele inductive filtrate de grupuri abeliene sînt exacte, rezultă exactitatea diagramei (✳) în care $F = \varinjlim_{I} i(F_i)$, adică F este obiect din $\mathcal{C}^{\sim}$.

5. COROLAR. *Functorul* $i\colon \mathcal{C}^{\sim} \to \overline{\mathcal{C}}$ *comută cu limitele inductive filtrate și deci și functorul* $ia\colon \overline{\mathcal{C}} \to \overline{\mathcal{C}}$ *are aceeași proprietate* ([3], P. 15).

6. COROLAR. *Dacă* A_τ *este subcategoria localizantă a lui* $\overline{\mathcal{C}}$ *asociată topologiei epice, functorul* $e\colon \overline{\mathcal{C}} \to A_\tau$ *comută cu limitele inductive filtrate.*

Demonstrație. Într-adevăr, dacă $(G_i, g_{ij})_{i\in I}$ este un sistem inductiv filtrat de obiecte din $\overline{\mathcal{C}}$, atunci conform definiției functorului e,

$$e\,(\varinjlim_{I} G_i) = \mathrm{Ker}\ (\varinjlim_{I} G_i \to ia\ (\varinjlim_{I} G_i)) =$$

$$= \mathrm{Ker}\ [\varinjlim_{I} (G_i \to ia\ G_i)] = \varinjlim_{I} (\mathrm{Ker}\ (G_i \to iaG_i)) = \varinjlim_{I} e\,(G_i).$$

7. COROLAR. *Pentru orice* $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ *și orice sistem inductiv filtrat* $(F_i, f_{ij})_{i\in I}$ *de obiecte din* $\mathcal{C}^{\sim}$, *morfismul canonic*

$$\varinjlim_{I} \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(\tilde{h}\,(X), F_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\sim}}(\tilde{h}\,(X), \varinjlim_{I} F_i)$$

este izomorfism.

Demonstrație. Avem

$$\varinjlim_{I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\sim}}(\tilde{h}\,(X), F_i) \approx \varinjlim_{I} \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_x, iF_i) =$$

$$= \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_x, \varinjlim_{I} i\,F_i)\ a \approx \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h_x, i\varinjlim_{I} F_i) \approx \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\sim}}(\tilde{h}\,(X), \varinjlim_{I} F_i).$$

8. COROLAR. *Dacă* F *este de prezentare finită în* $\mathcal{C}^{\sim}$, *atunci functorul* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\sim}}(F, -)\colon \mathcal{C}^{\sim} \to \mathfrak{U}$ — Ab *comută cu limite inductive filtrate.*

Demonstrație. Deoarece F este de prezentare finită și $\tilde{h}$ este aditiv, există un șir exact în $\mathcal{C}^{\sim}$

$$\tilde{h}(Y) \to \tilde{h}(X) \to F \to 0$$

cu X, Y obiecte din $\mathcal{C}$.

Dacă $(F_i, u_{ij})_{i\in I}$ este un sistem inductiv filtrat de obiecte din $\mathcal{C}^{\sim}$ trebuie să arătăm că morfismul canonic

$$\varinjlim_{I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\sim}}(F, F_i) \xrightarrow{\theta} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\sim}}(F, \varinjlim_{I} F_i)$$

este izomorfism. Afirmația rezultă imediat din diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varinjlim_{I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\sim}}(F, F_i) \arrow[r] \arrow[d, "\theta"'] & \varinjlim_{I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\sim}}(\tilde{h}(X), F_i) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_1\,\wr"'] & \varinjlim_{I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\sim}}(\tilde{h}_Y, F_i) \arrow[d, "\theta_2\,\wr"'] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\sim}}(F, \varinjlim_{I} F_i) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\sim}}(\tilde{h}(X), \varinjlim_{I} F_i) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\sim}}(\tilde{h}(Y), \varinjlim_{I} F_i)
\end{tikzcd}$$

cu liniile exacte și θ_1, θ_2 izomorfisme (corolarul 7).

9. *Observație.* Exact la fel se arată că dacă F este un obiect de prezentare finită în $\overline{\mathcal{C}}$, atunci functorul $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(F, -) : \overline{\mathcal{C}} \to \mathcal{U}\text{—Ab}$ comută cu limitele inductive filtrate.

PROPOZIȚIE. *Pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ și orice rafinare $R \overset{i}{\hookrightarrow} X$ a sa, există o rafinare $R' \hookrightarrow X$ a lui X astfel ca $R' \subseteq R$ și R' obiect de tip finit în $\overline{\mathcal{C}}$.*

Demonstrație. Conform definiției topologiei epice există un epimorfism $f\colon Y \to X$ astfel ca $(f) \subseteq R$.

Este suficient să luăm $R' = (f)$ care evident este o rafinare a lui X de tip finit căci $R' = \mathrm{Im}\,(h_f)$ și se aplică apoi (P.6) din [4].

10. PROPOZIȚIE. *Familia $\{U_i \xrightarrow{f_i} X\}_{i \in I}$ este acoperitoare în topologia epică dacă și numai dacă X este finit generat în raport cu familia $\{U_i\}_{i \in I}$ (adică există un epimorfism $\bigoplus_{i=1}^{n} U_i \xrightarrow{p} X \to 0$).*

Demonstrație. Presupunem familia $\{f_i\}$ acoperitoare în topolo a epică, adică ciurul R generat de ea este o rafinare a lui X. Există atunci o rafinare principală $R' = (f)$ a lui X cu $R' \subseteq R$ și $f\colon Y \to X$ epimorfism. Conform definiției lui R există morfismele $g_i\colon Y \to U_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ astfel ca $f = f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n$.

Dacă $\rho\colon \bigoplus_{i=1}^{n} U_i \to X$ este morfismul canonic indus de morfismele $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, adică unicul morfism cu proprietatea $\rho \cdot u_i = f_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, unde $u_i\colon U_i \to \bigoplus_{i=1}^{n} U_i$ sînt morfismele de structură, atunci

$$f = \rho(u_1 g_1 + \cdots + u_n g_n)$$

și deci ρ este epimorfism, adică X este finit generat în raport cu $\{U_i\}_{i \in I}$.

Reciproc, dacă X este finit generat în raport cu familia $\{U_i\}_{i \in I}$, adică există un epimorfism $\bigoplus_{i=1}^{n} U_i \xrightarrow{p} X \to 0$, atunci $R' = (p)$ este o rafinare a lui X în topologia epică și totul va fi terminat dacă vom arăta că $R' \subseteq R$.

Dacă $f \in R'(Y)$, există $g\colon Y \to \bigoplus_{i=1}^{n} U_i$ cu $pg = f$ și evident $f = (f_1 p_1 + \cdots + f_n p_n) g$ așa cum rezultă din diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & Y \arrow[dll, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] \\
\bigoplus_{i=1}^{n} U_i \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, shift right, "p_i"'] & & X \\
 & U_i \arrow[ul, shift right, "u_i"'] \arrow[ur, "f_i"'] &
\end{tikzcd}$$

cu $\sum_{i=1}^{n} u_i p_i = id$ şi $pu_i = f_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Aşadar, $f \in R(Y)$ şi afirmaţia este dovedită.

12. TEOREMĂ. *Orice $\mathcal{U}$-categorie abeliană mică este o subcategorie plină exactă a unui $\mathcal{U}$-topos abelian local de tip finit.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{C}$ o $\mathcal{U}$-categorie abeliană mică dotată cu topologia epică şi $\mathcal{C}^{\sim}$ categoria fasciculelor aditive de grupuri abeliene relativ la această topologie.

Deoarece $\mathcal{C}^{\sim}$ este o categorie cît a lui $\overline{\mathcal{C}}$ printr-o subcategorie localizantă, rezultă că $\mathcal{C}^{\sim}$ este abeliană, cu limite inductive exacte şi cu familia de generatori $\{\tilde{h}(X)\}_{X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}$.

Cum functorul $\tilde{h}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\sim}$ este exact şi deplin fidel, teorema va fi demonstrată dacă vom arăta că pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $\tilde{h}(X)$ este obiect de tip finit în $\mathcal{C}^{\sim}$.

Fie $(F_i)_{i\in I}$ o familie filtrată crescător de subobiecte ale lui $\tilde{h}(X)$ cu $\bigcup_{i\in I} F_i = \tilde{h}(X)$.

Să considerăm morfismul de adjuncţie $p = \psi_{h(x)}\colon h_X \to ia\,h(X) = i\tilde{h}(X)$ şi fie $G_i = p^{-1}(iF_i))$.

Evident, $(G_i)_{i\in I}$ este o familie filtrată crescător de subobiecte ale lui $h(X)$ şi în plus $a\,(G_i) = F_i$ cum uşor rezultă aplicînd functorul a diagramei carteziene

$$\begin{tikzcd}
G_i \arrow[r] \arrow[d] & i(F_i) \arrow[d] \\
h(X) \arrow[r, "p"] & i\tilde{h}(X)
\end{tikzcd}$$

şi ţinînd seama că a comută cu produsele filtrate şi $a(p)$ este izomorfism.

Mai mult, deoarece a comută cu limitele inductive, comută în particular cu reuniunile şi, prin urmare, $C = \bigcup_{i\in I} G_i$ este o rafinare a lui X.

Aşadar am găsit o familie $\mathcal{G} = (G_i)_{i\in I}$ filtrată crescător de subobiecte ale lui $h(X)$ cu proprietatea că marginea lor superioară C este o rafinare a lui X, adică $h(X)/C$ este un obiect din $\mathcal{A}_\tau$ (= subcategoria localizantă asociată topologiei epice).

Notăm cu $\mathcal{G}'$ mulţimea subobiectelor R' ale lui $h(X)$ pentru care există $R \in \mathcal{G}$, un obiect F din $\mathcal{A}_\tau$ şi şirul xact

$$0 \to R \to R' \to F \to 0.$$

Evident, $\mathcal{G}' \neq \emptyset$ căci $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}'$.

$\mathcal{G}'$ este filtrată crescător relativ la ordinea parţială căci dacă R' şi R'_1 sînt două elemente din $\mathcal{G}'$, adică dacă există şirurile exacte

$$0 \to R \to R' \to F \to 0$$

$$0 \to R_1 \to R'_1 \to F_1 \to 0$$

cu $R, R_1 \in \mathcal{G}$ şi F, F_1 obiecte din $\mathcal{A}_\tau$, atunci $R \cup R_1 \in \mathcal{G}$ şi $F \oplus F_1$ este obiect din $\mathcal{A}_\tau$ şi din diagrama comutativă cu liniile exacte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \oplus R_1 \arrow[r] \arrow[d] & R' \oplus R_1' \arrow[r] \arrow[d] & F \oplus F_1 \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \cup R_1 \arrow[r] \arrow[d] & R' \cup R_1' \arrow[r] \arrow[d] & R' \cup R_1'/R \cup R_1 \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

rezultă $R' \cup R_1'/R \cup R_1$ obiect din $\mathcal{A}_\tau$.

Dacă vom arăta că $h(X) \in \mathcal{G}'$ adică există şirul exact

$$0 \to G_{i_0} \to h(X) \to F \to 0$$

cu $G_{i_0} \in \mathcal{G}$ şi F obiect din $\mathcal{A}_\tau$, totul va fi terminat căci atunci $\tilde{h}(X) = ah(X) \approx a(G_{i_0}) = F_{i_0}$.

Din $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}'$ rezultă $C = \bigcup\limits_{\mathcal{G}} G_i \subseteq \bigcup\limits_{\mathcal{G}'} R' = \varinjlim\limits_{\mathcal{G}'} R'$ şi cum C este o rafinare a lui X, rezultă că şi $\varinjlim\limits_{\mathcal{G}'} R'$ este o rafinare a lui X adică $B = h(X)/\varinjlim\limits_{\mathcal{G}'} R'$ este un obiect din $\mathcal{A}_\tau$.

Dacă vom arăta că B este separat, atunci $B = 0$ şi deci $h(X) = \bigcup\limits_{\mathcal{G}'} R'$ şi cum $h(X)$ este de tip finit, există $R' \in \mathcal{G}'$ cu $h(X) = R'$ şi afirmaţia este dovedită.

Dacă pentru orice $R' \in \mathcal{G}'$, $h(X)/R'$ este separat, atunci şi B este separat căci $B = \varinjlim\limits_{\mathcal{G}'} (h(X)/R')$ şi se aplică apoi corolarul 6 şi [4], P.10.

Dacă pentru un $R' \in \mathcal{G}'$, $h(X)/R'$ nu este separat, atunci $h(X)/R_1$ este separat, unde $R_1/R' = e(h(X)/R')$, şi B va rezulta separat dacă vom arăta că $R_1 \in \mathcal{G}'$, căci atunci mulţimea tuturor R_1, adică mulţimea $\mathcal{G}_1$, care se obţine prin trecerea la separare a tuturor $h(X)/R'$ care nu sînt separaţi este cofinală în $\mathcal{G}'$ şi prin urmare $B = \varinjlim\limits_{R_1 \in \mathcal{G}_1} (h(X)/R_1)$.

Pentru a arăta că $R_1 \in \mathcal{G}'$, fie diagrama comutativă şi exactă

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r] \arrow[d, equal] & R' \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r] & R_1 \arrow[r] & R_1/R \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Cum $R \in \mathcal{G}$ va trebui să arătăm că R_1/R este obiect din $\mathcal{A}_\tau$, fapt ce rezultă imediat din șirul exact

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\theta} R_1/R \longrightarrow \operatorname{Coker} \theta \longrightarrow 0$$

cu F și $\operatorname{Coker} \theta \approx R_1/R'$ obiecte din $\mathcal{A}_\tau$.

Teorema este astfel complet demonstrată.

13. *Observație*. Pentru orice $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, $\tilde{h}(X)$ este obiect de prezentare finită în $\mathcal{C}^{\sim}$.

Cum $\tilde{h}(X)$ este de tip finit, trebuie să mai arătăm că pentru orice epimorfism $H \xrightarrow{u} \tilde{h}(X) \to 0$ din $\mathcal{C}^{\sim}$ cu H de tip finit rezultă și $\operatorname{Ker} u$ de tip finit. Deoarece H este de tip finit, există un subobiect de tip finit G al lui iH în $\overline{\mathcal{C}}$ ($i : \mathcal{C}^{\sim} \to \overline{\mathcal{C}}$ este functorul de incluziune) astfel ca $aG = H$, adică $G \to iH$ este un monomorfism acoperitor.

Dar G fiind de tip finit, există un epimorfism $h(Y) \to G \to 0$ în $\overline{\mathcal{C}}$ care este acoperitor (ca orice epimorfism !). Avem așadar un morfism acoperitor $h(Y) \xrightarrow{h(\rho)} h(X) = h(X) \to G \to iH \to h(X)$ și fie $Z = \operatorname{Ker} \rho$. Cum $\tilde{h}$ este exact, rezultă șirul exact

$$0 \to \tilde{h}(Z) \to \tilde{h}(Y) \xrightarrow{\tilde{h}(\rho)} \tilde{h}(X) \to 0$$

și diagrama comutativă în $\mathcal{C}^{\sim}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} u \arrow[r] & H \arrow[r] & \tilde{h}(X) \arrow[r] & 0 \\
 & & aG \arrow[u, "\wr"] & & \\
0 \arrow[r] & \tilde{h}(Z) \arrow[r] & \tilde{h}(Y) \arrow[u] \arrow[ruu, "\tilde{h}(\rho)"'] & &
\end{tikzcd}$$

în care θ este epimorfism ca desant de epimorfism și deci $\operatorname{Ker} u$ este de tip finit căci $\tilde{h}(Z)$ este astfel.

14. TEOREMĂ. *Orice $\mathcal{U}$-categorie abeliană $\mathcal{C}$ cu limite inductive filtrat-exacte și cu o familie de generatori $(X_i)_{i \in I}$ proiectivi și de tip finit este echivalentă cu o categorie de fascicule aditive peste un $\mathcal{U}$-sit mic aditiv cu conuclee.*

Demonstrație. Fie $\mathcal{C}_1$ subcategoria plină a lui $\mathcal{C}$ definită de obiecte de prezentare finită. Evident $\mathcal{C}_1 \neq \emptyset$ căci pentru orice $i \in I$, X_i este obiect din $\mathcal{C}_1$.

Mai mult, $\mathcal{C}_1$ este $\mathcal{U}$-categorie mică aditivă și cu conuclee (P. 12 și C.17 din [4]).

Orice epimorfism $Y \xrightarrow{p} X$ din $\mathcal{C}_1$ este universal.

Într-adevăr, fie $Z \xrightarrow{u} X$ un morfism din $\mathcal{C}_1$ și diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} p' \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & Y \times_X Z \arrow[r, "p'"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} p \arrow[r] & Y \arrow[r, "p"] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

canonic construită în $\mathcal{C}$. Se arată uşor că Ker p este de prezentare finită şi deci $Y \underset{X}{\times} Z$ este de prezentare finită ([4], P. 16) adică p' este epimorfism în $\mathcal{C}_1$.

Considerăm pe $\mathcal{C}_1$ topologia epică, care este mai puţin fină decît topologia canonică şi prin urmare pentru orice obiect X din $\mathcal{C}$, prefascicului aditiv $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) : \mathcal{C}_1^0 \to \mathfrak{U} - \mathrm{Ab}$ este fascicul.

Avem aşadar definit un functor

$$\Phi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_1^{\sim}$$

care comută cu limitele inductive filtrate adică pentru orice $Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}_1$ şi orice sistem inductiv filtrat $(Z_\alpha)_{\alpha \in A \in \mathfrak{U}}$ de obiecte din $\mathcal{C}$ morfismul canonic

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \varinjlim_{\alpha} Z_\alpha) \longleftarrow \varinjlim_{\alpha} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z_\alpha)$$

este izomorfism, fapt ce rezultă din P. 22, C. 23 din [4]. şi din aceea că există un şir exact în $\mathcal{C}_1$

$$\bigoplus_J X_j \longrightarrow \bigoplus_K X_k \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

cu J şi K submulţimi finite din I.

Functorul Φ este deplin fidel, adică există izomorfismul $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \xrightarrow{\Phi(X, Y)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1^{\sim}}(\Phi_X, \Phi_Y)$ pentru orice pereche (X, Y) de obiecte din $\mathcal{C}$.

Dacă X şi Y sînt ambele de prezentare finită, atunci $\Phi(X) = \tilde{h}_1(X)$, $\Phi(Y) = \tilde{h}_1(Y)$ şi afirmaţia rezultă din (1), unde: $\tilde{h}_1\ \mathcal{C} \longrightarrow C_1^{\sim}$ este functorul canonic.

Dacă X este de prezentare finită şi Y oarecare, atunci se scrie Y ca limita inductivă filtrată de obiecte de prezentare finită (P. 19, [4]), $Y = \varinjlim_{i \in I} Y_i$, se consideră pentru orice $i \in I$ diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_i) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi(X, Y_i)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \arrow[d, "\Phi(X, Y)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1^{\sim}}(\Phi X, \Phi Y_i) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1^{\sim}}(\Phi X, \Phi Y)
\end{tikzcd}$$

unde $\Phi(X, Y_i)$ este izomorfism conform primului caz şi se trece apoi la limită inductivă ţinîndu-se seama că $\Phi(X) = \tilde{h}(X)$, că Φ comută cu limitele inductive filtrate şi de corolarul 7, de unde rezultă că $\Phi(X, Y)$ este izomorfism.

Dacă X şi Y sînt oarecare, se scrie X ca o limită inductivă filtrată de obiecte de prezentare finită X', se consideră diagramele comutative

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi(X, Y)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y) \arrow[d, "\Phi(X', Y)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1^{\sim}}(\Phi X, \Phi Y) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1^{\sim}} H(\Phi X', \Phi Y)
\end{tikzcd}$$

unde $\Phi\,(X', Y)$ sînt izomorfisme conforme cazului doi şi se trece apoi la limită proiectivă.

Rămîne să arătăm că orice obiect F din $\mathcal{C}_1^{\sim}$ este izomorf cu un obiect $\Phi\,(Z)$ cu Z obiect din $\mathcal{C}$.

Fie F un obiect de prezentare finită din $\mathcal{C}_1^{\sim}$ şi $\tilde{h}_1 \colon \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_1^{\sim}$ functorul canonic ($\tilde{h}_1 = ah_1$) aditiv şi deplin fidel. Există un şir exact

$$\tilde{h}_1(Y) \xrightarrow{\tilde{h}_1(u)} \tilde{h}_1(X) \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

cu $u \colon Y \longrightarrow X$ din $\mathcal{C}_1$, căci $\{\tilde{h}_1(X)\}X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}_1$ formează o familie de generatori ai lui $\mathcal{C}_1^{\sim}$, se aplică P. 20 din [4] şi se ţine seama că $\tilde{h}_1$ este aditiv.

Fie $Z = \mathrm{Coker}\ u$ care evident este obiect din $\mathcal{C}_1$ (C. 17, [4]). Avem aşadar în $\mathcal{C}_1$ şirul exact

$$Y \xrightarrow{u} X \xrightarrow{p} Z \to 0$$

şi deci şirul exact

$$\tilde{h}_1(Y) \xrightarrow{\tilde{h}_1(u)} \tilde{h}_1(X) \xrightarrow{\tilde{h}_1(p)} \tilde{h}_1(Z) \to 0$$

de unde $F \approx \tilde{h}_1(Z) = \Phi\,(Z)$.

Dacă F este un obiect oarecare din $\mathcal{C}_1^{\sim}$, se scrie ca o limită inductivă filtrată de obiecte de prezentare finită (P. 19, [4]) şi se ţine seama că Φ comută cu limitele inductive filtrate.

15. TEOREMA LUI GIRAUD. *Fie $\mathcal{C}$ un $\mathcal{U}$-topos abelian. Orice $\mathcal{U}$-fascicul aditiv peste categoria $\mathcal{C}$ dotată cu topologia canonică este reprezentabil.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{V}$ un univers ce conţine pe $\mathcal{U}$ astfel ca $\mathcal{C}$ să fie o $\mathcal{V}$-categorie mică şi $\overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{V}}$ (respectiv $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}^{\sim}$), $\mathcal{V}$-categoria prefasciculelor (respectiv fasciculelor) aditive definite pe $\mathcal{C}$ cu valori în $\mathcal{V}$-Ab. Fie $\tilde{h} \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{V}}^{\sim}$ functorul canonic care este evident aditiv, exact, deplin fidel şi face comutativă diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}_{\mathcal{V}}^{\sim} \arrow[d, "i"] \\
\mathcal{C} \arrow[ur, "\tilde{h}"] \arrow[r, "h"] & \mathcal{C}_{\mathcal{V}}
\end{tikzcd}$$

căci în ipotezele noastre topologia canonică coincide cu topologia epică şi se aplică apoi (1).

Mai mult, functorul $\tilde{h}$ comută cu $\mathcal{U}$-sumele directe. Pentru aceasta este suficient să arătăm că pentru orice familie $(X_i)_{i \in I \in \mathcal{U}}$ de obiecte din $\mathcal{C}$, morfismul canonic

$$f \colon \bigoplus_i h\,(X_i) \longrightarrow (h \bigoplus_i X_i)$$

din $\overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{V}}$ este biacoperitor, căci $\tilde{h} = a\,h$ şi a comută cu sumele directe.

Deoarece f este evident monomorfism, trebuie să arătăm că $G = \mathrm{Coker}\ f$ este un obiect din subcategoria localizantă $\mathcal{A}_\tau$ a lui $\overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{V}}$ asociată topologiei canonice τ a lui $\mathcal{C}$, adică pentru orice obiect Z din $\mathcal{C}$ şi $z \in G(Z)$, Ker $\varphi z \to h_z$ este acoperitor peste Z în topologia τ, unde $\varphi^z : h_z \to G$ este morfismul functorial ce corespunde lui z prin $T.Y.—G$.

Deoarece h_z este obiect proiectiv în $\bar{\mathcal{C}}_{\mathcal{P}}$ dacă $q: h(\bigoplus_i X_i) \to G \to 0$ este epimorfismul canonic, există un morfism $\varphi_1 : h_z \to h(\bigoplus_i X_i)$ astfel ca diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & h_Z \arrow[dl, dashed, "\varphi_1"'] \arrow[d, "\varphi^Z"] & \\
h(\bigoplus_i X_i) \arrow[r, "q"] & G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă.

Fie $\varphi_1(1_z) = g: Z \to \bigoplus_i X_i$, $S = \bigoplus_i X_i$ şi (S_α) familia sumelor directe finite care este o familie de subobiecte ale lui S, filtrată crescător cu proprietatea că $S = \varinjlim_\alpha S_\alpha$.

Pentru orice α fie diagrama carteziană

$$\begin{tikzcd}
S_\alpha \underset{S}{\times} Z \arrow[r, "m_\alpha"] \arrow[d, "g_\alpha"'] & Z \arrow[d, "g"] \\
S_\alpha \arrow[r, "i_\alpha"] & S
\end{tikzcd}$$

Deoarece $\mathcal{C}$ este cu limite inductive filtrate exacte, limitele inductive sînt universale, deci $\varinjlim_\alpha (S_\alpha \underset{S}{\times} Z) \simeq \varinjlim_\alpha S_\alpha \underset{S}{\times} Z = S \underset{S}{\times} Z = Z$ şi prin urmare familia $(m_\alpha)_\alpha$ este epimorfică, deci acoperitoare în topologia canonică, adică ciurul R' al lui Z generat de ea este acoperitor în topologia canonică τ.

Va fi suficient să arătăm că $R' \subseteq$ Ker φ^z pentru a deduce că Ker φ^z este un ciur acoperitor în topologia τ.

Prin definiţie, $R' = \sup_\alpha \operatorname{Im}(m_\alpha)$ şi în $\bar{\mathcal{C}}_{\mathcal{P}}$ există diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & h(S_\alpha \underset{S}{\times} Z) \arrow[r, "h(m_\alpha)"] \arrow[dll, "h(g_\alpha)"'] & \operatorname{Ker}\varphi^z \arrow[d, "j"] & \\
 & h(S_\alpha) \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \arrow[dr, "h(i_\alpha)"] & & & h(z) \arrow[dll, dashed, "\varphi_1 = h(g)"'] \arrow[d, "\varphi^z"] & \\
\bigoplus_i h(X_i) \arrow[rr, "f"] & & h(\bigoplus_i X_i) \arrow[rr, "q"] & & G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Evident, $h(m_\alpha)$ este monomorfism pentru orice α căci m_α sînt astfel ca desante de monomorfisme și h conservă monomorfismele.

Mai mult, $h(m_\alpha)$, pentru orice α, se factorizează prin j căci $\varphi^z h(m_\alpha) = q\varphi_1 h(m_\alpha) = qh(i_\alpha)\,h(g_\alpha) = qf\gamma h(g_\alpha) = 0$ și deci $R' \subseteq \operatorname{Ker}\varphi^z$ și afirmația este dovedită.

Deoarece $\widetilde{h}$ este exact și comută cu $\mathcal{U}$-sumele directe, teorema rezultă imediat dacă vom arăta că pentru orice obiect H din $\mathcal{C}_{\widetilde{\mathcal{U}}}$ deci și din $\mathcal{C}_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ există un epimorfism.

$$\bigoplus_{i\in I(H)\in\mathcal{U}} \widetilde{h}(X_i) \xrightarrow{p} H \longrightarrow 0$$

Fie $I(H)$ mulțimea

$$\bigoplus_{\alpha\in A\in\mathcal{U}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_{\widetilde{\mathcal{F}}}} h(X_\alpha), H)$$

care evident este un element din $\mathcal{U}$ căci H este $\mathcal{U}$-fascicul ($(X_\alpha)_{\alpha\in A\in\mathcal{U}}$ este familia de generatori ai lui $\mathcal{C}$). Există un morfism canonic

$$\bigoplus_{\alpha} \widetilde{h}(X_\alpha) \xrightarrow{p} H,$$

unde fiecare $\widetilde{h}(X_\alpha)$ se repetă în sumă de atîtea ori cîte elemente are mulțimea $(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_{\widetilde{\mathcal{F}}}} \widetilde{h}(X_\alpha), H)$.

Morfismul p este epimorfism. Într-adevăr, deoarece $\mathcal{C}$ este o categorie cu $\mathcal{U}$-sume directe, pentru orice obiect Y din $\mathcal{C}$ există un epimorfism în $\mathcal{C}$

$$\bigoplus_{\alpha\in I(Y)} X_\alpha \xrightarrow{p} Y \longrightarrow 0$$

și prin urmare un epimorfism în $\mathcal{C}_{\widetilde{\mathcal{F}}}$

$$\bigoplus_{\alpha\in I(h(Y))} \widetilde{h}(X_\alpha) \xrightarrow{\widetilde{h}(p)} \widetilde{h}(Y) \longrightarrow 0.$$

Considerînd, pentru fiecare obiect Y din $\mathcal{C}$ care prin h este dus deasupra lui $i(H)$, diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{\alpha\in I(\widetilde{h}(Y))} \widetilde{h}(X_\alpha) \arrow[r, "\widetilde{h}(p)"] \arrow[d] & \widetilde{h}(Y) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\bigoplus_{\alpha\in I(H)} \widetilde{h}(X_\alpha) \arrow[r, "p"] & H &
\end{tikzcd}$$

se deduce imediat că p este epimorfism, ținînd seama că $H = \varinjlim_{\mathcal{C}/H} h(Y)$.

Primită la redacție la 25 iunie 1968

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
Calea Griviței nr. 21, București 12

CATÉGORIE DES FAISCEAUX DANS LA TOPOLOGIE ÉPIQUE (VII)

(RÉSUMÉ)

On définit la topologie épique sur une petite catégorie préadditive et on caractérise les faisceaux dans cette topologie ; on montre que le foncteur inclusion depuis les faisceaux jusqu'aux préfaisceaux commute aux limites inductives filtrantes ; on obtient le résultat important que toute catégorie abélienne petite fait émerger exactement dans un topos abélien local de type fini et réciproquement tout topos abélien à une famille de générateurs projectifs et de type fini est équivalent à une catégorie des faisceaux sur un site additif petit aux conoyaux. Enfin, on donne une démonstration du théorème de Giraud pour les topos abéliens.

BIBLIOGRAFIE

1. Ouzilou R., *Faisceaux additifs*, t. **3**, fasc. *3*, Lyon, 1966.
2. L. Grusson, *Sites additifs*. Bull. Soc. Math. France, **90** (1966).
3. Alexandru Gh. Radu, *Toposul abelian al fasciculelor aditive de grupuri abeliene peste un sit preaditiv mic*. St. cerc. mat., **21** (1969).
4. Alexandru Gh. Radu, *Proprietăți de finitudine în categorii abeliene*. St. cerc. mat., **21** (1969).

MORFISME ŞI COMORFISME DE SITURI PREADITIVE (VIII)

DE

ALEXANDRU GH. RADU

Revenim asupra teoriei clasice a morfismelor şi comorfismelor de situri dînd, pentru cazul preaditiv, o descriere a proprietăţilor lor în limbajul subcategoriei localizante asociate topologiei.

Se arată printre altele că functorul imagine directă de fascicule asociat unui functor continuu care este în acelaşi timp şi comorfism de situri este exact, iar teoremele 9 şi 10 permit „transferarea" topologiilor aditive cu ajutorul unor functori ce verifică anumite condiţii.

Fie $(\mathcal{C}, \tau)$, $(\mathcal{C}', \tau')$ două situri preaditive elemente ale lui $\mathcal{U}$ şi $u\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor covariant aditiv între categoriile subiacente.

1. **Definiţie.** Functorul u se numeşte continuu dacă există un functor $u_s\colon \mathcal{C}'^{\sim} \dashrightarrow \mathcal{C}^{\sim}$ (numit functorul imagine directă de fascicule) astfel încît diagrama

$$\begin{tikzcd}
\bar{\mathcal{C}}' \arrow[r, "u_*"] & \bar{\mathcal{C}} \\
\mathcal{C}'^{\sim} \arrow[u, "i'"] \arrow[r, "u_s"] & \mathcal{C}^{\sim} \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă, unde i, i' sînt functorii incluziune de la fascicule la prefascicule şi u_* este functorul imagine directă de prefascicule indus de u ([3], 1.10).

Revine la a spune că dacă F este fascicul pe $\mathcal{C}'$ în topologia τ', atunci prefasciculul $F.u$ este fascicul pe $\mathcal{C}$ în topologia τ.

Evident, functorul $u^s = a'\, u^*\, i$ este un adjunct la stînga pentru u_s şi există izomorfismul $u^s\, a \approx a'\, u^*$, unde u^* este functorul imagine reciprocă de prefascicule indus de u ([3], 1.10).

Din adjuncţie rezultă că u^s este un functor exact la dreapta.

2. **Definiţie.** Functorul continuu u se numeşte morfism de situri dacă u^s este exact.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 4, P. 631—635, BUCUREŞTI, 1969

De exemplu dacă u este continuu şi admite un adjunct la stînga, atunci u este un morfism de situri ([3], 1.10).

DEFINIŢIE. Functorul u se numeşte comomorfism de situri dacă există un functor $u^{++}\colon \mathcal{C}^{\sim}\to\mathcal{C}'^{\sim}$ (numit functorul imagine reciprocă de fascicule) astfel încît diagrama

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathcal{C}} \arrow[r, "u^{+}"] & \overline{\mathcal{C}}' \\
\mathcal{C}^{\sim} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "u^{++}"] & \mathcal{C}'^{\sim} \arrow[u, "i'"']
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă, unde u^{+} este functorul definit în ([3], [1.10) adjunct la dreapta pentru u_{*}.

Evident, functorul $u_{s}^{+} = au_{*}\, i'$ este un adjunct la stînga pentru u^{++} şi există izomorfismul $u_{s}^{+}\, a' \approx au_{*}$

Din adjuncţie şi definiţie rezultă că u_{s}^{+} este un functor exact.

4. PROPOZIŢIE. *Dacă u este un functor continuu și comorfism de situri, atunci functorul imagine directă de fascicule este exact.*

Demonstraţie. Totul va fi terminat dacă vom arăta că $u_{s}\approx u_{s}^{+}$, fapt evident căci din relaţia $u_{*}\, i' = iu_{s}$ se obţine, prin compunere la stînga cu a, $au_{*}\, i' = aiu_{s} = u_{s}$, adică $u_{s}^{+}\approx u_{s}$.

5. PROPOZIŢIE. [1]. *Functorul u este continuu, dacă și numai dacă pentru orice $X\in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ și orice rafinare $R \hookrightarrow X$ a sa, morfismul $u^{*} R\to u^{*}(X)$ este biacoperitor în τ'; analog, functorul u este un comorfism de situri dacă și numai dacă pentru orice $X'\in \operatorname{Ob}\mathcal{C}'$ și orice rafinare $R' \hookrightarrow X'$ a sa, monomorfismul $u_{*}\, R' \hookrightarrow u_{*}(X')$ este biacoperitor în τ.*

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă F este un obiect din $\mathcal{C}'^{\sim}$, prefascicului $u_{*}(F)$ este fascicul în topologia τ dacă şi numai dacă pentru orice $X\in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ şi orice rafinare $R \hookrightarrow X$ a sa, morfismul canonic

$$\operatorname{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(X,\ u_{*}\, F)\xrightarrow{\ \Phi\ }\operatorname{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(R,\ u_{*}\, F)$$

este un izomorfism. Din adjuncţie rezultă că Φ este izomorfism dacă şi numai dacă morfismul canonic

$$\operatorname{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}'}(u^{*}, X, F)\longrightarrow \operatorname{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(u^{*}\, R, F)$$

este izomorfism, adică dacă şi numai dacă $u^{*}\, R \to u^{*}X = u(X)$ este un morfism biacoperitor în τ'. A doua afirmaţie se demonstrează la fel.

6. COROLAR. *Dacă u este continuu și dacă $\{X_{\alpha}\xrightarrow{f\alpha} X\}_{\alpha\in A}$ este o familie de obiecte din $\mathcal{C}/X$, acoperitoare în topologia τ, atunci $\{u(X_{\alpha})\xrightarrow{u(f\alpha)} u(X)\}_{\alpha\in A}$ este o familie de morfisme din $\mathcal{C}'$ acoperitoare în topologia τ'.*

Demonstraţie. Prin definiţie, ciurul $R \hookrightarrow X$ generat de familia $\{f_{\alpha}\}_{\alpha\in A}$ este acoperitor în topologia τ şi deci morfismul $u^{*}\, R\xrightarrow{\ \theta\ } u(X)$ este biacoperitor (propoziţia 5) şi prin urmare $\operatorname{Im}(\ominus)\to u(X)$ este o rafinare a lui $u(X)$ în topologia τ'.

Însă R coincide cu imaginea morfismului canonic $\oplus X_\alpha \xrightarrow{\rho} X$ (suma directă este calculată în $\overline{\mathcal{C}}$!).

Dacă $R' \hookrightarrow u(X)$ este ciurul generat de familia $\{u(f_\alpha)\}_{\alpha\in A}$, atunci R' coincide cu imaginea morfismului $u^*(\rho)$, căci u^* comută cu sumele directe. Să urmărim diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
 & u^*(R) \arrow[rr, "p"] \arrow[ddrr, "\theta"] & & \mathrm{Im}(\theta) \arrow[dd, "r"] \\
 & R' \arrow[drr, "t"] & & \\
\oplus u(X_\alpha) \arrow[uur, "q_1 = u^*(q)"] \arrow[ur, "s"] \arrow[rrr, "u^*(\rho)"] & & & u(X)
\end{tikzcd}$$

unde $q\colon \underset{\alpha}{\oplus} X_\alpha \hookrightarrow R$ este epimorfismul din descompunerea triunghiulară a lui ρ.

Deoarece u^* este exact la dreapta, rezultă q_1 epimorfism şi conform definiţiei lui R' există un monomorfism $\omega\colon R' \to \mathrm{Im}\ (\ominus)$ astfel ca $r\omega = t$.

Din realaţia $\omega s = pq_1$ rezultă ω epimorfism şi deci izomorfism şi prin urmare $R' \hookrightarrow u(X)$ este o rafinare a lui $u(X)$.

7. PROPOZIŢIE. *Dacă $\mathcal{A}_\tau$ respectiv $\mathcal{A}_{\tau'}$ sînt subcategoriile localizante ale lui $\overline{\mathcal{C}}$ respectiv $\overline{\mathcal{C}}'$ asociate lui τ respectiv τ' şi dacă u este continuu, atunci $u^*(\mathcal{A}_\tau) \subseteq \mathcal{A}_{\tau'}$.*

Demonstraţie. Să arătăm deci că pentru orice obiect F din $\mathcal{A}_\tau$, $u^* F$ este obiect din $\mathcal{A}'_\tau$ sau, ceea ce este echivalent, pentru orice obiect G' din $\mathcal{C}'^\sim$,

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}'}(u^*\ F, i'\, G') = 0.$$

Însă $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}'}(u^*, F, i'\, G') \approx \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(F, u_*\, i'\, G,) \approx \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(F, iu_s G') = 0$ căci $u_s\ G'$ este obiect din $\mathcal{C}^\sim$şi F este obiect din $\mathcal{A}_\tau$.

8. PROPOZIŢIE. *Conservînd notaţiile din propoziţia precedentă, dacă $u^*(\mathcal{A}_\tau) \subseteq \mathcal{A}_{\tau'}$ şi dacă u admite un adjunct la stînga, atunci u este morfism de situri*

Demonstraţie. Deoarece u admite un adjunct la stînga, functorul u^s rezultă exact (propoziţia 2) şi prin urmare rămîne de arătat numai că u este continuu adică, conform propoziţiei 5, pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ şi orice rafinare $R \overset{i}{\hookrightarrow} X$ a sa, morfismul $u^*(i)$ este biacoperitor în τ'.

Prin definiţie, X/R este un obiect din $\mathcal{A}_\tau$ şi deoarece u^* este exact ([3], 1.10), din şirul exact

$$0 \longrightarrow R \overset{i}{\hookrightarrow} X \longrightarrow X/R \to 0$$

rezultă şirul exact

$$0 \longrightarrow u^*\ R \xhookrightarrow{u^*(i)} u^*(X) \longrightarrow u^*(X/R) \longrightarrow 0.$$

Deoarece $u^*(X/R)$ este un obiect din $\mathcal{A}_{\tau'}$, $u^*\ R \hookrightarrow u(X)$ rezultă o rafinare a lui $u(X)$.

9. PROPOZIȚIE. *Dacă v este un adjunct la stînga pentru u, următoarele afirmații sînt echivalente:*

i) *u este morfism de situri;*
ii) *v este comorfism de situri;*
iii) $u^* (\mathcal{A}\tau) \subseteq \mathcal{A}\tau'$.

Deomonstrație. i) $\Rightarrow$ ii) rezultă din faptul că $v^+ \approx u_*$ ([3], 1.10)
ii) $\Rightarrow$ i. Din $u_* = v^+$ rezultă că u este continuu și din $u^* = v_*$ rezultă u^* exact și deci u^s exact adică u morfism de situri.

i) $\Rightarrow$ iii) rezultă din propoziția 7, căci u este *a fortiori* continuu.

iii) $\Rightarrow$ ii) rezultă din propoziția 8.

10. TEOREMĂ. *Fie u: $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un functor covariant aditiv între două $\mathcal{U}$-categorii preaditive elemente ale lui $\mathcal{U}$.*

Dacă u admite un adjunct la stînga și dacă $\mathcal{C}'$ este dotată cu topologia τ', există pe $\mathcal{C}$ o topologie τ în raport cu care u devine un morfism de situri și care este cea mai fină topologie pe $\mathcal{C}$ cu această proprietate.

Demonstrație. Deoarece functorul u^* este exact și comută cu limitele inductive, rezultă că subcategoria plină $\mathcal{A}$ a lui $\overline{\mathcal{C}}$ definită de obiectele F din $\overline{\mathcal{C}}$ cu proprietatea $u^*(F)$ este obiect din $\mathcal{A}_{\tau'}$ este o subcategorie localizantă. Fie τ topologia asociată a lui $\mathcal{A}$. Evident, față de topologia τ, u devine un morfism de situri (propoziția 9).

Topologia τ este cea mai fină pentru care u este un morfism de situri, căci dacă τ_1 este o altă topologie pe $\mathcal{C}$ cu această proprietate și dacă $\mathcal{A}_{\tau_1}$ este subcategoria localizantă a lui $\overline{\mathcal{C}}$ asociată lui τ_1, atunci $(R \hookrightarrow X) \in$ $\in \tau_1 (X) \Leftrightarrow X/R$ este obiect din $\mathcal{A}_{\tau_1}$. Însă u este continuu în topologia τ_1, deci $u^*(X/R)$ este obiect din $\mathcal{A}_{\tau'}$ (propoziția 7) și deci X/R este obiect din $\mathcal{A}$ adică $(R \hookrightarrow X) \in \tau (X)$.

Se vede ușor că un ciur $R \hookrightarrow X$ este acoperitor în topologia τ dacă și numai dacă $u^* (R) \rightarrow u(X)$ este o rafinare a lui $u(X)$ în topologia τ'. Într-adevăr, $R \hookrightarrow X \in \tau (X) \Leftrightarrow X/R$ este obiect din $\mathcal{A} \Leftrightarrow u^* (X/R)$ este obiect din $\mathcal{A}_{\tau'} \Leftrightarrow u^* (X)/u^*(R)$ este obiect din $\mathcal{A}_\tau \Leftrightarrow u^* R \hookrightarrow u^* X \,(=u(X)) \in$ $\in \tau' \, (u(X))$.

11. TEOREMĂ. *Fie u: $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un functor covariant aditiv între două $\mathcal{U}$-categorii preaditive elemente ale lui $\mathcal{U}$ și τ o topologie pe $\mathcal{C}$.*

Există pe $\mathcal{C}'$ o topologie τ' în raport cu care u devine un comorfism de situri și care este cea mai fină topologie pe $\mathcal{C}'$ cu această proprietate.

Demonstrație. Fie $\mathcal{A}_\tau$ subcategoria localizantă a lui $\overline{\mathcal{C}}$ asociată lui τ și $\mathcal{A}'$ subcategoria plină a lui $\overline{\mathcal{C}'}$ definită de obiectele F' din $\overline{\mathcal{C}'}$ cu proprietatea $u_{\bullet} (F')$ obiect din $\mathcal{A}_\tau$.

Deoarece u_* este exact și comută cu limitele inductive, rezultă că $\mathcal{A}'$ este o subcategorie localizantă a lui $\mathcal{C}'$ și fie τ' topologia asociată ei.

Să arătăm că u devine un comorfism de situri, adică pentru orice $R \overset{i}{\hookrightarrow} Y \in \tau' (Y)$, $u_*(R) \rightarrow u_* (Y)$ este un monomorfism acoperitor în τ, adică Coker $u_* (i)$ este obiect din $\mathcal{A}_\tau$ fapt evident căci Coker $u_* (i) =$ $= u_*$ Coker (i) și Coker(i) este obiect din $\mathcal{A}'$.

Topologia τ' este cea mai fină cu proprietatea că u este comofirsm de situri, căci dacă τ_1 este o altă topologie pe $\mathcal{C}'$ cu această proprietate și dacă $\mathcal{A}_{\tau_1}$ este subcategoria localizantă a lui $\overline{\mathcal{C}'}$ asociată lui τ_1, atunci

$R \hookrightarrow X \in \tau_1(X) \Leftrightarrow X/R$ este obiect din $\mathcal{A}_{\tau_1}$ şi deci $u_*(X/R)$ este obiect din $\mathcal{A}_\tau$ căci u este comorfism de situri în raport cu topologia τ_1, de unde X/R este obiect din $\mathcal{A}_{\tau'}$ adică $R \hookrightarrow X \in \tau'(X)$.

Se vede uşor că $R \hookrightarrow X$ este o rafinare în topologia τ' dacă şi numai dacă $u_*(R) \to u_*(X)$ este un monomorfism acoperitor în topologia τ.

Primită la redacţie la 25 iunie 1968

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
Calea Griviţei nr. 21, Bucureşti 12

MORPHISMES ET COMORPHISMES DES SITES PRÉADDITIFS (VIII)

(RÉSUMÉ)

Nous revenons à la théorie classique des morphismes et comorphismes des sites en donnant, pour le cas préadditif, une description de leurs propriétés en langage de la sous-catégorie localisante associée à la topologie.

On montre entre autres que le foncteur image directe des faisceaux associé à un foncteur continu, qui est en même temps comorphisme des sites est exacte et les théorèmes (9) et (10) permettent « le transfert » des topologies additives au moyen d'un foncteur qui vérifie certaines conditions.

BIBLIOGRAFIE

1. Verdier Louis, *Topologies et faisceaux*. Séminaire I.E.H.S. 1964, fasc. III.
2. Popescu Nicolae, *Elemente de teoria fascicolelor (III)*, St. cerc. mat. **8**, *4* (1966).
3. Alexandru Gh. Radu, *Toposul abelian al prefascicolelor aditive de grupuri abeliene, peste o categorie preaditivă mică*. St. cerc. mat., **21** (1969).

TRANSFORMĂRI DE TIP LORD KELVIN

DE

MARCEL N. ROŞCULEŢ şi PAUL COCÂRLAN

În această lucrare se studiază transformările (2), care satisfac condiţiile (1), (3) şi (5). Rezultatele sînt conţinute în teoremele 2.1 şi 3.1. Dacă se înlocuieşte ecuaţia (1) cu ecuaţia de tip parabolic (16), se obţin rezultatele din teoremele 6.1 şi 7.1.

1. Fie $v(\alpha)$, $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, o soluţie în $\Delta \subset R^m$, $m > 2$, a ecuaţiei cu derivate parţiale cu coeficienţi constanţi

$$(1) \qquad a_{ik} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_i \, \partial \alpha_k} = 0 \quad , \quad i, j, = 1, 2, \ldots, m a_{ik} = a_{ki}.$$

Ne propunem să determinăm transformările

$$(2) \qquad \alpha_i(x) = \alpha_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

definite în $D \subset R^m$ astfel încît funcţia w definită de

$$(3) \qquad w(x) = H(x, \xi)\, v(\alpha)$$

cu

$$H(x, \xi) = k\,[A_{rs}(x_r - \xi_r)(x_s - \xi_s)]^{\frac{2-m}{2}}$$

A_{rs} fiind minorul lui a_{rs} din determinantul $|a_{ij}|$, să fie în $D - \{\xi\}$ soluţie a ecuaţiei

$$(4) \qquad a_{ik} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \, \partial x_k} = 0 \quad , \quad i, k = 1, 2, \ldots, m.$$

Vom presupune că $A = |a_{ij}| > 0$ şi vom lua

$$k = \frac{1}{m-2} \frac{1}{\sqrt{A}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \frac{1}{2} \pi^{-\frac{m}{2}}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 4, P. 637–644, BUCUREŞTI, 1969

funcţia $H(x, \xi)$ se numeşte funcţia lui E. E. Levi [1][1] şi constituie soluţia fundamentală a ecuaţiei (4), dacă forma pătratică $a_{ik}\,\lambda_i\,\lambda_k$ este definită.

2. Înlocuind pe (3) în (4) şi ţinînd seamă că

$$a_{ik}\,\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\,\partial x_k} = 0$$

obţinem pentru funcţiile α_i condiţiile

$$\left[\frac{1}{h}\,2\,(2-m)\,A\,(x_i-\xi_i)\,\frac{\partial\alpha_l}{\partial x_i} + a_{ik}\,\frac{\partial^2\alpha_l}{\partial x_i\partial x_k}\right]\frac{\partial v}{\partial\alpha_l} +$$

$$+\,a_{ik}\,\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha_l\,\partial\alpha_p}\cdot\frac{\partial\alpha_p}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\alpha_l}{\partial x_k} = 0.,$$

unde $h(x, \xi) = A_{rs}\,(x_r-\xi_r)\,(x_s-\xi_s)$. Considerînd pe $\dfrac{\partial v}{\partial\alpha_l}$ şi pe $\dfrac{\partial^2 v}{\partial\alpha_l\,\partial\alpha_p}$ independente şi ţinînd seamă de (1) obţinem

TEOREMA 2.1. *Fie $w(x)$ o soluţie a ecuaţiei (4) definită în $D\subset R^m$ care se poate scrie sub forma (3). Condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească funcţiile α_l în D pentru ca $v(\alpha)$ să fie soluţie a ecuaţiei (1) sînt următoarele*

$$2\,(2-m)\,A\,\frac{x_i-\xi_i}{h}\,\frac{\partial\alpha_l}{\partial x_i} + a_{ik}\,\frac{\partial^2\alpha_l}{\partial x_i\,\partial x_k} = 0 \tag{5}$$

$$a_{ik}\,\frac{\partial\alpha_p}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\alpha_l}{\partial x_k} = a_{pl}\,F(x, \xi) \tag{6}$$

$$p = 1, 2, \ldots, m;\quad l = 1, 2, \ldots, m.$$

În (6) $F(x, \xi)$ este o funcţie arbitrară, derivabilă, independentă de indicii p, l.

3. Sistemul (6) + (7) are soluţii. Să căutăm soluţii de forma

$$\alpha_l = \beta_{lj}\,(x_j-\xi_j)\,h^\alpha(x, \xi); \tag{7}$$

avem

$$\frac{\partial\alpha_l}{\partial x_i} = \beta_{li}\,h^\alpha + 2\alpha\beta_{lj}\,(x_j-\xi_j)\,A_{is}\,(x_s-\xi_s)\,h^{\alpha-1},$$

$$\frac{\partial^2\alpha_l}{\partial x_i\,\partial x_k} = 2\alpha\beta_{li}\,A_{ks}\,(x_s-\xi_s)\,h^{\alpha-1} + 2\alpha\beta_{lk}\,A_{is}\,(x_s-\xi_s)\,h^{\alpha-1} +$$

$$+\,2\alpha\beta_{lj}\,A_{ik}\,(x_j-\xi_j)\,h^{\alpha-1} + 4\alpha\,(\alpha-1)\,\beta_{lj}\,A_{is}\,A_{kr}\,(x_j-\xi_j)\,(x_s-\xi_s)\,(x_r-\xi_r).h^{\alpha-2}$$

iar dacă înmulţim pe $\dfrac{\partial^2\alpha_l}{\partial x_i\,\partial x_k}$ cu a_{ik} şi ţinem seamă că

$$a_{kq}\,A_{kp} = \delta_{pq}\,A \quad,\quad A \neq 0$$

---

[1] pag. 13.

obţinem

$$a_{ik}\frac{\partial^2\alpha_l}{\partial x_i\,\partial x_k} = [2\alpha\,\beta_{li}(x_i-\xi_i)+2\alpha(2\alpha+m-1)\,\beta_{lk}(x_k-\xi_k)]\,A.\,h^{\alpha-1}$$

astfel încît relaţiile (5) devin

$$2(2-m)\,A\,\beta_{li}\,h^{\alpha-1}(x_i-\xi_i)+4\,(2-m)\alpha\beta_{lj}\,(x_j-\xi_j)\,A_{is}(x_s-\xi_s)\,(x_i-\xi_i)\,h^{\alpha-2}+$$
$$+[2\alpha\,\beta_{lk}\,(x_k-\xi_k)+2\,\alpha\,(2\alpha+m-1)\beta_{lk}\,(x_k-\xi_k)]\,Ah^{\alpha-1}=0$$

sau

$$2Ah^{\alpha-1}\,\beta_{li}\,(x_i-\xi_i)\,[2-m+2\alpha\,(2-m)+\alpha\,(m+2\alpha)]=0$$

şi pentru că $\beta_{li}(x_i-\xi_i)=0$ dau, conform lui (7), $\alpha_l=0$, ceea ce constituie o soluţie neinteresantă, sîntem conduşi numai la

$$2\alpha^2-(m-4)\,\alpha-(m-2)=0 \tag{8}$$

deoarece şi $A\neq 0$, ecuaţia (5) fiind de tip eliptic.

Ecuaţia (8) are rădăcinile $\alpha=-1$ şi $\alpha=\dfrac{m-2}{2}$.

a) *Cazul* $\alpha=-1$. În această situaţie

$$\alpha_l=\beta_{lj}\,(x_j-\xi_j)\,h^{-1}\,(x,\,\xi);$$

întrucît este verificată numai relaţia (5), rămîne să determinăm numerele β_{lj} astfel încît să fie satisfăcute şi relaţiile (6); avem

$$\frac{\partial\alpha_l}{\partial x_i}=\beta_{li}h^{-1}-2\beta_{lj}\,(x_j-\xi_j)\,A_{is}\,(x_s-\xi_s)\,h^{-2}$$

deci

$$a_{ik}\frac{\partial\alpha_l}{\partial x_i}=a_{ik}\,\beta_{li}\,h^{-1}-2\beta_{lj}\,(x_j-\xi_j)\,A_{is}\,a_{ik}\,(\,x_s-\xi_s)\,h^{-2}$$
$$=a_{ik}\,\beta_{li}\,h^{-1}-2A\,\beta_{lj}\,(x_j-\xi_j)\,(x_k-\xi_k)\,h^{-2}$$

avem şi

$$\frac{\partial\alpha_p}{\partial x_k}=\beta_{pk}\,h^{-1}-2\beta_{pq}\,(x_q-\xi_q)\,A_{kt}\,(x_t-\xi_t)\,h^{-2}$$

de unde rezultă

$$a_{ik}\frac{\partial\alpha_l}{\partial x_i}\frac{\partial\alpha_p}{\partial x_k}=a_{ik}\,\beta_{li}\,\beta_{pk}\,h^{-2}-2\beta_{li}\,\beta_{pq}\,a_{ik}\,A_{kt}\,(x_q-\xi_q)\,(x_t-\xi_t)\,h^{-3}-$$
$$-2A\,\beta_{lj}\,\beta_{pk}\,(x_j-\xi_j)\,(x_k-\xi_k)\,h^{-3}+$$
$$+4A\,\beta_{lj}\,\beta_{pq}\,A_{kt}\,(x_q-\xi_q)\,(x_j-\xi_j)\,(x_t-\xi_t)\,(x_k-\xi_k)\,h^{-4}$$

şi pentru că

$$-2\beta_{li}\,\beta_{pq}\,a_{ik}\,A_{kt}\,(x_q-\xi_q)\,(x_t-\xi_t)=-2\beta_{li}\,\beta_{pq}\,A\,(x_i-\xi_i)\,(x_q-\xi_q)$$

iar

$$4\beta_{lj}\,\beta_{pq}\,A_{kt}\,(x_q-\xi_q)\,(x_j-\xi_j)\,(x_t-\xi_t)\,(x_k-\xi_k)=$$
$$=4\beta_{lj}\,\beta_{pq}\,A\,(x_q-\xi_q)\,(x_j-\xi_j)\cdot h$$

rezultă că

$$a_{ik}\,\frac{\partial\alpha_l}{\partial x_l}\,\frac{\partial\alpha_p}{\partial x_k}=a_{ik}\,\beta_{li}\,\beta_{pk}\,h^{-2}$$

prin urmare relaţiile (7) devin

$$a_{ik}\,\beta_{li}\,\beta_{pk}\,h^{-2}=a_{pl}\,F\,(x,\ \xi). \tag{9}$$

TEOREMA 3.1. *Funcţiile*

$$\alpha_l\,(x,\ \xi)=\beta_{lj}\,(x_j-\xi_j)\,h^{-1}\,(x,\ \xi)$$

satisfac condiţiile (5) *şi* (6) *pentru numerele* β_{lj} *definite de sistemul*

$$a_{ik}\,\beta_{li}\,\beta_{pk}=a_{pl}. \tag{10}$$

Demonstraţie. Este suficient să luăm în (10)

$$F\,(x,\ \xi)=h^{-2}\,(x,\ \xi).$$

Să observăm că o soluţie a sistemului (11) se obţine luînd

$$\beta_{lj}=0\quad,\quad i\neq j\quad,\quad\beta_{ii}=1.$$

TEOREMA 3.2. *Transformările*

$$\alpha_l(x,\xi)=\frac{\beta_{lj}\,(x_j-\xi_j)}{h\,(x,\ \xi)}\,,\quad l=1,\,2,\,\ldots,\,m \tag{11}$$

satisfac condiţiile (3) *şi* (4) *dacă* $\beta_{ii}=1$, $\beta_{ij}=0$, $i\neq j$.

4. *Cazul* $\alpha=\dfrac{m-2}{2}$, $m>2$. Avem

$$\frac{\partial\alpha_l}{\partial x_i}=\beta_{li}\,h^{\frac{m}{2}-1}+(m-2)\,\beta_{lj}\,(x_j-\xi_j)\,A_{is}\,(x_s-\xi_s)\cdot h^{\frac{m}{2}-2}$$

$$\frac{\partial\alpha_p}{\partial x_k}=\beta_{pk}\cdot h^{\frac{m}{2}-1}+(m-2)\,\beta_{pq}\,(x_q-\xi_q)\,A_{kr}\,(x_r-\xi_r)\cdot h^{\frac{m}{2}-2}$$

deci

$$a_{ik}\,\frac{\partial\alpha_l}{\partial x_i}=a_{ik}\,\beta_{li}\,h^{\frac{m}{2}-1}+(m-2)\,A\beta_{lj}\,(x_j-\xi_j)\cdot h^{\frac{m}{2}-2}$$

$$a_{ik}\,\frac{\partial\alpha_l}{\partial x_i}\,\frac{\partial\alpha_p}{\partial x_k}=a_{ik}\,\beta_{pk}\,\beta_{li}\,h^{m-2}+(m-2)\,A\,\beta_{pk}\,\beta_{lj}\,(x_j-\xi_j)\,(x_k-\xi_k)\,h^{m-3}+$$
$$+(m-2)\,a_{ik}\,\beta_{pq}\,\beta_{li}\,A_{kr}\,(x_q-\xi_q)\,(x_r-\xi_r)h^{m-3}+$$
$$+(m-2)^2\,A\,\beta_{pq}\,\beta_{lj}\,A_{kr}\,(x_q-\xi_q)\,(x_r-\xi_r)\,(x_j-\xi_j)\,(x_k-\xi_k)\,h^{m-4}$$

însă avem și

$$a_{ik}\,\beta_{pq}\,\beta_{li}\,A_{kr}\,(x_q - \xi_q)\,(x_r - \xi_r) = \beta_{pq}\,\beta_{li}\,A\,(x_q - \xi_q)\,(x_i - \xi_i)$$

$$\beta_{pq}\,\beta_{lj}\,A_{kr}\,(x_q - \xi_q)\,(x_r - \xi_r)\,(x_j - \xi_j)\,(x_k - \xi_k) = \beta_{pq}\,\beta_{lj}\,(x_q - \xi_q)\,(x_j - \xi_j)\,h$$

prin urmare obținem

$$a_{ik}\,\frac{\partial \alpha_l}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \alpha_p}{\partial x_k} = a_{ik}\,\beta_{pk}\,\beta_{li}\cdot h^{m-2} + \tag{12}$$

$$+ A\,(m^2 - 2m)\,\beta_{li}\,\beta_{pk}\,(x_i - \xi_i)\,(x_k - \xi_k)\,h^{m-3}.$$

Înlocuim acest rezultat în relația (7); pentru

$$F\,(x,\ \xi) = A\,(m^2 - m)\,h^{m-2} \tag{13}$$

și dacă luăm

$$\beta_{li}\,\beta_{pk} = A_{ik}\,a_{pl} \tag{14}$$

relațiile (12) sînt satisfăcute. Într-adevăr,

$$A_{ik}\,a_{ik}\,a_{pl}\,h^{m-2} + A\,(m^2 - 2m)\,A_{ik}\,a_{pl}\,(x_i - \xi_i)\,(x_k - \xi_k)\,h^{m-3} =$$

$$= mAa_{pl}\,h^{m-2} + A\,(m^2 - 2m)\,a_{pl}\,h^{m-2}$$

TEOREMA 4.1. *Sistemul de funcții*

$$\alpha_l\,(x,\ \xi) = \beta_{lj}\,(x_j - \xi_j)\,h^{\frac{m-2}{2}}$$

verifică condițiile (3) + (4), *deci și relațile* (5) + (6) *pentru numerele* β_{lj} *date de*

$$\beta_{li}\,\beta_{pk} = A_{ik}\,a_{pl}\,.$$

5. Elementele β_{ij}, β_{ji} la care adjoncționăm numărul real 1, cu legile de înmulțire (14), determină o algebră finită $\mathfrak{A}$ de elemente ale bazei 1, β_{ij}, β_{ji}, în număr de $n^2 + 1$.

TEOREMA 5.1. *Algebra* $\mathfrak{A}$ *este comutativă însă nu este asociativă.*

Demonstrație. Avem

$$\beta_{li}\,\beta_{pk} = A_{ik}\,a_{pl}$$

și pentru că $a_{pl} = a_{lp}$, $A_{ik} = A_{ki}$ rezultă că

$$\beta_{li}\,\beta_{pk} = \beta_{pk}\,\beta_{li}$$

deci algebra $\mathfrak{A}$ este comutativă. Pentru a fi și asociativă, trebuie să avem

$$\beta_{rs}\,(\beta_{li}\,\beta_{pk}) = (\beta_{rs}\,\beta_{li})\,\beta_{pk}$$

sau, ținînd seamă de (14),

$$\beta_{rs}\,A_{ik}\,a_{pl} = A_{si}\,a_{lr}\,\beta_{pk}$$

deci pentru $p \neq r$ sau $k \neq s$, trebuie să avem

$$\beta_{rs}\,A_{ik}\,a_{pl} = 0\,,\quad A_{si}\,a_{lr} = 0$$

ceea ce în general nu este adevărat, numerele A_{ik}, a_{ik} fiind date. Teorema este demonstrată.

6. Să considerăm acum ecuaţia

$$a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha_i\,\partial\alpha_j}=A\frac{\partial v}{\partial\beta},\quad A=|a_{ij}|>0 \tag{15}$$

$i,j=1,2,\ldots,m$, $m>1$. Fie $v(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\beta)$ o soluţie a ecuaţiei (15) definită într-un domeniu $\Delta\subset R^m\times R_+$; să determinăm transformările

$$\begin{aligned}\alpha_i&=\alpha_i(x_1,x_2,\ldots,x_m,t)\,,\quad i=1,2,\ldots,m\\ \beta&=\beta(x_1,x_2,\ldots,x_m,t)\,,\end{aligned} \tag{16}$$

definite în $D\subset R^m\times R_+$ astfel încît funcţia W dată de

$$W(x_1,x_2,\ldots,x_m,t)=h(x_1,x_2,\ldots,x_m,t)\,v(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\beta)\,, \tag{17}$$

unde

$$h(x_1,x_2,\ldots,x_m,t)=t^{-\frac{m}{2}}\exp\left[-\frac{A_{rs}(x_r-\xi_r)(x_s-\xi_s)}{4t}\right] \tag{18}$$

să fie în $D-\{\xi\}$ o soluţie a ecuaţiei

$$a_{ij}\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\,\partial x_j}=A\frac{\partial w}{\partial t}. \tag{19}$$

Funcţia $h(x,t)$ definită de (18) este soluţia fundamentală a ecuaţiei (19). Avem

$$\frac{\partial w}{\partial x_i}=\frac{\partial h}{\partial x_i}v+h\frac{\partial v}{\partial\alpha_l}\cdot\frac{\partial\alpha_l}{\partial x_i},\quad l=1,2,\ldots,m,m+1;\ \beta=\alpha_{m+1}$$

şi

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\,\partial x_j}=v\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\partial x_j}+h\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha_l\,\partial\alpha_p}\frac{\partial\alpha_p}{\partial x_j}\frac{\partial\alpha_l}{\partial x_i}+\frac{\partial v}{\partial\alpha_l}\cdot\frac{\partial^2\alpha_l}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)+$$
$$+\frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial\alpha_l}\frac{\partial\alpha_l}{\partial x_j}+\frac{\partial h}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial\alpha_l}\frac{\partial\alpha_l}{\partial x_i}$$

şi

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial h}{\partial t}v+h\frac{\partial v}{\partial\alpha_l}\cdot\frac{\partial\alpha_l}{\partial t}$$

rezultă imediat că (19) conduce la

$$a_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial\alpha_l}\cdot\frac{\partial\alpha_l}{\partial x_j}+a_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial\alpha_l}\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}+$$
$$+h\left[a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha_l\partial\alpha_p}\frac{\partial\alpha_p}{\partial x_j}\frac{\partial\alpha_l}{\partial x_i}+a_{ij}\frac{\partial v}{\partial\alpha_l}\frac{\partial^2\alpha_l}{\partial x_i\partial x_j}-A\frac{\partial v}{\partial\alpha_l}\frac{\partial\alpha_l}{\partial t}\right]=0$$

şi pentru că

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = -\frac{1}{2t} A_{is}(x_s - \xi_s)\, h$$

obţinem în definitiv

$$(20)\qquad \left(-\frac{1}{t} A\,(x_i - \xi_i)\frac{\partial \alpha_l}{\partial x_i} + a_{ij}\frac{\partial^2 \alpha_l}{\partial x_i\,\partial x_j} - A\,\frac{\partial \alpha_l}{\partial t}\right)\frac{\partial v}{\partial \alpha_l} + {}$$

$$+ a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_l\,\partial \alpha_p}\cdot\frac{\partial \alpha_l}{\partial x_i}\frac{\partial \alpha_p}{\partial x_j} = 0\,,$$

unde $i, j = 1, 2, \ldots, m$; $l, p = 1, 2, \ldots, p + 1$; $\beta = \alpha_{m+1}$. Ţinînd seamă de (20) rezultă

TEOREMA 6.1. *Fie* $w\,(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ *o soluţie a ecuaţiei* (19) *definită în* $D \subset R^m \times R_+$ *care se poate scrie sub forma* (17), *cu* $\alpha_i, \beta \in C^{(2)}$ *în* D. *Condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească funcţiile* α_i, β *pentru ca* $v\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta)$ *să verifice* (15) *sînt*

$$(21)\qquad -\frac{1}{t} A\,(x_i - \xi_i)\frac{\partial \alpha_l}{\partial x_i} + a_{ij}\frac{\partial^2 \alpha_l}{\partial x_i\,\partial x_j} - A\,\frac{\partial \alpha_l}{\partial t} = 0,\ l = 1, 2, \ldots, m,$$

$$(22)\qquad -\frac{1}{t} A\,(x_i - \xi_i)\frac{\partial \beta}{\partial x_i} + a_{ij}\frac{\partial^2 \beta}{\partial x_i\,\partial x_j} - A\,\frac{\partial \beta}{\partial t} = -AF\,(x; \xi; t),$$

$$(23)\qquad a_{ij}\frac{\partial \beta}{\partial x_i}\frac{\partial \alpha_p}{\partial x_j} = a_{pl}F\,(x; \xi; t)\,,\quad p, l = 1, 2, \ldots, m$$

şi

$$(24)\qquad a_{ij}\frac{\partial \beta}{\partial x_i}\frac{\partial \alpha_p}{\partial x_j} = 0\,,\quad p = 1, 2, \ldots, m + 1\,,$$

unde $F\,(x, \xi;\, t)$ este o funcţie independentă de indicii p, l.

7. Sistemul (21) + (22) + (23) + (24) are soluţii. Să încercăm soluţii de forma

$$\alpha_l = \beta_{lk}\frac{x_k - \xi_k}{t}\,,\qquad l, k = 1, 2, \ldots, m$$

$$\beta = -\frac{1}{t}\,,\qquad t > 0\,.$$

Avem

$$\frac{\partial \alpha_l}{\partial x_i} = \frac{1}{t}\beta_{li}\,,\qquad \frac{\partial^2 \alpha_l}{\partial x_i\,\partial x_k} = 0\,,\qquad \frac{\partial \alpha_l}{\partial t} = -\beta_{lk}\frac{x_k - \xi_k}{t^2}$$

şi se observă că (21) sînt verificate. Dacă luăm $F\,(x, \xi;\, t) = \frac{1}{t^2}$ şi dacă

$$(25)\qquad a_{ij}\,\beta_{li}\,\beta_{pj} = a_{pl}$$

relaţiile (22), (23), (24) sînt satisfăcute.

TEOREMA 7.1. *Transformările*

$$\alpha_l = \beta_{lk} \frac{x_k - \xi_k}{t}, \quad l = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, m$$

$$\beta = -\frac{1}{t}$$

cu $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^m$, $t \in R_+$ *satisfac relaţiile* (17) + (19) *dacă numerele* β_{lk} *sînt soluţiile sistemului*

$$a_{ij}\, \beta_{li}\, \beta_{pj} = a_{pl}, \qquad i, j, p, l = 1, 2, \ldots, m.$$

În particular dacă $\beta_{ii} = 1$, $\beta_{ij} = 0$, $i \neq j$, *sistemul* (25) *este satisfăcut, deci transformarea*

$$\alpha_k = \frac{x_k - \xi_k}{t}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

$$\beta = -\frac{1}{t}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^m$, $t \in R_+$, *satisface* (17) + (19).

Teorema 7.1 generalizează un rezultat obţinut de autori în [2].

Primită la redacţie la 9 aprilie 1968

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
Calea Griviţei nr. 21, Bucureşti 12
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”
Bucureşti

TRANSFORMATIONS DE TYPE LORD KELVIN

(RÉSUMÉ)

Dans cet ouvrage on considère les transformations (2) qui satisfont les conditions (1), (3) et (5).

Les résultats sont contenus dans les théorèmes 2.1 et 3.1.

En remplaçant l'équation (1) par l'équation de type parabolique (16), on obtient les résultats 6.1 et 7.1.

BIBLIOGRAFIE

1. CARLO MIRANDA, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico.* Springer-Verlag, Berlin, 1955.
2. MARCEL N. ROŞCULEŢ şi PAUL COCÂRLAN, *Contribuţii la studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale de tip parabolic.* VII. *Polinoame calorice şi transformări Paul Appell.* St. cerc. mat., **19**, *5* (1967).

TENSORI ARMONICI AI SPAŢIILOR RIEMANN CU GRUP DE MIŞCĂRI SIMPLU TRANZITIV[1]

DE

C. SIMIONESCU

(Braşov)

În Nota de faţă se determină tensorii armonici ai spaţiilor V_3 cu grup simplu tranzitiv.

Se ştie că în clasa invarianţilor topologici ai unei varietăţi diferenţiabile compacte orientabile, un rol important îl joacă numerele Betti.

Presupunînd varietatea dotată cu o metrică Riemann pozitiv definită de clasă C^∞, lucru întotdeauna posibil (Whitney, [1]), problema determinării numerelor Betti ale varietăţii devine, după cum a arătat G. de Rham şi W. Hodge [2], o problemă de determinare a tensorilor armonici ce se pot forma pe varietate şi anume, este legată de stabilirea numărului tensorilor armonici liniar independenţi deoarece indicînd cu B_p numărul Betti p-dimensional şi cu $n(p)$ numărul tensorilor de ordin p liniar independenţi, avem $B_p = n(p)$.

Tehnica obţinerii acestor tensori a fost dată de G. de Rham în [3] şi de K. Yano în [4].

Recent acad. Gh. Vrănceanu [5], extinzînd unele rezultate privind spaţiile Riemann reprezentative de grupuri semisimple [2] [2], a arătat că problema determinării tensorilor armonici ai unui spaţiu Riemann compact orientabil cu grup simplu tranzitiv de mişcări este o problemă algebrică.

În Nota de faţă, utilizînd metoda dată de acad. Gh. Vrănceanu, se determină numerele Betti ale spaţiilor V_3 cu grup simplu tranzitiv.

Fie V_n un spaţiu Riemann n dimensional a cărui metrică într-un sistem de coordonate locale este dată de forma pătratică pozitiv definită

$$\mathrm{d}s^2 = a_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j. \tag{1}$$

---

[1] Comunicare ţinută la Seminarul de varietăţi diferenţiabile, iulie 1967.

[2] *Loc. cit.*, pag. 227–280 (cap. V).

Să presupunem că luăm în spațiul V_n un sistem de congruențe ortogonale. Aceasta înseamnă că punem metrica (1) sub forma

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}s^1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}s^n)^2, \tag{2}$$

unde $\mathrm{d}s^1, \ldots, \mathrm{d}s^n$ sînt n forme Pfaff

$$\mathrm{d}s^a = \lambda_i^a \, \mathrm{d}x^i$$

independente, astfel încît

$$a_{ij} = \lambda_i^a \lambda_j^a ; a^{ij} = \mu_a^i \mu_a^j$$

și

$$\lambda_i^a \mu_a^j = \delta_i^j ; \lambda_i^a \mu_b^i = \delta_b^a ,$$

unde $a, b, i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Fie $\xi_{i_1 \ldots i_p}$ un tensor covariant strîmb simetric de ordin p în spațiul V_n, unde p are una din valorile $1, 2, \ldots, n - 1$. Indicăm cu

$$\xi_{a_1 \ldots a_p} = \xi_{i_1 \ldots i_p} \mu_{a_1}^{i_1} \ldots \mu_{a_p}^{i_p}$$

componentele acestui tensor pe congruențele (λ) definite de formele $\mathrm{d}s^1, \ldots, \mathrm{d}s^n$. Ținînd seama că putem presupune că $\mathrm{d}s^1, \ldots, \mathrm{d}s^n$ sînt forme invariante prin grup, deci că avem

$$\Delta s^h = c_{kl}^h \, \mathrm{d}s^k \, \delta s^l ,$$

unde c_{kl}^h sînt constantele de structură ale grupului G_n, atunci componentele $\xi_{a_1 \ldots a_p}$ ale unui tensor armonic satisfac condițiile

$$\begin{cases} \xi_{f a_2 \ldots a_p} c_{a_1 a}^f + \ldots + \xi_{a_1 \ldots f} c_{a_p a}^f - \xi_{f a \ldots a_p} c_{a_1 a_2}^f - \ldots - \xi_{a_1 \ldots f a} c_{a_{p-1} a_p}^f = 0 \\ \xi_{f \ldots a_p} c_f + \xi_{a s \ldots a_p} c_{as}^{a_2} + \ldots + \xi_{a a_2 \ldots s} c_{as}^{a_p} = 0 \qquad (a < s), \end{cases} \tag{3}$$

unde $c_f = c_{ab}^a = \gamma_{aa}^f$ este tensorul de structură al grupului G_n astfel că putem enunța

TEOREMA LUI GH. VRĂNCEANU [5][3]). *Problema determinării tensorilor armonici ai spațiilor V_n compact orientabile cu grup simplu tranzitiv de mișcări este o problemă algebrică și se reduce la găsirea soluțiilor sistemului (3), unde $p \leqslant n - 1$ iar $a < s$.*

Se poate observa că ecuațiile (3) pot să fie considerate și în cazul cînd spațiul V_n nu este compact, deci se obține o extensiune a numerelor Betti și la varietăți V_n necompacte, dacă posedă grup tranzitiv de mișcări.

Să considerăm cazul spațiilor V_3 cu grup simplu tranzitiv G_3. După cum a arătat acad. Gh. Vrănceanu [6][4]) există patru tipuri de astfel de spații și anume sînt acele spații V_3 care au următoarele ecuații de structură:

$$V_3(I) \begin{cases} \Delta s^1 = 0 \\ \Delta s^2 = a \, [\mathrm{d}s^1 \, \mathrm{d}s^2] - \lambda \, [\mathrm{d}s^1 \, \mathrm{d}s^3] \\ \Delta s^3 = \lambda \, [\mathrm{d}s^1 \mathrm{d}s^2] + b \, [\mathrm{d}s^1 \, \mathrm{d}s^3] \end{cases}$$

---

[3]) *Loc cit.*, pag. 170.

[4]) *Loc. cit.*, pag. 298–300.

cu $a + b \neq 0$

$$V_3\,(\mathrm{II})\quad \begin{cases} \Delta s^1 = c\,[\mathrm{d}s^1\,\mathrm{d}s^2] - a\,[\mathrm{d}s^1\,\mathrm{d}s^3] + \dfrac{ca}{b}\,[\mathrm{d}s^2\,\mathrm{d}s^3] \\ \Delta s^2 = b\,[\mathrm{d}s^1\,\mathrm{d}s^2] - \dfrac{ba}{c}\,[\mathrm{d}s^1\,\mathrm{d}s^3] + a\,[\mathrm{d}s^2\,\mathrm{d}s^3] \\ \Delta s^3 = \dfrac{cb}{a}[\mathrm{d}s^1\mathrm{d}s^2] - b\,[\mathrm{d}s^1\,\mathrm{d}s^3] + c\,[\mathrm{d}s^2\,\mathrm{d}s^3] \end{cases}$$

$$V_3\,(\mathrm{III})\begin{cases} \Delta s^1 = \lambda\,[\mathrm{d}s^2\,\mathrm{d}s^3] \\ \Delta s^2 = \mu\,[\mathrm{d}s^1\,\mathrm{d}s^3] \\ \Delta s^3 = \nu\,[\mathrm{d}s^1\mathrm{d}s^2] \end{cases}$$

şi

$$V_3\,(\mathrm{IV})\begin{cases} \Delta s^1 = c\,[\mathrm{d}s^1\,\mathrm{d}s^2] + \lambda\,[\mathrm{d}s^2\,\mathrm{d}s^3] \\ \Delta s^2 = 0 \\ \Delta s^3 = \nu\,[\mathrm{d}s^1\,\mathrm{d}s^2] + c\,[\mathrm{d}s^2\mathrm{d}s^3], \end{cases}$$

unde prin $[\mathrm{d}s^i, \mathrm{d}s^j]$, $i, j = 1, 2, 3$, înţelegem diferenţele $\mathrm{d}s^i\,\delta s^j - \mathrm{d}s^i\,\mathrm{d}s^j$.

Remarcăm că ecuaţiile de structură ale spaţiilor $V_3\,(\mathrm{I}), \ldots, V_3\,(\mathrm{IV})$, pun în evidenţă cantităţile $a, \ldots, \nu$ drept constante de structură ale grupurilor de mişcare ale acestor spaţii, deci indicînd aceste grupuri prin $G_3\,(\mathrm{I}), \ldots, G_3\,(\mathrm{IV})$ ele au următoarele constante de structură:

$$G_3\,(\mathrm{I})\quad \begin{cases} c^1_{12} = c^1_{13} = c^1_{23} = c^2_{23} = c^3_{23} = 0 \\ c^2_{12} = a,\ c^2_{13} = -\lambda,\ c^3_{12} = \lambda,\ c^3_{13} = b \end{cases}$$

$$G_3\,(\mathrm{II})\begin{cases} c^1_{12} = c^2_{23} = c,\quad c^2_{23} = -\,c^1_{13} = a,\quad c^1_{12} = -\,c^3_{13} = b \\ c^1_{23} = \dfrac{ca}{b},\ c^2_{13} = -\,\dfrac{ba}{c},\ c^3_{12} = \dfrac{cb}{a} \end{cases}$$

$$G_3\,(\mathrm{III})\begin{cases} c^1_{23} = \lambda,\ c^2_{13} = \mu,\ c^3_{12} = \nu \\ c^1_{12} = c^1_{13} = c^2_{12} = c^2_{23} = c^3_{13} = c^3_{23} = 0 \end{cases}$$

$$G_3\,(\mathrm{IV})\begin{cases} c^1_{12} = c^3_{23} = c,\quad c^1_{23} = \lambda,\ c^3_{12} = \nu \\ c^1_{13} = c^2_{12} = c^2_{13} = c^2_{23} = c^3_{13} = 0. \end{cases}$$

Ca urmare: *determinarea tensorilor armonici de ordinul unu (vectori armonici) şi de ordinul doi ale spaţiilor V_3 cu grup G_3 simplu tranzitiv, este legată de rezolvarea respectiv a sistemelor*:

$$(4)\qquad \begin{cases} \xi_f\,c_f = 0 \\ \xi_f\,c^f_{ab} = 0 \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} \xi_{fa_2}\ \ c^f_{a_1\,a} + \xi_{a_1\,f}\ \ c^f_{a_2\,a} - \xi_{fa}\ \ c^f_{a_1\,a_2} = 0 \\ \xi_{fa_2}\ \ c_f + \xi_{as}\ \ c^{a_2}_{a_s} = 0 \qquad\qquad (a < s) \end{cases}$$

unde indicii iau valori de la unu la trei, c^i_{jk}, c_i *avînd semnificațiile cunoscute.*

Ne propunem pentru început să determinăm vectorii armonici ai spațiilor V_3 (I).

Ținînd seama de structura grupului $G_3(I)$, întrucît $c_1 = -(a + b) \neq 0$ $c_2 = c_3 = 0$, prima ecuație (4) ne dă $\xi_1 = 0$.

Pe de altă parte, cea de a doua ecuație ne conduce la sistemul

$$\tag{6} \begin{cases} a\xi_2 + \lambda\xi_3 = 0 \\ -\lambda\xi_2 + b\xi_3 = 0 \end{cases}$$

de unde deducem că $\xi_2 = \xi_3 = 0$ dacă avem

$$\tag{7} ab + \lambda^2 \neq 0.$$

Deci *spațiile* V_3 (I) *nu posedă vectori armonici nenuli, dacă satisfac condiția* (7).

Dacă $ab + \lambda^2 = 0$, putem avea $\lambda \neq 0$ sau $\lambda = 0$. În ipoteza că $\lambda \neq 0$, putem lua

$$\xi_2 = \alpha b, \ \xi_3 = \alpha\lambda,$$

unde α este un factor de proporționalitate, deci în acest caz *spațiile* V_3 (I) *admit un singur vector armonic liniar independent și anume vectorul de componente*:

$$(0, b, \lambda) \qquad (\lambda \neq 0).$$

Dacă λ este nul, constantele a, b neputînd fi ambele nule, $(a + b \neq 0)$, alegînd pe $a = 0$, avem $\xi_3 = 0$ și ca urmare în acest caz, *vectorul* $(0, 1, 0)$ *este unicul vector liniar independent.*

Pentru determinarea tensorilor armonici de ordinul doi ai spațiilor V_3 (I) să luăm în prima ecuație a sistemului (5)

$$a_1 = 1, \ a_2 = 2 \text{ și } a = 3.$$

Avem

$$(a + b)\,\xi_{23} = 0$$

ceea ce spune că $\xi_{23} = 0$.

Luînd în ultima ecuație a sistemului (5) $a_2 = 2$, respectiv $a_2 = 3$, rezultă că ξ_{12}, ξ_{13} sînt determinați drept soluții ale sistemului

$$\tag{6'} \begin{cases} b\xi_{12} + \lambda\xi_{13} = 0 \\ \lambda\xi_{12} - a\xi_{13} = 0. \end{cases}$$

Așadar: *spațiile* V_3 (I) *care satisfac condiția* (7) *nu admit tensori armonici de ordin doi nenuli. Dacă avem* $ab + \lambda^2 = 0$, *atunci spațiul liniar al tensorilor armonici de ordinul doi ai spațiilor* V_3 (I) *este subîntins de către tensorul* $\xi_{12} = a$, $\xi_{13} = \lambda$, $\xi_{23} = 0$ *respectiv de către tensorul* $\xi_{12} = 0$, $\xi_{13} = 1$, $\xi_{23} = 0$ *după cum numărul* λ *este diferit de zero sau nu.*

Ca urmare putem enunța

TEOREMĂ. *Numerele lui Betti* B_1, B_2, *ale spațiilor* V_3 (I) *sînt egale și avem*

$$B_1 = B_2 = 0 \quad \text{dacă} \quad ab + \lambda^2 \neq 0$$

respectiv

$$B_1 = B_2 = 1 \quad dacă \quad ab + \lambda^2 = 0.$$

Să trecem acum la determinarea tensorilor armonici ai spaţiilor V_3(II).

Deoarece vectorul de structură al grupului G_3(II) este nul, prima ecuaţie a sistemului (4) este o identitate şi este uşor de văzut că întreg sistemul (4) se reduce la ecuaţia

$$ac\,\xi_1 + ab\,\xi_2 + bc\,\xi_3 = 0$$

care ne spune că putem lua arbitrar două din cantităţile ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Avem deci următorul rezultat:

În V_3(II) există doi vectori armonici liniar independenţi, cu alte cuvinte, spaţiul liniar al vectorilor armonici ai spaţiilor V_3 (II) are dimensiunea egală cu doi.

În ceea ce priveşte determinarea tensorilor armonici de ordinul doi ai spaţiilor V_3(II) să observăm că primele ecuaţii (5) sînt identic satisfăcute iar cele de-al doilea ne spune că avem

$$bc\xi_{12} - ab\xi_{13} + ac\xi_{23} = 0$$

deci:

În V_3(II) există doi tensori armonici de ordinul doi liniar independenţi.

Putem deci enunţa:

TEOREMĂ. *Numerele lui Betti B_1, B_2, ale spaţiilor V_3 (II) sînt egale şi avem*

$$B_1 = B_2 = 2.$$

În cazul spaţiilor V_3(III), sistemul (4) poate fi pus sub forma

$$\lambda\xi_1 = 0, \quad \mu\xi_2 = 0, \quad \nu\xi_3 = 0$$

şi avem

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$$

dacă λ, μ, ν sînt toate diferit de zero, situaţie care se prezintă în cazul general.

Dacă una din constantele λ, μ, ν este diferită de zero, atunci două din componentele vectorului ξ_1, ξ_2, ξ_3 pot fi luate arbitrar, iar dacă două dintre aceste cantităţi sînt nenule, atunci o componentă a vectorului ξ_1, ξ_2, ξ_3 rămîne arbitrară. Cum nu putem avea $\lambda = \mu = \nu = 0$, căci spaţiul V_3(III) ar fi în acest caz euclidian, putem enunţa următorul rezultat:

Spaţiile V_3(III) cu $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$ nu posedă vectori armonici nenuli.

Dacă două din constantele λ, μ, ν sînt nule, atunci V_3(III) posedă doi vectori armonici liniar independenţi iar dacă numai una dintre aceste cantităţi este nulă, spaţiul V_3(III) posedă un singur vector armonic liniar independent.

Problema determinării tensorilor armonici de ordinul doi ai spaţiilor $V_3(\mathrm{II})$ ne conduce la relaţiile

$$\lambda\xi_{23} = 0, \quad \mu\xi_{13} = 0, \quad \nu\xi_{12} = 0$$

după cum rezultă uşor luînd în consideraţie ultima ecuaţie a sistemului (5), prima ecuaţie (5) fiind de fapt în acest caz o identitate.

Deci: *Spaţiile* $V_3(\mathrm{III})$ *cu* $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$ *nu posedă tensori armonici de ordinul doi nenuli.*

Dacă două din constantele λ, μ, ν *sînt nule, atunci spaţiul liniar al tensorilor armonici de ordinul doi ai lui* $V_3(\mathrm{III})$ *are dimensiunea doi şi are dimensiunea egală cu unitatea dacă una şi numai una din cantităţile* λ, μ, ν *este nulă.*

Ca urmare aceste rezultate pot fi strînse în:

TEOREMĂ. *Numerele lui Betti* B_1, B_2, *ale spaţiilor* $V_3(\mathrm{III})$ *sînt egale şi avem:*

$$B_1 = B_2 = 0 \quad \textit{dacă} \quad \lambda \neq 0, \ \mu \neq 0, \ \nu \neq 0,$$

$$B_1 = B_2 = 1 \quad \textit{dacă} \quad \begin{cases} \lambda = 0, \ \mu \neq 0, \ \nu \neq 0 \text{ sau} \\ \mu = 0, \ \lambda \neq 0, \ \nu \neq 0 \\ \nu = 0, \ \lambda \neq 0, \ \mu \neq 0, \text{ sau} \end{cases}$$

$$B_1 = B_2 = 2 \quad \textit{dacă} \quad \begin{cases} \lambda = \mu = 0 \quad \nu \neq 0 \text{ sau} \\ \lambda = \nu = 0 \quad \mu \neq 0 \text{ sau} \\ \mu = \nu = 0 \quad \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Considerăm în sfîrşit cazul spaţiilor $V_3(\mathrm{IV})$. Este lesne de văzut că vectorii armonici ai acestor spaţii satisfac sistemul

$$\begin{cases} c\xi_1 + \nu\xi_3 = 0 \\ \lambda\xi_1 + c\xi_3 = 0 \end{cases}$$

deci $\xi_1 = \xi_3 = 0$ dacă $c^2 - \lambda\nu \neq 0$, componenta ξ_2 rămînînd arbitrară.

Dacă $c^2 = \lambda\nu$ şi $c \neq 0$, putem lua

$$\frac{\xi_1}{\nu} = \frac{\xi_3}{-c},$$

deci vectorii

$$(\alpha\nu, \ \xi_2, \ -\alpha c),$$

unde α şi ξ_2 sînt numere reale arbitrare, sînt vectorii armonici şi observăm că aceşti vectori pot fi consideraţi combinaţii liniare ai vectorilor armonici

$$(\nu, \ 0, \ -c); \ (0, \ 1, \ 0).$$

Dacă $c = 0$, atunci $\lambda\nu = 0$, şi luînd $\nu \neq 0$, avem $\xi_3 = 0$, componentele ξ_1, ξ_2 rămînînd arbitrare.

Deoarece constantele c, λ, ν nu pot fi toate nule, căci $V_3(\mathrm{IV})$ ar fi atunci euclidian, putem enunţa următorul rezultat:

Numărul Betti B_1 *al spaţiilor* $V_3(\mathrm{IV})$ *este egal cu unitatea dacă avem* $c^2 - \lambda\nu \neq 0$ *şi este egal cu doi în cazul contrar.*

Utilizînd constantele de structură ale grupului $G_3(\mathrm{IV})$, deducem din ultimele formule (5) că tensorii armonici de ordinul doi al spaţiilor $V_3(\mathrm{IV})$ verifică sistemul

$$\begin{cases} c\xi_{12} + \lambda\xi_{23} = 0 \\ \nu\xi_{12} + c\xi_{23} = 0. \end{cases}$$

În plus este uşor de văzut că primele formule (5) sînt verificate identic oricare ar fi ξ_{13} şi ca urmare putem enunţa:

TEOREMĂ. *Numerele lui Betti* B_1, B_2, *ale spaţiilor* $V_3(\mathrm{IV})$ *sînt egale şi avem:*

$$B_1 = B_2 = 1 \text{ dacă } c^2 - \lambda\nu \neq 0$$

şi

$$B_1 = B_2 = 2 \text{ dacă } c^2 - \lambda\nu = 0$$

Primită la redacţie la 2 aprilie 1968

Institutul politehnic Braşov

TENSEURS HARMONIQUES DES ESPACES DE RIEMANN

(RÉSUMÉ)

On détermine les tenseurs harmoniques des espaces V_3 à groupe simplement transitif.

BIBLIOGRAFIE

1. WHITNEY H., *Differentiable manifolds.* Annals of Mathematics, **37** M645 (1936).
2. HODGE, W., *The theory and applications of harmonic integrals,* Second edition, Cambridge University Press, 1952.
3. RHAM G., *Remarque au sujet de la théorie des formes différentielles harmoniques.* Annales de l'Université de Grenoble, **23** 55–56 (1947–48).
4. YANO, K. and BOCHNER, S., *Curvature and Betti numbers.* Annals of Mathematics studies, Princeton, 1903.
5. VRĂNCEANU, GH., *Tenseurs harmoniques et groupes de mouvement, d'un espace Riemann.* Commentarii Mathematici Helvetici, **23**, *3* (1959).
6. VRĂNCEANU, GH., *Lecţii de geometrie diferenţială,* vol. I, Ed. Didact. şi Pedag., Bucureşti, 1962, cap. V, § 13, p. 279.

ÎNSUMAREA A TREI NUMERE ROTUNJITE

DE

NICOLAE ŞONERIU

În lucrare este cuprinsă determinarea analitică a funcţiilor de repartiţie pentru rezultatul însumării a trei numere, care au rotunjiri cu repartiţii rectangulare. Cu ajutorul expresiilor prezentate pot fi rezolvate problemele ce le ridică precizia rezultatelor pentru însumări şi, prin liniarizări, pentru orice alte operaţii sau funcţii, care au la trei dintre coeficienţii daţi, abateri de rotunjire obişnuite, adică repartizate rectangular.

I

Fie X_1, X_2, X_3 cele trei numere cu rotunjirile de fineţea $2\Delta_1$, $2\Delta_2$ şi $2\Delta_3$, a căror sumă o vom nota prin X_s:

$$X_s = X_1 + X_2 + X_3. \tag{1}$$

Într-un sistem de coordonate rectangulare, avînd axele OX_1, OX_2 şi OX_3, va rezulta un paralelipiped dreptunghiular, cu laturile $2\Delta_1$, $2\Delta_2$ şi $2\Delta_3$, în interiorul căruia se vor găsi toate valorile celor trei variabile, care dau pe X_s. Centrul acestui paralelipiped va avea coordonatele $\overline{X}_1$ $\overline{X}_2$ şi $\overline{X}_3$, faţă de care rotunjirile vor da abateri pozitive şi negative egale cu Δ_1, Δ_2 şi Δ_3, aşa că valorile extreme, vare vor da coordonatele laturilor paralelipipedului, vor fi

$$\left.\begin{aligned} X_{i\max} &= \overline{X}_i + \Delta_i \\ X_{i\min} &= \overline{X}_i - \Delta_i \end{aligned}\right\} i = 1,\ 2 \text{ şi } 3. \tag{2}$$

Pentru fiecare dintre aceste variabile, densitatea de probabilitate va fi uniformă în intervalele de mai sus, adică egală cu

$$\frac{1}{2\Delta_i}, \quad i = 1,\ 2 \text{ şi } 3$$

aşa că densitatea de probabilitate din interiorul paralepipedului va fi de asemenea uniformă şi egală cu inversul volumului V al acestuia

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{8\,\Delta_1\,\Delta_2\,\Delta_3}. \tag{3}$$

În fiecare dintre cele opt colţuri ale paralelipipedului vom obţine o valoare a sumei X_s, pe care o vom nota prin

$$X_{sj}, \qquad j = 1, 2, \ldots, 7, 8,$$

iar în centrul paralelipipedului vom avea

$$\overline{X}_s = \overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \overline{X}_3, \tag{4}$$

care se găseşte nemijlocit la operaţia de însumare a numerelor rotunjite.

Valorile extreme ale sumei vor fi:

$$\text{minimumul } X_{s1} = \overline{X}_s - (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) \tag{5a}$$

$$\text{maximumul } X_{s8} = \overline{X}_s + (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3), \tag{5b}$$

între care se vor înscrie celelalte valori, la care vom folosi indicii în ordinea crescătoare a mărimii sumei, adică totdeauna

$$X_{sj+1} > X_{sj}. \tag{6}$$

Deoarece operaţiile de însumare sînt comutative, vom presupune că notaţiile X_1, X_2 şi X_3 sînt astfel alese, încît fineţele de rotunjire corespunzătoare să fie descrescătoare în ordinea indicilor

$$\Delta_1 > \Delta_2 > \Delta_3, \tag{7}$$

succesiunea în care se vor obţine cele opt sume fiind astfel dată de expresiile

$$\begin{aligned} X_{s1} &= \overline{X}_s - \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 \\ X_{s2} &= X_s - \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 \\ X_{s3} &= X_s - \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 \\ X_{s4} &= X_s - \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \\ X_{s5} &= X_s + \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 \\ X_{s6} &= X_s + \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 \\ X_{s7} &= X_s + \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 \\ X_{s8} &= X_s + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3. \end{aligned} \tag{8}$$

Din expresiile (8) rezultă o condiţie de inegalitate suplimentară celei de la (7) şi anume

$$\Delta_1 > \Delta_2 + \Delta_3, \tag{9}$$

pentru ca

$$X_{s5} > X_{s4},$$

aşa că la determinarea funcţiilor de repartiţie vom presupune iniţial satisfacerea inegalităţii (9).

II

Fie X_s = constant astfel ales încît să satisfacă inegalitățile

$$X_{s1} < X_s < X_{s2}, \tag{10}$$

expresia (1) reprezentînd un plan care taie cele trei muchii ale paralelipipedului în punctele de coordonate:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_s - \overline{X}_2 + \Delta_2 - \overline{X}_3 + \Delta_3 \\ X_2 &= X_s - \overline{X}_1 + \Delta_1 - \overline{X}_3 + \Delta_3 \\ X_3 &= X_s - \overline{X}_1 + \Delta_1 - \overline{X}_2 + \Delta_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Punctele de mai sus, împreună cu punctul avînd coordonatele:

$$\begin{aligned} &\overline{X}_1 - \Delta_1 \\ &\overline{X}_2 - \Delta_2 \\ &\overline{X}_3 - \Delta_3, \end{aligned} \tag{12}$$

din colțul paralelipipedului care dă pe X_{s1}, formează o piramidă rectangulară, figura 1, avînd pe direcția X_1 lungimea laturii egală cu diferența dintre coordonatele date de (11) și (12):

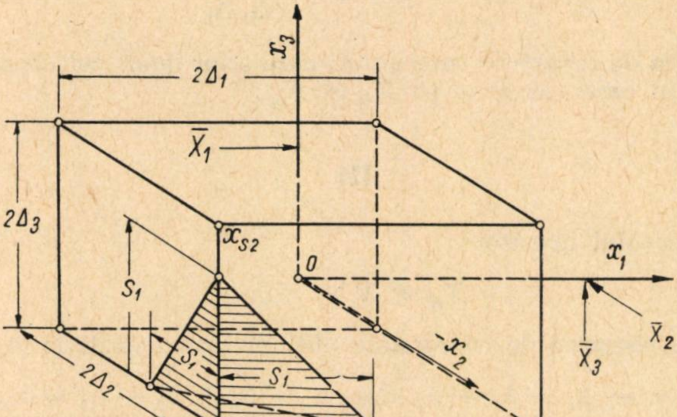


Fig. 1

$$\begin{aligned} X_1 - (\overline{X}_1 - \Delta_1) &= X_s - \overline{X}_1 + \Delta_1 - \overline{X}_2 + \Delta_2 - \overline{X}_3 + \Delta_3 = \\ &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + X_s - \overline{X}_s = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + x_s = s_1, \end{aligned} \tag{13}$$

în care am notat prin x_s diferența

$$x_s = X_s - \overline{X}_s \tag{14}$$

și, pentru prescurtare, întreaga expresie prin s_1.

Determinarea expresiilor pentru celelalte două muchii ale piramidei nu este necesară, deoarece în conformitate cu (1) şi cu reprzentarea din figura 1, se va obţine tot rezultatul de la (13), aşa că volumul piramidei, detaşat de către plan din paralelipiped, va fi

$$v_1 = \frac{1}{6} s_1^3 .$$

Deoarece în interiorul paralelipipedului densitatea de probabilitate este uniform repartizată şi dată de (3), se obţine pentru funcţia de repartiţie

$$Y_1 = \frac{v_1}{V} = \frac{s_1^3}{48\,\Delta_1\Delta_2\Delta_3} = \frac{(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + x_s)^3}{48\,\Delta_1\,\Delta_2\,\Delta_3}. \tag{15}$$

Această expresie de gradul al treilea în x_s este valabilă în intervalul (10), căruia în noua variabilă, dată de (14), îi corespunde

$$x_{s1} = -\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 < x_s < -\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 = x_{s2}. \tag{16}$$

Introducînd limitele de la (16) în (15) cu $s_{11} = 0$ şi $s_{12} = 2\Delta_3$, se obţine

$$Y_{11} = 0 \text{ şi } Y_{12} = \frac{\Delta_3^2}{6\Delta_1\,\Delta_2}, \tag{17}$$

pentru funcţia de repartiţie corespunzătoare celor două colţuri ale paralelipipedului, în care am avut pe X_{s1} şi X_{s2}.

III

În intervalul următor:

$$X_{s2} < X_s < X_{s3},$$

adică pentru sistemul de coordonate obţinut prin translaţia (14)

$$x_{s2} = -\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 < x_s < -\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 = x_{s3}$$

planul dat de (1) va depăşi colţul care dă pe X_{s2} (fig. 2), tăind muchiile paralelipipedului din planul $\overline{X}_3 + \Delta_3$, orientate pe direcţia X_1 şi X_2, în punctele:

$$X_1 = X_s - \overline{X}_2 + \Delta_2 - \overline{X}_3 - \Delta_3$$

$$X_2 = X_s - \overline{X}_1 + \Delta_1 - \overline{X}_3 - \Delta_3.$$

Scăzînd din acestea coordonatele punctului X_{s2}, care sînt

$$\overline{X}_1 - \Delta_1$$

$$\overline{X}_2 - \Delta_2,$$

se obţin segmente de lungime egală

$$X_s - \overline{X}_1 + \Delta_1 - \overline{X}_2 + \Delta_2 - \overline{X}_3 - \Delta_3 = X_s - \overline{X}_s + \Delta_1 + \Delta_2 -$$
$$- \Delta_3 = x_s + \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 = s_2,$$

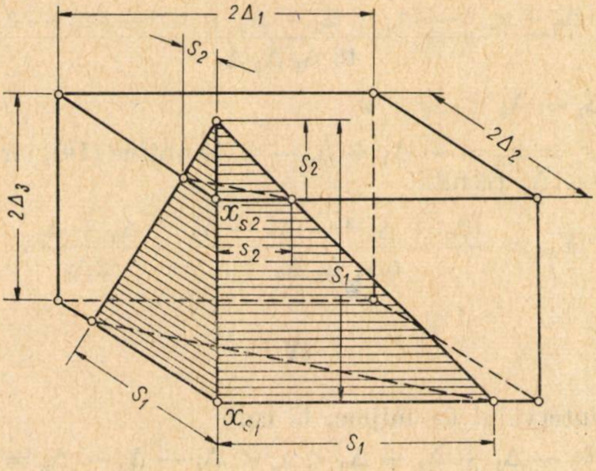


Fig. 2

care lungime se regăseşte şi pe direcţia X_3, aşa că volumul piramidei, care depăşeşte latura de sus a paralelipipedului, va fi

$$v_2 = \frac{1}{6}(X_s - \overline{X}_s + \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3)^3 = \frac{1}{6}(\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 + x_s)^3 = \frac{1}{6}s_2^3 \cdot$$

Scăzîndu-l pe acesta din piramida întreagă, care are volumul

$$\frac{1}{6}(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + x_1)^3 = \frac{1}{6}s_1^3,$$

se poate scrie direct funcţia de repartiţie:

$$Y_2 = \frac{v_1 - v_2}{V} = \frac{s_1^3 - s_2^3}{48\,\Delta_1\,\Delta_2\,\Delta_3} = \tag{18}$$
$$= \frac{(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + x_s)^3 - (\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 + x_s)^3}{48\,\Delta_1\,\Delta_2\,\Delta_3}.$$

Această expresie, pentru $x_s = x_{s2} = -\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3$, ne dă pe (17), iar pentru $x_s = x_{s3} = -\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3$ ne dă

$$Y_{23} = \frac{\Delta_2^3 - (\Delta_2 - \Delta_3)^3}{6\Delta_1\,\Delta_2\,\Delta_3} = \frac{1}{2\Delta_1}(\Delta_2 - \Delta_3) + \frac{\Delta_3^2}{6\,\Delta_1\,\Delta_2}. \tag{19}$$

Pentru intervalul următor, la care

$$x_{s3} = -\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 < x_s < -\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = x_{s4},$$

se poate scrie direct expresia lui Y_3, deoarece vom avea două piramide, care vor depăși fețele $\overline{X}_3 + \Delta_3$ și $\overline{X}_2 + \Delta_2$:

$$Y_3 = \frac{v_1 - v_2 - v_3}{V} = \frac{s_1^3 - s_2^3 - s_3^3}{48\,\Delta_1\,\Delta_2\,\Delta_3} = \tag{20}$$

$$= \frac{(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + x_s)^3 - (\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 + x_s)^3 - (\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 + x_s)^3}{48\,\Delta_1\,\Delta_2\,\Delta_3},$$

în care $s_3 = \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 + x_s$.

Pentru $x_s = x_{s3} = -\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3$ se obține (19), iar la $x_s = x_{s4} = -\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$ rezultă

$$Y_{34} = \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_2^3 - \Delta_3^3}{6\Delta_1\,\Delta_2\,\Delta_3} = \frac{\Delta_2 + \Delta_3}{2\Delta_1}. \tag{21}$$

IV

Pentru intervalul de mijloc, la care

$$x_{s4} = -\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 < x_s < \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 = x_{s5}$$

planul (1) va tăia toate laturile paralelipipedului de pe direcția X_1, obținîndu-se prin diferențe următoarele patru segmente (fig. 3):

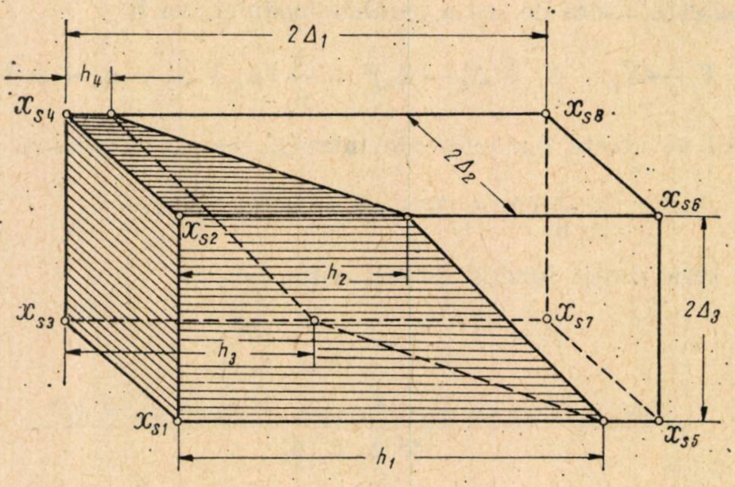


Fig. 3

$$h_1 = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + x_s$$
$$h_2 = \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 + x_s$$
$$h_3 = \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 + x_s$$
$$h_4 = \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 + x_s.$$

Volumul cuprins între plan și baza de la $X_1 = \overline{X}_1 - \Delta_1$ se obține cu ajutorul formulei

$$2\Delta_2\,\Delta_3\,\frac{2h_1 + 2h_4 + h_2 + h_3}{3},$$

care ne dă

$$2\,\Delta_2\Delta_3\,\frac{6\Delta_1 + 6x_s}{3} = 4\Delta_1\,\Delta_2\,\Delta_3 + 4\Delta_2\,\Delta_3\,x_s;$$

acesta înmulțit cu densitatea (3) dă o variație liniară a funcției de repartiție pentru intervalul de mijloc

$$Y_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{x_s}{\Delta_1}. \tag{22}$$

La $x_s = x_{s4} = -\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$ se obține

$$Y_{44} = \frac{\Delta_2 + \Delta_3}{2\Delta_1}, \tag{23}$$

care corespunde cu (21), iar pentru $x_s = x_{s5} = \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3$ rezultă

$$Y_{45} = 1 - \frac{\Delta_2 + \Delta_3}{2\Delta_1} \tag{24}$$

simetricul lui Y_{34} față de $\overline{X}_s$, căruia îi corespunde la $x_s = 0$

$$\overline{Y}_4 = \frac{1}{2}.$$

V

Pentru determinarea expresiilor funcției de repartiție din intervalele următoare, se ține seama de simetriile tuturor elementelor, așa că se poate scrie direct, începînd de la colțul paralelipipedului care dă pe x_{s8}:

— intervalul $x_{s7} = \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 < x_s < \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = x_{s8}$

$$Y_7 = 1 - \frac{s_8^3}{6V} = 1 - \frac{(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - x_s)^3}{48\,\Delta_1\Delta_2\Delta_3}; \tag{25}$$

— intervalul $x_{s6} = \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 < x_s < \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 = x_{s7}$

$$Y_6 = 1 - \frac{s_8^3 - s_7^3}{6V} = 1 - \frac{(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3-x_s)^3-(\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3-x_s)^3}{48\,\Delta_1\,\Delta_2\,\Delta_3}; \tag{26}$$

— intervalul $x_{s5} = \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 < x_s < \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 = x_{s6}$

$$\begin{aligned} Y_5 &= 1 - \frac{s_8^3 - s_7^3 - s_6^3}{6V} = \\ &= 1 - \frac{(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3-x_s)^3-(\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3-x_s)^3-(\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3-x_s)^3}{48\,\Delta_1\Delta_2\Delta_3}, \end{aligned} \tag{27}$$

pentru Y_4 rămînînd valabilă expresia (22).

Ca o ultimă verificare, introducînd în expresia (27) pe $x_{s5} = \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3$, se obţine

$$Y_{45} = 1 - \frac{(\Delta_2 + \Delta_3)^3 - \Delta_2^3 - \Delta_3^3}{6\Delta_1\Delta_2\Delta_3} = 1 - \frac{\Delta_2 + \Delta_3}{2\Delta_1}, \tag{27a}$$

care corespunde simetric cu Y_{34}, formula (21).

VI

Avînd funcţiile de repartiţie corespunzătoare intervalelor stabilite în baza inegalităţii (9), se poate deduce cazul particular

$$\Delta_1 = \Delta_2 + \Delta_3, \tag{28}$$

care dă conform cu (8)

$$X_{s4} = X_{s5} \quad \text{şi} \quad x_{s4} = x_{s5},$$

deci se anulează intervalul de mijloc şi termenul Y_4 nu va mai exista.

În acest caz va trebui ca $Y_{34} = Y_{44} = Y_{54} = Y_{55} = \frac{1}{2}$, ceea ce, introducînd pe (28) în (21) (23), (24) şi (27a), se verifică imediat.

Trecînd la inegalitatea $\Delta_1 < \Delta_2 + \Delta_3$, se inversează ordinea mărimii termenilor de la mijlocul şirurilor date de (8), rezultînd

$$X_{s4} = \overline{X}_s + \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3$$

$$X_{s5} = \overline{X}_s - \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$

aşa că pentru intervalul al treilea vor rezulta notaţiile

$$x_{s3} = -\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 < x_s < \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 = x_{s4}.$$

În aceste condiţii vor rămîne valabile expresiile (15), (18) şi (20) pentru Y_1, Y_2 şi Y_3, schimbîndu-se pentru Y_3 numai limita de sus $x_{s4} = \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3$, pentru care se obţine

$$Y_{34} = \frac{\Delta_1^3 - (\Delta_1 - \Delta_3)^3 - (\Delta_1 - \Delta_2)^3}{6\Delta_1\Delta_2\Delta_3} =$$

$$= 1 - \frac{\Delta_2 + \Delta_3}{2\Delta_1} + \frac{(\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1)^3}{6\Delta_1\Delta_2\Delta_3}. \tag{29}$$

În intervalul

$$x_{s4} = \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 < x_s < -\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = x_{s5},$$

planul (1) va întretăia numai două dintre laturile paralelipipedului orientate pe direcţia X_1, in interiorul colţurilor acestuia (fig. 4). Refăcîndu-se calculul de la IV, pentru volumul detaşat din paralelipiped, cu considerarea celor două piramide de la colţuri, după unele simplificări, se obţine expresia

$$Y_4 = \frac{1}{2} + \frac{x_s}{2\Delta_1} - \frac{3(\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1)^2 + x_s^2}{24\Delta_1\Delta_2\Delta_3} x_s. \tag{30}$$

Această expresie dă pentru limita de jos $Y_{44} = Y_{34}$, conform cu (29), iar la $x_s = 0$, $\overline{Y}_4 = \frac{1}{2}$.

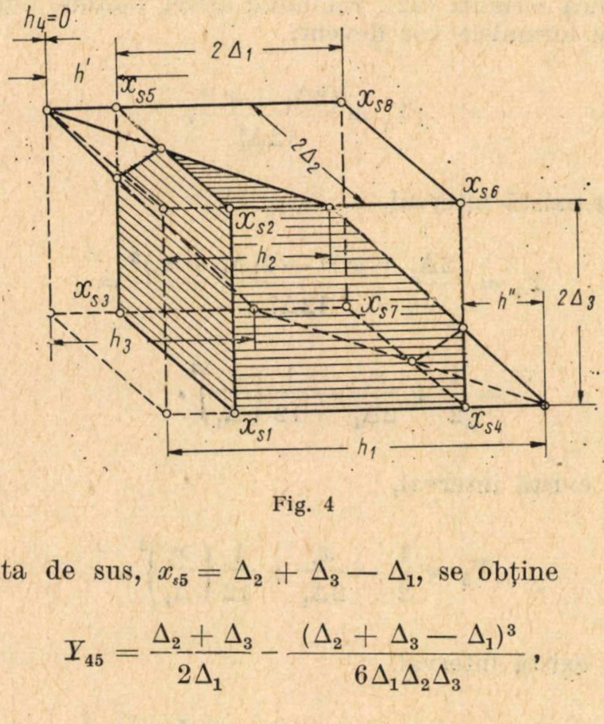


Fig. 4

La limita de sus, $x_{s5} = \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1$, se obţine

$$Y_{45} = \frac{\Delta_2 + \Delta_3}{2\Delta_1} - \frac{(\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1)^3}{6\Delta_1\Delta_2\Delta_3}, \tag{31}$$

care îndeplineşte condiţiile de simetrie faţă de punctul $x_s = 0$, $\overline{Y}_4 = 1/2$ cu expresia (29) obţinută pentru Y_{34}.

În intervalele superioare lui x_{s5}, formulele (25) (26), şi (27) pentru Y_7, Y_6 şi Y_5 sînt valabile, înlocuirea limitei de jos $x_{s5} = \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1$ în (27) dînd

$$Y_{55} = 1 - \frac{\Delta_1^3 - (\Delta_1 - \Delta_3)^3 - (\Delta_1 - \Delta_2)^3}{6\Delta_1\Delta_2\Delta_3}, \tag{32}$$

care este simetric cu Y_{34} de la (29).

VII

Pentru a fi rezolvate toate cazurile care se pot pune la însumarea a trei numere rotunjite, trebuie să mai considerăm

$$\Delta_1 > \Delta_2 = \Delta_3,$$

care elimină intervalele pentru Y_2 şi pentru Y_6, deoarece la (8) se vede că în acest caz $x_{s2} = x_{s3}$ şi $x_{s6} = x_{s7}$; aceasta poate să aibă loc atît pentru $\Delta_1 > 2\Delta_2 = 2\Delta_3$, cînd vor fi valabile formulele (15), (20), (22), (27), (25), cît şi pentru $\Delta_1 < 2\Delta_2 = 2\Delta_3$, cînd se înlocuieşte (22) prin (30).

Cazul intermediar, care are $\Delta_1 = 2\Delta_2 = 2\Delta_3$, elimină şi intervalul pentru Y_4, adică formula (22), rămînînd astfel valabile numai patru intervale la care formulele vor deveni:

$$Y_1 = \frac{(2\Delta_1 + x_s)^3}{12\Delta_1^3}, \tag{33a}$$

pentru Y_2, nu există interval,

$$Y_3 = \frac{(2\Delta_1 + x_s)^3 - 2(\Delta_1 + x_s)^3}{12\Delta_1^3} = \tag{33b}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{x_s}{2\Delta_1} - \frac{1}{12}\left(\frac{x_s}{\Delta_1}\right)^3,$$

pentru Y_4 nu există interval,

$$Y_5 = \frac{1}{2} - \frac{x_s}{2\Delta_1} + \frac{1}{12}\left(\frac{x_s}{\Delta_1}\right)^3, \tag{33c}$$

pentru Y_6 nu există interval,

$$Y_7 = 1 - \frac{(2\Delta_1 - x_s)^3}{12\Delta_1^3}. \tag{33d}$$

Cazul în care $\Delta_1 = \Delta_2 > \Delta_3$ păstrează expresiile de margine, adică, pe (15) şi (25), rezultînd pentru intervalul $-2\Delta_1 + \Delta_3 < x_s < -\Delta_3$

$$Y_2 = \frac{3(2\Delta_1 + x_s)^2 + \Delta_3^2}{24\Delta_1^2}, \tag{34a}$$

pentru Y_3 nu există interval,

în intervalul $-\Delta_3 < x_s < \Delta_3$:

$$Y_4 = \frac{1}{2} + \frac{4\Delta_1 - \Delta_3}{8\Delta_1^2}\, x_s - \frac{x_s^3}{24\Delta_1^2\Delta_3}, \tag{34b}$$

pentru Y_5 nu există interval, în intervalul $\Delta_3 < x_s < 2\Delta_1 - \Delta_3$:

$$Y_6 = 1 - \frac{3(2\Delta_1 - x_s)^2 + \Delta_3^2}{24\Delta_1^2}. \tag{34c}$$

Ca încheiere dăm cazul în care

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3,$$

avînd valabile expresiile (15) şi (25) pentru Y_1 şi Y_7, intervalele pentru Y_2, Y_3, Y_5 şi Y_6 fiind nule; expresia funcţiei de repartiţie din intervalul de mijloc $-\Delta_1 < x_s < \Delta_1$

$$Y_4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{x_s}{\Delta_1} - \frac{1}{24}\,\frac{x_s^3}{\Delta_1^3}. \tag{35}$$

se găseşte în [1] la pag. 182, formula (10b).

În figura 5 este reprezentată variaţia raporturilor $\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$ şi $\frac{\Delta_3}{\Delta_1}$, ară-

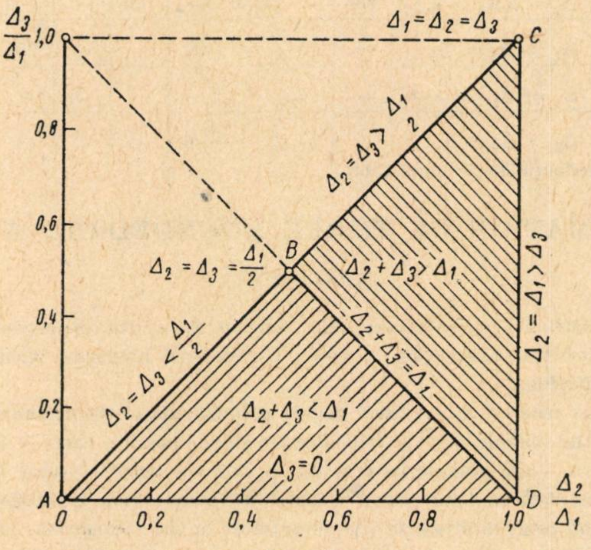

$\frac{\Delta_3}{\Delta_1}$
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
A
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
D
$\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$
C
B
$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$
$\Delta_2 = \Delta_3 > \frac{\Delta_1}{2}$
$\Delta_2 = \Delta_3 = \frac{\Delta_1}{2}$
$\Delta_2 + \Delta_3 > \Delta_1$
$\Delta_2 + \Delta_3 = \Delta_1$
$\Delta_2 = \Delta_1 > \Delta_3$
$\Delta_2 = \Delta_3 < \frac{\Delta_1}{2}$
$\Delta_2 + \Delta_3 < \Delta_1$
$\Delta_3 = 0$

Fig. 5

tîndu-se domeniile de valabilitate pentru formulele de mai sus, care sînt cuprinse în tabel, împreună cu indicaţii pentru cazurile elementare, preluate din bibliografie, ceea ce dă o orientare de ansamblu pentru funcţiile de repartiţie la însumarea a două şi trei numere cu orice rotunjiri, care, conform cu (7), au succesiunea $\Delta_1 \geqslant \Delta_2 \geqslant \Delta_3$.

Tabel

Recapitularea domeniilor de valabilitate ale formulelor funcţiilor de distribuţie

Poziţia din fig. 5	Domeniul	Funcţiile din intervale (număr formulă)							Referire: paragraf, bibliografie
		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	X_7	
În interiorul triunghiului:									
ABD	$\Delta_1 > \Delta_2 + \Delta_3$	15	18	20	22	27	26	25	III, IV, V
BCD	$\Delta_1 < \Delta_2 + \Delta_3$	15	18	20	30	27	26	25	VI
Pe segmentul:									
BD	$\Delta_1 = \Delta_2 + \Delta_3$	15	18	20	—	27	26	25	VI
AB	$\Delta_1 > 2\Delta_2 = 2\Delta_3$	15	—	20	22	27	—	25	VII
BC	$\Delta_1 < 2\Delta_2 = 2\Delta_3$	15	—	20	30	27	—	25	VII
DC	$\Delta_1 < \Delta_2 > \Delta_3$	15	34a	—	34b	—	34c	25	VII
AD	$\Delta_1 > \Delta_2, \Delta_3 = 0$	—	9a	—	9b	—	9c	—	[2], pag. 188
În punctul:									
B	$\Delta_1 = 2\Delta_2 = 2\Delta_3$	33a	—	33b	—	33c	—	33d	VII
C	$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$	15	—	—	35	—	—	25	VII
D	$\Delta_1 = \Delta_2, \Delta_3 = 0$	—	8a	—	—	—	8b	—	[1], pag. 181
A	$\Delta_2 = \Delta_2 = 0$	—	—	—	6	—	—	—	[1], pag. 180

Primită la redacţie la 16 mai 1968

THE SUMMATION OF THREE ROUNDED-OFF NUMBERS

(ABSTRACT)

Using geometrical presentations, the author states the expressions of the distribution functions for the summation of three rounded-off numbers, with rectangular and uncorrelated distributions.

The functions reached at are third degree polynomials of the differences resulting from the mean value of the summation; the formulae for all the possible cases — for two and three rounded-off numbers — are summarized in fig. 5 and the accompanying table.

With the distribution functions it is possible to determine quantitatively the effects of accumulations and compensations of rounding errors in the summation, and linearizing, for other arithmetical operations or for functions which have no more than three rounded-off parameters.

BIBLIOGRAFIE

1. N. ŞONERIU, *Stohastica însumării numerelor rotunjite*, Standardizarea, **18**, *4*, aprilie (1966).
2. N. ŞONERIU, *Stohastica însumării a două numere rotunjite*, Standardizarea, **19**, 4, aprilie (1967).

SPAȚII A_2 DE PRIMA SPEȚĂ CU CARACTERISTICE DREPTE[1]

DE

ION D. TEODORESCU și STERIU IANUȘ

În această lucrare se determină conexiunea afină a unui spațiu A_2 de prima speță cu caracteristice drepte paralele.
În particular, se studiază cazul spațiilor A_2 cu conexiune constantă, găsindu-se formele canonice ale conexiunii.

Un spațiu $A_2(x, y)$ cu conexiune afină simetrică Γ^i_{jk} este de prima speță, dacă ecuația diferențială a curbelor caracteristice ([1], II, p. 384), [2]

$$\Gamma^2_{11}\,\mathrm{d}x^3 + (2\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11})\,\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y - (2\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^2 - \Gamma^1_{22}\,\mathrm{d}y^3 = 0 \tag{1}$$

are direcții caracteristice $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ distincte. Dacă ecuația (1) admite cel puțin o integrală liniară, se zice că *spațiul* A_2 este cu *caracteristice* drepte ([1], III, p. 149).

★

Conexiunea unui spațiu A_2 de prima speță este de forma [2]

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = 2g - \rho(2B\nu + A\eta), \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = f, \quad \Gamma^1_{22} = -\rho C\eta, \\ &\Gamma^2_{11} = \rho A\nu, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = g, \quad \Gamma^2_{22} = 2f + \rho(2B\eta + C\nu), \end{aligned} \tag{2}$$

unde $f, g, \rho, A, B, C, \nu, \eta$ sînt funcții arbitrare de variabilele x și y, ecuația curbelor caracteristice fiind

$$(A\,\mathrm{d}x^2 + 2B\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + C\,\mathrm{d}y^2)(\nu\,\mathrm{d}x + \eta\,\mathrm{d}y) = 0, \quad (AC - B^2 \neq 0). \tag{3}$$

---

[1] Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Universității București (14—15 octombrie 1967).

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 4, P. 665—674, BUCUREȘTI, 1969

Presupunem că spaţiul A_2 de prima speţă admite cel puţin o familie de caracteristice drepte paralele; sînt de considerat două cazuri:

α) *Cel puţin două familii de curbe caracteristice sînt constituite din drepte.* Cînd *dreptele caracteristice sînt reale*, printr-o transformare afină, putem aduce ecuaţia (3) la forma

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,(\nu\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y) = 0\,, \tag{4}$$

ceea ce revine a presupune că $A = C = 0$, $B = 1$, $\eta = 1$, $\nu \neq 0$. Rezultă *conexiunea*

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = 2\,(g - \nu\rho)\,, && \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = f\,, && \Gamma^1_{22} = 0\,, \\ &\Gamma^2_{11} = 0\,, && \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = g\,, && \Gamma^2_{22} = 2\,(f + \rho)\,, \end{aligned} \tag{5}$$

unde ρ, f, g, ν sînt funcţii arbitrare de variabilele x, y. Dacă ν este o constantă, atunci şi a treia familie de curbe caracteristice este o congruenţă de drepte (paralele).

Cînd *dreptele sînt imaginare*, putem considera ecuaţia (3) adusă la forma

$$(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)\,(\mathrm{d}x + \eta\,\mathrm{d}y) = 0\,; \tag{6}$$

adică $A = C = 1$, $B = 0$, $\nu = 1$. În acest caz, avem *conexiunea*

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = 2g - \eta\rho\,, && \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = f\,, && \Gamma^1_{22} = -\eta\rho\,, \\ &\Gamma^2_{11} = \rho\,, && \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = g\,, && \Gamma^2_{22} = 2f + \rho\,, \end{aligned} \tag{7}$$

unde ρ, f, g, η sînt funcţii arbitrare de x, y. Dacă η este o constantă (ce poate fi făcută nulă: $\eta = 0$), atunci şi a treia familie de curbe caracteristice este o congruenţă de drepte (paralele).

β) *Numai o familie de curbe caracteristice este constituită din drepte*; în acest caz, putem avea

$$(A\,\mathrm{d}x^2 + 2B\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + C\,\mathrm{d}y^2)\,\mathrm{d}x = 0,\ (AC - B^2 \neq 0); \tag{8}$$

cu alte cuvinte, putem considera că $\nu = 1$, $\eta = 0$. În ceea ce priveşte conexiunea spaţiului, ea are expresia

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = 2\,(g - B\rho)\,, && \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = f\,, && \Gamma^1_{22} = 0\,, \\ &\Gamma^2_{11} = \rho A\,, && \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = g\,, && \Gamma^2_{22} = 2f + C\rho \end{aligned} \tag{9}$$

unde ρ, f, g, A, B, C sînt funcţii arbitrare de x, y.

Aşadar, avem

TEOREMA I. *Conexiunea unui spaţiu A_2 de prima speţă cu caracteristice drepte paralele, printr-o transformare liniară, poate fi adusă la forma* (5) *sau* (7), *respectiv* (9), *după cum cel puţin două* (*reale sau imaginare*), *respectiv numai una din familiile de curbe coordonate sînt constituite din drepte.*

★

Observăm că ecuaţia (1) a curbelor caracteristice se conservă printr-o transformare proiectivă de conexiune (v. şi [1], II, p. 383)

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j\,\psi_k + \delta^i_k\,\psi_j\,. \tag{10}$$

Astfel, luînd

$$\psi_1 = -g\,, \quad \psi_2 = -f\,,$$

avem (suprimînd supralinierea)

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0\,, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0\,. \tag{11}$$

În condiţiile (11), vom spune [2], (v. şi [3], p. 130) că reţeaua de curbe coordonate formează o *reţea Cebîşev.*

Obţinem, astfel,

TEOREMA II. *Printr-o transformare liniară de variabile şi o transformare proiectivă de conexiune, conexiunea afină a unui spaţiu A_2 de prima speţă cu caracteristice drepte paralele se aduce la una din formele canonice*

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = -2\nu\rho\,, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0\,, \quad \Gamma^1_{22} = 0\,, \\ &\Gamma^2_{11} = 0 \qquad\;\;\,, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0\,, \quad \Gamma^2_{22} = 2\rho\,, \end{aligned} \tag{12}$$

sau

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = -\eta\rho\,, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0\,, \quad \Gamma^1_{22} = -\eta\rho\,, \\ &\Gamma^2_{11} = \rho \qquad\,, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0\,, \quad \Gamma^2_{22} = \rho\,, \end{aligned} \tag{13}$$

respectiv

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = -2B\rho\,, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0\,, \quad \Gamma^1_{22} = 0\,, \\ &\Gamma^2_{11} = A\rho \qquad, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0\,, \quad \Gamma^2_{22} = C\rho\,, \end{aligned} \tag{14}$$

după cum cel puţin două familii de curbe caracteristice (reale sau imaginare), respectiv numai o familie de curbe caracteristice, sînt constituite din drepte.

În aceste cazuri, spaţiul A_2 este raportat la o reţea Cebîşev.

* * *

Rezultatele obţinute rezolvă complet determinarea spaţiilor A_2 cu conexiune constantă. Un spaţiu A_2 cu conexiune afină Γ^i_{jk} se zice că este *un spaţiu cu conexiune constantă* dacă există un sistem de coordonate x, y în care componentele Γ^i_{jk} ale conexiunii sînt constante [4], ([1], II, p. 361).

În adevăr, ţinînd seama în ecuaţia (1) că Γ^i_{jk} sînt constante, rezultă (v. şi [5], [6]):

Un spaţiu A_2 cu conexiune simetrică constantă are caracteristicile drepte.

Deci, un spaţiu A_2 cu conexiune constantă de prima speţă are conexiunea de forma (5) sau (7).

Pe de altă parte, se poate asocia spaţiului forma pătratică ([1], I, p. 208)

$$\Phi = R_{ij}\, \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^j \; (x^1 = x\,,\; x^2 = y\,;\; i, j, \ldots = 1, 2) \tag{15}$$

unde, spaţiul fiind fără torsiune (ceea ce are loc în cazurile considerate aici),

$$\Gamma^i_{jkl} = \Gamma^i_{rk}\, \Gamma^r_{jl} - \Gamma^i_{rl}\, \Gamma^r_{jk}\,, \quad R_{ij} = \Gamma^k_{ikj} = R_{ji} \tag{16}$$

sînt tensorul de curbură şi tensorul de curbură contractat; această formă determină complet curbura spaţiului. Cînd forma Φ este identic nulă, deci $R_{ij} = 0$, *spaţiul* A_2 este *local euclidian.*

Să considerăm că spaţiul A_2 cu conexiune constantă are conexiunea de forma (5). În acest caz, avem

$$R_{11} = g(g - 2\nu\rho), \quad R_{12} = fg = R_{21}, \quad R_{22} = f(f + 2\rho), \tag{17}$$

discriminantul formei pătratice Φ fiind

$$\Delta = R_{11}R_{22} - (R_{12})^2 = -2\rho fg(f\nu - g + 2\rho\nu). \tag{17'}$$

Să presupunem că *forma pătratică* (15) *este nedegenerată*, adică $\Delta \neq 0$. Atunci avem $\rho \neq 0$, $f \neq 0$, $g \neq 0$; de asemenea, în aceste condiţii, trebuie să excludem cazurile $g - \nu\rho = 0$, $f + \rho = 0$ şi $f\nu - g + 2\rho\nu = 0$. Prin transformarea liniară

$$x' = (g - \nu\rho)\,x, \quad y' = (f + \rho)\,y,$$

şi notînd $a = -\frac{\rho}{f}$, $b = \frac{\nu\rho}{g}$, conexiunea ia forma canonică 2)

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = 2, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{1}{1-a}, \quad \Gamma^1_{22} = 0, \\ &\Gamma^2_{11} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{1-b}, \quad \Gamma^2_{22} = 2, \end{aligned} \tag{18}$$

depinzînd de doi parametri. Acest maxim este atins atunci cînd $R_{ij} \neq 0$. În adevăr, pentru această conexiune, tensorul contractat de curbură are componentele

$$R_{11} = \frac{1-2b}{(1-b)^2}, \quad R_{12} = \frac{1}{(1-a)(1-b)}, \quad R_{22} = \frac{1-2a}{(1-a)^2}, \tag{18'}$$

cu

$$\Delta = \frac{-2(a + b - 2ab)}{(1-a)^2(1-b)^2};$$

observăm că $\Delta \neq 0$ dacă $a \neq 0$, $b \neq 0$ şi $a \neq 1$, $b \neq 1$. Curbele caracteristice ale spaţiului (18) sînt date de ecuaţia

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left[-\frac{b(1-a)}{a(1-b)}\mathrm{d}x + \mathrm{d}y\right] = 0. \tag{18''}$$

Numărul de parametri poate fi redus, existînd spaţii care nu depind de nici un parametru; aceste spaţii se obţin impunînd mărimilor (18) sau R_{ij} să satisfacă o condiţie sau două. De exemplu, condiţia $\Delta \neq 0$ este satisfăcută, abstracţie făcînd de o schimbare a axelor între ele, dacă

$$R_{ij} \neq 0 \text{ sau } R_{11} = 0,\ R_{12} \neq 0,\ R_{22} \neq 0 \text{ sau } R_{11} = 0,\ R_{12} \neq 0,\ R_{22} = 0.$$

---

2) Printr-o transformare $x'^i = x'^i(x^1, \ldots, x^n)$, conexiunea afină Γ^i_{jk} a unui spaţiu $A_n(x^1, \ldots, x^n)$ se schimbă după legea

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma'^i_{rs}\frac{\partial x'^r}{\partial x^j}\frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - \Gamma^r_{jk}\frac{\partial x'^i}{\partial x^r}.$$

Din (18') rezultă că avem $R_{11} = 0$ dacă $b = \frac{1}{2}$; atunci, prin transformarea

$$x' = 2x, \quad y' = y,$$

se ajunge la conexiunea

$$(19) \qquad \begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = 1, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{1}{1-a}, \quad \Gamma^1_{22} = 0, \\ &\Gamma^2_{11} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 1, \quad \Gamma^2_{22} = 2, \end{aligned}$$

care depinde de un parametru.

Dacă $R_{11} = R_{22} = 0$, avem $a = b = \frac{1}{2}$; efectuînd şi transformarea

$$(20) \qquad x' = 2x, \quad y' = 2y,$$

se găseşte conexiunea

$$(21) \qquad \begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = 1, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 1, \quad \Gamma^1_{22} = 0, \\ &\Gamma^2_{11} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 1, \quad \Gamma^2_{22} = 1, \end{aligned}$$

care nu depinde de nici un parametru; în acest caz, ecuaţia curbelor caracteristice se scrie

$$(21') \qquad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,(\mathrm{d}x - \mathrm{d}y) = 0,$$

curbele caracteristice fiind curbele coordonate şi paralelele la prima bisectoare a axelor de coordonate.

De asemenea, putem determina spaţiile (18) cu conexiunea contractată nulă, adică acele spaţii pentru care

$$(22) \qquad \Gamma_k = \Gamma^i_{ik} = 0;$$

în acest caz, rezultă $a = b = \frac{3}{2}$. Prin transformarea (20) se obţine conexiunea

$$(23) \qquad \begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = 1, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -1, \quad \Gamma^1_{22} = 0, \\ &\Gamma^2_{11} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = -1, \quad \Gamma^2_{22} = 1, \end{aligned}$$

care nu depinde de nici un parametru; curbele caracteristice ale acestui spaţiu sînt date de ecuaţia (21').

Dacă *forma pătratică (15) este degenerată*, deci $\Delta = 0$, atunci avem una din posibilităţile [3])

$$f = 0,\ g \neq 0,\ g - 2\nu\rho \neq 0 \quad \text{sau} \quad f \neq 0,\ g \neq 0,\ f\nu - g + 2\rho\nu = 0.$$

În primul caz, efectuînd transformarea

$$x' = (g - 2\nu\rho)\,x, \quad y' = 2\rho y$$

---

[3]) Cazul $f \neq 0$, $g = 0$, $f + 2\rho \neq 0$ se reduce la primul.

şi notînd $a = \frac{\nu\rho}{g}$, rezultă conexiunea canonică

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = \frac{2(1-a)}{1-2a}, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0, \quad \Gamma^1_{22} = 0, \\ (24) \qquad &\Gamma^2_{11} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{1-2a}, \quad \Gamma^2_{22} = 1, \end{aligned}$$

depinzînd de un parametru. Coeficienţii formei pătratice Φ au expresiile

$$(24') \qquad R_{11} = \frac{1}{1-2a}, \quad R_{12} = 0, \quad R_{22} = 0,$$

iar curbele caracteristice ale spaţiului sînt determinate de ecuaţia

$$(24'') \qquad \mathrm{d}x\mathrm{d}y \left(\frac{2a}{1-2a} \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \right) = 0.$$

Observăm că $a \neq 0$ (altfel, spaţiul ar fi de speţa a doua) şi $a \neq \frac{1}{2}$. Un astfel de spaţiu este cu conexiune contractată diferită de zero.

În celălalt caz, luînd $g = (f + 2\rho)\nu$, prin transformarea

$$x' = (f + 2\rho)\, \nu x, \quad y' = fy,$$

se obţine conexiunea canonică

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = \frac{2(1-a)}{1-2a}, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 1, \quad \Gamma^1_{22} = 0, \\ (25) \qquad &\Gamma^2_{11} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 1, \quad \Gamma^2_{22} = 2(1-a), \end{aligned}$$

care depinde de un parametru ($a = -\frac{\rho}{f} \neq 0$). Rezultă că

$$(25') \qquad R_{11} = \frac{1}{1-2a}, \quad R_{12} = 1, \quad R_{22} = 1-2a;$$

ecuaţia curbelor caracteristice este

$$(25'') \qquad \mathrm{d}x\mathrm{d}y \left[\frac{1}{a(1-2a)} \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \right] = 0.$$

Dacă *forma pătratică* (*15*) *este identic nulă*, deci $R_{ij} = 0$ (spaţiul este local euclidian), sînt două posibilităţi[4]):

$$f = g = 0 \text{ sau } f = 0, \; g - 2\nu\rho = 0.$$

În primul caz, prin transformarea

$$x' = -2g\, x, \quad y' = -\rho y,$$

---

[4]) Cazul $g = 0$, $f + 2\rho = 0$ se reduce, prin schimbarea axelor între ele, la cel de-al doilea.

se găseşte conexiunea canonică, dată de *prof. G. Vrănceanu* ([1], II, p. 369)

$$(26)\qquad \begin{gathered} \Gamma^1_{11} = -1,\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0,\ \Gamma^1_{22} = 0, \\ \Gamma^2_{11} = 0,\quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0,\ \Gamma^2_{22} = -1; \end{gathered}$$

curbele caracteristice ale spaţiului sînt date de congruenţele de drepte

$$(26')\qquad x = \text{const.},\ y = \text{const.},\ x - y = \text{const.}$$

În al doilea caz, prin transformarea

$$x' = -2\nu\rho\, x,\ y' = -2\rho(\nu x + y)$$

se obţine conexiunea (26).

Să considerăm spaţiul A_2 cu conexiune constantă (7). Caracteristicile spaţiului fiind numai drepte, η este o constantă, care poate fi făcută nulă; prin transformarea $x' = x + \eta y,\ y' = -\eta x + y$ se obţine $\eta = 0$, ceea ce presupunem. În acest caz, avem

$$(27)\qquad R_{11} = g^2 + \rho(f + \rho),\ R_{12} = fg,\ R_{22} = f(f + \rho),$$

discriminantul formei pătratice (15) fiind

$$(27')\qquad \Delta = \rho f[(f + \rho)^2 + g^2].$$

Dacă *forma pătratică* Φ *este nedegenerată*, deci $\Delta \neq 0$, avem $\rho \neq 0$, $f \neq 0$; în aceste condiţii, trebuie să excludem cazul $g = 0$, $f + \rho = 0$ (spaţiul fiind local euclidian). Cînd $f + \rho \neq 0$, prin transformarea

$$x' = (f + \rho)\, x,\ y' = (f + \rho)\, y$$

şi notînd $a = \dfrac{-\rho}{f}$, $b = \dfrac{g}{f + \rho}$, deducem conexiunea canonică

$$(28)\qquad \begin{gathered} \Gamma^1_{11} = 2b,\quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{1}{1 - a},\ \Gamma^1_{22} = 0, \\ \Gamma^2_{11} = \frac{-a}{1 - a},\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = b,\quad \Gamma^2_{22} = \frac{2 - a}{1 - a}, \end{gathered}$$

care depinde de doi parametri (cu $a \neq 0$ şi $a \neq 1$); curbele caracteristice ale spaţiului sînt date de ecuaţia

$$(28')\qquad (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)\,\mathrm{d}x = 0.$$

În ceea ce priveşte coeficienţii formei pătratice Φ, valorile lor sînt

$$(28'')\qquad R_{11} = \frac{b^2(1 - a) - a}{1 - a},\ R_{12} = \frac{b}{1 - a},\ R_{22} = \frac{1}{1 - a},$$

cu

$$(28''')\qquad \Delta = \frac{-a(1 + b^2)}{(1 - a)^2} \neq 0.$$

Impunînd condiţii mărimilor (28) sau R_{ij}, se micşorează numărul parametrilor de care depinde conexiunea (28), maximum fiind atins dacă $R_{ij} \neq 0$. Astfel, condiţia $\Delta \neq 0$ este îndeplinită, dacă

$$R_{ij} \neq 0; \; R_{11} = 0, \; R_{12} \neq 0, \; R_{22} \neq 0 \text{ sau } R_{11} \neq 0, \; R_{12} = 0, \; R_{22} \neq 0.$$

Din (28″) avem $R_{11} = 0$, dacă $a = \dfrac{t^2}{1 + t^2}$, $b = t$, încît prin transformarea

$$x' = tx, \; y' = (1 + t^2)\, y,$$

obţinem conexiunea

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = 2, \qquad \Gamma^1_{12} = {}^1_{21} = 1 \quad \Gamma^1_{22} = 0, \\ (29) \qquad &\Gamma^2_{11} = -(1 + t^2), \; \Gamma^2_{12} = {}^2_{21} = 1, \; \Gamma^2_{22} = \frac{2 + t^2}{1 + t^2}, \end{aligned}$$

care depinde de un parametru.

Dacă $b = 0$, avem $R_{12} = 0$. Cînd $a = 3$, $b = 0$, conexiunea contractată Γ_k este nulă, fiind singurul caz cînd $\Gamma_k = 0$; atunci, prin transformarea

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2}\, x, \; y' = \frac{1}{2}\, y$$

rezultă conexiunea

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = 0, \; \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -1, \; \Gamma^1_{22} = 0, \\ (30) \qquad &\Gamma^2_{11} = 1, \; \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0, \quad \Gamma^2_{22} = 1, \end{aligned}$$

care nu depinde de nici un parametru.

Cînd $f + \rho = 0$, $g \neq 0$, prin transformarea

$$x' = gx, \; y' = \rho y$$

şi punînd $a = \dfrac{\rho}{g}$, găsim conexiunea canonică

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = 2, \; \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -1, \; \Gamma^1_{22} = 0, \\ (31) \qquad &\Gamma^2_{11} = a^2, \; \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 1, \quad \Gamma^2_{22} = -1, \end{aligned}$$

care depinde de un parametru (nenul). Ecuaţia curbelor caracteristice se scrie

$$(31') \qquad (a^2 \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)\, \mathrm{d}x = 0,$$

iar forma Φ are coeficienţii

$$R_{11} = 1, \; R_{12} = -1, \; R_{22} = 0.$$

Să presupunem că *forma pătratică (15) este degenerată*, adică $\Delta = 0$; atunci avem $f = 0$. În acest caz, efectuînd transformarea

$$(32) \qquad x' = \rho x, \; y' = \rho y$$

și punînd $a = \frac{g}{\rho}$, găsim conexiunea canonică

$$(33) \qquad \begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = 2a, \ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0, \ \Gamma^1_{22} = 0, \\ &\Gamma^2_{11} = 1, \ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = a, \ \Gamma^2_{22} = 1, \end{aligned}$$

care depinde de un parametru; curbele caracteristice ale spațiului sînt date de ecuația (28'). Forma Φ are coeficienții

$$(33') \qquad R_{11} = a^2 + 1, \ R_{12} = 0, \ R_{22} = 0.$$

Dacă *forma pătratică* (*15*) *este identic nulă*, deci $R_{ij} = 0$, *spațiul* A_2 *este local euclidian*; condițiile $R_{ij} = 0$, cer $f + \rho = 0$, $g = 0$. Deci, prin transformarea (32), obținem conexiunea

$$(34) \qquad \begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = 0, \ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -1, \ \Gamma^2_{11} = 0, \\ &\Gamma^2_{11} = 1, \ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0, \quad \Gamma^2_{22} = -1, \end{aligned}$$

pusă în evidență de *prof. G. Vrănceanu* ([1], II, p. 369); această conexiune nu depinde de nici un parametru. Curbele caracteristice ale spațiului sînt date de ecuația (28').

Așadar, putem enunța [7].

TEOREMA III. *Fie un spațiu* A_2 *cu conexiune constantă, de prima speță. Printr-o transformare liniară, conexiunea spațiului poate fi adusă la forme canonice cu cel puțin una din familiile de curbe coordonate constituită din drepte caracteristice, aceste spații depinzînd cel mult de doi parametri. După cum dreptele caracteristice sînt reale, respectiv sînt și imaginare, spațiul* A_2 *are conexiunea canonică* (*18*), *respectiv* (*28*) *sau* (*31*), *dacă forma pătratică* (*15*) *este nedegenerată*; *fie* (*24*) *sau* (*25*), *respectiv* (*33*), *dacă forma* Φ *este degenerată*; *fie* (*26*), *respectiv* (*34*), *dacă spațiul este local euclidian*.

Rezultatul precizează pe cele din [7].

★

Se pot obține forme canonice care să convină atît cazului cînd spațiul este numai cu drepte caracteristice reale, cît și cazului cînd spațiul are drepte caracteristice imaginare. Astfel, folosind conexiunea (9) cu $A = \varepsilon$, $B = 0$, $C = 1$, caracteristicile spațiului sînt date de ecuația

$$(35) \qquad (\varepsilon \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)\,\mathrm{d}x = 0, \text{ cu } \varepsilon = \pm 1,$$

ceea ce este totdeauna posibil printr-o transformare liniară. În acest caz, coeficienții tensorului contractat de curbură sînt

$$R_{11} = g^2 + \varepsilon\rho(f + \rho), \ R_{12} = fg, \ R_{22} = f(f + \rho).$$

Vom folosi această cale în

TEOREMA IV. *Fiind dat un spațiu* A_2 *cu conexiune constantă de prima speță, printr-o transformare liniară de variabile și printr-o transformare proiectivă de conexiune, conexiunea lui afină se reduce la forma canonică dată de prof. G. Vrănceanu* ([1], II, p. 377)

$$(36) \qquad \begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = 0, \ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0, \ \Gamma^1_{22} = 0, \\ &\Gamma^2_{11} = \varepsilon, \ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0, \ \Gamma^2_{22} = 1, \end{aligned}$$

cu $\varepsilon = \pm 1$ *după cum spațiul are numai drepte caracteristice reale sau are și drepte caracteristice imaginare.*

În ceea ce privește dreptele caracteristice ale spațiului, ele sînt determinate de ecuația (35). Spațiile (36) sînt cu curbură, deoarece componentele tensorilor de curbură sînt nule afară de $\Gamma_{121}^{2} = \varepsilon$, adică

$$R_{11} = \varepsilon, \; R_{12} = 0, \; R_{22} = 0.$$

Primită la redacție la 9 iulie 1968

Universitatea din București
Facultatea de matematică-mecanică
Str. Academiei nr. 14

SUR LES ESPACES A_2 DE LA PREMIÈRE ESPÈCE À CARACTÉRISTIQUES DROITES

(RÉSUMÉ)

Soit un espace A_2 de la première espèce à caractéristiques droites parallèles; la connexion affine de l'espace est symétrique.

On a les théorèmes suivants:

I) *La connexion d'un tel espace, par une transformation linéaire, peut être réduite à la forme* (*5*) *ou* (*7*), *respectivement* (*9*), *suivant que au moins deux* (*réelles ou imaginaires*), *respectivement l'une des familles des courbes coordonnées sont constituées de droites.*

II) *Par une transformation linéaire des variables et une transformation projective de la connexion, la connexion affine de l'espace* A_2 *prend l'expression* (*12*) *ou* (*13*), *respectivement* (*14*). *Dans ce cas, l'espace* A_2 *est rapporté à un réseau de Tchebycheff.*

Si l'espace A_2 est à connexion constante, alors:

III) *Par une transformation linéaire, suivant que les droites caractéristiques sont réelles, respectivement sont aussi imaginaires, l'espace* A_2 *a la connexion canonique* (*18*), *respectivement* (*28*) *ou* (*31*), *si la forme quadratique* (*15*) *est non dégénérée*; *soit* (*24*) *ou* (*25*), *respectivement* (*33*) *si la forme* Φ *est dégénérée; soit* (*26*), *respectivement* (*34*), *si l'espace est localement euclidien.*

IV) *Par une transformation linéaire de variables et par une transformation projective de connexion, la connexion prend la forme canonique* (*36*), *où* $\varepsilon = \pm 1$ *selon que l'espace a seulement des droites caractéristiques réelles ou il a aussi des droites caractéristiques imaginaires.*

BIBLIOGRAFIE

1. G. Vrănceanu, *Leçons de Géométrie différentielle*, vol. I—II, Bucarest—Paris, 1957; vol. III, Bucarest — Paris, 1964.
2. Ion D. Teodorescu, *Asupra spațiilor* A_2 *cu conexiune afină*. St. cerc. mat., **20**, *5* (1968).
3. A. Haimovici, *Asupra conexiunii spațiilor lui Cartan*, St. cerc. științ.-Matematică, Acad. R.P.R. — filiala Iași, **XII**, *1*, 129—149 (1962).
4. G. Vrănceanu, *Spații cu conexiune afină constantă local euclidiană*. Com. Acad. R.P.R., **I**, *1*, 29 (1951).
5. Ion D. Teodorescu și Nicolae I. Nediță, *Spații* A_2 *de speță trei cu caracteristice drepte*. Anal. Univ. București, seria matematică-mecanică, 91—100 (1968).
6. Ion D. Teodorescu și Liviu Nicolescu, *Sur les espaces* A_2 *de la deuxième espèce à caractéristiques droites*. Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la Roumanie (1969).
7. Ion D. Teodorescu, *Clasificarea afină a spațiilor* A_2 (*x*, *y*) *cu conexiune afină constantă*. Analele Universității București, seria șt. nat.-mat.-fiz., *25*, 113—129 (1960)

UN ALGORITM PENTRU SINTEZA FUNCŢIILOR BOOLEENE SIMETRICE

DE

IOAN TOMESCU

Este prezentat un procedeu combinatoriu pentru şimplificarea schemelor piramidale cu contacte care se utilizează pentru sinteza funcţiilor booleene simetrice.

Utilizînd o numerotare a nodurilor schemei cu ajutorul a două coordonate, algoritmul prezentat în această lucrare determină pentru toate nodurile pentru care suma celor două coordonate este aceeaşi, mulţimea numerelor de lucru ale funcţiilor simetrice care reprezintă conductibilităţile totale dintre nodurile respective şi ieşirea schemei, plecînd de la numerele de lucru ale funcţiei simetrice date.

Prin verificarea egalităţii, respectiv incluziunii dintre aceste mulţimi de numere de lucru, se unesc anumite noduri sau se introduc elemente ventil, obţinîndu-se eliminarea circuitelor redondante ale schemei şi în felul acesta reducerea numărului de contacte.

Pentru funcţiile simetrice monotone şi pentru funcţia suma modulo doi de n variabile se obţin prin acest procedeu schemele minimale. Este prezentat un program ALGOL care realizează acest algoritm, precum şi rezultatele de calcul obţinute pe calculatorul IBM 7044 al Institutului de Matematică Aplicată al Universităţii din Grenoble.

În această lucrare vom considera funcţii booleene simetrice $f(x_1, x_2, \ldots$

$$\cdots, x_n) = S_{a_1, a_2, \ldots, a_k}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \bigcup_{\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n = a_i} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n},$$

$$i=1,2,\ldots,k$$

unde $0 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leqslant n$ sînt numerele de lucru ale funcţiei, adică ponderile sistemelor de vectori binari $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ cu $\alpha_i \in \{0, 1\}$ pentru care $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1$.

Aceste funcţii se pot realiza economic (relativ la numărul de contacte) cu ajutorul reţelelor piramidale ([1], [2], [3], [4]). Un exemplu de

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 4, P. 675–681, BUCUREŞTI, 1969

rețea (dipol cu contacte) care realizează funcția simetrică monotonă $S_{2,3,4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 \cup x_1x_3 \cup x_1x_4 \cup x_2x_3 \cup x_2x_4 \cup x_3x_4$ este prezentat în figura 1, nodurile finale fiind legate la ieșirea dipolului.

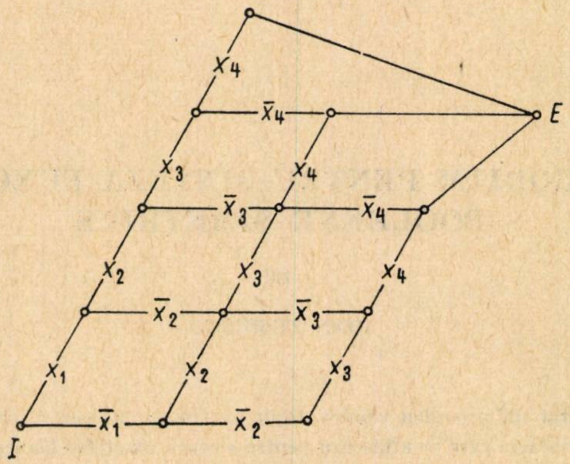


Fig. 1

Pentru un astfel de dipol construit pentru o funcție simetrică se pune problema reducerii numărului de contacte prin eliminarea circuitelor identice, ceea ce se poate obține prin unirea de noduri și eliminarea de contacte sau prin introducerea de elemente ventil între două noduri și eliminarea anumitor contacte.

Pentru programarea pe un calculator a algoritmului, este avantajos să se folosească o anumită codificare a nodurilor rețelei cu ajutorul a două coordonate, p și q, reprezentînd respectiv numărul segmentelor orizontale și oblice care trebuie parcurse plecînd din I pentru a ajunge la nodul respectiv. Astfel, intrarea I are coordonatele (0, 0) iar nodurile finale care se leagă la ieșirea E a dipolului din figura 1 au respectiv coordonatele (2,2), (1,3), (0,4).

Numărul de drumuri care leagă intrarea I a dipolului cu un nod de coordonate (p, q) în graful asociat schemei, știind că fiecare arc poate fi parcurs numai de la stînga la dreapta sau de jos în sus (acesta fiind și sensul posibil al curentului de la I la E în ramurile schemei, dat fiind caracterul său disjunctiv), este egal cu $\binom{p+q}{p}$.

Dacă notăm cu $\chi((p, q), E)$ conductibilitatea totală dintre nodul de coordonate (p, q) și ieșirea E a schemei, atunci în [5] se demonstrează că:

a) Dacă $\chi((p_1, q_1), E) = \chi((p_2, q_2), E)$ cu $p_1 + q_1 = p_2 + q_2 \leqslant n-1$, atunci putem uni nodurile (p_1, q_1) și (p_2, q_2) și elimina contactele dintre nodurile (p_1, q_1), (p_1+1, q_1) și (p_1, q_1), (p_1, q_1+1), obținînd un dipol cu aceeași conductibilitate totală dintre intrare și ieșire.

În cazul în care $q_1 = 0$, se vor elimina toate contactele de pe latura inferioară a schemei, iar în cazul în care $p_1 = 0$, se vor elimina toate contactele de pe latura oblică a schemei.

b) Dacă $\chi((p+1,\ q),E) \geqslant \chi((p,\ q+1),E)$, atunci putem înlocui contactul care leagă nodurile $(p,\ q)$ şi $(p,\ q+1)$ printr-un element ventil orientat de la $(p,\ q)$ către $(p,\ q+1)$ iar dacă $p=0$, prin contactul 1, obţinîndu-se un dipol cu aceeaşi conductibilitate totală dintre intrare şi ieşire.

Un rezultat analog se obţine dacă schimbăm între ele rolurile lui p şi q. Facem de asemenea observaţia că toate nodurile $(p,\ q)$ cu $p+q= =n-1$, le putem contopi în cel mult trei noduri: un nod care este legat cu ieşirea E prin contactul 1, un nod care este legat de E prin contactul x_n şi un nod care este legat de E prin contactul $\bar{x}_n$.

Vom arăta cum se pot aplica sistematic aceste două tipuri de transformări pentru funcţiile booleene simetrice, ţinînd seama că pentru reţeaua simetrică construită pentru funcţia $S_{a_1,a_2,\ldots,a_k}(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)$, avînd pe latura inferioară numai contacte normal închise, pentru orice $p+q \leqslant n-1$, $\chi((p,\ q),E) = S_{b_{i_1},b_{i_2},\ldots,b_{i_r}}(x_{p+q+1},\ldots,\ x_n)$, unde $i_1, i_2, \ldots,\ i_r \in \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $r \leqslant k$ şi $b_i = a_i - q$ dacă avem simultan $a_i \geqslant q$ şi $n - a_i \geqslant p$, iar în caz contrar notăm $b_i = -1 \notin \{b_{i_1},\ b_{i_2}, \ldots,\ b_{i_r}\}$. (Prin definiţie $S_{\emptyset}(x_{p+q+1}, \ldots,\ x_n) = 0$).

Deoarece conductibilitatea totală dintre un nod al schemei şi ieşirea E este o funcţie booleană simetrică, pentru a aplica simplificările a) şi b) se va ţine seama că două funcţii booleene simetrice de aceleaşi variabile sînt egale dacă mulţimile numerelor de lucru sînt respectiv egale şi $S_{a_1,a_2,\ldots,a_k}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \geqslant S_{b_1,b_2,\ldots,b_s}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ dacă $\{a_1,\ a_2, \ldots,\ a_k\} \supseteq \supseteq \{b_1,\ b_2, \ldots,\ b_s\}$.

Pentru fiecare $t = 1, \ldots, n-1$ se construieşte mulţimea numerelor de lucru pentru toate nodurile $(p,\ q)$ ale schemei cu proprietatea că $p+q= =t$ şi se verifică egalitatea, respectiv incluziunea strictă dintre mulţimile de numere de lucru construite pentru un acelaşi t, aplicînd transformările de la punctele a) şi b) de cîte ori este posibil.

Reluînd exemplul dat în figura 1, dacă notăm cu $S\ (p,\ q)$ mulţimea numerelor de lucru ale funcţiei booleene simetrice care reprezintă conductibilitatea $\chi\ ((p,\ q),\ E)$ obţinem pe rînd:

Pasul 1: $t=1$, $S(1,0)=\{2,3\}$; $S(0,\ 1)=\{1,\ 2,\ 3\}$. Deoarece $S(1,\ 0) \subset \subset (0,\ 1)$, putem uni nodurile I şi $(1,\ 0)$ şi elimina contactul $\bar{x}_1$.

Pasul 2: $t=2$, $S\,(2,0)=\{2\}$, $S\,(1,1)=\{1,2\}$, $S\,(0,2)=\{0,1,2\}$. Avem deci $S\,(2,0) \subset S\,(1,1) \subset S\,(0,2)$ şi putem înlocui contactul $\bar{x}_2$ dintre $(0,1)$ şi $(1,1)$ cu un element ventil orientat de la $(0,1)$ către $(1,1)$ şi uni nodurile $(1,0)$ şi $(2,0)$ cu eliminarea contactului $\bar{x}_2$.

Pasul 3: $t=3$. Nodul $(3,\ 0)$ nu aparţine schemei, deci vom considera numai $S\,(2,1)=\{1\}$, $S\,(1,2)=\{0,1\}$ şi $S\,(0,3)=\{0,1\}$, deci $S\,(2,1) \subset \subset S(1,2) = S(0,3)$ şi vom înlocui cu un element ventil contactul $\bar{x}_3$ dintre nodurile $(1,1)$ şi $(2,1)$ iar nodurile $(0,3)$ şi $(2,1)$ le vom uni, înlocuind prin 1 toate contactele dipolului cu intrarea în $(0,2)$ şi ieşirea E.

Se obţine astfel dipolul din figura 2 care este dipolul cu număr minim de contacte construit pentru funcţia booleană dată ([6], [7], [8]).

Descrierea completă a acestui algoritm de simplificare care este aplicabil pentru întreaga clasă a celor $2^{2n} - 2^{n+1} + 4$ funcţii booleene simetrice generalizate ([9]), este dată sub forma programului ALGOL scris mai jos.

Identificatorii *M* şi *Q* reprezintă respectiv numărul de variabile şi cardinalul mulţimii numerelor de lucru ale funcţiei, reprezentate în tabloul *A* (1: *Q*). Tabloul *V* (0: *T*, 1: *Q*) se utilizează pentru construcţia mulţimii numerelor de lucru în fiecare nod al reţelei, poziţiile libere fiind completate prin —1.

Procedurile EGAL şi INCLUD verifică egalitatea, respectiv incluziunea strictă între mulţimile de numere de lucru, tipărind perechea de noduri care trebuie unite sau perechea de noduri care trebuie legate printr-un element ventil, notat prin 1 şi avînd orientarea înspre nodul scris în dreapta.

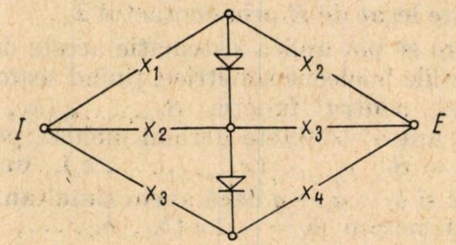


Fig. 2

EDITION ALGOL

```
’DEBUT’ ’ENTIER’ M, Q, T, W : :

’PROCEDURE’ EGAL (V1, V2, P) ::
      ’ENTIER’ ’TABLEAU’ V1, V2 : : ’ETIQUETTE’ P : :
’DEBUT’ ’ENTIER’ H, K, L ::
      L: = K : = 0 ::
’POUR’ H: = 1 ’PAS’ 1 ’JUSQUA’ Q ’FAIRE’
’DEBUT’ ’SI’ V1. (H). = −1 ’ALORS’ K: = K + 1 ::
      ’SI’ V2. (H). = −1 ’ALORS’ L: = L + 1 ::
’FIN’ ::
’SI’ K = L ’ALORS’ ’DEBUT’ ’ENTIER’ C :: C: = 0 ::
’POUR’ H: = 1 ’PAS’ 1 ’JUSQUA’ Q−K ’FAIRE’
’DEBUT’ ’ENTIER’ D :: D: = 0 ::
’POUR’ L: = 1 ’PAS’ 1 ’JUSQUA’ Q−K ’FAIRE’
’SI’ V1. (H). = V2. (L). ’OU’ ABS (V1. (H).) = 0 ’ET’ ABS (V2. (L).) = 0
      ’ALORS’ D: = D + 1 ::
’SI’ D = 1 ’ALORS’ C: = C + 1 ’SINON’
’ALLERA’ P
’FIN’ ::
’SI’ ABS (Q−K) = 0 ’ET’ ABS (C) = 0 ’ALORS’ ’ALLERA’ ETIQ ..
’SI’ C ’NONEG’ Q−K ’ALORS’ ’ALLERA’ P ::
ETIQ:       ’FIN’
’SINON’ ’ALLERA’ P ::
’FIN’ DE LA PROCEDURE EGAL ::
       'PROCEDURE' INCLUD (W1, W2, R) ::
       'ENTIER' 'TABLEAU' W1, W2 :: 'ETIQUETTE' R ::
       'DEBUT' 'ENTIER' H, K, L :: L: = K: = 0 ::
       'POUR' H: = 1 'PAS' 1 'JUSQUA' Q 'FAIRE'
       'DEBUT' 'SI' W1. (H). = -1 'ALORS' K: = K+ 1 ::
       'SI' W2. (H).  = -1  'ALORS' L: = L + 1 'FIN' ::
       'SI' K 'SUPER' L 'ALORS' 'DEBUT' 'ENTIER' C ::
       C: = O:: 'POUR' H: = 1 'PAS' 1 'JUSQUA' Q-K 'FAIRE'
       'DEBUT' 'ENTIER' D, E :: D: = 0 ::
       'POUR' E: = 1 'PAS' 1 'JUSQUA'  Q-L 'FAIRE'
       'SI' W1. (H). = W2. (E). 'OU' ABS (W1. (H).)=0 'ET' ABS (W2. (E).) = 0
            'ALORS' D: = D + 1 ::
       'SI' D = 1 'ALORS' C: = C+1 'SINON' 'ALLERA' R
       'FIN' ::
       'SI' ABS (Q-K) = 0 'ET' ABS (C) = 0 'ALORS' 'ALLERA' ETIQ ::
       'SI' C 'NONEG' Q-K 'ALORS' 'ALLERA' R ::
ETIQ:       'FIN'
       'SINON' 'ALLERA' R
       'FIN' DE LA PROCEDURE INCLUD::
       'ENTIER' I, IMAX :: LIRE (IMAX) :: ECRIRE (IMAX) ::
       'POUR' I: = 1 'PAS' 1 'A' IMAX 'FAIRE'
       'DEBUT' SAUTPAGE ::
            LIRE (M, Q) :: ECRIRE (M, Q) ::
       'DEBUT' 'ENTIER' 'TABLEAU' A. (1: Q). ::
START: 'POUR' T: = 1 'PAS' 1 'JUSQUA' Q 'FAIRE'
       A. (T). : = EDONNE ::
       'POUR' T: = 1 'PAS' 1 'A' Q 'FAIRE' ECRIRE (A. (T).) ::
       SAUTLIGNE :: SAUTLIGNE :: SAUTLIGNE ::
       'POUR' T: = 1 'PAS' 1 'JUSQUA' M-1 'FAIRE'
       'DEBUT' 'ENTIER' 'TABLEAU' V. (O: T, 1: Q). ::
       'POUR' W: = 0 'PAS' 1 'JUSQUA' T 'FAIRE'
       'DEBUT' 'ENTIER' S ::
       'POUR' S: = 1 'PAS' 1 'JUSQUA' Q 'FAIRE'
       V. (W, S).: = 'SI' W 'INFEG' ABS (M-A. (S).)
       'ET' T-W 'INFEG' A. (S). 'ALORS' A. (S). -T+W 'SINON' -1 ::
       'DEBUT' 'ENTIER' H :: H: = 0 ::
       'POUR' S: = 1 'PAS' 1 'JUSQUA'  Q 'FAIRE'
       'SI' O 'INFEG' V. (W, S). 'OU' ABS (V. (W, S).) = 0 'ALORS' H: = H + 1 ::
       'SI' ABS (H) = 0 'OU' H = Q 'ALORS' 'ALLERA' L ::
       'DEBUT' 'ENTIER' R :: 'ENTIER' 'TABLEAU' U. (1: H). ::
       R: = 1 ::
       'POUR' S: = 1 'PAS' 1 'A' Q 'FAIRE'
       'SI' O 'INFEG' V. (W, S). 'OU' ABS (V.(W, S).) = 0 'ALORS'
       'DEBUT' U. (R). = V. (W, S). :: R: = R+1 :: 'FIN' ::
       'POUR' R: = 1 'PAS' 1 'A' H 'FAIRE' V. (W, R). : = U. (R). ::
       'POUR' R: = H+1 'PAS' 1 'A' Q 'FAIRE' V. (W, R).: = -1 ::
       'FIN' :: 'FIN' ::
L:     'FIN' ::
       'POUR' W: = 0 'PAS' 1 'JUSQUA' T 'FAIRE'
       'DEBUT' 'ENTIER' F :: 'ENTIER' 'TABLEAU' (U1. (1: Q). ::
       'POUR' F: = 1 'PAS' 1 'JUSQUA' Q 'FAIRE' U1. (F).: = V. (W, F). ::
        'DEBUT' 'ENTIER' K ::
        'ENTIER' H :: K: = 0 ::
        'POUR' H: = 1 'PAS' 1 'JUSQUA' Q 'FAIRE'
        'SI' O 'INFEG' U1. (H). 'OU' ABS (U1. (H).) = 0 'ALORS' K: = K+1 ::
        'SI' ABS (K) = 0 'ALORS' 'ALLERA' M1 'FIN' ::
        'POUR' F: = W + I 'PAS' 1 'JUSQUA' T 'FAIRE'
        'DEBUT' 'ENTIER' H :: 'ENTIER' 'TABLEAU' U2. (1 : Q). ::
        'POUR' H : = 1 'PAS' 1 'JUSQUA' Q 'FAIRE' U2. (H). : = V. (F, H). : :
        EGAL (U1, U2, M) :: ECRIRE (W, T-W, F, T-F) ::
        M: 'FIN' :: M1: 'FIN' ::
        'POUR' W: = 0 'PAS' 1 'JUSQUA' T-1 'FAIRE'
        'DEBUT' 'ENTIER' H :: 'ENTIER' 'TABLEAU' U3.(1: Q)., U4 (1: Q) . ::
        'POUR' H: = 1 'PAS' 1 'JUSQUA' Q 'FAIRE'
        'DEBUT' U3. (H). : = V. (W, H) . ::
              U4. (H).: = V. (W + 1, H).
        'FIN' :: 'DEBUT' 'ENTIER' K, L :: K: = L: = 0 ::
        'POUR' H: = 1 'PAS' 1 'JUSQUA' Q 'FAIRE'
        'DEBUT' 'SI' O 'INFEG' U3. (H). 'OU' ABS (U3.(H).) = 0 'ALORS'
        K: = K+1 :: 'SI' O 'INFEG' U4. (H). 'OU' ABS (U4.(H).) = 0 'ALORS'
        L: = L+1 :: 'FIN' ::
        'SI' ABS (K* L) = 0 'ALORS' 'ALLERA' N :: 'FIN' ::
        INCLUD (U3, U4, N1) :: ECRIRE (W, T-W-1, 1, W, T-W) ::
        'ALLERA' N ::
N1:           INCLUD (U4, U3, N) :: ECRIRE (W, T-W-1, 1, W+1, T-W-1) ::
N:            'FIN' 'FIN' 'FIN' ::
        SAUTLIGNE :: SAUTLIGNE :: SAUTLIGNE :: HEURE :: 'FIN' ::
        'FIN' ::
        FALGOL
```

Programul a fost verificat pe calculatorul IBM 7044 al Institutului de Matematică Aplicată al Universităţii din Grenoble, obţinîndu-se rezultate corecte.

S-au încercat trei exemple şi anume funcţia booleană simetrică de 20 de variabile cu numerele de lucru 0, 4, 8, 14, 17, 20 (timp de calcul 15 secunde), funcţia monotonă simetrică de 8 variabile cu numerele de lucru 5, 6, 7, 8 obţinîndu-se schema minimală ([6], [7] [8]) (timp de calcul 2 secunde) şi funcţia suma modulo 2 de 10 variabile, pentru care s-a obţinut schema minimală ([10]) în 3 secunde. Toată activitatea cu maşina, inclusiv compilarea programului ALGOL (programul obiect a avut 1201 unităţi sintactice a durat 0,024 ore.

Doresc să aduc mulţumiri pe această cale lui Fernand Lapscher, cercetător la Institutul de Matematică Aplicată al Universităţii din Grenoble pentru sugestiile preţioase privind programarea algoritmului pe calculatorul IBM 7044 şi pentru testările programului ALGOL pe acest calculator.

Primită la redacţie la 28 iunie 1968

Universitatea din Bucureşti
Facultatea de matematică şi mecanică
Str. Academiei 14, Bucureşti 22

UN ALGORITHME POUR LA SYNTHÈSE DES FONCTIONS BOOLÉENNES SYMÉTRIQUES

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail on présente un procédé combinatoire pour la réduction du nombre des contacts des schémas à contacts de type pyramidal qui s'utilisent pour la synthèse des fonctions booléennes symétriques.

En employant une numérotation des nœuds du schéma à l'aide des deux coordonnées à la première étape de l'algorithme on détermine pour tous les nœuds pour lesquels la somme des deux coordonnées est la même l'ensemble des nombres de travail des fonctions symétriques qui représentent les conductibilités totales entre les nœuds respectifs et la sortie du schéma, en partant des nombres de travail de la fonction symétrique donnée.

En vérifiant l'égalité, respectivement l'inclusion entre ces ensembles de nombres de travail, se relient certains nœuds ou s'introduisent des éléments électroniques au sens unique, en obtenant la suppression des circuits redondants du schéma et par conséquent la réduction du nombre des contacts.

Pour les fonctions symétriques monotones aussi que pour la fonction la somme modulo deux de n variables l'algorithme conduit aux schémas minimaux.

A la fin du travail est présenté un programme en ALGOL qui réalise cet algorithme et les résultats de calcul obtenus sur le calculateur IBM 7044 de l'Institut de Mathématiques Appliquées de l'Université de Grenoble.

BIBLIOGRAFIE

1. C. E. Shannon, *A symbolic analysis of relay and switching circuits.* Trans. AIEE, **57** (1938).
2. C. E. Shannon, *The synthesis of two-terminal switching circuits.* Bell System Techn. J., **28**, *1* (1949).
3. S. H. Caldwell, *Switching Circuits and Logical Design.* Wiley, New York, 1958.
4. R. E. Miller, *Switching theory*, I, John Willey and Sons, New York—London—Sydney, 1965.
5. I. Tomescu, *Asupra sintezei funcțiilor booleene cu ajutorul rețelelor disjunctive.* St. cerc. mat., **20**, *2* (1968).
6. A. A. Марков, *О минимальных контактно-вентильных двухполюсниках для монотонных симметрических функций*, Проблемы кибернетики, **8**, (1962).
7. P. Constantinescu, *About a class of symmetrical networks which can be realized with a minimal number of contacts.* Revue Roum. de math. pures et appl., **6**, *2* (1961).
8. P. Constantinescu, *Об анализе и синтезе релейно-контактных многополюсников с вентильными элементами.* Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la RPR, **3** (**51**), *2* (1959).
9. P. Constantinescu, *Asupra numărului de tipuri de funcții booleene simetrice generalizate*, St. cerc. mat., **12**, *2* (1961).
10. C. Cardot, *Quelques résultats sur l'application de l'algèbre de Boole à la synthèse des circuits à relais.* Annales des Télécommunications, **7**, *2* (1952).

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1983

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date din text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale. Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase gratuit. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, Calea Griviţei nr. 21, Bucureşti 12.

1969 MAJ 21

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

P. CARAMAN, **Homeomorfisme evasiconforme *n*-dimensionale**, 1967, 594 p., 31 lei.
I. COLOJOARĂ, **Elemente de teorie spectrală**, 1968, 311 p., 19,50 lei.
GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.
I. CUCULESCU, **Procese Markov şi funcţii excesive**, 1968, 356 p., 19 lei.
ALEXANDRU GHIKA, **Opera matematică**, 1968, 955 p., 50 lei.
R. THEODORESCU, **Teoria matematică a informaţiei**, 1966, 227 p., 8,25 lei.
S. GUIAŞU, **Aplicaţii ale teoriei informaţiei (Sisteme dinamice — Sisteme cibernetice)**, 1968, 350 p., 17 lei.
A. HALANAY, D. WEXLER, **Teoria calitativă a sistemelor cu impulsuri**, 1968, 313 p., 13 lei.
M. IOSIFESCU şi P. TĂUTU, **Procese stohastice şi aplicaţii în biologie şi medicină**, 1968, 345 p., 22 lei.
N. RADU, **Inele locale**, vol. I, 1968, 377 p., 19 lei.
SIMION SANIELEVICI, **Opera matematică**, 1968, 298 p., 15,50 lei.
G. VRĂNCEANU, **Lecţii de geometrie diferenţială**, vol. IV, 1968, 268 p., 11 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 4, P. 525 – 682, BUCUREŞTI, 1969

I. P. „Informaţia" – c. 3112

43831

Lei 20.

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

5

TOMUL 21

1969

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție.

La revue „STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE" paraît 10 fois par an. Le prix d'un abonnement annuel est de $ 10. — ; £ 4.3.0; F.F.49. — ; D.M.40. —.
Toute commande de l'étranger sera adressée à CARTIMEX, Boite postale 134—135, Roumanie, ou à ses représentants à l'étranger. En Roumanie, vous pourrez vous abonner par les bureaux de poste ou chez votre facteur.
În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție al revistei pe adresa: Calea Griviței nr. 21, București 12.

F 762

TOM. 21, Nr. 5
1969

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

SUMAR

Pag.

ROMULUS CRISTESCU, Spaţii liniare ordonate topologice . . . 685

ANDREI DUMA, Elemente de geometrie analitică peste un corp nearhimedian. (II) Elemente de algebre afinoide 711

AVRAM ŞT. FILIPESCU, Asupra unui sistem de ecuaţii funcţionale 739

ADELINA GEORGESCU, Asupra soluţiilor asimptotice ale lui Heisenberg 747

VIORICA IACOB, Asupra determinării potenţialului complex în cazul mişcării fluide în prezenţa unui cilindru mobil . . . 751

GHEZA KLINCSEK, O problemă de index 755

N. MARCOV, Mişcarea fluidelor vîscoase, electroconductoare, în jurul profilelor subţiri, în cazul special $\sigma_e \mu_e \nu = 1$. 759

N. NEUHAUS, Ecuaţii diferenţiale liniare şi sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare în soluţia cărora apar funcţiile lui Paul Appell 773

P. STAVRE, Asupra curbelor $B(\varepsilon)$ din V_n 793

RODICA TRANDAFIR, Diverse extensiuni ale ,,problemei acului'' a lui Buffon 799

IOSIF ŢEPOSU, Asupra unor generalizări ale ecuaţiilor lui Lagrange 805

T. WESZELY, Cîmpuri de vectori pe varietăţi kähleriene compacte cu curbură olomorfă constantă nenulă 819

RECENZII 823

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 5, P. 682—828, BUCUREŞTI, 1969

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

SPAŢII LINIARE ORDONATE TOPOLOGICE

DE

ROMULUS CRISTESCU

Se prezintă unele contribuţii la teoria spaţiilor liniare ordonate topologice şi a operatorilor liniari.

Într-un spaţiu liniar ordonat se pot considera diferite topologii determinate de relaţia de ordine. Este însă util a se considera şi cazul cînd pe un spaţiu liniar ordonat este dată dinainte o anumită topologie. În acest caz se cere ca topologia să fie nu numai compatibilă cu structura de spaţiu liniar, dar şi compatibilă într-un sens sau altul cu structura de ordine.

Spaţiile liniare ordonate topologice sînt studiate cu începere din anul 1937. Menţionăm lucrarea lui L. V. Kantorovici [10] precum şi lucrările lui M. G. Krein şi a şcolii sale. În lucrările iniţiale, topologiile considerate erau de spaţii normate, spaţiile studiate fiind mai ales spaţii ordonate normate. Printre acestea, o clasă importantă este cea a KB-spaţiilor lui L. V. Kantorovici [10]. Cazul spaţiilor liniare ordonate înzestrate cu topologii local convexe, sau cu topologii oarecari, a fost considerat mai tîrziu, impus fiind şi de dezvoltarea teoriei spaţiilor liniare topologice şi în special a spaţiilor local convexe.

În anul 1952, G. T. Roberts consideră în [16] topologii în spaţii liniare reticulate, definite cu ajutorul sistemelor fundamentale de vecinătăţi. În [13], H. Nakano studiază diferite tipuri de topologii pe un spaţiu liniar complet reticulat, folosind sisteme fundamentale de vecinătăţi şi „pseudonorme". În [2], [3] am considerat spaţii reticulate local convexe definite cu ajutorul unor sisteme de seminorme. Teoria spaţiilor liniare ordonate topologice şi mai ales a spaţiilor ordonate local convexe a fost dezvoltată apoi de H. Schaefer [18], [19], [20], [21], I. Namioka [14], I. Kawai [11] şi alţii.

În lucrarea de faţă vom prezenta unele contribuţii la teoria spaţiilor liniare ordonate topologice şi a operatorilor liniari.

Terminologia şi notaţiile utilizate sînt cele din [5]. Pentru uşurinţa lecturii acestei lucrări, vom aminti însă unele noţiuni.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 5, P. 685–709, BUCUREŞTI, 1969

§ 1. NOŢIUNI GENERALE DE TEORIA SPAŢIILOR LINIARE ORDONATE TOPOLOGICE

DEFINIŢIA 1. 1. Se numeşte *spaţiu liniar ordonat topologic*, orice spaţiu liniar ordonat $\mathfrak{X}$ care este în acelaşi timp un spaţiu liniar topologic (în raport cu o anumită topologie [1] τ) şi care îndeplineşte următoarea condiţie :

(a) există un sistem fundamental $\mathcal{W}$ de (τ)-vecinătăţi ale originii astfel ca orice $W \in \mathcal{W}$ să aibă proprietatea

$$0 \leqslant x \leqslant y \quad \text{şi} \quad y \in W \Rightarrow x \in W \tag{1}$$

Observaţie. Condiţia (a) din definiţia 1.1 este echivalentă cu următoarea condiţie :

(b) există un sistem fundamental $\mathcal{W}$ de (τ)-vecinătăţi ale originii astfel ca orice $W \in \mathcal{W}$ să aibă proprietatea

$$A \subset \mathfrak{X}_+ \quad \text{şi} \quad A \cap W = \varnothing \Rightarrow (A + \mathfrak{X}_+) \cap W = \varnothing \cdot \tag{2}$$

Într-adevăr, fie (1) îndeplinită şi să presupunem că ar exista un element $c \in \mathfrak{X}$ aşa ca

$$c \in (A + \mathfrak{X}_+) \cap W.$$

Deci $c = a + b$ cu $a \in A$ şi $b \geqslant 0$ iar $c \in W$. Din $0 \leqslant a \leqslant c$ şi $c \in W$ rezultă $a \in W$. Deci $A \cap W = \varnothing$.

Reciproc, fie (2) îndeplinită şi fie $0 \leqslant x_0 \leqslant y$ cu $y \in W$. Dacă $x_0 \notin W$, atunci cu (b) rezultă

$$(x_0 + \mathfrak{X}_+) \cap W = \varnothing.$$

Dar elementul y se poate reprezenta sub forma $y = x_0 + a$ cu $a \geqslant 0$ şi ar rezulta $y \notin W$, contrar ipotezei.

Cînd există un sistem fundamental $\mathcal{W}$ de vecinătăţi ale originii îndeplinind condiţia (b), atunci $\mathfrak{X}_+$ se numeşte, după H. Schaefer [18], un *con normal*.

Dacă a şi b sînt două elemente ale unui spaţiu liniar ordonat cu $a \leqslant b$, vom nota

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

DEFINIŢIA 1.2. O submulţime E a unui spaţiu liniar ordonat $\mathfrak{X}$ se numeşte *plină* [14] dacă

$$a, b \in E \quad \text{şi} \quad a \leqslant b \Rightarrow [a, b] \subset E.$$

Dacă A este o submulţime oarecare a lui $\mathfrak{X}$, atunci mulţimea $\mathrm{pl}(A)$ definită prin :

$$\mathrm{pl}(A) = \bigcup_{\substack{x,\, y \in A \\ x \leqslant y}} [x, y]$$

se numeşte *acoperirea plină* a lui A.

---

[1] Topologia va fi presupusă separată în această lucrare.

Mulţimea pl(A) este cea mai mică mulţime plină care conţine mulţimea A.

Are loc egalitatea

$$\mathrm{pl}(A) = (A + \mathfrak{X}_+) \cap (A - \mathfrak{X}_+).$$

Din această egalitate rezultă imediat că dacă A este echilibrată (sau convexă), atunci şi pl (A) este echilibrată (respectiv convexă).

PROPOZIŢIA 1.1. (I. Namioka [14]). *Fie $\mathfrak{X}$ un spaţiu liniar ordonat care este în acelaşi timp un spaţiu liniar topologic (în raport cu o topologie τ). Pentru ca $\mathfrak{X}$ să fie un spaţiu liniar ordonat topologic, este necesar şi suficient să existe un sistem fundamental de (τ)-vecinătăţi pline ale originii*²).

PROPOZIŢIA 1.2. Fie *$\mathfrak{X}$ un spaţiu liniar ordonat topologic (cu topologia τ) şi $\{a_\delta\}_{\delta\in\Delta}$, $\{b_\delta\}_{\delta\in\Delta}$, $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ şiruri generalizate de elemente din $\mathfrak{X}$. Are loc următoarea implicaţie* ³)

$$a_\delta \leqslant x_\delta \leqslant b_\delta,\ (\delta \in \Delta) \text{ şi } a_\delta \xrightarrow{\tau} 0,\ b_\delta \xrightarrow{\tau} 0 \Rightarrow x_\delta \xrightarrow{\tau} 0.$$

Demonstraţia este imediată.

PROPOZIŢIA 1.3. *Dacă $\{a_j\}_{j\in J}$, $\{b_j\}_{j\in J}$ sînt sisteme (τ)-mărginite*⁴) *de elemente ale unui spaţiu liniar ordonat topologic aşa ca $a_j \leqslant b_j\,(j \in J)$, atunci mulţimea*

$$E = \bigcup_{j\in J} [a_j\, b_j]$$

este (τ)-mărginită.

Într-adevăr, fie $\{x_n\}_{n\in N}$ un şir de elemente din E şi $\{\lambda_n\}_{n\in N}$ un şir de numere pozitive care converge către zero.

Fie $a_{j_n} \leqslant x_n \leqslant b_{j_n}$. Din

$$\lambda_n a_{j_n} \leqslant \lambda_n x_n \leqslant \lambda_n b_{j_n}$$

şi

$$\lambda_n a_{j_n} \xrightarrow{\tau} 0,\ \lambda_n b_{j_n} \xrightarrow{\tau} 0$$

rezultă

$$\lambda_n x_n \xrightarrow{\tau} 0.$$

Deci E este (τ)-mărginită.

DEFINIŢIA 1.3. Se numeşte *spaţiu ordonat local* convex, orice spaţiu liniar ordonat topologic în care topologia considerată este local convexă.

PROPOZIŢIA 1.4. *În orice spaţiu ordonat local convex, există un sistem fundamental de vecinătăţi ale originii, format din mulţimi echilibrate, convexe şi pline.*

Într-adevăr, pentru orice vecinătate V a originii, există o vecinătate plină a originii $V_1 \subset V$. Există de asemenea o vecinătate a originii V_2

---

²) Spaţiile liniare ordonate topologice sînt numite *spaţii local pline* în [14].

³) Prin $x_\delta \xrightarrow{\tau} x$ se înţelege că $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ converge către x în topologia τ.

⁴) Prin (τ)-mărginit se înţelege mărginit în topologia τ, iar prin (o)-mărginit — mărginit în sensul ordinei.

care să fie echilibrată și convexă așa ca $V_2 \subset V_1$. Punînd $W = \mathrm{pl}(V_2)$ avem $W \subset V$ iar W este echilibrată convexă și plină.

DEFINIȚIA 1.4. O seminormă p definită pe un spațiu liniar ordonat $\mathfrak{X}$ se numește *seminormă monotonă*, dacă

$$0 \leqslant x \leqslant y \Rightarrow p(x) \leqslant p(y)$$

PROPOZIȚIA 1.5. (I. Namioka [14]). *Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu liniar ordonat și τ o topologie local convexă pe $\mathfrak{X}$. Pentru ca $\mathfrak{X}$ să fie un spațiu ordonat local convex, este necesar și suficient ca topologia τ să fie definită de mulțimea tuturor seminormelor monotone și (τ)-continue pe $\mathfrak{X}$.*

Vom considera mai departe, cazul spațiilor liniare reticulate. Într-un spațiu liniar reticulat în care este dată o topologie compatibilă cu structura de spațiu liniar, condiția din definiția 1.1. leagă prea puțin topologia de structura laticială a spațiului. De aceea, în cazul unui spațiu liniar reticulat vom cere o condiție mai tare de „compatibilitate cu ordinea”.

Vom aminti mai întîi cîteva definiții cu caracter general.

Fie x un element oarecare al spațiului liniar reticulat $\mathfrak{X}$. Vom nota

$$Z(x) = \{ z \mid |z| \leqslant |x| \}.$$

Mulțimea $Z(x)$ este echilibrată și convexă.

Pentru orice elemente $x, y \in \mathfrak{X}$ are loc relația

$$Z(x + y) \subset Z(x) + Z(y)$$

iar pentru orice element $x \in \mathfrak{X}$ și orice număr real α

$$Z(\alpha x) = |\alpha| Z(x).$$

DEFINIȚIA 1.5. O submulțime E a spațiului liniar reticulat $\mathfrak{X}$ se numește *solidă* [14] dacă

$$x \in E \Rightarrow Z(x) \subset E.$$

Pentru orice element $x \in \mathfrak{X}$, mulțimea $Z(x)$ este solidă.

Orice mulțime solidă este echilibrată.

Dacă A este o submulțime oarecare a spațiului liniar reticulat $\mathfrak{X}$, atunci mulțimea

$$\mathrm{so}(A) = \bigcup_{x \in A} Z(x)$$

este cea mai mică mulțime solidă care conține mulțimea A. Mulțimea $\mathrm{so}(A)$ se numește *acoperirea solidă* a lui A.

DEFINIȚIA 1.6. Se numește *spațiu liniar reticulat topologic* orice spațiu liniar reticulat $\mathfrak{X}$, care este în același timp un spațiu liniar topologic (în raport cu o anumită topologie τ) și în care există un sistem fundamental de (τ)-vecinătăți ale originii format din mulțimi solide.

Spațiile liniare reticulate topologice au fost introduse de G. T. Roberts ⁵).

---

⁵) A se vedea [16]. În [14] spațiile liniare reticulate topologice sînt numite spații local solide.

PROPOZIŢIA 1.6. *Dacă A este o mulţime (τ)-mărginită de elemente ale unui spaţiu liniar reticulat topologic, atunci şi mulţimea* so (A) *este (τ)-mărginită.*

Într-adevăr, dacă W este o vecinătate solidă a originii, există un număr $\alpha > 0$ aşa ca $A \subset \alpha W$. Dacă $x \in A$, atunci $Z(x) \subset \alpha W$, de unde rezultă că so $(A) \subset \alpha W$.

PROPOZIŢIA 1.7. *Fie $\mathfrak{X}$ un spaţiu liniar reticulat topologic şi $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$, $\{y_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ şiruri generalizate de elemente din $\mathfrak{X}$. Au loc următoarele:*

(i) *dacă* $|x_\delta| \leqslant |y_\delta|$, $(\forall\delta \in \Delta)$ *şi* $y_\delta \xrightarrow{\tau} 0$, *atunci* $x_\delta \xrightarrow{\tau} 0$;

(ii) *dacă* $x_\delta \xrightarrow{\tau} x$ *şi* $y_\delta \xrightarrow{\tau} y$, *atunci* $x_\delta \vee y_\delta \xrightarrow{\tau} x \vee y$ *şi* $x_\delta \wedge y_\delta \xrightarrow{\tau} x \wedge y$;

(iii) *dacă* $x_\delta \uparrow$ (*sau* $x_\delta \downarrow$) *şi dacă* $x_\delta \xrightarrow{\tau} x$, *atunci* $x = \bigwedge\limits_{\delta\in\Delta} x_\delta$ (*respectiv* $x = \bigvee\limits_{\varrho\in\Delta} x_\delta$).

PROPOZIŢIA 1.8. (G. T. Roberts-I. Namioka). *Fie $\mathfrak{X}$ un spaţiu liniar reticulat şi τ o topologie pe $\mathfrak{X}$, compatibilă cu structura de spaţiu liniar. Pentru ca $\mathfrak{X}$ să fie un spaţiu liniar reticulat topologic, este necesar şi suficient să existe un sistem fundamental de vecinătăţi pline ale originii şi ca aplicaţia $x \longrightarrow x_+$ să fie* (τ)-continuă.

Necesitatea condiţiei a fost demonstrată de G.T. Roberts [16], iar suficienţa a fost demonstrată de I. Namioka [14].

PROPOZIŢIA 1.9. *Orice spaţiu liniar reticulat topologic este un spaţiu arhimedian* [6]).

Într-adevăr, dacă $x > \mathbf{0}$, atunci $\frac{1}{n}\, x \downarrow_{n\in N}$ şi cum $\frac{1}{n}\, x \xrightarrow{\tau} \mathbf{0}$ cu propoziţia 1.7 rezultă $\bigwedge\limits_{n\in N} \frac{1}{n}\, x = \mathbf{0}$.

DEFINIŢIA 1.7. Se numeşte *spaţiu reticulat local convex* (sau latice local convexă), orice spaţiu liniar reticulat topologic în care topologia considerată este local convexă.

PROPOZIŢIA 1.10. *În orice spaţiu reticulat local convex, există un sistem fundamental de vecinătăţi ale originii, format din mulţimi convexe şi solide.*

Această propoziţie se găseşte în [16] şi [14].

DEFINIŢIA 1.8. O seminormă p definită pe un spaţiu liniar reticulat $\mathfrak{X}$, se numeşte *seminormă solidă*, dacă

$$|x| \leqslant |y| \Rightarrow p(x) \leqslant p(y).$$

În particular, dacă p este o seminormă solidă, atunci

$$p(x) = p(|x|)$$

oricare ar fi elementul x.

PROPOZIŢIA 1.11. *Fie $\mathfrak{X}$ un spaţiu liniar reticulat şi τ o topologie local convexă pe $\mathfrak{X}$. Pentru ca $\mathfrak{X}$ să fie un spaţiu reticulat local convex, este nece-*

---

[6]) Un spaţiu liniar ordonat dirijat este un spaţiu arhimedian dacă şi numai dacă pentru orice element $x > \mathbf{0}$ avem $\bigwedge\limits_{n\in N} \frac{1}{n}\, x = \mathbf{0}$.

sar şi suficient ca topologia τ să fie definită de mulţimea tuturor seminormelor solide şi (τ)-continue pe $\mathfrak{X}$.

PROPOZIŢIA 1.12. *Fie $\mathfrak{X}$ un spaţiu liniar reticulat şi τ o topologie local convexă pe $\mathfrak{X}$. Pentru ca $\mathfrak{X}$ să fie un spaţiu reticulat local convex, este necesar şi suficient ca următoarea condiţie să fie verificată*

$$|x_\delta| \leqslant |y_\delta| \ (\delta \in \Delta) \quad \text{şi} \quad y_\delta \xrightarrow{\tau} 0 \Rightarrow x_\delta \xrightarrow{\tau} 0.$$

Necesitatea condiţiei este conţinută în propoziţia 1.7.

Suficienţa condiţiei a fost stabilită de I. Kawai [11]. În [11] această condiţie este pusă în definiţia laticii local convexe.

Observaţie. În cazul cînd $\mathfrak{X}$ este în plus un spaţiu bornologic faţă de topologia τ, atunci în propoziţia 1.12 şirurile generalizate se pot înlocui cu şiruri ordinare.

§ 2. TOPOLOGII ÎN SPAŢII LINIARE ORDONATE, SPAŢII CONJUGATE, PROPRIETĂŢILE UNOR TIPURI DE SPAŢII LINIARE RETICULATE TOPOLOGICE

2.1. SPAŢII CONJUGATE

Vom nota cu $\mathfrak{X}^{\#}$ mulţimea funcţionalelor liniare (o)-mărginite definite pe un spaţiu liniar ordonat $\mathfrak{X}$ şi cu $\mathfrak{X}^{r}$ mulţimea funcţionalelor regulate 7).

Dacă $\mathfrak{X}$ este un spaţiu liniar topologic (cu topologia τ), vom nota cu $\mathfrak{X}^{*}_{\tau}$ mulţimea funcţionalelor liniare şi (τ)-continue pe $\mathfrak{X}$.

PROPOZIŢIA 2.1.1. *Fie $\mathfrak{X}$ un spaţiu liniar ordonat şi τ o topologie local convexă (separată 8)) pe $\mathfrak{X}$. Dacă $\mathfrak{X}^{*}_{\tau} \subset \mathfrak{X}^{\#}$, atunci orice mulţime ($o$)-mărginită de elemente din $\mathfrak{X}$ este (τ)-mărginită. Reciproc, dacă $\mathfrak{X}$ este dirijat şi dacă orice mulţime (o)-mărginită de elemente pozitive din $\mathfrak{X}$ este (τ)-mărginită atunci $\mathfrak{X}^{*}_{\tau} \subset \mathfrak{X}^{\#}$.*

Demonstraţie. Să presupunem că $\mathfrak{X}^{*}_{\tau} \subset \mathfrak{X}^{\#}$. Fie A o mulţime (o)-mărginită de elemente din $\mathfrak{X}$. Dacă $f \in \mathfrak{X}^{*}_{\tau}$, atunci $f(A)$ este mărginită, deoarece f este (o)-mărginită. Rezultă că mulţimea A este mărginită în topologia slăbită asociată lui τ şi deci A este (τ)-mărginită [1].

Reciproc, să presupunem că $\mathfrak{X}$ este dirijat dar că $\mathfrak{X}^{*}_{\tau} \not\subset \mathfrak{X}^{\#}$ Fie deci $f \in \mathfrak{X}^{*}_{\tau}$ aşa ca $f \notin \mathfrak{X}^{\#}$. Există atunci o mulţime (o)-mărginită $A \subset \mathfrak{X}$ aşa ca $f(A)$ să nu fie mărginită. Există deci un şir $\{y_n\}_{n \in N}$ de elemente din A aşa ca şirul $\{f(y_n)\}_{n \in N}$ să nu fie mărginit. Fie $z \geqslant 0$ aşa ca $A \subset [-z, z]$. Şirul $\{f(z - y_n)\}_{n \in N}$ nu este mărginit şi deci şirul $\{z - y_n\}_{n \in N}$ nu este (τ) -mărginit, căci f este liniară şi (τ)-continuă. Dar

$$0 \leqslant z - y_n \leqslant 2z$$

---

7) Amintim că o funcţională f definită pe un spaţiu liniar ordonat $\mathfrak{X}$ se zice (o)-mărginită, dacă pentru orice mulţime (o)-mărginită $A \subset \mathfrak{X}$, mulţimea $f(A)$ este mărginită. O funcţională f pe un spaţiu liniar ordonat $\mathfrak{X}$ se numeşte regulată dacă se poate reprezenta ca diferenţa a două funcţionale aditive şi pozitive (o funcţională g este pozitivă dacă $g(x) \geqslant 0$ pentru orice element $x \geqslant 0$).

8) Amintim că în această lucrare, topologia unui spaţiu liniar topologic este presupusă separată.

deci şirul $\{z - y_n\}_{n\in N}$ este (o)-mărginit şi format din elemente pozitive. Propoziţia este demonstrată.

Observaţie. Din propoziţia 2.1.1 se obţine în particular următoarea propoziţie. Dacă τ este o topologie local convexă (separată) în spaţiul liniar reticulat $\mathfrak{X}$, atunci pentru ca incluziunea

$$\mathfrak{X}^*_\tau \subset \mathfrak{X}^r$$

să aibă loc, este necesar şi suficient că orice mulţime (o)-mărginită de elemente din $\mathfrak{X}$ să fie (τ)-mărginită.

DEFINIŢIA 2.1.1. Fie $\mathfrak{X}$ un spaţiu liniar dirijat şi τ o topologie local convexă pe $\mathfrak{X}$. Spaţiul $\mathfrak{X}$ se numeşte *pozitiv-bornologic* (în raport cu τ), dacă are următoarea proprietate : dacă o mulţime E de elemente ale lui $\mathfrak{X}$ este echilibrată, convexă şi absoarbe orice mulţime (τ)-mărginită de elemente pozitive, atunci E este o vecinătate a originii.

Observaţie. Pentru ca în raport cu o topologie local convexă τ, un spaţiu liniar dirijat să fie pozitiv-bornologic, este necesar şi suficient ca orice seminormă care este mărginită pe orice mulţime (τ)-mărginită de elemente pozitive din $\mathfrak{X}$, să fie (τ)-continuă pe $\mathfrak{X}$.

Demonstraţia este asemănătoare cazului spaţiilor bornologice oarecari.

PROPOZIŢIA [9]). 2.1.2. *Fie $\mathfrak{X}$ un spaţiu liniar dirijat şi τ o topologie local convexă pe $\mathfrak{X}$. Dacă $\mathfrak{X}$ este pozitiv-bornologic şi secvenţial (τ)-complet, iar mulţimea $\mathfrak{X}_+$ este (τ)-închisă, atunci*

$$\mathfrak{X}^r \subset \mathfrak{X}^*_\tau .$$

Demonstraţie. Este suficient să considerăm funcţionale liniare pozitive. Dacă ar exista o funcţională liniară pozitivă f pe $\mathfrak{X}$ aşa ca $f \notin \mathfrak{X}^*_\tau$, atunci cu observaţia precedentă aplicată seminormei $p(x) = |f(x)|$ ar exista o parte (τ)-mărginită $A \subset \mathfrak{X}_+$ pe care f să nu fie mărginită. Fie deci $x_n \in A$ aşa ca $f(x_n) > n^2$. Punînd

$$y = (\tau)\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\, x_n$$

rezultă imediat $f(y) > m$ oricare ar fi $m \in N$, ceea ce este absurd.

PROPOZIŢIA 2.1.3. *Fie $\mathfrak{X}$ un spaţiu liniar ordonat şi τ o topologie local convexă pe $\mathfrak{X}$ îndeplinind condiţia*

$$0 \leqslant x_\delta \leqslant y_\delta, \quad (\delta \in \Delta) \text{ şi } y_\delta \xrightarrow{\tau} 0 \Rightarrow x_\delta \xrightarrow{\tau} 0.$$

Atunci orice funcţională liniară şi (τ)-continuă pe $\mathfrak{X}$ este diferenţa a două funcţionale liniare (τ)-continue şi pozitive. În particular $\mathfrak{X}^*_\tau \subset \mathfrak{X}^r$.

Demonstraţie. Fie $f \in \mathfrak{X}^*_\tau$. Este suficient să arătăm că f este majorată de o funcţională liniară (τ)-continuă şi pozitivă. Fără restrîngerea genera-

---

[9]) O propoziţie asemănătoare este dată de H. Schaefer în [18] şi anume propoziţia 2.8. Condiţiile puse în [18] ca $\mathfrak{X}$ să fie bornologic iar $\mathfrak{X}_+$ să fie un ≪BZ-con strict≫ le-am înlocuit cu condiţia ca $\mathfrak{X}$ să fie pozitiv-bornologic. Celelalte condiţii ca şi demonstraţia sînt aceleaşi.

lității putem presupune că există un element $x_0 > 0$ așa ca $f(x_0) > 0$ (căci în caz contrar am avea $f \leqslant \mathbf{0}$). În baza condiției din enunțul propoziției pentru orice element $x \geqslant \mathbf{0}$ segmentul $[\mathbf{0}, x]$ este (τ)-mărginit[10]) și deci mulțimea

$$\{f(x') \mid \mathbf{0} \leqslant x' \leqslant x\}$$

este mărginită. Vom defini pe $\mathfrak{X}_+$ funcția

$$g(x) = \sup_{\mathbf{0} \leqslant x' \leqslant x} f(x').$$

Se verifică imediat că

$$g(\alpha x) = \alpha g(x), \quad (0 \leqslant \alpha \in R)$$

$$g(x+y) \geqslant g(x) + g(y).$$

Funcția g este (τ)-continuă în origine. Într-adevăr, în caz contrar ar exista un șir generalizat $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ de elemente pozitive care (τ)-converge către $\mathbf{0}$ și un număr $\varepsilon_0 > 0$ așa ca

$$g(x_\delta) \geqslant \varepsilon_0, \quad (\delta \in \Delta_0).$$

Pentru fiecare indice $\delta \in \Delta_0$ să considerăm un element $y_\delta \in \mathfrak{X}$ așa ca

$$\mathbf{0} \leqslant y_\delta \leqslant x_\delta, \quad (\delta \in \Delta_0), \tag{1}$$

$$f(y_\delta) \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad (\delta \in \Delta_0). \tag{2}$$

Din $x_\delta \xrightarrow{\tau} \mathbf{0}$ și din (1) rezultă $y_\delta \xrightarrow{\tau} \mathbf{0}$ și deci $f(y_\delta) \to 0$ ceea ce contrazice (2).

Să punem acum

$$G = \{x \geqslant \mathbf{0} \mid g(x) \geqslant 1\}.$$

Mulțimea G este convexă și $\mathbf{0} \notin \overline{G}$. Există atunci o funcțională liniară și (τ)-continuă h pe $\mathfrak{X}$ așa ca $h(x) \geqslant 1$ dacă $x \in G$ (a se vedea de exemplu [1], Ch II, § 3).

Să observăm acum că dacă $x > \mathbf{0}$ și $g(x) \neq \mathbf{0}$, atunci $\frac{1}{g(x)} x \in G$, de unde rezultă imediat $h(x) \geqslant g(x)$.

Dacă $x \geqslant \mathbf{0}$ și $g(x) = 0$, atunci pentru un element oarecare $x_0 \in G$ avem $g(nx + x_0) \geqslant 1$ oricare ar fi $n \in N$.

Rezultă $h(nx + x_0) \geqslant 1$ sau

$$h(x) \geqslant \frac{1 - h(x_0)}{n}$$

oricare ar fi $n \in N$, deci $h(x) \geqslant 0$.

---

[10]) Mai general, dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu liniar ordonat care este în același timp un spațiu liniar topologic (cu o topologie τ) îndeplinind condiția

$$\mathbf{0} \leqslant x_n \leqslant y_n, \ (n \in N) \text{ și } y_n \xrightarrow{\tau} \Rightarrow \mathbf{0}\ x_n \xrightarrow{\tau} \mathbf{0},$$

atunci orice mulțime (o)-mărginită de elemente din $\mathfrak{X}$ este (τ)-mărginită.

În concluzie $h(x) \geqslant g(x)$ oricare ar fi $x \geqslant 0$. Rezultă că h este o funcţională pozitivă şi că $h \geqslant f$.

Propoziţia este demonstrată.

PROPOZIŢIA 2.1.4. *Fie* $\mathfrak{X}$ *un spaţiu reticulat local convex şi* $\mathfrak{X}_0$ *un subspaţiu liniar reticulat al lui* $\mathfrak{X}$. *Orice funcţională liniară, pozitivă şi* (τ)*-continuă*[11] *pe* $\mathfrak{X}_0$ *se poate prelungi pe* $\mathfrak{X}$ *cu păstrarea liniarităţii pozitivităţii şi* (τ)*-continuităţii.*

Demonstraţie. Dacă f_0 este o funcţională liniară, pozitivă şi (τ)-continuă pe $\mathfrak{X}_0$, atunci există o seminormă p solidă şi (τ)-continuă pe spaţiul $\mathfrak{X}$, aşa ca

$$|f_0(x)| \leqslant p(x), \quad (x \in \mathfrak{X}_0).$$

Vom defini pe $\mathfrak{X}$ următoarea funcţională

$$q(x) = p(x_+), \quad (x \in \mathfrak{X}).$$

Se verifică imediat că q este subaditivă şi pozitiv omogenă şi că

$$f_0(x) \leqslant q(x), \quad (x \in \mathfrak{X}_0).$$

În baza teoremei lui Kahn-Banach există o funcţională liniară f definită pe $\mathfrak{X}$, care prelungeşte f_0 şi astfel ca

$$-q(-x) \leqslant f(x) \leqslant q(x), \quad (x \in \mathfrak{X}).$$

Deoarece pentru $x \geqslant 0$ avem evident $q(-x) = 0$, rezultă că f este o funcţională pozitivă. Avem apoi

$$|f(x)| \leqslant f(|x|) \leqslant q(|x|) = p(|x|) = p(x)$$

deci f este (τ)-continuă.

2.2. SPAŢII CU PROPRIETATEA (S)

DEFINIŢIA 2.2.1. Fie $\mathfrak{X}$ un spaţiu liniar ordonat care este în acelaşi timp un spaţiu liniar topologic (în raport cu o topologie τ). Spunem că $\mathfrak{X}$ are proprietatea (S) dacă pentru orice mulţime (τ)-mărginită $A \subset \mathfrak{X}$, există o mulţime (τ)-mărginită $B \subset X$, aşa ca $A \subset B - B$.

Un spaţiu cu proprietatea (S) este evident dirijat.

PROPOZIŢIA 2.2.1. *Fie* $\mathfrak{X}$ *un spaţiu liniar ordonat şi* τ *o topologie local convexă pe* $\mathfrak{X}$ *pentru care* $\mathfrak{X}$ *este un spaţiu bornologic. Dacă* $\mathfrak{X}$ *are proprietatea* (S), *atunci* $\mathfrak{X}$ *este pozitiv-bornologic.*

Demonstraţie. Fie p o seminormă care este mărginită pe orice mulţime (τ)-mărginită de elemente pozitive. Dacă A este o mulţime (τ)-mărginită de elemente oarecari, atunci fie B o mulţime (τ)-mărginită de elemente pozitive cu $A \subset B - B$. Din

$$p(x) \leqslant 2 \sup_{y \in B} p(y), \quad (\forall x \in A)$$

şi din observaţia dată după definiţia 2.1.1 rezultă că $\mathfrak{X}$ este pozitiv-bornologic.

---

[11] Notăm tot cu τ, topologia indusă pe $\mathfrak{X}_0$ de topologia τ din $\mathfrak{X}$.

În propoziţia următoare vom nota

$$|A| = \{|x| \mid x \in A\}$$
$$A_+ = \{x_+ \mid x \in A\}$$
$$A_- = \{x_- \mid x \in A\}$$

dacă A este o submulţime a unui spaţiu liniar reticulat.

PROPOZIŢIA 2.2.2. *Fie $\mathfrak{X}$ un spaţiu liniar ordonat topologic (cu topologia τ) care este în acelaşi timp un spaţiiu reticulat. Pentru ca $\mathfrak{X}$ să aibă proprietatea (S), este necesar şi suficient ca pentru orice mulţime (τ)-mărginită A, mulţimea $|A|$ să fie (τ)-mărginită.*

Demonstraţie. Să presupunem că spaţiul are proprietatea (S) şi fie A o mulţime (τ)-mărginită. Fie B o mulţime (τ)-mărginită de elemente pozitive aşa ca $A \subset B - B$. Dacă $x \in A$, atunci $x = x_1 - x_2$ cu $x_1, x_2 \in B$. Pe de altă parte, $x = x_+ - x_-$ şi avem

$$0 \leqslant x_+ \leqslant x_1, \ 0 \leqslant x_- \leqslant x_2.$$

În baza propoziţiei 1.3 mulţimea

$$B_1 = \bigcup_{z \in B} [0, z]$$

este (τ)-mărginită. Deoarece $A_+ \subset B_1$ şi $A_- \subset B_1$, mulţimile $A_+ A_-$ sînt (τ) -mărginite şi deci mulţimea $A_+ + A_-$ este (τ)-mărginită. Din

$$|A| \subset A_+ + A_-$$

rezultă că $|A|$ este (τ)-mărginită.

Reciproc, să presupunem că pentru orice mulţime (τ)-mărginită A, mulţimea $|A|$ este (τ)-mărginită. Punînd

$$B = \bigcup_{z \in |A|} [0, z],$$

obţinem o mulţime (τ)-mărginită de elemente pozitive. Din

$$0 \leqslant x_+, x_- \leqslant |x|$$

rezultă A_+, $A_- \subset B$ şi deci

$$A \subset A_+ - A_- \subset B - B.$$

Deci $\mathfrak{X}$ are proprietatea (S).

COROLAR. *Orice spaţiu liniar reticulat topologic are proprietatea* (S)

Într-adevăr, n-avem decît să ţinem seama de propoziţia 1.6 ştiind că

$$|A| \subset \text{so}\ (A).$$

2.3. SPAŢII RETICULATE CVASINORMATE

DEFINIŢIA 2.3.1. O cvasinormă q definită pe un spaţiu liniar reticulat $\mathfrak{X}$ se numeşte *cvasinormă solidă*, dacă din $|x| \leqslant |y|$ rezultă $q(x) \leqslant q(y)$. Un spaţiu liniar reticulat care este în acelaşi timp un spaţiu liniar cvasinormat[12]) în raport cu o cvasinormă solidă, se numeşte *spaţiu reticulat cvasinormat*.

PROPOZIŢIA 2.3.1. *Orice spaţiu reticulat local convex metrizabil $\mathfrak{X}$ este un spaţiu reticulat cvasinormat.*

Demonstraţie. Fie $\{p_n\}_{n\in N}$ un sistem numărabil de seminorme care defineşte topologia spaţiului $\mathfrak{X}$. Dacă punem

$$\varphi_n(x) = \sup_{0\leqslant z\leqslant |x|} p_n(z), \qquad (n\in N)$$

obţinem un sistem de seminorme solide care defineşte aceeaşi topologie. Rămîne să observăm că cvasinorma q dată de formula

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\,\frac{\varphi_n(x)}{1+\varphi_n(x)}$$

este solidă.

DEFINIŢIA 2.3.2. O topologie τ pe un spaţiu liniar reticulat $\mathfrak{X}$ se numeşte (o)-continuă, dacă din $x_n \underset{n\in N}{\downarrow} \mathbf{0}$ rezultă $x_n \xrightarrow{\tau} \mathbf{0}$.

Într-un spaţiu liniar reticulat topologic, a cărei topologie τ este (o)-continuă, din $x_n \xrightarrow{o} x$ rezultă $x_n \xrightarrow{\tau} x$.

Într-adevăr, există $\{v_n\}_{n\in N}$ aşa ca

$$|x_n - x| \leqslant v_n \downarrow \mathbf{0}$$

şi n-avem decît să ţinem seama de propoziţia 1.7.

PROPOZIŢIA 2.3.2. *Orice spaţiu τ-reticulat cvasinormat a cărei topologie este (o)-continuă, este un spaţiu (liniar complet reticulat) de tip (o)-numărabil*[13]).

Demonstraţie. Să presupunem că ar exista o mulţime nenumărabilă A de elemente (nenule) ortogonale două cîte două, care să fie (o)-mărginită. Fie q cvasinorma spaţiului considerat şi pentru orice $n\in N$ să punem

$$A_n = \left\{ x \,|\, q(x) > \frac{1}{n}\,;\ \ x\in A \right\}.$$

Deoarece

$$A = \bigcup_{n\in N} A_n$$

există $n_0\in N$ aşa ca mulţimea A_{n_0} să fie nenumărabilă. Fie $\{x_n\}_{n\in N}$ un şir de elemente distincte două cîte două din A_{n_0}. Dacă şirul ar fi (o)-mărginit, ar rezulta $x_n \xrightarrow{o} \mathbf{0}$ de unde $q(x_n) \to 0$. Dar

$$q(x_n) > \frac{1}{n_0}, \qquad (n\in N)$$

ceea ce este contradictoriu.

---

[12]) A se vedea de exemplu [8].

[13]) Un spaţiu liniar reticulat este de tip (o)-numărabil, dacă orice submulţime (o)-mărginită a sa formată din elemente (nenule) ortogonale două cîte două, este cel mult numărabilă.

2.4. SPAŢII RETICULATE BORNOLOGICE

Dacă $\mathfrak{X}$ este un spaţiu reticulat local convex (în raport cu o topologie τ) şi dacă $\mathfrak{X}$ este un spaţiu bornologic în raport cu τ, atunci $\mathfrak{X}$ se numeşte *spaţiu reticulat bornologic.*

Propoziţia 2.4.1. *Orice spaţiu reticulat bornologic este pozitiv bornologic.*

Aceasta rezultă din corolarul propoziţiei 2.2.2 şi din propoziţia 2.2.1.

Vom nota cu $\hat{\mathfrak{X}}$ extensia prin tăieturi a unui spaţiu liniar reticulat arhimedian $\mathfrak{X}$.

Definiţia 2.4.1. Dacă $\mathfrak{X}$ este un spaţiu reticulat local convex, cu topologia τ, se numeşte *extensia naturală* a lui τ, pe $\hat{\mathfrak{X}}$, topologia $\hat{\tau}$ definită pe $\hat{\mathfrak{X}}$ de familia tuturor seminormelor de forma

$$(1)\qquad \hat{p}(y) = \inf_{\substack{x \geqslant |y| \\ x \in \mathfrak{X}}} p(x), \quad (y \in \hat{\mathfrak{X}}),$$

unde p este o seminormă solidă şi (τ)-continuă oarecare pe $\mathfrak{X}$.

Este evident că topologia $\hat{\tau}$ induce pe $\mathfrak{X}$ topologia τ.

Se verifică de asemenea uşor că fiecare seminormă $\hat{p}$ este solidă, deci $\hat{\mathfrak{X}}$ este un spaţiu reticulat local convex cu topologia $\hat{\tau}$.

Lema 2.4.1. *Dacă $\mathfrak{Y}$ este un spaţiu reticulat local convex şi q o seminormă mărginită pe orice mulţime topologic mărginită a lui $\mathfrak{Y}$, atunci prin formula*

$$(2)\qquad q'(y) = \sup_{0 \leqslant z \leqslant |y|} q(z), \quad (y \in \mathfrak{Y})$$

se obţine o seminormă solidă avînd aceeaşi proprietate de mărginire.

Demonstraţie. Dacă A este o parte topologic-mărginită a lui $\mathfrak{Y}$, atunci şi acoperirea solidă so (A) a lui A este topologic mărginită (propoziţia 1.6).

Dacă

$$z \in \operatorname{so}(A) \Rightarrow q(z) \leqslant \lambda$$

atunci

$$0 \leqslant z \leqslant |y|, \; y \in \operatorname{so}(A) \Rightarrow q(z) \leqslant \lambda$$

şi deci $q'(y) \leqslant \lambda$. Deci q' este mărginită pe so (A) şi cu atît mai mult pe A.

Propoziţia 2.4.2. *Dacă $\mathfrak{X}$ este un spaţiu reticulat bornologic (cu topologia τ), atunci $\hat{\mathfrak{X}}$ este de asemenea un spaţiu reticulat bornologic în raport cu extensia naturală $\hat{\tau}$ a lui τ.*

Demonstraţie. După cum am mai remarcat, $\hat{\mathfrak{X}}$ este un spaţiu reticulat local convex în raport cu topologia $\hat{\tau}$. Rămîne să arătăm că $\hat{\mathfrak{X}}$ este un spaţiu bornologic în raport cu $\hat{\tau}$.

Fie q o seminormă definită pe $\hat{\mathfrak{X}}$ care să fie mărginită pe orice parte ($\hat{\tau}$)-mărginită a lui $\hat{\mathfrak{X}}$. Fie q' seminorma dată de formula (2) (în care luăm

$\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}$). Atunci q' este o seminormă solidă şi mărginită pe orice parte $(\hat{\tau})$-mărginită a lui $\hat{\mathfrak{X}}$. Dacă notăm cu p restricţia lui q' la spaţiul $\mathfrak{X}$, atunci p este o seminormă solidă şi mărginită pe orice parte (τ)-mărginită a lui $\mathfrak{X}$. Spaţiul $\mathfrak{X}$ fiind bornologic, seminorma p este (τ)-continuă. Dacă $|y| \leqslant x$ cu $y \in \hat{\mathfrak{X}}$ şi $x \in \mathfrak{X}$, atunci

$$q'(y) \leqslant q'(x) = p(x)$$

şi cu formula (1) rezultă

$$q'(y) \leqslant \hat{p}(y). \tag{3}$$

Deoarece

$$q(y) = q(y_+ - y_-) \leqslant q(y_+) + q(y_-) \leqslant 2q'(y)$$

cu (3) rezultă

$$q(y) \leqslant 2\hat{p}(y), \quad (y \in \hat{\mathfrak{X}})$$

şi în consecinţă q este $(\hat{\tau})$-continuă pe $\hat{\mathfrak{X}}$.

Propoziţia este demonstrată.

PROPOZIŢIA 2.4.3. *Fie τ' o topologie pe $\hat{\mathfrak{X}}$ faţă de care $\hat{\mathfrak{X}}$ este un spaţiu reticulat bornologic şi care induce pe $\mathfrak{X}$ topologia τ. O condiţie necesară şi suficientă ca τ' să coincidă cu $\hat{\tau}$, este următoarea: dacă $0 \leqslant f \in \mathfrak{X}_\tau^*$ şi dacă g este o prelungire a lui f pe $\hat{\mathfrak{X}}$ cu păstrarea liniarităţii şi pozitivităţii, atunci g este (τ')-continuă.*

Demonstraţie. Necesitatea. Fie $0 \leqslant f \in \mathfrak{X}_\tau^*$ şi fie g o prelungire a lui f pe spaţiul $\hat{\mathfrak{X}}$, cu păstrarea liniarităţii şi pozitivităţii. Funcţionala f fiind liniară şi (τ)-continuă, există o seminormă, solidă şi (τ)-continuă p pe spaţiul $\mathfrak{X}$ aşa ca

$$|f(x)| \leqslant p(x), \quad (x \in \mathfrak{X}). \tag{4}$$

Fie y un element pozitiv oarecare al lui $\hat{\mathfrak{X}}$. Dacă $x \in \mathfrak{X}$ şi $x \geqslant y$, atunci cu (4) avem

$$g(y) \leqslant g(x) = f(x) \leqslant p(x)$$

de unde rezultă

$$g(y) \leqslant \hat{p}(y).$$

Deoarece seminorma $\hat{p}$ este solidă, pentru un element oarecare $y \in \mathfrak{Y}$, rezultă

$$|g(y)| \leqslant g(|y|) \leqslant \hat{p}(|y|) = \hat{p}(y).$$

Deci g este o funcţională $(\hat{\tau})$-continuă.

Suficienţa. Deoarece τ' induce pe $\mathfrak{X}$ topologia τ, pentru orice seminormă solidă şi (τ')-continuă p' pe spaţiul $\hat{\mathfrak{X}}$, există o seminormă solidă şi (τ)-continuă p pe spaţiul $\mathfrak{X}$ aşa ca

$$p'(x) \leqslant p(x), \quad (x \in \mathfrak{X}). \tag{5}$$

Dacă $|y| \leqslant x$ cu $y \in \hat{\mathfrak{X}}$ şi $x \in \mathfrak{X}$, atunci cu (5) şi cu faptul că p' este solidă rezultă

$$p'(y) \leqslant p'(x) \leqslant p(x)$$

de unde cu definiţia lui $\hat{p}$ rezultă imediat că

$$p'(y) \leqslant \hat{p}(y).$$

Am arătat deci că $\tau' \leqslant \hat{\tau}$ de unde rezultă

$$\hat{\mathfrak{X}}^*_{\tau'} \subset \hat{\mathfrak{X}}^*_{\hat{\tau}}. \tag{6}$$

Vom stabili acum incluziunea de sens contrar.

Fie $g \in \hat{\mathfrak{X}}^*_{\hat{\tau}}$. Atunci $g = g_+ - g_-$ cu g_+, g_- (τ)-continue (consecinţă a propoziţiei 2.13.). Să notăm cu f_1 şi f_2 restricţiile lui g_+ şi g_- la spaţiul $\mathfrak{X}$. Evident f_1 şi f_2 sînt funcţionale liniare, pozitive şi (τ)-continue pe $\mathfrak{X}$. Deoarece g_+ este o prelungire a lui f_1 pe $\hat{\mathfrak{X}}$ cu păstrarea liniarităţii şi pozitivităţii, g_+ este prin ipoteză (τ')-continuă. Analog g_- este (τ')-continuă. Deci $g \in \hat{\mathfrak{X}}^*_{\tau'}$, ceea ce arată că

$$\hat{\mathfrak{X}}^*_{\hat{\tau}} \subset \hat{\mathfrak{X}}^*_{\tau'},$$

De aici şi din (6) rezultă

$$\hat{\mathfrak{X}}^*_{\tau'} = \hat{\mathfrak{X}}^*_{\hat{\tau}}. \tag{7}$$

Deoarece $\hat{\mathfrak{X}}$ este un spaţiu Mackey în raport cu fiecare din topologiile τ', $\hat{\tau}$, din (7) rezultă $\tau' = \hat{\tau}$.

Propoziţia este demonstrată.

Observaţie. Fie $\mathfrak{Y}$ un spaţiu liniar reticulat şi $\mathfrak{X}$ un subspaţiu liniar reticulat majorant[14]) în spaţiul $\mathfrak{Y}$. Dacă $\mathfrak{X}$ este un spaţiu reticulat local convex în raport cu o topologie τ, atunci τ se poate extinde pe $\mathfrak{Y}$ ca şi în cazul extensiei prin tăieturi. Spaţiul $\mathfrak{Y}$ nu este în general separat în raport cu extensia topologiei τ.

---

[14]) Subspaţiul $\mathfrak{X}$ este majorant în spaţiul $\mathfrak{Y}$, dacă pentru orice element $x \in \mathfrak{Y}$, există un element $x \in \mathfrak{X}$ aşa ca $|y| \leqslant x$.

25. SPAȚII RETICULATE LOCAL CONVEXE CU TOPOLOGII (ω)-CONTINUE

Observația 2.5.1. O topologie τ pe un spațiu liniar reticulat $\mathfrak{X}$ se numește (ω)-*continuă*, dacă pentru orice șir generalizat $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ de elemente din $\mathfrak{X}$ așa ca $x_\delta \downarrow \mathbf{0}$, rezultă $x_\delta \xrightarrow{\tau} \mathbf{0}$.

PROPOZIȚIA 2.5.1. *Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu reticulat local convex cu topologie* (*o*)-*continuă* [15]. *Dacă $\mathfrak{X}$ este de tip* (*o*)-*numărabil, atunci topologia τ a lui $\mathfrak{X}$ este* (ω)-*continuă.*

Demonstrație. Dacă $x_\delta \downarrow \mathbf{0}$ în $\mathfrak{X}$, atunci $x_\delta \downarrow \mathbf{0}$ și în extensia prin tăieturi $\hat{\mathfrak{X}}$ a lui $\mathfrak{X}$. Dar odată cu $\mathfrak{X}$ și spațiul $\hat{\mathfrak{X}}$ este de tip (*o*)-numărabil ([22], lema 3). Există atunci un șir crescător de indici $\delta_n \in \Delta$, $(n \in N)$ așa ca $x_{\delta_n} \downarrow \mathbf{0}$ ([25], lema VI, 3.1). Rezultă $x_{\delta_n} \xrightarrow{\tau} \mathbf{0}$ deoarece τ este (*o*)-continuă. Dacă φ este o seminormă solidă și (τ) -continuă oarecare pe spațiul $\mathfrak{X}$, atunci din $x_\delta \downarrow$ și $x_{\delta_n} \xrightarrow{\tau} \mathbf{0}$ rezultă $\varphi(x_\delta) \to 0$. Deci $x_\delta \xrightarrow{\tau} \mathbf{0}$, adică topologia τ este (ω)-continuă.

În propoziția următoare vom nota cu $\mathfrak{X}^*_\omega$ mulțimea funcționalelor liniare și (ω)-continue [16] definite pe un spațiu liniar reticulat $\mathfrak{X}$.

PROPOZIȚIA 2.5.2. *Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu reticulat local convex, a cărei topologie τ este* (ω)-*continuă. Dacă estensia prin tăieturi $\hat{\mathfrak{X}}$ a lui $\mathfrak{X}$ este un spațiu reticulat local convex în raport cu o topologie τ' care induce pe $\mathfrak{X}$ topologia τ, atunci și τ' este* (ω)-*continuă.*

Demonstrație. Fie g o funcțională liniară și (τ')-continuă pe spațiul $\hat{\mathfrak{X}}$. Să notăm cu f_1, f_2 restricțiile lui g_+, g_- la spațiul $\mathfrak{X}$. Deoarece topologia τ este (ω)-continuă, avem

$$\mathfrak{X}^*_\tau \subset \mathfrak{X}^*_\omega.$$

deci

$$\mathbf{0} \leqslant f_1, f_2 \in \mathfrak{X}^*_\omega.$$

Rezultă (a se vedea [25] teorema X 4.2 și [24] lema 6) că g_+ și g_- sînt (ω)-continue, deci și g este (ω)-continuă. Are deci loc incluziunea

$$\hat{\mathfrak{X}}^*_\tau \subset \hat{\mathfrak{X}}^*_\omega$$

de unde rezultă că τ' este (ω)-continuă (a se vedea [11], lema 2.4.1).

COROLAR. *Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu reticulat local convex* [17] (τ)-*complet și dacă topologia τ este* (ω)-*continuă, atunci $\mathfrak{X}$ este un spațiu liniar complet reticulat.*

Într-adevăr, în baza propoziției 2.5.1 extensia naturală $\hat{\tau}$ a lui τ pe $\hat{\mathfrak{X}}$ este (ω)-continuă. Fie $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ un șir generalizat monoton crescător, majorat, de elemente din $\mathfrak{X}$. Atunci există $y \in \hat{\mathfrak{X}}$ aşa ca $x_\delta \uparrow y$ în $\hat{\mathfrak{X}}$. Rezultă $x \xrightarrow{\hat{\tau}} y$ şi deci $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ este un şir Cauchy generalizat (în raport cu $\hat{\tau}$) în $\hat{\mathfrak{X}}$ şi deci şi în $\mathfrak{X}$ (în raport cu τ). Deoarece $\mathfrak{X}$ este (τ)-complet, rezultă $y \in \mathfrak{X}$ şi $y = \bigvee x_\delta$ în spaţiul $\mathfrak{X}$.

---

[15] A se vedea definiția 2.3.2.

[16] Adică continue în raport cu (*o*)-convergența șirurilor generalizate.

[17] Amintim că presupunem topologia separată.

2.6. SPAŢII DE TIP *KP*

DEFINIŢIA 2.6.1. Se numeşte spaţiu de tip *KP* orice spaţiu σ-reticulat local convex [18]) a cărei topologie τ este (o)-continuă şi în care orice şir monoton crescător de elemente pozitive care este (τ)-mărginit este şi (o)-mărginit.

Noţiunea de spaţiu de tip *KP* a fost introdusă în [2] sub o formă echivalentă, cerînd însă ca spaţiul să fie şi complet reticulat.

PROPOZIŢIA 2.6.1. *Pentru ca un şir* $\{x_n\}_{n\in N}$ *de elemente ale unui spaţiu de tip KP să fie* (o)-*mărginit, este necesar şi suficient ca mulţimea E a tuturor elementelor de forma*

$$|x_n| \vee |x_{n+1}| \vee \cdots \vee |x_{n+m}|, \qquad (n, m \in N)$$

să fie (τ)-*mărginită.*

Demonstraţie. Dacă şirul $\{x_n\}_{n\in N}$ este (o)-mărginit, atunci mulţimea E din enunţul propoziţiei este (o)-mărginită şi deci este şi (τ)-mărginită.

Reciproc, dacă mulţimea E este (τ)-mărginită, atunci punînd

$$y_n = \bigvee_{i=1}^{n} |x_i| \quad , \quad (n \in N)$$

avem $0 \leqslant y_n \uparrow$ şi şirul $\{y_n\}_{n\in N}$ este (τ)-mărginit. În baza definiţiei 2.6.1, şirul $\{y_n\}_{n\in N}$ este (o)- mărginit, de unde rezultă că şirul $\{x_n\}_{n\in N}$ este (o)-mărginit.

PROPOZIŢIA 2.6.2. *Fie* $\{x_n\}_{n\in N}$ *un şir de elemente ale unui spaţiu de tip KP. Pentru ca* $x_n \xrightarrow{o} 0$, *este necesar şi suficient ca pentru orice seminormă solidă şi* (τ)-*continuă* φ *pe* $\mathfrak{X}$ *şi pentru orice număr* $\varepsilon > 0$, *să existe un număr natural* $n_0 = n_0(\varphi, \varepsilon)$ *aşa ca*

$$\varphi\left(\bigvee_{i=n}^{n+m} |x_i|\right) < \varepsilon \quad , \quad (n > n_0 ;\ \forall\, m \in N) \tag{1}$$

Demonstraţie. Dacă $x_n \xrightarrow{o} 0$, atunci

$$\varphi\left(\bigvee_{i=n}^{\infty} |x_i|\right) \longrightarrow 0$$

oricare ar fi seminorma (τ)-continuă φ pe $\mathfrak{X}$. Dacă φ este în plus solidă, atunci rezultă imediat (1).

---

[18]) Adică un spaţiu reticulat local convex care este şi σ-reticulat ca spaţiu liniar ordonat.

Reciproc, dacă (1) are loc şi ţinem seamă de faptul că φ este solidă, deducem cu uşurinţă că şirul $\left\{\varphi\left(\bigvee_{i=}^{k}|x_i|\right)\right\}_{k\in N}$ este mărginit. Cum φ a fost o seminormă solidă şi (τ)-continuă oarecare, şirul $\left\{\bigvee_{i=1}^{k}|x_i|\right\}_{k\in N}$ este (τ)-mărginit şi deci (o)-mărginit (în baza definiţiei 2.6.1). Deoarece φ este (o)-continuă, din (1) rezultă imediat

$$\varphi\left(\bigvee_{i=n}^{\infty}|x_i|\right)\leqslant\varepsilon\quad,\quad(n\geqslant n_0).$$

Ţinînd iarăşi seama că φ a fost o seminormă solidă şi (τ)-continuă oarecare, şirul $\left\{\bigvee_{i=n}^{\infty}|x_i|\right\}_{n\in N}$ (τ)-converge către 0, iar cu propoziţia 1.7 şirul (o)-converge către **0**. Rezultă $x_n\xrightarrow{o}\mathbf{0}$.

Observaţie. Fie $\mathfrak{X}$ un spaţiu liniar. Vom nota prin $s(\mathfrak{X})$ mulţimea tuturor şirurilor de elemente din $\mathfrak{X}$ şi cu $s_0(\mathfrak{X})$ submulţimea lui $s(\mathfrak{X})$ formată din toate şirurile care au numai un număr finit de termeni nenuli. Organizăm $s_0(\mathfrak{X})$ ca spaţiu liniar cu operaţiile naturale. Dacă $X\in s(\mathfrak{X})$, vom nota cu $v(X)$ mulţimea valorilor şirului X. Vom spune că o seminormă ψ pe $s_0(\mathfrak{X})$ are *proprietatea* (V), dacă din $v(X)=v(Y)$ rezultă $\psi(X)=\psi(Y)$.

Un spaţiu liniar $\mathfrak{X}$ se numeşte *spaţiu de tip VP* (a se vedea şi [3]) dacă pe $s_0(\mathfrak{X})$ este dată o mulţime suficientă (şi dirijată) de seminorme cu proprietatea V.

Dacă $\mathfrak{X}$ este un spaţiu liniar reticulat iar φ este o seminormă solidă pe $\mathfrak{X}$, atunci punînd

$$\psi(X)=\varphi\left(\bigvee_{n\in N}|x_n|\right)$$

(dacă $X=\{x_n\}_{n\in N}\in s_0(\mathfrak{X})$), obţinem o seminormă pe $s_0(\mathfrak{X})$, care are proprietatea (V). Cu propoziţia 2.6.2, (o)-convergenţa într-un spaţiu de tip *KP*, se poate exprima ca un anumit tip de convergenţă într-un spaţiu de tip *VP* (a se vedea [4]).

PROPOZIŢIA 2.6.3. *Dacă $\mathfrak{X}$ este un spaţiu de tip KP şi de tip* (o)*-numărabil, atunci şi extensia sa prin tăieturi $\hat{\mathfrak{X}}$ este un spaţiu de tip KP* (*şi de tip* (o)*-numărabil*) *în raport cu extensia naturală $\hat{\tau}$ a topologiei τ din $\mathfrak{X}$.*

Demonstraţie. Topologia τ din $\mathfrak{X}$ este (ω)-continuă în baza propoziţiei 2.5.1. Cu propoziţia 2.5.2, topologia $\hat{\tau}$ în spaţiul $\hat{\mathfrak{X}}$ este de asemenea (ω)-continuă şi în particular (o)-continuă.

Fie acum $\{y_n\}_{n\in N}$ un şir monoton crescător de elemente pozitive din $\hat{\mathfrak{X}}$ care să nu fie majorat. Spaţiul $\hat{\mathfrak{X}}$ fiind de tip (o)-numărabil, există un şir $\{x_n\}_{n\in N}$ monoton crescător nemajorat de elemente din $\mathfrak{X}$ aşa ca

$$\mathbf{0}\leqslant x_n\leqslant y_n,\quad(n\in N).$$

Există atunci o seminormă solidă (τ)-continuă p pe spaţiul $\mathfrak{X}$ aşa ca $p(x_n)\to+\infty$, de unde rezultă imediat $\hat{p}(y_n)\to+\infty$.

Observație. Propoziția 2.6.3. rămîne adevărată dacă se înlocuiește $\hat{\tau}$ cu orice topologie τ' pe $\hat{\mathfrak{X}}$ pentru care $\hat{\mathfrak{X}}$ este un spațiu reticulat local convex și care induce pe $\mathfrak{X}$ topologia τ.

DEFINIȚIA 2.6.2. Se numește *spațiu de tip LP*, orice spațiu de tip *KP* a cărei topologie τ poate fi definită de o mulțime de seminorme solide care sînt aditive pentru termeni pozitivi.

PROPOZIȚIA 2.6.4. *Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu reticulat local convex a cărei topologie τ poate fi definită de o mulțime Φ de seminorme solide care sînt aditive pentru termeni pozitivi. Dacă $\mathfrak{X}$ este secvențial (τ)-complet, atunci $\mathfrak{X}$ este un spațiu de tip LP.*

Demonstrație. Fie $\mathbf{0} \leqslant x_n \underset{n\in N}{\uparrow}$ și să presupunem că pentru fiecare $\varphi \in \Phi$, șirul $\{\varphi(x_n)\}_{n\in N}$ este mărginit. Fiecare seminormă φ fiind solidă, șirul $\{\varphi(x_n)\}_{n\in N}$ este monoton crescător și deci convergent. Ținînd seama că φ este și aditivă, pentru termeni pozitivi, deducem imediat că $\lim\limits_{m,n} \varphi(x_m - x_n) = 0$. Spațiul $\mathfrak{X}$ fiind (τ)-complet, există $x = (\tau)\text{-}\lim x_n$ și cu propoziția 1.7 rezultă $x = \bigvee x_n$. Folosind acest rezultat se arată ușor că $\mathfrak{X}$ este σ-reticulat. Proprietatea de (o)-continuitate a topologiei τ se stabilește de asemenea ușor, ținînd seama că dacă $x_n \downarrow \mathbf{0}$, atunci $\mathbf{0} \leqslant x_1 - x_n \uparrow x_1$.

Observație. Se poate stabili următoarea propoziție[19]).

Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu liniar complet reticulat cu unitate și dacă există o mulțime suficientă de funcționale liniare (o)-continue pe $\mathfrak{X}$, atunci $\mathfrak{X}$ admite o lărgire[20]) care este un spațiu de tip *LP*.

2.7. SPAȚII CU *M*-UNITATE

DEFINIȚIA 2.7.1. Se numește *spațiu cu M-unitate*, orice spațiu liniar σ-reticulat $\mathfrak{X}$ care posedă un element unitate[21]) u și în care există o mulțime totală E de elemente unitare cu proprietatea : pentru orice $x \in \mathfrak{X}$ și $e \in E$ există $\xi \in R$ așa ca

$$[e]\,|x| \leqslant \xi u\,. \tag{1}$$

Inegalitatea (1) este evident echivalentă cu inegalitatea

$$[e]\,|x| \leqslant \xi e\,. \tag{2}$$

În definiția 2.4.4 mulțimea E se poate presupune dirijată (în raport cu ordinea din $\mathfrak{X}$) deoarece în caz contrar putem adăuga lui E marginile superioare ale părților sale finite, cu păstrarea proprietății exprimate prin inegalitatea (1).

---

[19]) A se vedea [4].

[20]) Amintim definiția lărgirii (dată în [5]). Un subspațiu liniar $\mathfrak{X}_0$ al unui spațiu liniar reticulat se numește normal, dacă $\mathfrak{X}_0$ este o mulțime solidă; subspațiul liniar $\mathfrak{X}_0$ se zice total dacă din $x \perp \mathfrak{X}_0$ rezultă $x = \mathbf{0}$; un spațiu liniar reticulat $\mathfrak{Y}$ este o lărgire a unui spațiu liniar reticulat $\mathfrak{X}$, dacă $\mathfrak{X}$ este izomorf cu un subspațiu normal și total $\mathfrak{Y}_0$ al lui $\mathfrak{Y}$.

[21]) Amintim că un element a al unui spațiu liniar reticulat se zice total, dacă din $x \perp a$ rezultă $x = \mathbf{0}$. Se numește spațiu cu unitate, un spațiu liniar reticulat $\mathfrak{X}$ care posedă elemente totale și în care se fixează un element total u care se numește element unitate. Un element e al unui spațiu cu unitate se numește unitar, dacă $e \wedge (u - e) = \mathbf{0}$. Dacă a este un element al unui spațiu liniar σ-reticulat, se notează prin $[a]$ proiectorul generat de elementul a.

Fie $\mathcal{X}$ un spațiu cu M-unitate și fie E o mulțime totală de elemente unitare cu proprietatea din definiția 2.7.1. Pentru orice $e \in E$ să punem

$$\|x\|_e = \inf\{\xi \mid [e]\,|x| \leqslant \xi e\}.$$

Se verifică ușor că aplicația $x \to \|x\|_e$ este o seminormă solidă pe $\mathcal{X}$ și că

$$e_1 \leqslant e_2 \Rightarrow \|x\|_{e_1} \leqslant \|x\|_{e_2}.$$

Deci $\mathcal{X}$ este un spațiu reticulat local convex în raport cu topologia τ definită de familia de seminorme $\{\|\cdot\|_e\}_{e\in E}$.

Deoarece $\mathcal{X}$ este un spațiu arhimedian, are loc inegalitatea

$$[e]\,|x| \leqslant \|x\|_e\, e,$$

oricare ar fi $x \in \mathcal{X}$ și $e \in E$.

Se verifică de asemenea cu ușurință că

$$x, y \geqslant \mathbf{0} \Rightarrow \|x \vee y\|_e = \max(\|x\|_e, \|y\|_e),$$

oricare ar fi $e \in E$.

Un spațiu liniar σ-reticulat $\mathcal{Y}$ se numește spațiu cu unitate tare (a se vedea de exemplu [5]), dacă există un element $v \in \mathcal{Y}$ (numit unitate tare) cu proprietatea : pentru orice element $y \in \mathcal{Y}$ există un număr η astfel ca $|y| \leqslant \eta v$. Un spațiu cu M-unitate este deci un spațiu liniar σ-reticulat în care există o mulțime totală E de elemente unitare, astfel ca fiecare element $e \in E$ să fie unitate tare în subspațiul $[e]\,\mathcal{X}$.

PROPOZIȚIA 2.7.1. *Fie $\mathcal{X}$ un spațiu cu M-unitate și $\{x_n\}_{n\in N}$ un șir (o)-mărginit de elemente ale lui $\mathcal{X}$. Dacă $x_n \xrightarrow{\tau} x$, atunci $x_n \xrightarrow{o} x$.*

Demonstrație. Putem evident să ne limităm la cazul $x = \mathbf{0}$.

Din $x_n \xrightarrow{\tau} \mathbf{0}$ și din

$$[e]\,|x_n| \leqslant \|x_n\|_e\, e$$

rezultă

$$(o)\text{-}\lim\, [e]\,|x_n| = \mathbf{0}$$

și deci

$$[e]\,\overline{\lim}\, |x_n| = \mathbf{0}, \quad (\forall e \in E). \tag{3}$$

Pe de altă parte, mulțimea E fiind totală, pentru orice element $a \geqslant \mathbf{0}$ avem

$$\sup_{e\in E}\, [e]\, a = a.$$

Luînd $a = \overline{\lim}\, |x_n|$, cu (3), rezultă $\overline{\lim}\, |x_n| = \mathbf{0}$ deci $x_n \xrightarrow{o} \mathbf{0}$.

Observație. Propoziția 2.7.1 are loc și pentru șiruri generalizate dacă spațiul $\mathcal{X}$ este și complet reticulat.

PROPOZIȚIA 2.7.2. *Produsul unei familii de spații liniare σ-reticulate cu unitate tare este un spațiu cu M-unitate.*

Demonstrație. Fie $\{\mathcal{X}_j\}_{j\in J}$ o familie de spații liniare σ-reticulate cu unitate tare și

$$\mathcal{X} = \prod_{j\in J} \mathcal{X}_j$$

spaţiul liniar σ-reticulat produs ([5], Cap. II, 4.6). Fie u_j unitate tare în spaţiul $\mathfrak{X}_j$. Să punem $u = \{u_j\}_{j \in J}$ şi

$$e_j = \{\delta_{jh}\, u_h\}_{h \in J},$$

unde δ_{jh} este simbolul lui Kronecker.

Elementul u este total în $\mathfrak{X}$, după cum se verifică uşor. Vom considera deci u element unitate în $\mathfrak{X}$.

Elementele e_j sînt elemente unitare.

Mulţimea E a elementelor e_j este totală în $\mathfrak{X}$. Într-adevăr, dacă $x \perp e_j$, unde $x = \{x_j\}_{j \in J}$, atunci $x_j \perp u_j$ de unde $x_j = \mathbf{0}$.

Dacă $x = \{x_j\}_{j \in J} \in \mathfrak{X}$ şi

$$|x_j| \leqslant \lambda_j u_j,$$

atunci

$$[e_j]\,|x| = \{\delta_{jh}\,|x_h|\}_{h \in J} \leqslant \{\delta_{jh}\,\lambda_h u_h\}_{h \in J} = \lambda_j e_j .$$

Propoziţia este demonstrată.

Propoziţia 2.7.3. *Orice spaţiu cu M-unitate se poate scufunda într-un produs de spaţii cu unitate tare.*

Într-adevăr, $\{[e]\mathfrak{X}\}_{e \in E}$ formează un sistem total de componente iar fiecare din ele este un spaţiu cu unitate tare. Se ştie (a se vedea de exemplu [5], Cap. II, 4.6) că $\mathfrak{X}$ se scufundă în spaţiul produs

$$\mathfrak{Y} = \prod_{e \in E} [e]\mathfrak{X} .$$

Observaţie. Se poate de asemenea observa că orice spaţiu cu M-unitate admite o descompunere în componente cu unitate tare.

Spaţiile cu M-unitate reprezintă o particularizare a spaţiilor de tip M^* introduse în [4][21]).

§ 3. OPERATORI LINIARI MĂRGINIŢI

3.1 OPERATORI LINIARI (τo)-MĂRGINIŢI[22])

Vom considera mai întîi cazul operatorilor definiţi pe un spaţiu liniar topologic oarecare.

Definiţia 3.1.1. Fie $\mathfrak{X}$ un spaţiu liniar topologic (cu topologia τ) iar $\mathfrak{Y}$ un spaţiu liniar ordonat. Un operator U care aplică $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Y}$ se numeşte *(τo)-mărginit*, dacă pentru orice mulţime (τ)-mărginită $A \subset \mathfrak{X}$, mulţimea $U(A)$ este (o)-mărginită.

---

[21]) În definiţia spaţiilor de tip M dată în [4] s-a pus şi condiţia ca spaţiul să fie complet reticulat, dar aceeaşi definiţie se poate da şi presupunînd că spaţiul este numai σ-reticulat. Spunînd că un spaţiu cu M-unitate este un caz particular de spaţiu de tip M^*, ne referim evident la spaţiile liniare σ-reticulare de tip M^*.

Pentru o reprezentare concretă a spaţiilor cu M-unitate τ-complete a se vedea [9].

[22]) Noţiunea de operator liniar (τo)-mărginit a fost introdusă în [6]. În această secţiune vom aminti unele rezultate din [6] arătînd anumite consecinţe şi vom considera şi un tip particular de operator (τo)-mărginit.

Dacă U este un operator liniar (τo)-mărginit definit pe un spațiu liniar topologic $\mathfrak{X}$, cu valori într-un spațiu liniar complet reticulat $\mathfrak{Y}$, atunci pentru orice parte (τ)-mărginită A a lui $\mathfrak{X}$, vom pune

$$\| U \|_A = \sup_{x \in A} | U(x) | .$$

Este evident că dacă U_1, U_2 și U sînt operatori liniari (τo)-mărginiți, atunci $U_1 + U_2$ și αU sînt de asemenea operatori liniari mărginiți (oricare ar fi $\alpha \in R$) și

$$\| U_1 + U_2 \|_A \leqslant \| U_1 \|_A + \| U_2 \|_A$$

$$\| \alpha U \|_A = | \alpha | \, \| U \|_A .$$

Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu liniar reticulat topologic, vom nota cu $\mathfrak{G}(\mathfrak{X})$ mulțimea tuturor părților solide și (τ)-mărginite ale lui $\mathfrak{X}$.

Observația 1. Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu liniar reticulat topologic și $\mathfrak{Y}$ un spațiu liniar ordonat.

Dacă U este un operator care aplică $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Y}$ astfel ca pentru orice $A \in \mathfrak{G}(\mathfrak{X})$, mulțimea $U(A)$ să fie (o)-mărginită, atunci U este $(\tau o\text{-})$-mărginit.

Într-adevăr, dacă A este o mulțime (τ)-mărginită oarecare, atunci și acoperirea solidă a lui A este (τ)-mărginită (propoziția 1.6).

În ceea ce urmează vom nota cu $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_r$ spațiul operatorilor regulați[23]) definiți pe un spațiu liniar reticulat $\mathfrak{X}$, cu valori într-un spațiu liniar complet reticulat $\mathfrak{Y}$.

Se știe (a se vedea de exemplu [5], Cap. V, § 1) că $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_r$ este un spațiu liniar complet reticulat (în raport cu ordinea : $U \leqslant V$ dacă $U(x) \leqslant V(x)$ pentru orice $x \geqslant 0$) și că $| U |$ în acest spațiu este dat de formula

$$| U | (x) = \sup_{|x'| \leqslant x} | U(x') | \tag{1}$$

oricare ar fi $x \geqslant 0$.

Observația 2. Dacă U este un operator aditiv și (τo)-mărginit care aplică un spațiu liniar reticulat topologic $\mathfrak{X}$ într-un spațiu liniar complet reticulat $\mathfrak{Y}$, atunci $U \in (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_r$.

Într-adevăr, dacă A este o parte (o)-mărginită a lui $\mathfrak{X}$, atunci A este și (τ)-mărginită și deci $U(A)$ este (o)-mărginită. Dar atunci U este un operator regulat în baza unei cunoscute teoreme (a se vedea de exemplu [5], Cap. V, teor. 1.2.13).

Vom nota cu $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_a^{\tau o}$ mulțimea operatorilor aditivi și (τo)-mărginiți care aplică $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Y}$.

PROPOZIȚIA 3.1.1. *Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu liniar reticulat topologic, iar $\mathfrak{Y}$ un spațiu liniar complet reticulat, atunci mulțimea $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_a^{\tau o}$ este un subspațiu normal al spațiului $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_r$.*

Demonstrație. Cu observația 2 avem

$$(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_a^{\tau o} \subset (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_r$$

---

[23]) Amintim că un operator regulat U este prin definiție un operator care se reprezintă sub forma $U = U_1 - U_2$, unde U_1 și U_2 sînt aditivi și pozitivi.

şi este evident că $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_a^{\tau o}$ este un subspaţiu liniar al spaţiului $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_r$. Fie $U \in (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_a^{\tau o}$ şi $V \in (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_r$. Dacă $0 \leqslant V \leqslant U$, atunci pentru orice mulţime $A \in \mathcal{G}$ şi orice $x \in A$ avem

$$|V(x)| \leqslant |U|_A$$

deci $V \in (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_a^{\tau o}$.

Să presupunem acum că V şi U nu sînt pozitivi, dar că $|V| \leqslant |U|$. Din (1) rezultă

$$||U|(x)| \leqslant |U|_A$$

oricare ar fi $x \in A$ şi $A \in \mathcal{G}(\mathfrak{X})$. Deci $|U| \in (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_a^{\tau o}$.

Din $0 \leqslant V_+ \leqslant |U|$ rezultă atunci $V_+ \in (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_a^{\tau o}$ şi analog $V_- \in (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_a^{\tau o}$. Deci $V \in (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_a^{\tau o}$.

COROLAR. *Dacă $\mathfrak{X}$ este un spaţiu liniar reticulat topologic iar $\mathfrak{Y}$ este un spaţiu liniar complet reticulat, atunci orice operator aditiv şi (τo)-mărginit care aplică $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Y}$ se descompune într-o diferenţă de doi operatori liniari* [24]) *pozitivi şi (τo)-mărginiţi.*

PROPOZIŢIA 3.1.2. *Fie $\mathfrak{X}$ un spaţiu liniar reticulat topologic, $\mathfrak{X}_0$ un subspaţiu normal al lui $\mathfrak{X}$ şi $\mathfrak{Y}$ un spaţiu liniar complet reticulat. Dacă U_0 este un operator liniar, pozitiv şi (τo)-mărginit definit pe $\mathfrak{X}_0$, cu valori în $\mathfrak{Y}$, atunci U_0 se poate prelungi pe spaţiul $\mathfrak{X}$ cu păstrarea liniarităţii pozitivităţii şi (τo)-mărginiţi.*

Într-adevăr, dacă pentru orice element $x \in \mathfrak{X}$ punem

$$U(x) = \sup_{\substack{0 \leqslant x' \leqslant x_+ \\ x' \in \mathfrak{X}_0}} U_0(x') - \sup_{\substack{0 \leqslant x'' \leqslant x_- \\ x'' \in \mathfrak{X}_0}} U_0(x'')$$

obţinem o prelungire a lui U_0 pe $\mathfrak{X}$, şi se poate arăta că U este un operator liniar pozitiv şi (τo)-mărginit [25]).

Observaţie. În baza corolarului propoziţiei 3.1.1, propoziţia 3.1.2 se poate enunţa şi pentru operatori liniari (τo)-mărginiţi oarecari, prelungirea păstrînd liniaritatea şi (τo)-mărginirea.

DEFINIŢIA 3.1.2. Un operator U care aplică un spaţiu local convex $\mathfrak{X}$ într-un spaţiu liniar reticulat $\mathfrak{Y}$ se numeşte (po)-*mărginit*, dacă există o seminormă (τ)-continuă p pe spaţiul $\mathfrak{X}$ şi un element $y_0 \in \mathfrak{Y}$ aşa ca

$$|U(x)| \leqslant p(x) y_0 \tag{2}$$

oricare ar fi $x \in \mathfrak{X}$.

Operatorii (po)-mărginiţi au fost consideraţi prima oară de L. Tstisas [23] (sub denumirea de operatori (τo)-mărginiţi).

Orice operator (po)-mărginit este evident (τo)-mărginit.

Dacă $\mathfrak{X}$ este un spaţiu reticulat local convex, atunci în (2)-seminorma p se poate considera nu numai (τ)-continuă dar şi solidă.

Cu această observaţie se demonstează cu uşurinţă :

---

[24]) Amintim că un operator regulat definit pe un spaţiu liniar reticulat, cu valori într-un spaţiu liniar reticulat arhimedian este un operator liniar.

[25]) A se vedea [6].

PROPOZIŢIA 3.1.3. *Dacă $\mathfrak{X}$ este un spaţiu reticulat local convex iar $\mathfrak{Y}$ un spaţiu liniar complet reticulat, atunci mulţimea operatorilor aditivi şi (po)-mărginiţi care aplică $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Y}$ este un subspaţiu normal al spaţiului* $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_a^{\tau^o}$.

Are de asemenea loc:

PROPOZIŢIA 3.1.4. *Pentru orice element $x_0 > 0$ al unui spaţiu reticulat local convex, pentru orice seminormă solidă şi (τ)-continuă p definită pe $\mathfrak{X}$ şi pentru orice element $y_0 > 0$ al unui spaţiu liniar complet reticulat $\mathfrak{Y}$, există un operator liniar, pozitiv şi (po)-mărginit U care aplică $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Y}$ aşa ca*

$$U(x_0) = p(x_0) y \tag{3}$$

$$|U(x)| \leqslant p(x) y_0, \quad (\forall x \in \mathfrak{X}). \tag{4}$$

Demonstraţie. Fie

$$\mathfrak{X}_0 = \{\lambda x_0 \mid \lambda \in R\}$$

şi să definim pe $\mathfrak{X}_0$ un operator liniar cu valori în $\mathfrak{Y}$ prin formula

$$U_0(\lambda x_0) = \lambda p(x_0) y_0 .$$

Cu teorema lui Hahn-Banach-Kantorovici ([5], Cap. V, 3.1.1), U_0 se poate prelungi pe $\mathfrak{X}$ într-un operator liniar U_1 care satisface condiţia

$$|U_1(x)| \leqslant p(x) y_0 , \quad (x \in \mathfrak{X}) .$$

De aici rezultă cu (1)

$$|U_1|(|x|) \leqslant p(x) y_0 , \quad (x \in \mathfrak{X})$$

deoarece p este solidă. Avem apoi

$$p(x_0) y_0 = U_1(x_0) \leqslant |U_1|(x_0) \leqslant p(x_0) y_0$$

deci

$$|U_1|(x_0) = p(x_0) y_0 .$$

Punînd $U = |U_1|$ (obţinem un operator liniar pozitiv şi (po)-mărginit care satisface (3) şi (4).

3.2. OBSERVAŢII PRIVIND SPAŢIILE DE OPERATORI REGULAŢI

Fie $\mathfrak{X}$ un spaţiu liniar ordonat şi $\mathfrak{Y}$ un spaţiu ordonat local convex cu topologia τ.

Fie $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_r$ spaţiul liniar ordonat al operatorilor liniari regulaţi care aplică $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Y}$.

Să notăm cu $\mathcal{M}_o(\mathfrak{X})$ mulţimea tuturor submulţimilor (o)-mărginite ale lui $\mathfrak{X}$ şi cu $\mathcal{M}_\tau(\mathfrak{Y})$ mulţimea tuturor submulţimilor (τ)-mărginite ale lui $\mathfrak{Y}$.

Dacă $U \in (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_r$ şi $A \in \mathcal{M}_o(\mathfrak{X})$, atunci $U(A) \in \mathcal{M}_\tau(\mathfrak{Y})$.

Să considerăm în $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_r$ topologia μ_τ a convergenţei uniforme pe $\mathcal{M}_o(\mathfrak{X})$, adică topologia definită de sistemul tuturor seminormelor de forma

$$p_A(U) = \sup_{x \in A} p(U(x)) ,$$

unde $A \in \mathcal{M}_0(\mathfrak{X})$, $U \in (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_r$ iar p este o seminormă monotonă și (τ)-continuă oarecare pe $\mathfrak{Y}$.

Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu liniar dirijat, atunci mulțimea tuturor segmentelor $[-x, x]$ cu $x \geqslant 0$ formează un sistem fundamental pentru $\mathcal{M}_0(\mathfrak{X})$ iar

$$[-x, x] \subset [0, x] - [0, x].$$

Topologia μ_τ este atunci definită de un sistem de seminorme monotone (și anume seminormele $q_x = p_{[0,x]}$ cu $x \geqslant 0$), deci $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_r$ devine un spațiu ordonat local convex.

Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu liniar reticulat, iar $\mathfrak{Y}$ un spațiu liniar complet reticulat, atunci $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_r$ este un spațiu liniar complet reticulat în care din $U_\delta \downarrow 0$ rezultă $U_\delta(x) \downarrow 0$ oricare ar fi $x \geqslant 0$. Deci dacă topologia τ este (o)-continuă (sau (ω)-continuă), atunci μ_τ este de asemenea (o)-continuă (respectiv (ω)-continuă).

Atrăgînd atenția asupra spațiilor de operatori regulați, înzestrate cu topologii de convergență uniformă, nu ne-am propus însă să facem, în această lucrare, un studiu al acestor spații.

Primită la redacție la 31 octombrie 1968

Universitatea din București
Facultatea de matematică-mecanică,
Str. Academiei nr. 14

ESPACES LINÉAIRES ORDONNÉS TOPOLOGIQUES

(RÉSUMÉ)

L'auteur présente certains contributions à la théorie des espaces linéaires ordonnés topologiques et des opérateurs linéaires.

Dans le § 1 on rappelle quelques notions de la théorie générale des espaces linéaires ordonnés topologiques en faisant aussi certaines remarques.

Dans le § 2 on considère dans les espaces linéaires ordonnés, des topologies satisfaisant à diverses conditions. En particulier on étudie plusieurs types de treillis localement convexes.

Dans le § 3 on considère des opérateurs linéaires définis sur un espace linéaire réticulé topologique, à valeurs dans un espace linéaire complètement réticulé.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques.* Paris, Ch. I–V, 1953–1955.
2. Romulus Cristescu, *Spații parțial ordonate pseudonormate.* Comunicările Acad. R.P.R., IV, 15–20 (1954).
3. Romulus Cristescu, *Asupra unei noțiuni de convergență.* Bul. științ. Acad. R.P.R., Secția de științe mat. și fiz., **6**, 297–304 (1954).
4. Romulus Cristescu, *Clase de spații liniare semiordonate pseudonormate.* St. cerc. mat., **7**, 291–305 (1956).
5. Romulus Cristescu, *Spații liniare ordonate.* Edit. Acad. R.P.R., București, 1959.

6. Romulus Cristescu, *Operatori liniari mărginiţi pe spaţii liniare reticulate topologice.* St. cerc. mat., **20**, 1313—1316 (1968).
7. Romulus Cristescu, *Sur l'extension de type Dedekind d'un espace réticulé localement convexe bornologique.* Revue Roumaine de math. pures et appl., **13**, 1293—1296 (1968).
8. Romulus Cristescu, *Analiză funcţională*, ediţia II-a, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1969.
9. G. Grigore, *Reprezentarea unor spaţii reticulate local convexe* (sub tipar).
10. L. W. Kantorovitsch, *Lineare halbgeordnete Räume.* Recueil Math. (Mat. Sbornik), **2** (**44**), 121—168 (1937).
11. Itizo Kawai, *Locally convex lattices.* Jour. of the Math. Soc. of Japan, *9*, 281—314 (1957).
12. М. Г. Крейн, *Основные свойства нормальных конических множеств в пространстве Банаха.* Доклады Акад. наук, **28**, 18—22 (1940).
13. H. Nakano, *Linear topologies on semi-ordered linear spaces.* Jour. Fac. Sci. Hokkaido Ujiv. ser I Math., **XII**, 88—104 (1953).
14. I. Namioka, *Partially ordered linear topological spaces.* Mem. Am. Math. Soc., *24*, (1957).
15. A. L. Peressini, *On topologies in ordered vector spaces.* Math. Annalen, **144**, 199—223 (1961).
16. G. T. Roberts, *Topologies in vector lattices.* Proc. Cambridge. Phil. Soc., **48** 533—546 (1952).
17. N. Popa, *Les duals des espaces de Fréchet ordonnés* (sub tipar).
18. H. H. Schaefer, *Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorsäume.* Math. Ann., **135**, 115—141 (1958).
19. H. H. Schaefer, *Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume* II. Math. Ann., **138** 259—286 (1959).
20. H. H. Schaefer, *Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume* III. Math. Ann., **141** 113—142 (1960).
21. H. H. Schaefer, *On the completeness of topological vector lattices.* Michigan Math. J., **7**, 303—309 (1960).
22. В. А. Соловьев, *О распространении монотонной нормы с нормированной структуры на ее пополнение по дедекинду.* Сибирский мат. журнал, **VII**, 1360—1369 (1966).
23. L. Tsitsas, *Integral representations of linear maps.* Bull. Soc. Mat. de Grèce, **6**, 298—355 (1965).
24. А. И. Векслер, *О гомоморфизме между классами регулярных операторов в К-линеалах и в их пополнениях.* Известия высш. учеб. зав. Математика, **1** (**14**), 48—57 (1960).
25. В. З. Вулих, *Введение в теорию полуупорядоченных пространств.* Москва, 1961

ELEMENTE DE GEOMETRIE ANALITICĂ PESTE UN CORP NEARHIMEDIAN

(II) ELEMENTE DE ALGEBRE AFINOIDE

DE

ANDREI DUMA

În această notă vom da definiţia şi vom prezenta primele proprietăţi ale algebrelor afinoide.

O parte din rezultate se vor da pe un cadru mai general decît în [10], [5] sau [15].

Am notat în mod constant prin „I” prima parte a acestei lucrări (Elemente de analiză nearhimediană).

§ 1. ALGEBRA FUNCŢIILOR STRICT ANALITICE PESTE UN INEL VALUAT NEARHIMEDIAN

1.1. Fie A un inel comutativ unitar integru nearhimedian şi nediscret. Vom nota prin $A[[X_1, \ldots , X_n]]$ algebra seriilor formale în n nedeterminate cu coeficienţii în A.

Fie $\rho_1, \ldots , \rho_n \in R^+$; se va nota :

$E_{\rho_1, \ldots, \rho_n}(A) = \{(a_1, \ldots , a_n) \in A^n ;\ |a_i| \leqslant \rho_i\}$ policilindrul de raze $\rho_1, \ldots, \rho_n$;

$\mathring{E}_{\rho_1, \ldots, \rho_n}(A) = \{(a_1, \ldots , a_n) \in A^n ;\ |a_i| < \rho_i\}$ interiorul policilindrului ;

$\partial E_{\rho_1, \ldots, \rho_n}(A) = E_{\rho_1, \ldots, \rho_n}(A) \setminus \mathring{E}_{\rho_1, \ldots, \rho_n}(A)$ bordul policilindrului ;

$$\tilde{E}_{\rho_1, \ldots, \rho_n}(A) = \frac{E_{\rho_1, \ldots, \rho_n}(A)}{\mathring{E}_{\rho_1, \ldots, \rho_n}(A)}.$$

În cazul $\rho_1 = \ldots = \rho_n = 1$, se vor nota $E^n(A)$, $\mathring{E}^n(A)$, $\partial E^n(A)$ şi $\tilde{E}^n(A)$.

1.2. A defini noţiunea de funcţie analitică pe un deschis din A^n la fel ca în cazul funcţiilor analitice de mai multe variabile complexe, este un fapt impropriu, căci conduce la o serie de patologii, care fac imposibilă ana-

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 5, P. 711–738 , BUCUREŞTI, 1969

logia cu cazul clasic (de exemplu existența unei funcții întregi egală cu 1 pe un policilindru și nulă în afara policilindrului).

De aceea în locul definiției „locale” se dă următoarea definiție globală :

DEFINIȚIA 1.3. O funcție $F : E_{\rho_1,\ldots,\rho_n}(A) \to A$ se spune strict analitică pe policilindrul $E_{\rho_1,\ldots,\rho_n}(A)$, dacă există $f = \sum a_{i_1,\ldots,i_n} X_1^{i_1}\ldots X_n^{i_n} \in A_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \ll X_1, X_2, \ldots, X_n \gg$ astfel ca : $F(x_1,\ldots,x_n) = \sum a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n} (\forall)\,(x_1,\ldots,x_n) \in E_{\rho_1,\ldots,\rho_n}(A)$.

Vom identifica F și f de acum înainte.

1.4. Reamintim că (I, §6) :

$$A_{\rho_1,\ldots,\rho_n}\ll X_1,\ldots,X_n\gg = \{f=\sum a_{i_1,\ldots,i_n}X_1^{i_1}\ldots X_n^{i_n}\in A[[X_1,\ldots,X_n]],\ \lim_{|i|\to\infty} |a_{i_1,\ldots,i_n}|\,\rho_1^{i_1}\ldots\rho_n^{i_n}=0\}$$

este o A-algebră normată cu :

$$\|f\|_{\rho_1,\ldots,\rho_n} = \max_i |a_{i_1,\ldots,i_n}|\,\rho_1^{i_1}\ldots\rho_n^{i_n}.$$

Dacă A este complet, atunci $A_{\rho_1,\ldots,\rho_n}\ll X_1,\ldots,X_n\gg$ este de asemenea complet.

Inelul polinoamelor $A[X_1,\ldots,X_n]$ este dens în $A_{\rho_1,\ldots,\rho_n}\ll X_1,\ldots,X_n\gg$.

Următorul rezultat elucidează problema elementelor inversabile din $A_{\rho_1,\ldots,\rho_n}\ll X_1,\ldots,X_n\gg$.

PROPOZIȚIA 1.5. $f\in A_{\rho_1,\ldots,\rho_n}\ll X_1,\ldots,X_n\gg$ *este unitate dacă și numai dacă termenul liber este inversabil și în modul este strict mai mare decît norma oricărui alt termen.*

Demonstrație. Fie mai întîi A corp și $\rho_1 = \ldots = \rho_n = 1$. Atunci înmulțind eventual cu un element din A se poate presupune că $\|f\| = 1$. Notăm cu $\tilde{A}$ corpul rezidual al lui A :

$$\tilde{A} = \frac{\mathring{A}}{t(A)} = \frac{\{a\in A\,;\,|a|\leqslant 1\}}{\{a\in A\,;\,|a|<1\}}.$$

Fie τ aplicația naturală de proiecție :

$$\tau : \mathring{A}\ll X_1,\ldots,X_n\gg \to \tilde{A}[X_1,\ldots,X_n].$$

Dacă f este inversabil în $A\ll X_1,\ldots,X_n\gg$, atunci $f.f^{-1}=1$, deci $\tau(f).\tau(f^{-1}) = 1$ (deci : $\tau(f^{-1}) = \tau(f)^{-1}$).

Dar singurele elemente inversabile din $\tilde{A}\,[X_1,\ldots X_n]$ sînt elementele nenule din $\tilde{A}$, deci $\tau(f) = \tau(a)$ cu $a\in A$, $|a| = 1$.

Rezultă : $f = a + f'$ cu $f'\in A\ll X_1,\ldots,X_n\gg$, $\|f'\| < 1$ și $f'(0,\ldots,0) = 0$.

Reciproc, dacă $f = \sum a_{i_1,\ldots,i_n}X_1^{i_1}\ldots X_n^{i_n}$ astfel ca : $|a_{0,\ldots,0}| = 1$ și $|a_{i_1,\ldots,i_n}| < 1$ $(\forall)\,(i_1,\ldots,i_n) \neq (0,\ldots,0)$, atunci putem presupune că $a_{0,\ldots,0} = 1$ și deci $f = 1 - f'$ cu $f'(0,\ldots,0) = 0$, $\|f'\| < 1$. Atunci $\sum_{i=0}^{\infty} f'^{i}$ este inversul lui f.

Fie acum cazul general; există o extindere a lui A — un corp valuat K — care extinde valuarea lui A și conține elementele $r_1, \ldots, r_n$ cu $|r_i| = \rho_i (1 \leqslant i \leqslant n)$. Notăm prin φ aplicația de substituție

$$A_{\rho_1 \ldots, \rho_n} \ll X_1, \ldots, X_n \gg \xrightarrow{\varphi} K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$$

definită de

$$\varphi(X_i) = r_i X_i (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Evident,

$$\| \varphi(g) \| = \| g \|_{\rho_1, \ldots, \rho_n} (\forall)\, g \in A_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \ll X_1, \ldots, X_n \gg,$$

de unde rezultă că termenul liber al lui f este în modul mai mare decît norma oricărui element al lui f dacă și numai dacă termenul liber al lui $\varphi(f)$ este în modul mai mare decît norma oricărui element al lui $\varphi(f)$.

Dacă f este inversabil, evident $a_0, \ldots, {}_0$ este inversabil în A. Rămîne deci să arătăm că inversul unui element $\varphi(g)$ este de forma $\varphi(h)$ dacă $a_0, \ldots, {}_0$ este inversabil în A și apoi ținem cont că φ este injectiv (ceea ce va implica $g^{-1} = h$).

Într-adevăr, fie

$$g = \sum a_{i_1, \ldots, i_n} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n},$$

$$\varphi(g) = \sum a_{i_1, \ldots, i_n} r_1^{i_1} \ldots r^{i_n} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}$$

și fie

$$\varphi(g)^{-1} = \sum b_{i_1 \ldots i_n} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}$$

Se observă:

$$a_{0 \ldots 0} \cdot b_{0 \ldots 0} = 1;$$

cum $a_0^{-1}, \ldots, {}_0 \in A$, rezultă $b_{0, \ldots, 0} \in A$. Apoi:

$$a_{0, \ldots, 0} \cdot b_{0, \ldots, 0, i, 0 \ldots, 0} + r_i a_{0, \ldots, 0, i, 0, \ldots, 0} \cdot b_{0, \ldots, 0} = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

de unde:

$$b_{0, \ldots, 0, i, 0, \ldots, 0} = - r_1 \frac{a_{0, \ldots, i, \ldots, 0} \cdot b_{0, \ldots, 0}}{a_{0, \ldots, 0}} \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Prin inducție rezultă acum cu ușurință că oricare ar fi $i = (i_1, \ldots, i_n)$,

$$b_{i_1, \ldots, i_n} = r_1^{i_1}, \ldots, r_n^{i_n} \cdot a'_{i_1 \ldots i_n}$$

cu $a'_{i_1 \ldots i_n} \in A$. Deci:

$$h = \sum a'_{i_1 \ldots i_n} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}.$$

Principiul maximului. Fie $f \in A_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ arbitrar. Atunci:

a) $\sup\limits_{x \in E_{\rho_1, \ldots, \rho_n}(A)} |f(x)| \leqslant \|f\|_{\rho_1, \ldots, \rho_n}$.

b) Dacă există $x_0 \in \mathring{E}_{\rho_1, \ldots, \rho_n}(A)$ cu $|f(x_0)| = \|f\|_{\rho_1, \ldots, \rho_n}$, atunci $\|f\|_{\rho_1, \ldots, \rho_n} = |f(x)| (\forall)\, x \in E_{\rho_1, \ldots, \rho_n}(A)$.

c) Dacă A' este un subinel al lui A cu proprietatea că $\partial E_{\rho_i}(A') = \{a'\in A';\ |a'| = \rho_i\}$ conţine un element inversabil în A' şi $\widetilde{E}_{\sigma_i}(A')$ are un număr infinit de elemente $(\forall)\ i=1, 2,\dots, n$, atunci există $z\in \partial E_{\sigma_1}(A')\times\dots\times \partial E_{\sigma_n}(A')\subset \partial E_{\rho_1,\dots,\rho_n}(A')$ astfel ca:

$$|f(z)| = \|f\|_{\rho_1,\dots,\rho_n}.$$

Demonstraţie. a) este evidentă.

b) Fie $x_0\in \mathring{E}_{\rho_1,\dots,\rho_n}(A)$ cu $|f(x_0)| = \|f\|_{\rho_1,\dots,\rho_n}$; rezultă neapărat că termenul liber al lui f este în modul strict mai mare decît norma oricărui termen, deci:

$$(\forall)\ x\in \mathring{E}_{\rho_1,\dots,\rho_n}(A),\quad |f(x)| = |f(0)| = \|f\|_{\rho_1,\dots,\rho_n}.$$

c) Fie K corpul fracţiilor lui A şi $r_i\in A'$ inversabil în A', cu $|r_i| = \rho_i\ (1\leqslant i\leqslant n)$. Definim morfismul de substituţie:

$$A_{\rho_1,\dots,\rho_n}\ll X_1,\dots, X_n\gg \xrightarrow{\varphi} K\ll X_1,\dots, X_n\gg$$

prin $\varphi(X_i) = r_iX_i\ (1\leqslant i\leqslant n)$.

Atunci

$$\|\varphi(f)\| = \|f\|_{\rho_1,\dots,\rho_n} \text{ şi } |f(a_1,\dots, a_n)| = \left|\varphi(f)\left(\frac{a_1}{r_1},\dots,\frac{a_n}{r_n}\right)\right|.$$

Fie $\varphi(f) = c\cdot g$ cu $c\in K$ şi $g\in K\ll X_1,\dots,X_n\gg$ cu $\|g\| = 1$.

Notăm cu k corpul rezidual al lui K:

$$k = \frac{\{x\in K;\ |x|\leqslant 1\}}{\{x\in K,\ |x| < 1\}}$$

şi fie aplicaţia canonică:

$$\mathring{K}\ll X_1,\dots, X_n\gg \xrightarrow{\tau} k[X_1,\dots, X_n].$$

Cum $\tau(g)\neq 0$ şi $\tau(r_i^{-1}\cdot\partial E_{\rho_i}(A'))$ = infinită $(1\leqslant i\leqslant n)$ (aici din nou intervine faptul că $r_i^{-1}\in A'$ şi nu doar lui A), există $a_i'\in\partial E_{\rho_i}(A')\ (1\leqslant i\leqslant n)$ astfel ca:

$$\tau(g)\left(\tau\left(\frac{a_1'}{r_1}\right),\dots,\ \tau\left(\frac{a_n'}{r_n}\right)\right)\neq 0,$$

adică

$$\tau\left(g\left(\frac{a_1'}{r_1},\dots,\frac{a_n'}{r_n}\right)\right)\neq 0,\ \text{deci: } \left|g\left(\frac{a_1'}{r_1},\dots,\frac{a_n'}{r_n}\right)\right| = 1.$$

Dar atunci avem succesiv:

$$\|f\|_{\rho_1,\ldots,\rho_n} = \|\varphi(f)\| = \|c\,.\,g\| = \left|c.g\left(\frac{a_1'}{r_1},\ldots,\frac{a_n'}{r_n}\right)\right| =$$

$$= \left|\varphi(f)\left(\frac{a_1'}{r_1},\ldots,\frac{a_n'}{r_n}\right)\right| = |f(a_1',\ldots,a_n')|.$$

§ 2. TEOREMA DE PREGĂTIRE A LUI WEIERSTRASS

Vom nota din nou prin A un inel comutativ, unitar, integru, valuat nearhimedian, nediscret și complet, iar prin $\rho_1,\ldots,\rho_n$ numere reale strict pozitive.

Este clar că orice $f \in A_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \ll X_1,\ldots,X_n \gg$ se poate scrie unic sub forma

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} f_j X_n^j \text{ cu } f_j \in A_{\rho_1,\ldots,\rho_{n-1}} \ll X_1,\ldots,X_{n-1} \gg.$$

Fiind dat șirul $(g_j)_{j\geqslant 0} \subset A_{\rho_1,\ldots,\rho_{n-1}} \ll X_1,\ldots,X_{n-1} \gg$, condiția necesară și suficientă ca $\sum\limits_{j=0}^{\infty} g_j X_n^j \in A_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \ll X_1,\ldots,X_n \gg$ este ca $\lim\limits_{j\to\infty} \|g_j\|_{\rho_1,\ldots,\rho_{n-1}} \rho_n^j = 0$. (Dacă $\rho_n = 1$, revine la a spune că $(f_j)_{j\geqslant 0}$ este un zero șir).

DEFINIȚIA 2.1. $f = \sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j X_n^j \in A_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \ll X_1,\ldots,X_n \gg$ se spune regulată în X_n de ordin s, dacă f_s este unitate în $A_{\rho_1,\ldots,\rho_{n-1}} \ll X_1,\ldots,X_{n-1} \gg$ și $\|f\|_{\rho_1,\ldots,\rho_n} = \|f_s X_n^s\|_{\rho_1,\ldots,\rho_n} > \|f_j X_n^j\|_{\rho_1,\ldots,\rho_n}$ $(\forall)\, j \geqslant s+1$.

Analog cu algoritmul lui Euclid are loc:

PROPOZIȚIA 2.2. (Formula lui Weierstrass). *Fie* $f \in A_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \ll X_1,\ldots$ $\ldots, X_n \gg$ *regulată în raport cu* X_n *de ordin* s.

Atunci oricare ar fi $g \in A_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \ll X_1,\ldots,X_n \gg$, *există și sînt unice: seria strict convergentă* $q \in A_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \ll X_1,\ldots,X_n \gg$ *și polinomul* $r \in A_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \ll X_1,\ldots,X_{n-1} \gg [X_n]$, *astfel ca*:

$$g = q.f + r,\ \operatorname{grad}(r) \leqslant s-1. \tag{2.2.1}$$

În plus

$$\|q\|_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \leqslant \|f\|^{-1}_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \cdot \|g\|_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \quad \text{și} \quad \|r\|_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \leqslant \|g\|_{\rho_1,\ldots,\rho_n}. \tag{2.2.2}$$

Dacă f *și* g *sînt polinoame în nedeterminata* X_n *cu coeficienți în algebra seriilor strict convergente* $A_{\rho_1,\ldots,\rho_{n-1}} \ll X_1,\ldots,X_{n-1} \gg$ *și grad* $f = s$, *atunci* q *este tot din* $A_{\rho_1,\ldots,\rho_{n-1}} \ll X_1,\ldots,X_{n-1} \gg [X_n]$ *și gradul lui* q *este egal cu diferența gradelor lui* g *și lui* f.

Demonstrație. Probăm mai întîi unicitatea și relația (2.2.2) în cazul că A este corp și $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_n = 1$.

Fie $q.f+r=0$, cu $q \in A \ll X_1, \ldots, X_n \gg$, $r \in A \ll X_1, \ldots, X_{n-1} \gg [X_n]$ şi grad $r \leqslant s-1$.

Prin absurd, presupunem $r \neq 0$. Atunci cum $\| f \| = \| f_s \|$ şi f_s^{-1} există, putem presupune $\| f \| = 1$ şi chiar că $f_s = 1$. Cum A este corp şi $\rho_1 = \ldots = \rho_n = 1$ (de fapt este esenţial că $(\rho_1, \ldots, \rho_n, \rho_1^{-1}, \ldots, \rho_n^{-1} \in |A|)$, putem presupune $\| q \| = 1$. Rezultă deci $\| r \| = 1$. Notăm prin τ aplicaţia canonică: $\mathring{A} \ll X_1, \ldots, X_n \gg = A \ll X_1, \overset{\circ}{\ldots}, X_n \gg \to \tilde{A}[X_1, \ldots, X_n] = A \ll \tilde{X}_1^0 \ldots X_n \gg$; putem deci scrie

$$0 \neq \tau(r) = -\tau(q).\tau(f). \tag{2.2.3}$$

Deoarece gradul lui $\tau(r)$ relativ la X_n este strict mai mic decît cel al lui $\tau(f)$ relativ la X_n, rezultă că relaţia (2.2.3) este absurdă.

Deci $r=0$ şi astfel $q=0$.

Verificăm acum justeţea relaţiei (2.2.2); este suficient să probăm relaţia

$$\| g \| = \max (\| qf \|, \| r \|).$$

Din (2.2.1) rezultă: $\| g \| \leqslant \max (\| qf \|, \| r \|)$; dacă $\| g \| < \max (\| qf \|, \| r \|)$, atunci ca mai sus se poate presupune $\| f \| = 1$ şi fie $a \in A$ cu $|a| = \max (\| q \|, \| r \|)$.

Rezultă $\| a^{-1} g \| < 1$ şi $\max (\| a^{-1} q \|, \| a^{-1} r \|) = 1$.

Relaţia:

$$0 = \tau(a^{-1} g) = \tau(a^{-1} fq) + \tau(a^{-1} r) \neq 0$$

dovedeşte absurditatea inegalităţii stricte de mai sus.

Are loc în inelul polinoamelor în nedeterminata X_n cu coeficienţi în $A \ll X_1, \ldots, X_{n-1} \gg$ relaţia: $g_i X_n^i = q_i f + r_i$ cu gradul lui r_i strict mai mic ca s.

Revenim la cazul general. Vom nota cu B un corp valuat complet, care conţine pe A şi a cărui valuare extinde valuarea lui A. De asemenea se poate presupune că există $r_1, \ldots, r_n \in B$ cu $|r_i| = \rho_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Definim morfismul de substituţie

$$\varphi : A_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \ll X_1, \ldots, X_n \gg \to B \ll X_1, \ldots, X_n \gg$$

prin $\varphi(X_i) = r_i X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Evident,

$$\varphi(A_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \ll X_1, \ldots, X_n \gg) = \{ \sum b_{i_1 \ldots i_n} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n},$$

$$b_{i_1, \ldots, i_n} r_1^{-i_1} \ldots r_n^{-i_n} \in A \} \text{ şi } \| \varphi(h) \| = \| h \|_{\rho_1, \ldots, \rho_n} (\forall)\, h \in A_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \ll$$

$$\ll X_1, \ldots, X_n \gg.$$

Dacă $h \in A_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ este X_n-regulată de ordin s, atunci $\varphi(h)$ are aceeaşi proprietate ca $B \ll X_1, \ldots, X_n \gg$.

Fie că $f = \sum_{j=0}^{s} f_j X_n^j$ (adică $f_j = 0$ $(\forall)$ $j \geqslant s+1$) și $g = \sum_{i=0}^{\infty} g_i X_n^i$. Pentru fiecare $i = 0, 1, 2, \ldots$ are loc în inelul $A \ll X_1, \ldots, X_{n-1} \gg [X_n]$ relația $g_i X_n^i = q_i f + r_i$, cu grad $(r_i) \leqslant s-1$. Deci și $\varphi(g_i X_n^i) = \varphi(q_i f) + \varphi(r_i)$.

Rezultă din prima partea a demonstrației:

$$\| r_i \|_{\rho_1, \ldots, \rho_n} = \| \varphi(r_i) \| \leqslant \| \varphi(g_i X^i) \| = \| g_i X_n^i \|_{\rho_1, \ldots, \rho_n}$$

$$\| q_i \|_{\rho_1, \ldots, \rho_n} = \| \varphi(q_i) \| \leqslant \| \varphi(f) \|^{-1} \| \cdot \varphi(g_i X_n^i) \| = \| f \|_{\rho_1, \ldots, \rho_n}^{-1} \cdot \| g_i X_n^i \|_{\rho_1, \ldots, \rho_n}.$$

Cum $(g_i X_n^i)_{i \geqslant 0}$ este un șir tinzînd la zero în $A_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \ll X_1, \ldots, X_n \gg$, rezultă că

$r = \sum_{i=0}^{\infty} r_i \in A_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \ll X_1, \ldots, X_{n-1} \gg [X_n]$ are grad $\leqslant s - 1$ și $q =$

$$\sum_{i=0}^{\infty} q_i \in A_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \ll X_1, \ldots, X_n \gg$$

și evident (2.2.2) are loc.

Fie acum $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i X_n^i$; vom scrie $f = f' + f''$, unde

$$f' = \sum_{i=0}^{s} f_i X_n^i \text{ și } f'' = \sum_{i=s+1}^{\infty} f_i X_n^i.$$

Din cele de mai sus rezultă q_0 și r_0 corespunzător astfel ca

$$g_0 = g = q_0 \cdot f' + r_0.$$

Apoi fie definite g_{n-1}, q_{n-1} și r_{n-1}; definim

$$g_n = g_{n-1} - q_{n-1} \cdot f - r_{n-1};$$

există q_n și r_n astfel ca

$$g_n = q_n f' + r_n \text{ (grad } (r_n) \leqslant s - 1).$$

Rezultă $g_n = - q_{n-1} f''$. Cum $\| f'' \|_{\rho_1, \ldots, \rho_n} < \| f' \|_{\rho_1, \ldots, \rho_n}$ notăm $\varepsilon = \dfrac{\| f'' \|_{\rho_1, \ldots, \rho_n}}{\| f' \|_{\rho_1, \ldots, \rho_n}} < 1$. Rezultă:

$$\| g_n \|_{\rho_1, \ldots, \rho_n} = \| f'' \|_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \cdot \| q_{n-1} \|_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \leqslant \| f'' \|_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \cdot \| g_{n-1} \|_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \cdot$$

$$\cdot \| f' \|_{\rho_1, \ldots, \rho_n}^{-1} = \varepsilon \cdot \| g_{n-1} \|_{\rho_1, \ldots, \rho_n}$$

de unde

$$\| g_n \|_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \leqslant \varepsilon^n \cdot \| g \|_{\rho_1, \ldots, \rho_n}.$$

Analog

$$\|q_n\|_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \leqslant \|g_n\|_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \cdot \|f'\|^{-1}_{\rho_1,\ldots,\rho_n} = \|g_n\|_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \cdot \|f\|^{-1}_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \leqslant$$

$$\leqslant \|g\|_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \cdot \|f\|^{-1}_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \cdot \varepsilon^n$$

şi

$$\|r_n\|_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \leqslant \|g_n\|_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \leqslant \varepsilon^n \cdot \|g\|_{\rho_1,\ldots,\rho_n} .$$

Deci $g_n - g_{n+1} = q_n f + r_n$; rezultă: $g = fq + r$, unde $q = \sum\limits_{i=0}^{\infty} q_i \in A_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \ll X_1,\ldots,X_n \gg$ şi $r = \sum\limits_{i=0}^{\infty} r_i \in A_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \ll X_1,\ldots,X_{n-1} \gg [X_n]$. Evident, (2.2.2) are loc, căci are loc pentru fiecare i:

$$\|q_i\|_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \ll \|g_i\|_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \cdot \|f\|^{-1}_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \text{ şi } \|r_i\|_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \leqslant \|g_i\|_{\rho_1,\ldots,\rho_n}.$$

Ultima afirmaţie rezultă cu uşurinţă, căci făcînd împărţirea lui g prin f în inelul $A_{\rho_1,\ldots,\rho_{n-1}} \ll X_1,\ldots,X_{n-1} \gg [X_n]$ se obţin polinoamele $q, r \in A_{\rho_1,\ldots,\rho_{n-1}} \ll X_1,\ldots,X_{n-1} \gg [X_n]$ cu $g = qf + r$ şi grad $(r) \ll s-1$, iar grad q + grad f = grad g. Din unicitate, q şi r sînt chiar cele căutate.

PROPOZIŢIA 2.3. (Teorema de pregătire a lui Weierstrass). *Fie* $f \in A_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \ll X_1,\ldots,X_n \gg$ *regulată în* X_n *de ordin* s. *Atunci există un singur polinom normat*

$$p = \sum_{i=0}^{s} p_i X_n^{s-i} \in A_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \ll X_1,\ldots,X_{n-1} \gg [X_n]$$

$p_0 = 1$), *astfel ca* $f = e \cdot p$, *unde* e *este unitate în*

$$A_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \ll X_1,\ldots,X_n \gg \text{ şi } \|e\|_{\rho_1,\ldots,\rho_n} = \frac{\|f\|_{\rho_1,\ldots,\rho_n}}{\rho_n^s}.$$

În plus rezultă că p *este şi el regulat de ordin* s *în* X_n *şi* $\|p\|_{\rho_1,\ldots,\rho_n} = \rho_n^s$.

Dacă f *este polinom din* $A_{\rho_1,\ldots,\rho_{n-1}} \ll X_1,\ldots,X_{n-1} \gg [X_n]$, X_n - *regulat de ordin* t *şi de gradul* t, *atunci* e *este de asemenea polinom de grad* $t - s$.

Demonstraţie. Luăm $g = X_n^s$ în formula lui Weierstrass; atunci există q şi $r \in A_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \ll X_1,\ldots,X_n \gg$ cu grad $(r) \leqslant s-1$ ca $X_n^s = q \cdot f + r$. Deci notînd $p = X_n^s - r$, obţinem un polinom regulat ($\|r\|_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \leqslant \|g\|_{\rho_1,\ldots,\rho_n}$) de grad s în X_n şi $\|p\|_{\rho_1,\ldots,\rho_n} = \rho_n^s$.

Aplicînd din nou formula lui Weierstrass: $f = ep + r'$, de unde $0 = (1 - eq)f - r'$. Rezultă $r' = 0$ şi $1 - eq = 0$ — din unicitate. Deci $f = ep$ şi e este unitate în $A_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \ll X_1,\ldots,X_n \gg$. Dacă e^*, p^* ar fi altă pereche cu aceleaşi proprietăţi, atunci scriind $p^* = X_n^s - r^*$, se obţine $X_n^s = e^{-1} \cdot f + r = e^{*-1} f + r^*$, de unde $r = r^*$ şi $e = e^*$ — absurd. Ultima afirmaţie rezultă din ultima afirmaţie a propoziţiei anterioare.

Este naturală următoarea definiţie :

DEFINIŢIA 2.4. Un polinom normat în X_n :

$$X_n^s + \sum_{i=1}^{s} p_i X_n^{s-i} \in A_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \ll X_1, \ldots, X_{n-1} \gg [X_n]$$

se numeşte polinom Weierstrass, dacă $\| p_i \|_{\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}} \leqslant \rho_n^i$.

Evident, orice polinom Weierstrass este regulat şi dacă $p_i \in A_{\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}} \ll X_1, \ldots, X_{n-1} \gg (i = 1, \ldots, s)$, există ρ suficient de mare $\left(\rho = \sup\limits_{i=1}^{s} \sqrt[i]{\| p_i \|_{\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}}} \right)$ astfel ca $\rho_n \geqslant \rho$ să implice: $X_n^s + \sum\limits_{i=1}^{s} p_i \cdot X_n^{s-i} \in A_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ este polinom Weierstrass.

În ceea ce priveşte posibilitatea de a transforma o serie strict convergentă într-una regulată în raport cu o nedeterminată, vom da răspunsuri pentru cazuri mai particulare.

PROPOZIŢIA 2.5. *Fie* $f \in K_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ *nenulă, astfel ca* $\tilde{E}_{\rho_i/\rho_n}(K)$ *să fie infinită* $(i = 1, \ldots, n-1)$. *Atunci pentru* f *există o mulţime deschisă şi nevidă din* $E_{\rho_1/\rho_n, \ldots, \rho_{n-1}/\rho_n}(K)$ *astfel ca pentru orice element* $(b_1, \ldots, b_{n-1})$ *din ea, prin automorfismul definit de* $X_i \sim\to X_i + b_i X_n (1 \leqslant i \leqslant n-1)$, $X_n \sim\to X_n$, f *să devină regulată în raport cu* X_n.

Demonstraţie. Observăm că transformările indicate în enunţ sînt într-adevăr de la $K_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ pe $K_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ şi aceste transformări sînt chiar metrice. Fie $f = \sum\limits_{i=0}^{\infty} f_i$, unde f_i este polinom de grad total i; notăm prin s numărul natural maxim cu proprietatea că :

$$\| f \|_{\rho_1, \ldots, \rho_n} = \| f_s \|_{\rho_1, \ldots, \rho_n}.$$

Prin transformarea indicată, f_s devine $f_s(b_1, \ldots, b_{n-1}, 1) X_n^s + f_s'$, unde f_s' este un polinom omogen de grad total s, iar în X_n de grad strict mai mic ca s (deci $f_s'(0, \ldots, 0, X_n) = 0$).

Este deci suficient să demonstrăm că există o mulţime nevidă şi deschisă de elemente $(b_1, \ldots, b_{n-1}) \in E_{\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}}(K)$ astfel ca

$$| f_s(b_1, \ldots, b_{n-1}, 1) | = \frac{\| f_s \|_{\rho_1, \ldots, \rho_n}}{\rho_n^s}.$$

Faptul că mulţimea respectivă este nevidă, rezultă din principiul maximului. Ea este deschisă, căci o dată cu $(b_1, \ldots, b_{n-1})$ îi aparţine şi $(b_1 + c_1, \ldots, b_{n-1} + c_{n-1})$ pentru orice $| c_i | < | b_i |$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$.

COROLAR 2.6. *Fie* $f \in K_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ *nenulă astfel încît corpul rezidual al lui* K — $\widetilde{K}$ — *să fie infinit. Atunci pentru* f *există o mulţime deschisă şi nevidă din* $E^{n-1} = E_{1, \ldots, 1}(K)$ *astfel ca pentru orice* $(b_1, \ldots, b_{n-1})$ *din ea, prin transformarea definită de* $X_i \sim\to X_i + b_i X_n (1 \leqslant i \leqslant n-1)$ *şi* $X_n \sim\to X_n$, f *să devină regulată în raport cu* X_n.

PROPOZIȚIA 2.7. *Fie*

$$0 \neq f = \sum_{0}^{\infty} a_{i_1,\dots,i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} \in K \ll X_1, \dots, X_n \gg .$$

Atunci există o transformare ψ *de forma* $X_i \rightsquigarrow X_i + X_n^{c_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ *și* $X_n \rightsquigarrow X_n$ *prin care* f *devine regulată în raport cu* X_n.

Mai precis, fie $t = \max \{i_1 + \dots + i_n ; |a_{i_1,\dots,i_n}| = \|f\|\}$; *atunci se pot lua :*

$$c_{n-1} > t ; c_{n-2} > t(c_{n-1}+1) ; \dots ; c_1 > t(c_2 + \dots + c_{n-1} + 1)$$

iar $\psi(f)$ *este regulată în raport cu* X_n *de ordin :*

$j_n + \sum\limits_{i=1}^{n-1} c_i j_i$, *unde* $(j_1, \dots, j_n)$ *este cel mai mare indice în ordine lexicografică pentru care*

$$|a_{j_1,\dots,j_n}| = \|f\|.$$

Demonstrație. Se poate evident presupune $\|f\| = 1$. Deci :

$$0 \neq \tau(f) = \sum_{|i| \leqslant t} \tau(a_{i_1,\dots,i_n}) X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}, \tag{2.7.1}$$

unde :

$$\tau : \overset{\circ}{K} = \{x \in K ; |x| \leqslant 1\} \to \widetilde{K} = \frac{\{x \in K ; |x| \leqslant 1\}}{\{x \in K ; |x| < 1\}} = \frac{\overset{\circ}{K}}{t(K)}$$

este proiecția canonică.

Este clar că : $\tau(a_{j_1,\dots,j_n}) \neq 0$. Luînd $c_1, \dots, c_{n-1}$ ca în enunț, se observă că singurul indice $(i_1, \dots, i_n)$ care apare efectiv în $\tau(f)$ și pentru care $i_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} i_k c_k$ este maxim este doar $(j_1, \dots, j_n)$. Într-adevăr, fie $(l_1, \dots, l_n) \neq (j_1, \dots, j_n)$ cu $\sum\limits_{k=1}^{n-1} l_k c_k + l_n \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n-1} j_k c_k + j_n$ și $\tau(a_{l_1,\dots,l_n}) \neq 0$.

Există deci p astfel ca : $l_1 = j_1, \dots, l_{p-1} = j_{p-1}$ și $l_p < j_p$. Atunci :

$$\sum_{k=1}^{n-1} l_k c_k + l_n \leqslant \sum_{k=1}^{p-1} l_k c_k + (j_p - 1) c_p + t(c_{p+1} + \dots + c_{n-1} + 1) <$$

$$< \sum_{k=1}^{n-1} l_k c_k + (j_p - 1) c_p + c_p - \sum_{k=1}^{p-1} j_k c_k + j_p c_p \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} j_k c_k + j_n -$$

absurd (dacă cumva $p = n$, atunci punem $c_n = 1$). Notăm cu $w = \sum\limits_{k=1}^{n-1} j_k c_k + j_n$.

Vom proba acum că $\psi(f)$ este X_n-regulată de ordin w. Într-adevăr :

$$\tau(\psi(f)) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} \tau(a_{i_1,\ldots,i_n}) \sum_{\rho_1,\ldots,\rho_n=0}^{i_1,\ldots,i_n} C_{i_1}^{\rho_1} \ldots C_{i_n}^{\rho_n} X_1^{i_1-\rho_1} \ldots X_{n-1}^{i_{n-1}-\rho_{n-1}} \cdot$$

$$\cdot X_n^{\rho_1 c_1 + \ldots + \rho_{n-1} c_{n-1} + i_n} = \sum_{j=0}^{w} \left(\sum_{\substack{\rho_1,\ldots,\rho_{n-1} \\ \rho_1 \leqslant i_1,\ldots,\rho_{n-1} \leqslant i_{n-1} \\ \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k c_k + i_n = j}} \tau(a_{i_1,\ldots,i_n}) \cdot C_{i_1}^{\rho_1} \ldots C_{i_n}^{\rho_n} X_1^{i_1-\rho_1} \ldots \ldots X_{n-1}^{i_{n-1}-\rho_{n-1}} \right) X_n^j$$

căci pentru $j > w$ rezultă $\sum_{k=1}^{n-1} i_k c_k + i_n \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k c_k + i_n = j > w$ deci : $\tau(a_{i1,\ldots,i_n}) = 0$, și astfel coeficientul lui X_n^j este nul. Pentru $j = w$, singurul termen nenul din coeficientul lui X_n^w este $\tau(a_{j_1,\ldots j_n})$.

COROLARUL 2.8. *Date fiind* $f_1, \ldots, f_r \in K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$, *există o transformare* $X_i \sim\!\rightarrow X_i + X_n^{c_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, $X_n \sim\!\rightarrow X_n$ *prin care fiecare* $f_1, \ldots, f_r$ *devine regulată.*

§ 3. CONSECINȚE ALE TEOREMEI DE PREGĂTIRE

Fie K un corp valuat nearhimedian, nediscret și complet.

TEOREMA 3.1. *Inelul* $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ *este noetherian.*

Demonstrație. Vom raționa prin inducție după numărul variabilelor. Pentru $n = 0$, afirmația este evidentă. Fie că inelul $K \ll X_1, \ldots, X_{n-1} \gg$ este noetherian și fie $\underline{a}$ un ideal arbitrar nenul din $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$.

Există $f \in \underline{a}$ nenulă ; din propoziția 2.7 rezultă că există un K-automorfism φ al lui $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ astfel ca $\varphi(f)$ să fie regulată în raport cu X_n.

Vom nota cu s ordinul de regularitate al lui $\varphi(f)$ în raport cu X_n. Dacă probăm că $\varphi(\underline{a})$ este ideal de tip finit, rezultă că și $\underline{a}$ este de tip finit, de aceea este permis să considerăm că f este X_n-regulată de ordin s.

Orice $g \in \underline{a}$ se scrie unic sub forma :

$g = qf + r$ cu $q \in K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ și $r \in K \ll X_1, \ldots, X_{n-1} \gg [X_n]$ de grad strict mai mic decît s. Observăm că de fapt r face parte din $\underline{a}$ intersectat cu $K \ll X_1, \ldots, X_{n-1} \gg$ — modulul generat de $1, X_n, \ldots, X_n^{s-1}$ — deci r parcurge elementele unui modul finit peste $K \ll X_1, \ldots, X_{n-1} \gg$ — deci și peste $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$. Dacă la familia finită de generatori a acestui modul adăugăm pe f, se obține o familie finită de generatori pentru $\underline{a}$.

COROLARUL 3.2. *Dacă* $\rho_1, \ldots, \rho_n \in |K|$, *atunci* $K_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ *este de asemenea noetherian.*

Într-adevăr, fie $r_1, \ldots, r_n \in K$ cu $|r_i| = \rho_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Morfismul de substituţie definit de $X_i \rightsquigarrow r_i X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ defineşte un izomorfism al lui $K_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ pe $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$.

COROLARUL 3.3. *Orice* $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ *— modul de tip finit are o unică structură de modul Banach. Mai mult, orice submodul al unui* $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ *-modul Banach de tip finit este închis.*

Rezultă din 3.1 şi I 6.2.1.

TEOREMA 3.4. *Inelul* $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ *este factorial.*

Demonstraţie. Se procedează din nou prin inducţie după numărul de variabile. Pentru $n = 0$, enunţul este evident. Presupunem factorialitatea lui $K \ll X_1, \ldots, X_{n-1} \gg$.

Orice element din $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ admite o descompunere (finită) în produs de elemente ireductibile, căci $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ este noetherian.

Pentru a demonstra că o astfel de descompunere este unică (modulo elemente inversibile), este suficient să demonstrăm că orice element ireductibil din $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ este prim.

Fie $f \in K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ ireductibil; cum noţiunile „ireductibil" şi „prim" sînt invariante la automorfisme, putem presupune că f este regulată în X_n — de exemplu de ordin s. Deci, teorema de preparare a lui Weierstrass asigură că f este asociată cu un polinom p (ireductibil şi el) din $K \ll X_1, \ldots, X_{n-1} \gg [X_n]$ unitar şi de grad s.

Este suficient să probăm că p este prim. Mai întîi observăm că p este ireductibil chiar în $K \ll X_1, \ldots, X_{n-1} \gg [X_n]$. Într-adevăr, fie $p = p' \cdot p''$ o descompunere a lui p în $K \ll X_1, \ldots, X_{n-1} \gg [X_n]$.

Evident, p', p'' se pot presupune unitare. Cum p este ireductibil în $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$, rezultă de exemplu p'' inversabil în $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$. Din unicitatea demonstrată în teorema de pregătire, rezultă că $p = p'$ şi $p'' = 1$. Deci p este ireductibil şi în $K \ll X_1, \ldots, X_{n-1} \gg [X_n]$. Cum orice inel de polinoame peste un inel factorial este factorial, rezultă că p este prim în $K \ll X_1, \ldots, X_{n-1} \gg [X_n]$.

Fie acum că p divide produsul $g' \cdot g''$ în $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$. Din teorema de preparare a lui Weierstrass rezultă: $g' = q'p + r'$, $g'' = q''p + r''$, unde r', r'' sînt polinoame din $K \ll X_1, \ldots, X_{n-1} \gg [X_n]$ de grad cel mult $s - 1$. Cum p divide $g' \cdot g''$, divide şi $r' \cdot r''$ în $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$. Deci există $r \in K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ cu $pr = r'r''$. Cum $K \ll X_1, \ldots, X_{n-1} \gg [X_n]$ este factorial, rezultă $r \in K \ll X_1, \ldots, X_{n-1} \gg [X_n]$.

Cum p este prim în $K \ll X_1, \ldots, X_{n-1} \gg [X_n]$, rezultă că r' sau r'' este nul, deci p divide g' sau g''.

COROLARUL 3.5. *Dacă* $\rho_1, \ldots, \rho_n \in |K|$, *rezultă că inelul* $K_{\rho_1,\ldots,\rho_n} \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ *este factorial.*

§ 4. MORFISME ALE ALGEBRELOR DE FUNCŢII STRICT ANALITICE

4.1. Fie A un inel comutativ, unitar, integru, valuat nearhimedian nediscret şi complet. Fie $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$ şi $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_p)$ n, respectiv p numere reale pozitive. Reamintim că un morfism $\varphi : A_{\rho_1,\ldots,\rho_n}$

$\ll X_1, \dots, X_n \gg \to A_{\sigma_1, \dots, \sigma_p} \ll Y_1, \dots, Y_p \gg$ se spune metric, dacă:

$$\| \varphi(f) \|_{\sigma_1, \dots, \sigma_p} \leqslant \| f \|_{\rho_1, \dots, \rho_n} \, (\forall) f \in A_{\rho_1, \dots, \rho_n} \ll X_1, \dots, X_n \gg$$

Lui îi corespund în mod canonic restricţia sa $\overset{\circ}{\varphi}$ şi factorizatul lui $\overset{\circ}{\varphi}$ — notat $\widetilde{\varphi}$ — astfel ca diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A_{\rho_1, \dots, \rho_n} \ll X_1, \dots, X_n \gg \arrow[r, "\overset{\circ}{\varphi}"] \arrow[d, "\tau_n"] & A_{\sigma_1, \dots, \sigma_p} \ll \overset{\circ}{Y}_1, \dots, Y_p \gg \arrow[d, "\tau_p"] \\
A_{\rho_1, \dots, \rho_n}\overline{[X_1, \dots, X_n]} = A_{\rho_1, \dots, \rho_n}\overline{\ll X_1, \dots, X_n \gg} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] & A_{\sigma_1, \dots, \sigma_p}\overline{\ll Y_1, \dots, Y_p \gg} =
\end{tikzcd}$$

$$= A_{\sigma_1, \dots, \sigma_p}\overline{[Y_1, \dots, Y_p]} \tag{4.1.1}$$

să fie comutativă (τ_n şi τ_p sînt proiecţiile respective).

Vom caracteriza mai întîi morfismele metrice bijective între algebre de funcţii strict analitice.

PROPOZIŢIA 4.2. *A-morfismul metric:*

$$\varphi : A \ll X_1, \dots, X_n \gg \to A \ll Y_1, \dots, Y_p \gg$$

este bijectiv, dacă şi numai dacă $\widetilde{\varphi}$ *este bijectiv.*

Demonstraţie. Cum transformarea

$$(A \ll X_1, \dots, X_n \gg, \varphi) \rightsquigarrow (A \overline{\ll X_1, \dots, X_n \gg}, \widetilde{\varphi})$$

este functorială, rezultă φ bijectiv $\Rightarrow \widetilde{\varphi}$ bijectiv.

Reciproc, observăm mai întîi că diagrama (4.1.1) devine

$$\begin{tikzcd}
\overset{\circ}{A} \ll X_1, \dots, X_n \gg \arrow[r, "\overset{\circ}{\varphi}"] \arrow[d, "\tau_n"] & \overset{\circ}{A} \ll Y_1, \dots, Y_p \gg \arrow[d, "\tau_p"] \\
\widetilde{A}\,[X_1, \dots, X_n] \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] & \widetilde{A}\,[Y_1, \dots, Y_p].
\end{tikzcd} \tag{4.2.1}$$

Fie că am demonstrat propoziţia pentru cazul în care $\widetilde{\varphi}$ este morfismul identitate. Atunci fie $\widetilde{\varphi}^{-1}(Y_i) = \tau_i(g_i)$ cu $g_i \in \overset{\circ}{A} \ll X_1, \dots, X_n \gg$. Astfel se obţine un morfism de substituţie de asemenea metric $\psi : A \ll Y_1, \dots, Y_p \gg \to A \ll X_1, \dots, X_n \gg$, $\psi(Y_i) = g_i$ şi $\widetilde{\psi} = \widetilde{\varphi}^{-1}$. Deci:

$$\widetilde{\varphi \circ \psi} = 1_{\widetilde{A}[Y_1, \dots, Y_p]} \text{ şi } \widetilde{\psi \circ \varphi} = 1_{\widetilde{A}[X_1, \dots, X_n]}.$$

Rezultă $\varphi \circ \psi$ şi $\psi \circ \varphi$ bijective, deci φ este injectiv (căci $\psi \circ \varphi$ este injectiv, şi φ este surjectiv (căci $\varphi \circ \psi$ este surjectiv).

Demonstrăm acum pentru cazul $\widetilde{\varphi} = 1_{\widetilde{A}[X_1, \dots, X_n]}$.

Cum $\tau_n \overset{\circ}{\varphi}(X_i) = \widetilde{\varphi} \tau_n(X_i) = X_i$, rezultă că $\varphi(X_i)$ este X_i-regulată de ordinul 1.

Să demonstrăm următoarea:

LEMA 4.3. *Dacă un A-morfism metric* $\varphi : A \ll X_1, \dots, X_n \gg \to A \ll X_1, \dots, X_n \gg$ *este astfel ca* $\varphi(X_i)$ *să fie* X_i*-regulată de ordinul 1,*

$(\forall)\ i = 1, 2, \ldots, r$ *și* $\varphi(X_j) = X_j$ *pentru restul indicilor, atunci* φ *este bijectiv.*

Demonstrăm lema prin inducție. Pentru $r = 1$, avem deci $\varphi(X_j) = X_j\ (j = 2, \ldots, n)$ și $\varphi(X_1) = f(X_1, \ldots, X_n)$, X_1-regulată de ordinul 1. Cum $X_1 - f(Y, X_2, \ldots, X_n)$ este Y-regulată de ordinul unu în $A \ll X_1, \ldots, X_n, Y \gg$, din teorema de pregătire a lui Weierstrass rezultă că există un element inversabil $e \in A \ll X_1, \ldots, X_n, Y \gg$ și un element $\rho \in A \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ cu $\| \rho \| \leqslant 1$ astfel ca:

$$X_1 - f_1(Y, X_2, \ldots, X_n) = e.(Y - \rho). \tag{4.3.1}$$

Definim A-morfismul de substituție, metric $\psi : A \ll X_1, \ldots, X_n \gg \to A \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ prin $\psi(X_1) = \rho$, $\psi(X_j) = X_j\ (j = 2, \ldots, n)$.

Este evident, pe baza lui (4.1.3), că $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi = 1_{A \ll X_1, \ldots, X_n \gg}$.

Fie deci $\varphi(X_i)$, X_i-regulată de ordinul 1 pentru $i = 1, \ldots, r$ și $\varphi(X_j) = X_j$, $j = r + 1, \ldots, n$.

Definim un A-morfism de substituție prin:

$$\chi(X_i) = X_i,\ i \neq r \text{ și } \chi(X_r) = \varphi(X_r).$$

Conform celor de mai sus, χ este un izomorfism. Evident $\chi^{-1} \circ \varphi(X_j) = X_j$, $j = r, \ldots, n$ și $\chi^{-1} \circ \varphi(X_i)$ este X_i-regulată de ordinul 1 pentru $i = 1, \ldots, r - 1$. Deci conform ipotezei de inducție $\chi^{-1} \circ \varphi$ este izomorfism, deci φ este izomorfism.

Lema este demonstrată.

Pentru a încheia demonstrația propoziției este suficient să considerăm $r = n$ în lemă.

COROLARUL 4.4. *Dacă există un A-morfism metric bijectiv* $\varphi : A \ll X_1, \ldots, X_n \gg \to A \ll Y_1, \ldots, Y_p \gg$, *atunci* $n = p$.

COROLARUL 4.5. *O serie strict analitică* $f(X) = a_0 + a_1 X + a_1 X^2 + \ldots + a_n X^n + \ldots \in A \ll X \gg$ *induce o aplicație bianalitică a sferei unitate* $E^1(A)$ *dacă și numai dacă*:

$$|a_0| \leqslant 1,\ |a_1| = 1,\ |a_j| < 1\ (\forall)\ j > 1,\ \tau(a_1) \text{ inversabil}.$$

Într-adevăr, orice $\tilde{A}$-automorfism al algebrei $\tilde{A}\,[X]$ este de forma $X \rightsquigarrow a' + a''X$ cu $a', a'' \in A$ și $a'' \neq 0$. inversabil.

Vom da acum criteriu care stabilește condiții în care un morfism de algebre de funcții strict analitice este continuu.

PROPOZIȚIA 4.6. *Fie K un corp comutativ, valuat nearhimedian nediscret și complet. Orice K-omomorfism de algebre* $\varphi : K_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \ll X_1, \ldots, X_n \gg \to K_{\sigma_1, \ldots, \sigma_p} \ll Y_1, \ldots, Y_p \gg$ *este continuu. Dacă este surjectiv, atunci* φ *este deschis.*

Dacă în plus este îndeplinită una din condițiile:

1) $|K|$ *dens în* R^+ (*de exemplu K algebric închis*)

2) $\rho_1, \ldots, \rho_n \in |K|$,

atunci φ *este metric* (*de normă 1*).

Dacă φ *este bijectiv și una din condițiile 1) sau 2')* :

2') $\rho_1 \ldots, \rho_n \in |K|$ și $\sigma_1, \ldots, \sigma_p \in |K|$

este îndeplinită, atunci φ *este o izometrie.*

Demonstrație. Folosim teorema grafului închis.

Fie $f_i \in K_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ un șir tinzînd către zero și $\varphi(f_i) = g_i$ un șir care converge către $g \in K_{\sigma_1, \ldots, \sigma_p} \ll Y_1, \ldots, Y_p \gg$. Dacă $g \neq 0$, fie $(x_1, \ldots, x_p) = x \in K^p$ cu $c = g(x_1, \ldots, x_p) \neq 0$.

Șirul $c_i = g_i(x_1, \ldots, x_p)$ converge către c, deci putem presupune $c_i \neq 0$. Șirul $f_i' = c_i^{-1} f_i$ converge de asemenea spre zero, iar șirul $\varphi(f_i')$ către $c^{-1} g$.

Deci $1 - f_i'$ este inversabil pentru i suficient de mare, și deci $\varphi(1 - f_i')$ este inversabil pentru i suficient de mare. Dar $\varphi(1 - f_i')(x_1, \ldots, x_p) = 0$; absurd. Următoarea afirmație rezultă din teorema lui Banach.

Fie îndeplinită una din condițiile 1) sau 2) și fie — prin absurd — $f \in K_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ ca $\| \varphi(f) \|_{\sigma_1, \ldots, \sigma_p} > \| f \|_{\rho_1, \ldots, \rho_n}$; există $a \in K$ cu $\| \varphi(f) \|_{\sigma_1, \ldots, \sigma_p} \geqslant |a| > \| f \|_{\rho_1, \ldots, \rho_n}$. Notînd $g = a^{-1} f$, se obține un șir $\{g^n\}_{n \geqslant 1}$ care tinde spre zero, iar șirul corespunzător $\{\varphi(g)^n\}_{n \geqslant 1}$ este în afara sferei unitate, ceea ce contrazice continuitatea lui φ.

Ultima afirmație rezultă acum imediat.

Corolarul 4.7. *În ipotezele 1) sau 2) ale propoziției, orice funcție continuă $K_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \ll X_1, \ldots, X_n \gg \to K_{\sigma_1, \ldots, \sigma_p} \ll Y_1, \ldots, Y_p \gg$ care comută cu scalarii este metrică.*

Corolarul 4.8. *În ipotezele 1) sau 2) ale propoziției anterioare, homomorfismele de K-algebre de la $K_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ la $K_{\sigma_1, \ldots, \sigma_p} \ll Y_1, \ldots, Y_p \gg$ se pun în corespondență biunivocă cu mulțimea cuplelor de n elemente de normă $\leqslant 1$* din $K_{\sigma_1, \ldots, \sigma_p} \ll Y_1, \ldots, Y_p \gg$.

Rezultatul următor se referă la morfismele metrice de la $K \ll X_1 \ldots, X_n \gg$ într-o K-algebră Banach.

Propoziția 4.9. *Fie B o K-algebră Banach și $\varphi : K \ll X_1, \ldots, \ldots, X_n \gg \to B$ un K morfism metric.*

Dacă $\psi = \mathring{\varphi} \otimes_{\mathring{K}} 1_{\widetilde{k}} : \widetilde{K}\,[X_1, \ldots, X_n] \to \mathring{B}/t(K) \cdot \mathring{B}$ este injectiv, atunci φ este un izomorfism al lui $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ pe o subalgebră închisă a lui B.

Demonstrație. Ne vom referi la diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathring{K} \ll X_1, \ldots, X_n \gg \arrow[r, "\mathring{\varphi}"] \arrow[d, "\tau"'] & \mathring{B} \arrow[d, "\eta"] \\
\widetilde{K}\,[X_1, \ldots, X_n] \arrow[r, "\psi"] & \mathring{B}/t(K) \cdot \mathring{B}
\end{tikzcd} \tag{4.9.1}$$

Este suficient să probăm relația:

$$f \in K \ll X_1, \ldots, X_n \gg \text{ și } \| \varphi(f) \| \leqslant 1 \Rightarrow \| f \| \leqslant 1.$$

Într-adevăr, din ea rezultă — deoarece K este nediscret — injectivitatea lui φ și apoi — cu teorema grafului închis — închiderea algebrei Im φ în B.

Fie, prin absurd, $\| \varphi(f) \| \leqslant 1$ și totuși $\| f \| > 1$. Dacă $f = \Sigma a_{i_1, \ldots, i_n} X_1^{i_1}, \ldots X_n^{i_n}$, atunci fie $| a_{j_1, \ldots, j_n} | = \| f \|$. Rezultă $a_{j_1, \ldots, j_n}^{-1} \in t(K)$, deci $\eta \circ \varphi(a_{j_1, \ldots, j_n}^{-1} f) = 0$.

Ar rezulta din comutativitatea lui (4.9.1) că $(\psi \circ \tau)(a^{-1}_{j_1, \ldots, j_n} \cdot f) = 0$, și cum ψ este injectiv, că $\tau(a^{-1}_{j_1, \ldots, j_h} \cdot f) = 0$ — ceea ce este absurd, căci monomul $X_1^{j_1} \ldots X_n^{j_n}$ are coeficientul egal cu 1 în $a^{-1}_{j_1 \ldots j_n} \cdot f$.

Utilizînd rezultatul anterior, vom demonstra un analog al lemei de normalizare.

TEOREMA 4.10. *Pentru o K-algebră Banach B sînt echivalente afirmațiile :*

a) *B este o algebră factor a unei algebre de funcții strict analitice* $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$.

b) *Există un număr pozitiv s și un monomorfism strict și finit* $\varphi : K \ll X_1, \ldots, X_s \gg \to B$.

Demonstrație. a) ⇒ b). Fie că $B \approx \dfrac{K \ll X_1, \ldots, X_n \gg}{\underline{a}}$.

Atunci : $\mathring{B}/t(K)\mathring{B} \approx \dfrac{\widetilde{K}[X_1, \ldots, X_n]}{\underline{\widetilde{a}}}$, unde $\widetilde{a}$ este idealul generat de $\underline{a}$ în $\widetilde{K}[X_1, \ldots, X_n]$. Din lema de normalizare rezultă că există s și un monomorfism finit :

$$\chi : \widetilde{K}[X_1, \ldots, X_s] \to \mathring{B}/t(K) \cdot \mathring{B}.$$

Fie $b_1, \ldots, b_s \in \mathring{B}$, astfel ca $\eta(b_i) = \chi(X_i)$, $1 \leqslant i \leqslant s$.

Atunci se definește un K-morfism metric de substituție :$K \ll X_1, \ldots, X_s \gg \xrightarrow{\varphi} B$ prin : $\varphi(X_i) = b_i$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$. Cum $\mathring{\varphi} \underset{\mathring{K}}{\otimes} 1_{\widetilde{K}}$ este chiar χ, implicația rezultă din propoziția 4.9.

Implicația b) ⇒ a) este imediată, și anume fie $b_{s+1}, \ldots, b_n \in B$ generatori ai $K \ll X_1, \ldots, X_s \gg$-modulului B.

Definim $\alpha : K \ll X_1, \ldots, X_n \gg \to B$ prin :

$$\alpha(X_i) = \varphi(X_i) \text{ pentru } i = 1, \ldots, s \text{ și}$$

$$\alpha(X_j) = b_j \text{ pentru } j = s + 1, \ldots, n.$$

Atunci α este surjectiv ; totul este demonstrat.

§ 5. ALGEBRE AFINOIDE. SPECTRUL MAXIMAL

Am numit în I, §6, algebră topologic de tip finit orice algebră normată izomorfă (ca algebre normate) cu o algebră factor a unei algebre de funcții strict analitice peste un inel valuat nearhimedian printr-un ideal închis al său. După cum a rezultat din cele anterioare, cele mai interesante algebre topologice de tip finit par a fi cele care sînt izomorfe cu cîturi ale lui $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$, unde K este un corp valuat nearhimedian, nediscret și complet. Aceste algebre le vom numi afinoide.

Din rezultatele anterioare cunoaștem deci următoarele fapte asupra algebrelor afinoide peste un corp K (valuat, nearhimedian, nediscret, complet) fixat :

Af_1) Algebrele afinoide sînt inele noetheriene, în care orice ideal este închis — și deci sînt și ele algebre Banach față de norma cît. În particular, orice algebră factor a unei algebre afinoide este afinoidă.

Af_2) Categoria modulelor de tip finit peste o algebră afinoidă se identifică cu categoria modulelor Banach de tip finit peste algebra respectivă și orice submodul al unui modul finit este închis (teorema 6.22 din I).

Af_3) Algebrele afinoide de forma $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ sînt factoriale.

Af_4) Orice K-aplicație de algebre de la o K-algebră afinoidă la $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ este continuă (rezultă din propoziția 4.6 și definiția topologiei cît; vom întări în Af_{10}) acest rezultat).

Af_5) În orice algebră afinoidă există o subalgebră afinoidă $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$, peste care algebra inițială este finită.

Vom completa treptat lista acestor proprietăți. Începem cu :

Af_6) Orice K-algebră afinoidă, care este corp, este nu numai o extindere a lui K, dar este și finită.

Demonstrație. Fie L o extindere a lui K, care este o K-algebră afinoidă. Din Af_4) rezultă că există o subalgebră închisă a sa izomorfă cu $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$, peste care L este modul finit. Din teorema Cohen-Seidenberg rezultă $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ corp, deci $n = 0$.

Af_7) În categoria algebrelor afinoide există sume fibrate. Fie $A \xrightarrow{\varphi_1} B_1$ și $A \xrightarrow{\varphi_2} B_2$ două K-morfisme de algebre afinoide. Atunci $B_1 \coprod_A B_2$ este complementul produsului tensorial $B_1 \otimes_A B_2$ (I.6.15).

Ea este o K-algebră afinoidă, căci fie surjecțiile :

$$K \ll X_1, \ldots, X_{n_1} \gg \to B_1, \quad K \ll Y_1, \ldots, Y_{n_2} \gg \to B_2;$$

atunci $K \ll X_1, \ldots, X_{n_1} \gg \otimes_K K \ll X_1, \ldots, Y_{n_2} \gg \to B_1 \otimes_K B_2 \to B_1 \oplus_A B_2$ este surjecție. Completatul lui $K \ll X_1, \ldots, X_{n_1} \gg \otimes_K K \ll Y_1, \ldots, Y_{n_2} \gg$ este evident $K \ll X_1, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2} \gg$ și deci se obține o surjecție : $K \ll X_1, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2} \gg \to B_1 \coprod_A B_2$.

Remarcăm că φ_1 sau φ_2 finit, implică $B_1 \otimes_A B_2 = B_1 \coprod_A B_2$.

În categoria algebrelor afinoide nu există limite inductive filtrate ; de exemplu pentru sistemul $\{K \ll X_1, \ldots, X_n \gg, \varphi_{n,m}\}_{n \geqslant 0}$ unde $\varphi_{n,m}$ este morfismul de incluziune pentru $n \leqslant m$.

Dar în această categorie există generator și anume $K \ll X \gg$.

DEFINIȚIA 5.1. Pentru orice K-algebră afinoidă A, vom nota prin $\mathrm{Max}(A)$ mulțimea tuturor idealelor maximale (care sînt și închise) — numită spectrul maximal al lui A.

Se observă imediat că elementele lui $\mathrm{Max}\,(A)$ se pun în corespondență biunivocă cu mulțimea claselor de echivalență de K-morfisme a lui A în închiderea algebrică a lui K notată K_a — două astfel de morfisme fiind echivalente dacă diferă printr-un element al grupului lui Galois $G\,(K_a/K)$.

Mai mult, există o corespondență biunivocă între elementele lui $\mathrm{Max}\,(K \ll X_1, \ldots, X_n \gg)$ și $(\mathring{K}_a)^n$. În cazul în care K_a este algebric închis, rezultă deci izomorfismul :

$$\mathrm{Max}\,(K \ll X_1, \ldots, X_n \gg) \approx \mathring{K}^n.$$

Oricărui morfism $A_1 \xrightarrow{\varphi} A_2$ de K-algebre afinoide i se asociază o aplicaţie

$$\mathrm{Max}\,(A_2) \xrightarrow{{}^a\varphi} \mathrm{Max}\,(A_1)$$

astfel

$${}^a\varphi\,(\underline{m}_2) = \mathrm{Ker}\,(A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_2/\underline{m}_2)\ (\forall)\ \underline{m}_2 \in \mathrm{Max}\,(A_2).$$

Se observă că astfel s-a definit pe categoria algebrelor afinoide un functor contravariant.

Dacă $x \in \mathrm{Max}\,(A)$, atunci A/x este o extindere finită a lui K — şi deci are o valuare care prelungeşte valuarea lui K şi care coincide cu valuarea factor. Vom nota la fel valuarea pe K cu cea din A/x.

Pentru orice $f \in A$ vom nota $f(x)$ imaginea lui f prin surjecţia $A \to A/x$.

Observaţia 5.2. i) Din teorema lui Cohen-Seidenberg rezultă: φ finit $\Rightarrow {}^a\varphi$ surjectiv.

ii) φ surjectiv $\Rightarrow {}^a\varphi$ injectiv.

iii) $f(x) \neq 0\ (\forall)\ x \in \mathrm{Max}\,(A) \Leftrightarrow f$ inversabil în A.

DEFINIŢIA 5.3. Pentru o K-algebră afinoidă A se numeşte seminormă spectrală pe A, seminorma definită prin:

$$\|f\|_{\mathrm{sp}} = \sup_{x \in \mathrm{Max}\,(A)} |f(x)|. \tag{5.3.1}$$

Definiţia este îndreptăţită căci:

$$\|f_1 + f_2\|_{\mathrm{sp}} \leqslant \mathrm{Max}\,(\|f_1\|_{\mathrm{sp}}, \|f_2\|_{\mathrm{sp}})\ (\forall) f_1, f_2 \in A; \tag{5.3.2}$$

$$\|f_1 \cdot f_2\|_{\mathrm{sp}} \leqslant \|f_1\|_{\mathrm{sp}} \cdot \|f_2\|_{\mathrm{sp}}\ (\forall) f_1, f_2 \in A; \tag{5.3.3}$$

$$\|f\|^n_{\mathrm{sp}} = \|f^n\|_{\mathrm{sp}}\ (\forall) f \in A. \tag{5.3.4}$$

În plus:

$$\|f\|_{\mathrm{sp}} \leqslant \|f\|. \tag{5.3.5}$$

Vom studia în continuare această seminormă şi apoi vom stabili încă două proprietăţi ale algebrelor afinoide.

PROPOZIŢIA 5.4. *Fie A o K-algebră afinoidă. Pentru $f \in A$ sînt echivalente afirmaţiile:*

(a) $|f(x)| < 1\ (\forall) x \in \mathrm{Max}\,(A)$

(b) $1 - f \cdot X$ *este inversabil în* $A \langle\!\langle X \rangle\!\rangle$.

(c) $\lim\limits_{n \to \infty} f^n = 0$ *(f este topologic nilpotent)*.

Demonstraţie. (c) $\Rightarrow$ (a). Cum $\lim\limits_{n\to\infty} f^n = 0$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = 0$ $(\forall)$ $x \in \mathrm{Max}(A)$, căci aplicaţia $A \to A/x$ este continuă (teorema lui Banach). Dar $|f^n(x)| = |f(x)|^n$, deci neapărat $|f(x)| < 1\ (\forall)\ x \in \mathrm{Max}\,(A)$. (a) $\Rightarrow$ (b). Este suficient de probat (observaţia 5.2 iii)) că $(1 - fX)\,(y) \neq 0$ $(\forall) y \in \mathrm{Max}\ (A \langle\!\langle X \rangle\!\rangle)$.

Dar $|f(y)| = |f(a_i(y))| < 1$ (unde $i : A \to A \ll X \gg$ este incluziunea canonică), iar $|X(y)| \leqslant 1$, căci $\|X\| = 1$ în $A \ll X \gg$ şi $|X(y)| \leqslant \|X\|$. Deci $1 \neq f(y) \cdot X(y)$. În fine, să probăm (b) $\Rightarrow$ (c).

Inversul lui $1 - fX$ nu poate fi decît $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f^n X^n$, căci aceasta este inversul în $A\,[[X]]$.

Dar $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f^n X^n \in A \ll X \gg \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f^n = 0$.

COROLARUL 5.5. *Fie că norma lui A este multiplicativă* ($\|fg\| = \|f\| \cdot \|g\|$). *Atunci norma lui A coincide cu seminorma spectrală.* (Acest corolar are loc în particular pentru $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$).

Într-adevăr, în acest caz f este topologic nilpotent dacă şi numai dacă $\|f\| < 1$. Să probăm:

$$\|f\|_{sp} \leqslant 1 \Rightarrow \|f\| \leqslant 1. \tag{5.5.1}$$

Dacă $\|f\|_{sp} \leqslant 1$, atunci f este topologic nilpotent şi deci $\|f\| < 1$. Dacă $\|f\|_{sp} = 1$, atunci $|f(x)| \leqslant 1$ $(\forall)$ $x \in \mathrm{Max}(A)$, deci $|\lambda f(x)^n| < 1$ oricare ar fi $n \in N$ şi $\lambda \in K$ cu $0 < |\lambda| < 1$; de aici rezultă că λf^n este topologic nilpotent, deci $\|\lambda f^n\| < 1$ şi cum norma este multiplicativă, $\|f\| < \dfrac{1}{\sqrt[n]{|\lambda|}}$. Pentru n tinzînd spre infinit rezultă $\|f\| \leqslant 1$. Din relaţia (5.5.1) şi (5.3.5) rezultă că $\| \;\|_{sp}$ este o normă şi cele două norme sînt echivalente, deci (I.6.7) sînt egale.

PROPOZIŢIA 5.6. *Fie din nou o K-algebră afinoidă A. Pentru* $f \in A$ *sînt echivalente următoarele afirmaţii:*

(a) $\|f\|_{sp} \leqslant 1$.

(b) *Pentru orice morfism finit* $u : K \ll X_1, \ldots, X_n \gg \to A$, *f este întreg peste* $\overset{\circ}{K} \ll X_1, \ldots, X_n \gg$.

(c) *Există o sub-*$\overset{\circ}{K}$*-algebră mărginită B a lui A peste care f este întreg.*

(d) *Mulţimea* $\{f^n\}_{n\in N}$ *este mărginită în A.*

Demonstraţie. (b) $\Rightarrow$ (c). Este evident că $u(\overset{\circ}{K} \ll X_1, \ldots, X_n \gg) \subset \overset{\circ}{A}$ şi deci B se poate lua $u(\overset{\circ}{K} \ll X_1, \ldots, X_n \gg)$.

(c) $\Rightarrow$ (d). Fie ecuaţia de dependenţă întreagă a lui f peste B:

$$f^m = b_1 f^{m-1} + \ldots + b_{m-1} f + b_m.$$

Se deduce cu uşurinţă că:

$$f^{m+p} = b_1^{(p)} f^{m-1} + \ldots + b_{m-1}^{(p)} f + b_m^{(p)},$$

unde $b_i^{(p)} \in B$ se exprimă ca polinoame în $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Fie $\beta > 0$ cu $\|b\| \leqslant \beta$ $(\forall)$ $b \in B$ şi fie $\alpha = \max(1, \|f\|, \ldots, \ldots, \|f^{m-1}\|)$. Atunci:

$$\|f^{m+p}\| \leqslant \alpha \cdot \beta$$

(d) $\Rightarrow$ (a). Cum $A \to A/x$ este continuă, rezultă $\{f^n(x)\}_{n\in N}$ mulţime mărginită în A/x, deci neapărat $|f(x)| \leqslant 1$ $(\forall)$ $x \in \mathrm{Max}(A)$ si astfel: $\|f\|_{sp} \leqslant 1$.

Implicaţia (a) $\Rightarrow$ (b) este mai dificilă. O vom demonstra împreună cu implicaţia (a) $\Rightarrow$ (b) din teorema următoare:

TEOREMA 5.7. *Fie A o K-algebră afinoidă şi $f \in A$. Sînt echivalente afirmaţiile*:

a) $f(x) = 0$ $(\forall)$ $x \in \operatorname{Max}(A)$.

b) *f este nilpotent.*

Demonstraţie. Cum (b) $\Rightarrow$ (a) este evidentă, rămîne de realizat planul anunţat.

Etapa I. Fie A integru. În propoziţia 5.6 putem presupune că u este injectiv, căci $\varphi(K \ll X_1, \ldots, X_n \gg)$ este tot afinoidă şi există deci un homomorfism strict finit $v: K \ll X_1, \ldots, X_s \gg \to \varphi(K \ll X_1, \ldots, X_n \gg)$ şi este suficient de probat că f este întreg peste $K \ll X_1, \ldots, X_s \gg$ (compunerea a două morfisme finite este tot finită). În cazul teoremei 5.7 vom considera de asemenea un monomorfism finit $u: K \ll X_1, \ldots, X_n \gg \to A$.

Vom nota cu E corpul de fracţii al lui A şi cu F corpul de fracţii al lui $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$. Rezultă deci diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
K \ll X_1, \ldots, X_n \gg \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & A \arrow[d, "j"] \\
F \arrow[r, "u_0"] & E
\end{tikzcd}$$

Cum u este finit, u_0 rezultă de asemenea finit. Vom nota prin L extinderea cvasigaloisiană finită a lui F generată de E şi prin Γ mulţimea morfismelor F-liniare $E \to L$. Pentru orice $\sigma \in \Gamma$ vom nota cu $\sigma(A)$ imaginea lui A în L prin σ şi vom defini: $C = K \ll X_1, \ldots, X_n \gg [\sigma(A)]_{\sigma \in \Gamma}$. C este o algebră finită peste $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$, căci A este finită peste $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$, iar Γ este o mulţime finită. Vom considera pentru $f \in A$ polinomul $\prod_{\sigma \in \Gamma} (Y - \sigma(f)) \in C[Y]$; este clar că acest produs are coeficienţii invarianţi la orice $\sigma \in \Gamma$, adică radiciali, şi astfel există o putere a exponentului caracteristic p al lui F ca:

$$P(Y) = \left[\prod_{\sigma \in \Gamma} (Y - \sigma(f))\right]^{p^e} \in F[Y].$$

Cum C este $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$-finită, rezultă că toţi coeficienţii lui $P(Y)$ sînt întregi peste $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$. Dar $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ este factorial, deci şi întreg închis în corpul fracţiilor sale, deci $P(Y) \in K \ll X_1, \ldots, X_n \gg [Y]$. Orice coeficient din $P(Y)$ este un polinom cu coeficienţi întregi de nedeterminate $\{\sigma(f)\}_{\sigma \in \Gamma}$. În particular termenul liber al lui P este $\left(\prod_{\sigma \in \Gamma} \sigma(f)\right) p^e$.

Dacă

$$\|f\|_{sp} \leqslant 1 \text{ (resp. } \|f\|_{sp} = 0),$$

rezultă că

$$|f(x)| \leqslant 1 \text{ (resp. } f(x) = 0) \ (\forall)\ x \in \operatorname{Max}(A),$$

deci

$$|\sigma(f)(z)| = |f(\sigma^{-1}(z))| \leqslant 1 \text{ (resp. } \sigma(f)(z) = f(\sigma^{-1}(z)) = 0) \ (\forall)\ z \in \operatorname{Max}(C).$$

Dar aplicația de incluziune $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg \to C$ este finită, deci $\operatorname{Max}(C) \to \operatorname{Max}(K \ll X_1, \ldots, X_n \gg)$ este surjecție.

Rezultă deci că $(\forall)\ y \in \operatorname{Max}(K \ll X_1, \ldots, X_n \gg)$ și l coeficient al lui $P(Y)$, $|l(y)| \leqslant 1$ (resp. $l(y) = 0$).

Deci : 1) Dacă $\|f\|_{sp} \leqslant 1$, orice coeficient l al lui $P(Y)$ aparține lui $\overset{\circ}{K} \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ (căci pe $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$, $\|\ \| = \|\ \|_{sp}$). Rezultă că $P(f) = 0$ este o ecuație de dependență întreagă a lui f peste $\overset{\circ}{K} \ll X_1, \ldots, X_n \gg$.

2) Dacă $\|f\|_{sp} = 0$, rezultă $\|l\|_{sp} = 0$ $(\forall)$ l coeficient în $P(Y)$, deci $\|l\| = 0$, deci $l = 0$ — și deci : $\left[\prod\limits_{\sigma \in \Gamma} \sigma(f)\right]^{p^e} = 0$ și astfel $f = 0$.

Etapa II. Cazul general. Fie A oarecare și fie $(\underline{p}_\alpha)_{\alpha=1}^{t}$ familia idealelor prime minimale ale lui A. Cum orice ideal maximal din $A/\underline{p}_\alpha$ provine dintr-un ideal maximal din A, rezultă $\|f\|_{sp} \geqslant \|\pi_\alpha(f)\|_{sp}$, unde $\pi_\alpha : A \to A/\underline{p}_\alpha$ este surjecția canonică. Deci : $\|f\|_{sp} \leqslant 1$ (sau $\|f\|_{sp} = 0$) implică :

$$\|\pi_\alpha(f)\|_{sp} \leqslant 1 \text{ (sau } \|\pi_\alpha(f)\|_{sp} = 0) \ (\forall)\ \alpha \in \{1, 2, \ldots, t\}.$$

Deci $\pi_\alpha(f)$ este întreg peste $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ (resp. $\pi_\alpha(f) = 0$).

Deci există un polinom unitar $P_\alpha(Y) \in K \ll X_1, \ldots, X_n \gg [Y]$ astfel ca, $P_\alpha(f) \in \underline{p}_\alpha$ (resp. $f \in \underline{p}_\alpha$). Rezultă $\prod\limits_{\alpha=1}^{t} P_\alpha(f) \in \bigcap\limits_{\alpha=1}^{t} \underline{p}_\alpha$ $\left(\text{resp. } f \in \bigcap\limits_{\alpha=1}^{t} \underline{p}_\alpha\right)$ — adică $\prod\limits_{\alpha=1}^{t} (P_\alpha(f))$ (respectiv f) este nilpotent. Deci pentru un întreg $r \geqslant 1$ convenabil, $\left[\prod\limits_{\alpha=1}^{t} P_\alpha(Y)\right]^r$ este ecuația de dependență întreagă a lui f peste $\overset{\circ}{K} \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ (respectiv $f^r = 0$).

Din teorema 5.7 rezultă acum încă cîteva proprietăți ale algebrelor afinoide.

Af_8). Orice K algebră afinoidă este inel Jacobson (adică orice ideal prim este intersecție de ideale maximale).

Rezultă deci teorema 5.7 prin reducere la cazul integru.

Se deduce acum imediat :

Af_9) Pentru o K-algebră afinoidă A sînt echivalente afirmațiile

a) A semisimplă.

b) A redusă

c) $\|\ \|_{sp}$ este o normă.

Af_{10}). Fie A_1, A_2 două K-algebre afinoide ; atunci orice K-morfism de algebre $A_1 \xrightarrow{\varphi} A_2$ este continuu. Mai mult, dacă norma lui A_2 este multiplicativă și $|K|$ e dens în $[0, \infty)$, atunci el este metric.

Într-adevăr, dacă A_1 și A_2 sînt ambele K spații vectoriale finite, atunci φ este automat continuu — din Af_2).

Fie apoi A_1 arbitrar și A_2-K-finit. Atunci φ se factorizează în $A_1 \xrightarrow{p} A_1/\operatorname{Ker} \varphi \xrightarrow{i} A_2$. Cum p este proiecție, p este automat continuu.

Cum $A_1/\mathrm{Ker}\ \varphi$ este și el K-spațiu vectorial finit, rezultă i continuă — deci φ este continuă.

Fie acum A_1 și A_2 oarecare; vom demonstra cu ajutorul teoremei grafului închis. Fie deci un șir $(f_n)_{n\geqslant 0} \subset A_1$ convergent către zero și fie că $(\varphi(f_n))_{n\geqslant 0} \subset A_2$ converge spre h; cum A_2 este noetherian, rezultă că $(\forall)$ $\underline{m}$ ideal maximal din A_2, $A_2/\underline{m}^t$ este finit generat ca $A_2/\underline{m}$-spațiu vectorial; dar $A_2/\underline{m}^t$ este un K-spațiu vectorial finit dimensionat și deci din cazul precedent aplicație compusă: $A_1 \to A_2 \to A_2/\underline{m}^t$ este continuă. Deci: imaginea lui h în $A_2/\underline{m}^t$ este zero — și astfel h aparține oricărei puteri a radicalului Jacobson. Dar din corolarul precedent radicalul Jacobson coincide cu nilradicalul și cum A_2 este noetherian rezultă $h = 0$.

Ultima afirmație rezultă standard: fie $a_1 \in A_1$ cu $\| a_1 \| < \| \varphi(a_1) \|$; fie $c \in K$ cu $\| a_1 \| < |c| \leqslant \| \varphi(a_1) \|$.

Notăm $a' = c^{-1}a_1$; șirul $\{a'^n\}_{n\geqslant 1}$ tinde la zero, iar $\{\varphi(a'^n)\}_{n\geqslant 1}$ este în complementara sferei unitate.

Vom încheia acest paragraf cu o precizare a lemei de normalizare (teorema 4.10).

PROPOZIȚIA 5.8. *Dacă A este o K algebră afinoidă iar $m_1, \ldots, m_t$ este o familie finită din* Max (A), *atunci există un monomorfism finit* $K \ll Y_1, \ldots, Y_s \gg \xrightarrow{\chi} A$ *astfel ca*:

$$(Y_1, \ldots, Y_s) = \overset{-1}{\chi}(\underline{m}_1) = \ldots. = \overset{-1}{\chi}(\underline{m}_t).$$

Demonstrație. Fie $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg \to A$ un monomorfism finit; cum $\| \pi_j \circ \varphi(X_i) \| \leqslant 1$ (unde $\pi_j : A \to A/\underline{m}_j$), rezultă din propoziția 5.6 aplicată monomorfismului finit $K \to A/\underline{m}_j$ un polinom P_{ij} cu coeficienții în $\overset{\circ}{K}$ astfel ca: $\pi_j \circ \varphi\,[P_{ij}(X_i)] = 0$ în $A/\underline{m}_j$; deci $\varphi\,[P_{ij}(X_i)] \in \underline{m}_j$. Notînd $P_i = \prod_{j=1}^{t} P_{ij}$, rezultă $\varphi\,[P_i(X_i)] \in \bigcap_{j=1}^{t} \underline{m}_j$. Atunci aplicația $K \ll Y_1, \ldots, Y_s \gg \to K \ll X_1, \ldots, X_s \gg$ definită prin $\psi(Y_i) = P_i(X_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ este finită și punînd $\chi = \psi \circ \varphi$ este clar că $\overset{-1}{\chi}(\underline{m}_j) \supseteq (Y_1, \ldots, Y_s)$ — deci egalitate. Cum dimensiunea lui A și a lui $K \ll Y_1, \ldots, Y_s \gg$ coincid, χ este finit și $K \ll Y_1, \ldots, Y_s \gg$ este integră, rezultă că χ este monomorfism.

§ 6. INELE CU EXTINDERI FINITE

În acest paragraf vom demonstra că inelul funcțiilor strict analitice peste un corp valuat nearhimedian, nediscret și complet este cu extinderi finite.

Reamintim în prealabil unele fapte bine cunoscute din algebra comutativă.

DEFINIȚIA 6.1. Un inel (comutativ) integru A se numește „cu extinderi finite" (sau „japonez" după terminologia din [13]) dacă închiderea sa întreagă A' în orice extindere finită Q' a corpului său de fracții — $Q(A)$ — este un A-modul finit.

TEOREMA 6.2. (E. Noether). *Fie A un inel integru, noetherian și normal. Pentru orice extindere algebrică finită și separabilă Q a corpului său de fracții $Q(A)$, închiderea întreagă A' a lui A în Q' este un A-modul finit.*

Rezultă imediat următorul:

COROLARUL 6.3. *Un inel integru, noetherian și normal A este cu extinderi finite dacă și numai dacă închiderea întreagă A' a lui A în orice extindere algebrică finită și pur neseparabilă Q' a corpului său de fracții $Q(A)$, este un A-modul finit.*

Fixăm în cele ce urmează un inel integru A și notăm prin $Q(A)$ corpul său de fracții. Pentru un A-modul M, notăm prin $Q(M) = M \underset{A}{\otimes} Q(A)$ și numim rangul lui M : $\operatorname{rang}_A M = \dim_{Q(A)} Q(M)$.

DEFINIȚIA 6.4. Fie Q un A-modul M și N un submodul al său. Vom numi acoperirea lui N în M submodulul lui M astfel definit:

$$\widetilde{N} = \{m \in M \,;\, (\exists)\ 0 \neq a \in A \text{ cu } a.m \in N\}.$$

Dacă M este fără torsiune, atunci aplicația canonică $M \to Q(M)$ $(m \rightsquigarrow m \otimes 1)$ este incluziune și atunci

$$(\ast)\ \widetilde{N} = M \cap Q(N).$$

De exemplu $(\widetilde{O})$ este modulul de torsiune al lui M. Dacă N și P sînt două submodule ale lui M, atunci:

i) $N \subset P \Rightarrow \widetilde{N} \subset \widetilde{P}$

ii) $\widetilde{N \cap P} = \widetilde{N} \cap \widetilde{P}$.

DEFINIȚIA 6.5. Submodulul N al lui M se spune acoperit dacă $\widetilde{N} = N$.

Relația evidentă $\widetilde{N} = \widetilde{\widetilde{N}}$ exprimă faptul că acoperirea oricărui modul este un modul acoperit.

Dacă $u : M_1 \to M_2$ este un A-morfism, atunci $\widetilde{u^{-1}(\widetilde{N}_2)} = u^{-1}(\widetilde{N}_2)$ oricare ar fi N_2 submodul al lui M. În particular, nucleul oricărei forme liniare $u : M \to A$ este acoperit în M.

DEFINIȚIA 6.6. Un A-modul M se spune cu acoperiri finite, dacă acoperirea oricărui submodul al său finit generat este încă un modul finit generat.

PROPOZIȚIA 6.7. *Fie A un inel noetherian. Atunci*:

i) *Orice A-modul de tip finit este cu acoperiri finite.*

ii) *Orice submodul al unui modul cu acoperiri finite este cu acoperiri finite.*

iii) *Orice modul factor al unui modul cu acoperiri finite printr-un submodul finit al său este încă cu acoperiri finite.*

iv) *Limita inductivă a unui sistem filtrant de submodule acoperite și cu extinderi finite, a unui modul, este cu extinderi finite.*

v) *O sumă directă de module este cu extinderi finite, dacă și numai dacă toți sumanzii sînt cu extinderi finite și aproape toți fără torsiune.*

vi) *M este cu extinderi finite dacă și numai dacă orice submodul cu rangul finit este neapărat finit generat.*

vii). *Dacă N și P sînt două A-submodule acoperite ale lui M, P fiind strict inclus în N, atunci : $\mathrm{rang}_A\, P < \mathrm{rang}_A\, N$ dacă $\mathrm{rang}_A\, P$ este finit.*

Demonstrație. Primele patru afirmații se demonstrează fără nici o dificultate, pornind direct de la definiție. La v), afirmația „numai dacă'' se demonstrează prin reducere la absurd.

Demonstrăm vi). Fie M cu extinderi finite; cum $\widetilde{(0)}$ este finit generat : $\mathrm{rang}_A\, N = \mathrm{rang}_{A/\widetilde{(0)}}\, N/(0)$ și N e A-finit generat dacă și numai dacă $N/\widetilde{(0)}$ este $A/\widetilde{(0)}$ finit generat (oricare ar fi N submodul al lui M), putem să presupunem M fără torsiune. Fie N submodul în M cu $\mathrm{rang}_A N < \infty$ și fie $\left\{\dfrac{n_1}{a_1}, \ldots, \dfrac{n_r}{a_r}\right\}$ o bază a lui $Q\,(N)$ peste $Q\,(A)$ $(r = \mathrm{rang}_A\, N)$. Notăm cu N' submodulul lui N generat de $n_1, \ldots, n_r$. Este clar că $Q\,(N') = Q\,(N)$, deci din relația $(\ast)$ rezultă $\widetilde{N}' = \widetilde{N}$. Dar N' este finit generat — deci și N este finit generat, căci A este noetherian.

Fie acum că $\mathrm{rang}_A\, N < \infty$ implică faptul că N este A-submodul finit generat al lui M. Atunci din nou $\widetilde{(0)}$ rezultă finit generat și deci putem considera M fără torsiune. Fie P finit generat; atunci $\mathrm{rang}_A\, \widetilde{P} = \mathrm{rang}_A\, P < \infty$, deci și $\widetilde{P}$ este finit generat.

Probăm în fine vii); $\mathrm{rang}_A\, P = \mathrm{rang}_A\, N$ implică $Q\,(P) = Q\,(N)$ deci

$$P = M \cap Q\,(P) = M \cap Q\,(N) = N.$$

Vom demonstra acum o proprietate de tranzitivitate.

PROPOZIȚIA 6.8. *Fie A și B două inele integre noetheriene, B fiind un A-modul cu extinderi finite, iar M un B-modul cu extinderi finite și fără torsiune. Atunci M este un A-modul cu extinderi finite.*

Demonstrație. Fie N un A-submodul al lui M cu $\mathrm{rang}_A N < \infty$ și N_B-B-submodulul lui M generat de N.

Evident, $\mathrm{rang}_B\, N_B \leqslant \mathrm{rang}_A\, N < \infty$, deci N_B este un B-modul finit generat. Cum M este fără torsiune, N_B este fără torsiune, deci N_B este un submodul al unei sume finite $\overset{t}{\underset{i=1}{\oplus}} B_i$ $(B_i = B)$. Cum $\overset{t}{\underset{i=1}{\oplus}} B_i$ este un A-modul cu extinderi finite și $N \subset \overset{t}{\underset{i=1}{\oplus}} B_i$, rezultă N-A-modul finit generat.

Rezultatul următor leagă noțiunea de modul cu extinderi finite de noțiunea de modul liniar-separat.

PROPOZIȚIA 6.9. *Fie A noetherian și M un A-modul liniar separat. Atunci M este cu extinderi finite.*

Demonstrație. Fie $N \subset M$ un submodul de rang finit. Cum inelul A este noetherian, este suficient să probăm că $\widetilde{N}$ este finit generat, iar aceasta o vom face prin inducție după rangul lui N.

Pentru $\mathrm{rang}_A\, N = 0$, rezultă $\widetilde{N} = \widetilde{(0)} = (0)$ — căci M este fără torsiune. Fie că am demonstrat pentru $\mathrm{rang}_A N \leqslant n - 1$ și fie $\mathrm{rang}_A\, N = n$. Fie $u : M \to A$ cu restricția nenulă la $\widetilde{N}$. Atunci $\mathrm{Ker}\,(u)$ este inclus strict în $\widetilde{N}$ și deci $\mathrm{rang}_A\, \mathrm{Ker}\,(u) < n$, de unde $\mathrm{Ker}\,(u)$ rezultă finit generat. Din șirul exact :

$$0 \to \mathrm{Ker}\,(u) \to \widetilde{N} \to u\,(\widetilde{N}) \to 0$$

rezultă că $\widetilde{N}$ este finit generat (din nou ținem cont de noetherianitatea lui A).

Observația 6.10. 1) Ținînd cont de **I**.§3, avem : $M-A$ liniar separat $\Rightarrow M[[X_1, \ldots, X_n]] - A[[X_1, \ldots, X_n]]$ modul cu extinderi finite.

2) Dacă M este un K spațiu vectorial, atunci $M[[X_1, \ldots, X_n]]$ este $K[[X_1, \ldots, X_n]]$ — modul cu extinderi finite.

3) Dacă M este un A-modul, atunci pentru orice submodul acoperit N al lui M, $N[[X_1, \ldots, X_n]]$ este de asemenea un $A[[X_1, \ldots, X_n]]$-submodul acoperit în $M[[X_1, \ldots, X_n]]$.

DEFINIȚIA 6.11. Fiind dat un inel integru A, se numește o închidere universală întreagă a sa, închiderea întreagă a lui A într-o extindere algebric închisă a lui $Q(A)$.

PROPOZIȚIA 6.12. *Fie A un inel integru, noetherian. A este cu extinderi finite, dacă și numai dacă o închidere universală întreagă a sa este un A-modul cu acoperiri finite (și deci toate închiderile universale întregi ale lui A se bucură de aceeași proprietate).*

Demonstrație. Fie A cu extinderi finite, Q_a o extindere algebrică închisă a lui $Q(A)$, A_a închiderea universală întreagă a lui A în Q_a și N un A-submodul finit generat al lui A_a.

Notăm prin N_a subalgebra lui A_a generată de A și N. Corpul total de fracții al lui N_a — $Q(N_a)$ — este o extindere finită a lui $Q(A)$, căci N_a este încă un A-modul finit și aplicăm teorema lui Cohen-Seidenberg. Închiderea lui A în $Q(N_a)$, adică : $A_a \cap Q(N_a)$ este un A-modul finit ; Cum $\widetilde{N} \subset \widetilde{N}_a = A_a \cap Q(N_a)$ și A este noetherian, această implicație este demonstrată.

Reciproc, fie A_a cu acoperiri finite și fie o extindere algebrică finită Q' a lui Q. (Evident, putem considera $Q \subset Q' \subset Q_a$). Să probăm deci că închiderea întreagă a lui A în Q', adică $A_a \cap Q'$ este un A-modul finit ; dar aceasta rezultă din propoziția anterioară, căci

$$\operatorname{rang}_A (A_a \cap Q') = [Q' : Q(A)] < \infty.$$

Un inel integru noetherian și normal A, de caracteristică nulă este cu extinderi finite (conform teoremei lui *E*. Noether).

Pentru cazul caracteristic nenule, vom da următorul criteriu.

PROPOZIȚIA 6.13. *Fie A un inel integru, noetherian și normal, iar $p =$ caracteristica lui $Q(A) \neq 0$.*

Sînt echivalente aserțiunile :

a) *A este cu extinderi finite.*

b) *A_a este un A-modul cu acoperiri finite.*

c) *$A^{p^{-\infty}}$ este un A-modul cu acoperiri finite.*

d) *$A^{p^{-n}}$ este un A-modul cu acoperiri finite $(\forall)\, n \geqslant 1$.*

e) *$A^{p^{-1}}$ este un A-modul cu acoperiri finite.*

Observație. Reamintim conținutul notațiilor folosite în această propoziție : fie $Q(A)$ corpul total de fracții al lui A și Q_a o extindere algebric închisă a lui $Q(A)$:

$$A^{p^{-1}} = \{x \in Q_a ;\ x^p \in A\}$$

$$A^{p^{-n}} = \{x \in Q_a ;\ x^{p^n} \in A\}$$

$$A^{p^{-\infty}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^{p^{-n}}.$$

Demonstrație. Echivalența afirmațiilor a) și b) a fost demonstrată în propoziția anterioară.

Cum $A^{p^{-1}} \subset A^{p^{-n}} \subset A^{p^{-\infty}} \subset A_a$ și A este noetherian, rezultă șirul de implicații b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ e).

Demonstrăm acum e) $\Rightarrow$ d) prin inducție după n. Pentru $n = 1$ afirmația este clară ; fie că $A^{p^{-(n-1)}}$ este un A-modul cu acoperiri finite. Cum $A^{p^{-(n-1)}}$ este izomorf cu A, atunci $A^{p^{-n}} = [A^{p^{-(n-1)}}]^{p^{-1}}$ este $A^{p^{-(n-1)}}$-modul cu extinderi finite. Conform proprietății de tranzitivitate rezultă că $A^{p^{-n}}$ este un A-modul cu extinderi finite.

În fine, probăm d) $\Rightarrow$ a). Conform corolarului 6.3 este suficient să probăm că incluziunea întreagă a lui A în orice extindere finită, pur neseparabilă a lui $Q(A)$, este un A-modul finit. Fie într-adevăr Q' o astfel de extindere, fie A' închiderea întreagă a lui A în Q', și mai notăm prin Q_a o extindere algebric închisă a lui Q'. Cum extinderea $Q \subset Q'$ este finită, există n ca $Q' \subset Q^{p^{-n}} \subset Q_a$.

Rezultă deci

$$A' = A \cap Q' \subset A_a \cap Q^{p^{-n}} = A^{p^{-n}}$$

ultima relație fiind justă ; într-adevăr, fie un element $x \in Q^{p^{-n}}$ întreg peste A ; el satisface o ecuație $f(x) = 0$ cu $f \in A[X]$ polinom unitar, deci $[f(x)]^{p^n} = 0$, și astfel $g(x^{p^n}) = 0$ cu $g \in A[X]$ convenabil. Cum $x^{p^n} \in Q$ și A este normal, rezultă $x^{p^n} \in A$. Incluziunea contrară este banală.

Dar $\operatorname{rang}_A (A_a \cap Q') < \infty$, deci $A_a \cap Q'$ este un A-modul finit, căci $A^{p^{-n}}$ este un A-modul cu acoperiri finite.

COROLARUL 6.15. *Inelul seriilor formale în n-nedeterminate peste un corp este cu extinderi finite.*

Într-adevăr, fie $Q[[X_1, \ldots, X_n]] = A$; cum A este noetherian și normal, rămîne de considerat doar cazul în care p = caracteristica lui $Q \neq 0$:

$$A^{p^{-1}} = Q^{p^{-1}} [[X_1^{p^{-1}}, \ldots, X_n^{p^{-1}}]].$$

Este suficient să probăm că $A^{p^{-1}}$ este un A-modul liniar separat. Dar $A^{p^{-1}}$ este un $Q^{p^{-1}}$ $[[X_1, \ldots, X_n]]$-modul liber finit generat, iar $Q^{p^{-1}}$ fiind Q-liniar separat implică $Q^{p^{-1}}$ $[[X_1, \ldots, X_n]]$ este un A-modul liniar separat.

Cu aceste pregătiri, putem enunța rezultatul care ne interesează :

TEOREMA 6.16. *Inelul funcțiilor strict analitice $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ peste un corp valuat nearhimedian, nediscret și complet este cu extinderi finite.*

Demonstrație. Din nou este suficient de considerat doar cazul $p =$ $=$ caracteristica lui $K \neq 0$, căci $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ fiind factorial este normal.

$(K \ll X_1, \ldots, X_n \gg)^{p^{-1}} = K^{p^{-1}} \ll X_1^{p^{-1}}, \ldots, X_1^{p^{-1}} \gg$ este un $K^{p^{-1}} \ll X_1, \ldots, X_n \gg$-modul liber (o bază este de exemplu formată din monoamele de forma :

$$(X_1^{p^{-1}})^{i_1} \ldots (X_n^{p^{-1}})^{i_n} \text{ cu } 0 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant p).$$

Este deci suficient de dovedit că $K^{p^{-1}} \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ este un $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ modul cu acoperiri finite.

Fie $\mathfrak{F}$ mulțimea K-subspațiilor cel mult numărabile a lui $K^{p^{-1}}$. Pentru fiecare $V \in \mathfrak{F}$, notăm

$$V(p^{-1}) = \{ \sum c_{i_1, \ldots, i_n} X_1^{i_1} \ldots X_1^{i_n} \in K^{p^{-1}} \ll X_1, \ldots, X_n \gg, c_{i_1, \ldots, i_n} \in V \}.$$

Atunci : $\bigcup\limits_{V \in \mathfrak{F}} V(p^{-1}) = K^{p^{-1}} \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ și sistemul de submodule $\{V(p^{-1})\}_{V \in \mathfrak{F}}$ este evident filtrat. Conform propoziției 6.7 iv), este suficient de demonstrat că $V(p^{-1})$ este cu acoperiri finite și acoperit $(\forall)$ $V \in \mathfrak{F}$.

Cum V este acoperit în $K^{p^{-1}}$, evident $V_* = \{ \sum c_{i_1, \ldots, i_n} \cdot X_1^{i_1}, \ldots, X_n^{i_n} ; c_{i_1, \ldots, i_n} \in V \}$ este acoperit în $K^{p^{-1}}[[X_1, \ldots, X_n]]$. Dacă $f \in K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ și $g \in K^{p^{-1}} \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ cu : $f.g \in V(p^{-1})$, atunci $g \in V_*$ și cum g este și convergentă, rezultă $g \in V(p^{-1})$. Deci $V(p^{-1})$ este un $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ submodul acoperit în $K^{p^{-1}} \ll X_1, \ldots, X_n \gg$.

Pentru a proba că $V(p^{-1})$ este cu acoperiri finite, este suficient să probăm că $V(p^{-1})$ este un $K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$-modul liniar separat.

Vom proba mai mult și anume că $V(p^{-1})$ este chiar continuu liniar separat (I §3).

Fie $0 \neq \sum c_{i_1, \ldots, i_n} X_1^{i_1}, \ldots, X_n^{i_n} \in V(p^{-1})$; de exemplu : $c_{j_1, \ldots, j_n} \neq$ $\neq 0$. Cum V este cel mult numărabil, rezultă (I, § 3, prop. 3.2) că există $\varphi : V \to K$ liniară și continuă cu $\varphi(c_{j_1, \ldots, j_n}) \neq 0$ și $|\varphi(v)| \leqslant c . \|v\|$ $(\forall)$ $v \in V$; $(c > 0)$. Definim $\varphi(p^{-1}) : V(p^{-1}) \to K \ll X_1, \ldots, X_n \gg$ punînd

$$\varphi(p^{-1})(\sum c_{i_1, \ldots, i_n} X_1^{i_1}, \ldots, X_n^{i_n}) = \sum \varphi(c_{i_1, \ldots, i_n}) X_1^{i_1}, \ldots, X_n^{i_n}$$

și evident :

$$\|\varphi(p^{-1})\| \leqslant C, \text{ iar } \varphi(p^{-1})(\sum c_{i_1, \ldots, i_n} X_1^{i_1}, \ldots, X_n^{i_n}) \neq 0$$

Demonstrația este încheiată.

Din teorema anterioară și Af_5) rezultă :

Af_{11}) Orice algebră afinoidă integră este cu extinderi finite.

Primită la redacție la 22 aprilie 1968

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Calea Griviței 21, București

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE SUR UN CORPS NON ARCHIMÉDIEN

Eléments d'algèbre affinoïde

RÉSUMÉ

Dans cet article on expose les principaux résultats relatifs aux algèbres affinoïdes, qui sont démontrés dans [4], [5], [10], [12] et [17]. Nous essayons quelques extensions de résultats bien connus.

BIBLIOGRAFIE
(continuare)

11. N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique, Algébre commutative.* Hermann, Paris, 1955
12. L. Gerritzen, *Erweiterungsendliche Ringe in der nichtarchimedische Funktionentheorie* Inventiones math., **2**, 178—190 (1966).
13. A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Elements de la Géometrie algébrique,* IHES, **20**, 24 (1961).
14. U. Güntzer, *Modellringe in der nichtarchimedischen Funktionentheorie.* Proc. Kom. Ned. Akad. v. Wetensch, A. **70** 334—342 (1967).
15. C. Houzel, *Espaces analytiques rigides sur un corps ultramétrique.* Université de Poitiers, 1965.
16. M. Nagata, *Local rings.* Interscience New York, 1962.
17. R. Remmert, *Algebraische Aspekte in der nichtarchimedischen Analysis.* Proceedings of a Conference on Local Fields — 1966, Springer Verlag, 1967.
18. P. Salmon, *Serie convergenti su un corpo non archimedeo con applicazione ai fasci analitici.* Annali di matematica pura ed applicata, Serie IV, **LXV** (1964).

ASUPRA UNUI SISTEM DE ECUAŢII FUNCŢIONALE

DE

AVRAM ŞT. FILIPESCU

(Timişoara)

În lucrare se dă soluţia generală, măsurabilă, reală pentru ecuaţia corelativă a ecuaţiei funcţionale a lui N. H. Abel (2), (24), (25). Sistemul de ecuaţii funcţionale (26) care generalizează ecuaţia funcţională (2) admite mai multe tipuri de soluţii date prin (24), (30), (33), (34), (35), (36), (37), (38), (39) (40), (41), (42), (43), (44), (45), (46), (47).

1. N. H. Abel, într-o lucrare publicată în 1823, [1], a studiat ecuaţia funcţională :

$$\text{(A)}\ \psi(x+y) = f(xy) + \varphi(x-y)$$

care admite ca soluţie generală, reală (în mulţimea funcţiilor reale de o variabilă reală) :

$$\text{(1)}\qquad \begin{cases} \psi(x) = \dfrac{a}{4}\,x^2 + b + c \\ f(x) = ax + b \\ \varphi(x) = \dfrac{a}{4}\,x^2 + c, \end{cases}$$

unde a, b, c sînt constante arbitrare reale.

În 1960, H. Roşcău [2], a reluat ecuaţia funcţională (A) a lui N. H. Abel şi a soluţionat-o cu metoda diferenţelor.

În 1964, I. Stamate [3] se ocupă de mai multe ecuaţii funcţionale de tip Pexider, în ultimul paragraf arată cum se obţine soluţia generală, măsurabilă, în mulţimea funcţiilor reale de o variabilă reală, a ecuaţiei funcţionale (A) a lui N. H. Abel. Această soluţie generală, măsurabilă, are forma (1).

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 5, P. 739–746, BUCUREŞTI, 1969

2. Înainte de a soluţiona sistemul de ecuaţii funcţionale, anunţat în titlul acestei lucrări, ne oprim asupra următoarei ecuaţii funcţionale :

$$a_1(x+y)\cdot b_1(x-y)=c_1(xy), \tag{2}$$

unde funcţiile $a_1(x+y)$, $b_1(x-y)$, $c_1(xy)$ sînt funcţii reale măsurabile de o singură variabilă reală. Ecuaţia funcţională (2) o numim ecuaţia funcţională corelativă a ecuaţiei lui N. H. Abel.

Pentru soluţionarea ecuaţiei funcţionale (2) schimbăm în această ecuaţie $x \rightleftarrows y$, şi avem :

$$a_1(x+y)\cdot b_1(y-x)=c_1(xy) \tag{3}$$

Comparînd ecuaţiile funcţionale (2) şi (3) deducem că funcţia $b_1(t)$ este o funcţie pară :

$$b_1(x-y)=b_1(y-x) \tag{4}$$

În ecuaţia funcţională (2) păstrăm x neschimbat iar y îl înlocuim cu $-y$. Avem :

$$a_1(x-y)\cdot b_1(x+y)=c_1(-xy). \tag{5}$$

În ecuaţia funcţională (5) schimbăm $x \rightleftarrows y$, şi avem :

$$a_1(y-x)\cdot b_1(x+y)=c_1(-xy). \tag{6}$$

Comparînd ecuaţiile funcţionale (5) şi (6) deducem că funcţia $a_1(t)$ este funcţie pară :

$$a_1(x-y)=a_1(y-x). \tag{7}$$

Deoarece funcţiile $a_1(t)$ şi $b_1(t)$ sînt funcţii pare, introducem funcţiile :

$$\varphi(t^2)=a_1(t)\,;\ \psi(t^2)=b_1(t). \tag{8}$$

Cu ajutorul funcţiilor introduse prin (8), ecuaţia funcţională (2) se scrie :

$$\varphi[(x+y)^2]\cdot\psi(x-y)^2]=c_1\left[\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}\right]. \tag{9}$$

Din scrierea (9) a ecuaţiei funcţionale studiate se impune schimbarea de variabile :

$$(x+y)^2=4u,\ (x-y)^2=4v. \tag{10}$$

Atunci (9) devine :

$$\varphi(4u)\cdot\psi(4v)=c_1(u-v). \tag{11}$$

Facem în (11) $u=v$ şi avem :

$$\varphi(t)\cdot\psi(t)=c_1(0). \tag{12}$$

Din (12) distingem următoarele cazuri :

$$\varphi(t) = 0, \quad \psi(t) \text{ arbitrară}, \quad c_1(0) = 0. \tag{13}$$

$$\varphi(t) = \text{arbitrară}, \quad \psi(t) = 0, \quad c_1(0) = 0. \tag{14}$$

$$\varphi(t) \neq 0, \quad \psi(t) \neq 0, \quad c_1(0) \neq 0. \tag{15}$$

În baza lui (13) rezultă din (11) că

$$c_1(t) = 0. \tag{16}$$

Se obţine pentru ecuaţia funcţională (2) soluţia :

$$a_1(t) = 0, \quad b_1(t) = \text{arbitrară}, \quad c_1(t) = 0. \tag{17}$$

Analog folosind (14) în (11) rezultă (16) şi deci pentru ecuaţia funcţională (2) obţinem soluţia :

$$a_1(t) = \text{arbitrară}, \quad b_1(t) = 0, \quad c_1(t) = 0. \tag{18}$$

Pentru determinarea funcţiilor $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $c_1(t)$ în cazul (15), punem în (11) $u = 0$ şi apoi $v = 0$, şi avem ecuaţiile :

$$\begin{cases} \varphi(0)\cdot\psi(4v) = c_1(-v) \\ \varphi(4u)\cdot\psi(0) = c_1(u) \end{cases}; \quad (\varphi(0)\cdot\psi(0) = 0). \tag{19}$$

Eliminînd între (11) şi (19) funcţiile $\varphi(t)$ şi $\psi(t)$, obţinem ecuaţia funcţională pentru funcţia $c_1(t)$:

$$c_1(u)\cdot c_1(-v) = c_1(0)\cdot c_1(u-v). \tag{20}$$

Această ecuaţie funcţională se mai poate scrie :

$$\frac{c_1(u)}{c_1(0)}\cdot\frac{c_1(v)}{c_1(0)} = \frac{c_1(u+v)}{c_1(0)}. \tag{21}$$

Aceasta este ecuaţia funcţională Cauchy [4] pag. 47, a cărei soluţie generală măsurabilă reală este :

$$c_1(u) = c_1(0)\cdot e^{au} \equiv e^{au} + b, \tag{22}$$

unde a şi b sînt constante arbitrare reale. Folosind (22), (19) şi (8) obţinem pentru funcţiile $a_1(x)$ şi $b_1(x)$ expresiile :

$$a_1(x) = \exp\left(\frac{a}{4}x^2 - c\right), \quad b_1(x) = \exp\left(-\frac{a}{4}x^2 + b + c\right), \tag{23}$$

unde a, b, c sînt constante arbitrare reale.

În concluzie soluţia generală măsurabilă pentru ecuaţia corelativă (2) a ecuaţiei funcţionale a lui N. H. Abel, în mulţimea funcţiilor reale, măsurabile, de o singură variabilă reală, este:

$$(24)\qquad a_1(x) = \exp\left(\frac{a}{4}x^2 - c\right),\quad b_1(x) = \exp\left(\frac{a}{4}x^2 + b + c\right),$$

$$c_1(x) = \exp(ax + b)$$

$$(25)\qquad \begin{cases} a_1(x) = 0,\ b_1(x) = 0,\ c_1(x) = 0 \\ a_1(x) = 0,\ b_1(x) = \text{arbitrară},\ c_1(x) = 0 \\ a_1(x) = \text{arbitrară},\ b_1(x) = 0,\ c_1(x) = 0, \end{cases}$$

unde a, b, c sînt constante arbitrare reale.

3. Fie $a_i(t)$, $b_i(t)$, $c_i(t)$, $(i = 1, 2, 3)$, nouă funcţii reale măsurabile de o variabilă reală, care verifică următorul sistem de ecuaţii funcţionale:

$$(26)\qquad \begin{cases} a_1(x+y)\cdot b_1(x-y) = c_1(xy) \\ a_1(x+y)\cdot b_2(x-y) + a_2(x+y)\cdot b_1(x-y) = c_2(xy) \\ a_1(x+y)\cdot b_3(x-y) + a_2(x+y)\cdot b_2(x-y) + a_3(x+y)\cdot b_1(x-y) = c_3(xy). \end{cases}$$

Dăm mai jos soluţia generală măsurabilă reală a sistemului (26), care sistem generalizează ecuaţia corelativă (2) a ecuaţiei funcţionale a lui N. H. Abel (A).

Prima ecuaţie din sistemul (26) are soluţiile date de (24) şi (25). Înlocuind

$$(27)\qquad \begin{cases} a_2(t) = \alpha(t)\cdot a_1(t) \\ b_2(t) = \beta(t)\cdot c_1(t) \\ c_2(t) = \gamma(t)\cdot c_1(t) \end{cases}$$

în a doua ecuaţie din (26), primim ecuaţia funcţională a lui N. H. Abel:

$$(28)\qquad \alpha(x + y) + \beta(x - y) = \gamma(xy)$$

Soluţia generală măsurabilă reală pentru (28) este dată de (1):

$$(29)\qquad \begin{cases} \alpha(x) = \dfrac{m}{4}x^2 - n \\ \beta(x) = -\dfrac{m}{4}x^2 + n + p \\ \gamma(x) = mx + p \end{cases}$$

unde m, n, p sînt constante arbitrare reale. În baza lui (27) avem soluţia generală măsurabilă, reală pentru funcţiile $a_2(x)$, $b_2(x)$, $c_2(x)$:

$$(30)\qquad \begin{cases} a_2(x) = \left(\dfrac{m}{4}x^2 - n\right)\cdot\exp\left(\dfrac{a}{4}x^2 - c\right) \\ b_2(x) = \left(-\dfrac{m}{4}x^2 + n + p\right)\cdot\exp\left(-\dfrac{a}{4}x^2 + b + c\right) \\ c_2(x) = (mx + p)\cdot\exp(ax + b), \end{cases}$$

unde a, b, c, m, n, p sînt constante arbitrare reale.

Pentru soluționarea ecuației a treia din (26) facem substituțiile:

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} a_3(x) &= \left[\left(\frac{m}{4}x^2 - n\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{4}x^2 - \sigma\right)^2\right]\cdot \exp\left(\frac{a}{4}x^2 - c\right)\\ b_3(x) &= \left[\left(-\frac{m}{4}x^2 + n + p\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{\lambda}{4}x^2 + \sigma + \tau\right)^2\right]\cdot \exp\left(-\frac{a}{4}x^2 + b + c\right)\\ c_3(x) &= \left[(mx+p) + \frac{1}{2}(\lambda x + \tau)^2\right]\cdot \exp(ax+b) \end{aligned}\right.$$

și primim sistemul de relații algebrice care determină constantele necunoscute λ, σ, τ:

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda^2 - m^2 = 0\\ &\frac{3\lambda^2}{4} + \frac{m^2}{4} - \lambda^2 = 0\\ &mn - \lambda\sigma + \frac{mp}{2} - \frac{\lambda\tau}{2} = 0\\ &\lambda\tau + mp - 2\lambda\tau = 0\\ &\sigma^2 + \sigma\tau - n^2 - np = 0 \end{aligned}\right.$$

Din (32) obținem: $\lambda = m$, $\sigma = n$, $\tau = p$ și $\lambda = -m$, $\sigma = -n$, $\tau = -p$. Din cauza structurii substituțiilor (31) se vede că cele două serii de valori ale constantelor λ, σ, τ duc la aceeași soluție pentru funcțiile necunoscute $a_3(x)$, $b_3(x)$, $c_3(x)$.

Soluția generală, măsurabilă, reală pentru funcțiile $a_3(x)$, $b_3(x)$, $c_3(x)$ este:

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} a_3(x) &= \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{4}x^2 - n\right)\right]\cdot\left(\frac{m}{4}x^2 - n\right)\cdot \exp\left(\frac{a}{4}x^2 - c\right)\\ b_3(x) &= \left[1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{m}{4}x^2 + n + p\right)\right]\cdot\left(-\frac{m}{4}x^2 + n + p\right)\cdot\\ &\quad\cdot \exp\left(-\frac{a}{4}x^2 + b + c\right)\\ c_3(x) &= \left[1 + \frac{1}{2}(mx+p)\right].\,(mx+p)\cdot \exp(ax+b), \end{aligned}\right.$$

unde a, b, c, m, n, p sînt constante arbitrare reale.

Observăm că în soluția generală (33) nu mai intervin constante arbitrare în plus față de soluția generală (30).

Alte soluţii ale sistemului (26) se obţin plecînd de la soluţiile date (25):

$$a_i(x) = b_i(x) = c_i(x) = 0, \quad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{34}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_i\,(x) = b_i\,(x) = c_i\,(x) = 0, \quad (i = 1,\ 2), \ a_3\,(x) = \text{arbitrară}, \\ b_3\,(x) = \text{arbitrară}, \ c_3\,(x) = 0 \end{array}\right. \tag{35}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_1\,(x) = \text{arbitrară}, \ a_2\,(x) = \text{arbitrară}, \ a_3\,(x) = \text{arbitrară}\,; \\ b_i\,(x) = c_i\,(x) = 0, \quad (i = 1,\ 2,\ 3) \end{array}\right. \tag{36}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_i\,(x) = c_i\,(x) = 0, \quad (\,i = 1,\ 2,\ 3), \ b_1\,(x) = \text{arbitrară}, \ b_2\,(x) = \\ = \text{arbitrară}, \ b_3\,(x) = \text{arbitrară} \end{array}\right. \tag{37}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_1\,(x) = 0, \ b_1\,(x) = 0, \ c_1\,(x) = 0 \\ a_2\,(x) = \exp\left(\dfrac{l}{4}\,x^2 - g\right), \ b_2\,(x) = \exp\left(-\dfrac{l}{4}\,x^2 + g + h\right), c_2(x) = 0 \\ a_3\,(x) = \text{arbitrară}, \ b_3\,(x) = \text{arbitrară}, \ c_3\,(\,x) = \exp\,(lx + h) \end{array}\right. \tag{38}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_1\,(x) = b_1\,(x) = b_2\,(x) = 0, \ b_3\,(x) = \text{arbitrară}, \ c_i(x) = 0\,; \\ (i = 1,\ 2,\ 3) \\ a_2\,(x) = \text{arbitrară}, \ a_3\,(x) = \text{arbitrară} \end{array}\right. \tag{39}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_1(x) = b_1(x) = a_2(x) = 0, \ c_i(x) = 0, \ (i = 1,\ 2,\ 3), \ b_2\,(x) = \text{arbitrară}, \\ a_3\,(x) = \text{arbitrară}, \ b_3\,(x) = \text{arbitrară}. \end{array}\right. \tag{40}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_1\,(x) = 0, \ b_1\,(x) = \exp\left(-\dfrac{l}{4}\,x^2 + g + h\right), \ c_1\,(x) = 0 \\ a_2\,(x) = \exp\left(\dfrac{l}{4}\,x^2 - g\right), \ b_2(x) = \left(-\dfrac{m}{4}\,x^2 + n + p\right) \cdot \\ \quad \cdot \exp\left(-\dfrac{l}{4}\,x^2 + g + h\right) \\ c_2\,(x) = \exp\,(lx + h), \ a_3\,(x) = \left(\dfrac{m}{4}x^2 - n\right) \cdot \exp\left(\dfrac{l}{4}\,x^2 - g\right) \\ b_3(x) = \text{arbitrară}, \ c_3\,(x) = (mx + p) \cdot \exp\,(lx + h) \end{array}\right. \tag{41}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_1\,(x) = \exp\left(\dfrac{l}{4}\,x^2 - g\right), \ b_1\,(x) = 0, \ c_1\,(x) = 0 \\ a_2\,(x) = \left(\dfrac{m}{4}\,x^2 - n\right) \exp\left(\dfrac{l}{4}\,x^2 - g\right), \ b_2\,(x) = \exp\left(-\dfrac{l}{4}\,x^2 + g + h\right) \\ c_2(x) = \exp\,(lx + h), \ a_3(x) = \text{arbitrară}, \ b_3(x) = \left(-\dfrac{m}{4}\,x^2 + n + p\right) \\ \exp\left(-\dfrac{l}{4}\,x^2 + g + h\right), \ c_3\,(x) = (mx + p) \cdot \exp\,(lx + h). \end{array}\right. \tag{42}$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
a_1(x) = \exp\left(\frac{a}{4}\, x^2 - c\right), \; b_1(x) = \exp\left(-\frac{a}{4}\, x^2 + b + c\right), \; c_1(x) = \\
\qquad = \exp(ax + b) \\
a_2(x) = 0, \; b_2(x) = 0, \; c_2(x) = 0 \\
a_3(x) = \left(\frac{m}{4}\, x^2 - n\right) \cdot \exp\left(\frac{a}{4}\, x^2 - c\right), \; b_3(x) = \left(-\frac{m}{4}\, x^2 + n + p\right) \cdot \\
\qquad \cdot \exp\left(\frac{a}{4}\, x^2 + b + c\right) \\
c_3(x) = (mx + p) \cdot \exp\,(ax + b).
\end{array}
\right.
\tag{43}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
a_1(x) = \exp\left(\frac{a}{4}\, x^2 - c\right), \; b_1(x) = \exp\left(-\frac{a}{4}\, x^2 + b + c\right), \\
\qquad c_1(x) = \exp(ax + b) \\
a_2(x) = 0, \; b_2(x) = \exp\left(-\frac{a}{4}\, x^2 + g + c\right), \; c_2(x) = \exp(ax + g) \\
a_3(x) = 0, \; b_3(x) = 0, \; c_3(x) = 0
\end{array}
\right.
\tag{44}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
a_1(x) = \exp\left(\frac{a}{4}\, x^2 - c\right), \; b_1(x) = \exp\left(-\frac{a}{4}\, x^2 + b + c\right), \\
\qquad c_1(x) = \exp(ax + b) \\
a_2(x) = \exp\left(\frac{a}{4}\, x^2 - c\right), \; b_2(x) = 0, \; c_2(x) = \exp(ax + b) \\
a_3(x) = 0, \; b_3(x) = 0, \; c_3(x) = 0
\end{array}
\right.
\tag{45}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
a_1(x) = \exp\left(\frac{a}{4}\, x^2 - c\right), \; b_1(x) = \exp\left(-\frac{a}{4}\, x^2 + b + c\right), \; c_1(x) = \\
\qquad = \exp(ax + b) \\
a_2(x) = -n \exp\left(\frac{a}{4}\, x^2 - e\right), \; b_2(x) = (n + p) \exp\left(-\frac{a}{4}\, x^2 + \right. \\
\left. b + c\right), \; c_2(x) = p \cdot \exp(ax + b), \\
a_3(x) = 0, \; b_3(x) = [q + n(n + p)] \exp\left(-\frac{a}{4}\, x^2 + b + c\right) \\
c_3(x) = q \cdot \exp(ax + b).
\end{array}
\right.
\tag{46}
$$

$$(47)\quad \begin{cases} a_1(x) = \exp\left(\frac{a}{4}x^2 - c\right), \; b_1(x) = \exp\left(-\frac{a}{4}x^2 + b + c\right), \\ \qquad c_1(x) = \exp(ax + b) \\ a_2(x) = -n\cdot\exp\left(\frac{a}{4}x^2 - c\right), \; b_3(x) = (n+p)\cdot\exp\left(-\frac{a}{4}x^2 + \right. \\ \qquad \left. + b + c\right), \; c_2(x) = p\cdot\exp(ax + b) \\ a_3(x) = [n(p + n) + q]\exp\left(\frac{a}{4}x^2 - c\right), \; b_3(x) = 0 \\ c_3(x) = q\,\exp(ax + b). \end{cases}$$

unde $a, b, c, g, h, l, m, n, p, q$ sînt constante arbitrare reale.

Concluzii. Soluţia generală, măsurabilă, reală a sistemului de ecuaţii funcţionale (26), în ipoteza măsurabilităţii funcţiilor reale de o variabilă reală din sistem este dată prin formulele (24), (25), (30), (33), (34), (35), (36), (37), (38), (39), (40), (41), (42), (43), (44), (45), (46), (47). Această soluţie cuprinde constante arbitrare, constante şi funcţii arbitrare sau numai funcţii arbitrare.

Primită la redacţie la 22 aprilie 1968

Institutul Politehnic
Timişoara
Facultatea de mecanică
Catedra de matematică II
B-dul Mihai Viteazu nr. 1,
Timişoara

BIBLIOGRAFIE

1. N. H. Abel, *Méthode générale pour trouver des fonctions d'une seule quantité variable. Œuvres complètes*, 1, p. 1—10.
2. H. Roşcău, *Asupra ecuaţiei funcţionale* $\psi(x + y) = f(xy) + \varphi(x - y)$. *Lucrări ştiinţifice*. Institutul politehnic Cluj, 1960, pp. 43—45.
3. I. Stamate, *Ecuaţii funcţionale de tip Pexider, nota a II-a*. Buletinul ştiinţific al Institutului politehnic din Cluj, 7, 60—61 (1964).
4. J. Aczél, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*. Berlin, 1961, pag. 47 şi bibliografia lui Aczél.

ASUPRA SOLUŢIILOR ASIMPTOTICE ALE LUI HEISENBERG

DE

ADELINA GEORGESCU

Aplicîndu-se ecuaţiei lui Orr-Sommerfeld metoda de rezolvare asimptotică (pentru valori mari ale parametrului αR) se găseşte că seriile asimptotice ale soluţiilor lente, cunoscute în literatură, sînt un caz particular al unor serii folosite de Heisenberg.

Tratarea problemei stabilităţii mişcărilor plan paralele bidimensionale cu metoda micilor perturbaţii conduce la bine cunoscuta ecuaţie a lui Orr-Sommerfeld

$$(1)\qquad (\bar{u}-c)(\varphi''-\alpha^2\varphi)-\bar{u}''\varphi=\frac{1}{i\alpha R}(\varphi^{\mathrm{IV}}-2\alpha^2\varphi''+\alpha^4\varphi)$$

a cărei rezolvare asimptotică interesează în mod deosebit, deoarece consideraţii teoretice şi rezultate experimentale arată că instabilitatea poate apare la numere Reynolds mari, deci şi αR mari.

Dat fiind modul în care αR intră în (1) şi ţinînd seama de definiţia dezvoltării asimptotice [4], să căutăm, pentru αR mari, soluţia lui (1) sub forma

$$(2)\qquad \varphi(y)=e^{\sqrt{\alpha R}\,Q(y)}\left[f_0(y)+\frac{1}{\sqrt{\alpha R}}f_1(y)+\frac{1}{\alpha R}f_2(y)+\dots\right]$$

studiată de Lin [5] şi Graebel [1], sau sub forma

$$(3)\qquad \varphi(y)=e^{\int g\,dy},$$

unde

$$(4)\qquad g=\sqrt{\alpha R}\,g_0+g_1+\frac{1}{\sqrt{\alpha R}}g_2+\frac{1}{\alpha R}g_3+\dots.$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 5, P. 747–750, BUCUREŞTI, 1969

– c. 3188

Se poate dovedi echivalența formelor (2) și (3) observînd că pentru $\sqrt{\alpha R}$ mari în planul complex $\sqrt{\alpha R}$ avem

$$e^{(\sqrt{\alpha R})^{-1} f} = 1 + \frac{f}{\sqrt{\alpha R}} + \dots .$$

Metoda după care soluția asimptotică a ecuației (1) se caută sub forma (3) a fost aplicată prima dată în 1924 de Heisenberg [2] și fundamentată mai tîrziu de Lin [3], [5], Reid [6] constituind un instrument eficace în calcule numerice.

Introducînd (3) și (4) în (1) și egalînd puterile lui $\sqrt{\alpha R}$ notînd $\bar{u} - c = w$, obținem

$$wg_0^2 = -i\, g_0^4, \tag{5}$$

$$w(2g_0\, g_1 + g_0') = -i(6g_0^2 g_0' + 4g_0^3\, g_1), \tag{6}$$

$$\begin{aligned} w(g_0' + g_1^2 + 2g_0 g_2 - \alpha^2) - w'' = -i[\, 4g_0 g_0'' + \\ + 3g_0'^2 + 6(g_0^2 g_1' + 2g_0 g_1 g_0') - 2\alpha^2 g_0^2 + 6g_0^2 g_1^2 + 4g_0^3 g_2]. \end{aligned} \tag{7}$$

Ecuația (5) are două soluții confundate

$$g_0 = 0 \tag{8}$$

și celelalte două

$$g_0 = \pm \sqrt{iw}. \tag{9}$$

Ținînd seama de forma (3) a lui φ se vede că soluțiile pentru $g_0 = 0$ (pe care le vom nota φ_1 și φ_2) sînt lente, deoarece pentru αR mari ele se comportă ca

$$\varphi = e^{\int g_1 \, dy} + \frac{1}{\sqrt{\alpha R}}(\dots) + \dots \tag{10}$$

deci nu sînt prea mult influențate de $\sqrt{\alpha R}$.

Pentru a deduce însă forma soluțiilor lente vom folosi ecuațiile (5), (6), (7) și celelalte pentru $g_3, g_4, \dots$, care, pentru $g_0 = 0$ vor da

$$w(g_1' + g_1^2 - \alpha^2) - w'' = 0, \tag{11}$$

$$w(g_2' + 2g_1 g_2) = 0, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} w(g_3' + g_2^2 + 2g_1 g_3) = -i[g_1''' + 4g_1'' g_1 \\ + 3g_1'^2 + 6g_1^2 g_1' + g_1^4 - 2\alpha^2(g_1^2 + g_1') + \alpha^4], \end{aligned} \tag{13}$$

. . . .

Ecuația (11) este de tip Riccati și poate fi adusă la o ecuație diferențială de ordinul al doilea punînd

$$g_1 = \frac{\varphi^{(0)\prime}}{\varphi^{(0)}} \tag{14}$$

astfel că $\varphi^{(0)}$ va fi soluţie a ecuaţiei

$$w(\varphi^{(0)''} - \alpha^2\varphi^{(0)}) - w''\,\varphi^{(0)} = 0, \tag{15}$$

adică tocmai a ecuaţiei lui Orr-Sommerfeld nevîscoasă. Din (12) şi (13) se deduc

$$g_2 = \frac{C_1}{\varphi^{(0)^2}}, \tag{16}$$

$$g_3 = \left[\frac{\varphi^{(1)'}}{\varphi^{(1)}} - \frac{\varphi^{(0)'}}{\varphi^{(0)}}\right]\frac{\varphi^{(1)}}{\varphi^{(0)}} + \frac{C_2 - \int g_2^2\varphi^{(0)^2}\,\mathrm{d}y}{\varphi^{(0)^2}}, \tag{17}$$

unde $\varphi^{(1)}$ verifică ecuaţia

$$w(\varphi^{(1)''} - \alpha^2\varphi^{(1)}) - w''\varphi^{(1)} = -\,i(\varphi^{(0)\mathrm{IV}} - 2\alpha^2\,\varphi^{(0)''} + \alpha^4\varphi^{(0)}). \tag{18}$$

Alegînd acum $C_1 = C_2 = \ldots = 0$, soluţia (10) are forma, cunoscută în literatură,

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \frac{1}{\alpha R}\,\varphi^{(1)} + \ldots \tag{19}$$

Invers, alegînd φ de forma (19) şi luînd drept g expresia

$$g = \frac{\varphi'}{\varphi}, \tag{20}$$

ajungem la expresiile de mai sus ale lui $g_1, g_2, g_3, \ldots$ (pentru $C_1 = C_2 = \ldots = 0$).

Astfel observaţia că ecuaţia (5) admite şi soluţia $g_0 = 0$ ne-a permis să arătăm că atît soluţiile lente cît şi cele rapide provin din aplicarea aceleeaşi metode asimptotice în care se caută soluţia lui (1) sub forma (3). Graebel în articolul său [1] din 1966 notează că pentru $Q = 0$ se obţin soluţiile lente; de fapt $Q = 0$ corespunde lui $g_0 = 0$.

Să mai atragem atenţia asupra faptului că ecuaţia care dă pe g_2 din [3] este greşită şi chiar făcîndu-se observaţia că ecuaţia pentru g_0 admite şi soluţia $g_0 = 0$, din articolul lui Lin tot n-ar fi rezultat g_1 astfel ca să verifice (14) şi (15). Afară de aceasta în [3] Lin se referă la două metode asimptotice după care prima dă pe φ_1 şi φ_2 şi cea de a doua pe φ_3 şi φ_4, ca mai tîrziu în [5] să vorbească doar de o singură metodă, după cum rezultă şi din consideraţiile noastre.

Soluţiile φ_3 şi φ_4, rapid variabile (deoarece pentru αR mari sînt de ordinul lui $\sqrt{\alpha R}$), pentru g_0 dat de (9), n-au mai fost considerate aici, ele fiind tratate amănunţit fie cu ajutorul funcţiilor lui Hankel, fie cu ajutorul celor ale lui Airy [6].

Primită la redacţie la 12 septembrie 1968

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Calea Griviţei nr 21.
Bucureşti 12.

ON HEISENBERG'S ASYMPTOTIC SOLUTIONS

(ABSTRACT)

In applying the asymptotic method to the Orr-Sommerfeld equation (for large values of the parameter αR) it is found that the asymptotic series of the slow solutions, known in the literature, is a particular case of some series used by Heisenberg.

BIBLIOGRAFIE

1. Graebel, W. P., *On determination of the characteristic equations for the stability of parallel flows*. J. Fluid Mech., **24**, 497–508 (1966).
2. Heisenberg, W., *Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen*. Ann. Phys., **74**, 577–627 (1924).
3. Lin, C. C., *On the stability of two-dimensional parallel flows*, părţile I, II, III, Quart. Appl. Math., 3, pp. 117–142, 218–234, 277–301 (1945–1946).
4. Lebedeev, N. N., *Funcţii speciale şi aplicaţiile lor*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1957.
5. Lin, C. C., *The theory of hydrodynamic stability*. Cambridge, (1955).
6. Reid, W. H., *The stability of parallel flows in Basic developments in fluid dynamics*, vol. I, Acad. Press., N. Y.-L, 1955 (ed. M. Holt).

ASUPRA DETERMINĂRII POTENȚIALULUI COMPLEX ÎN CAZUL MIȘCĂRII FLUIDE ÎN PREZENȚA UNUI CILINDRU MOBIL

DE

VIORICA IACOB

În această lucrare se dă o generalizare a unei teoreme a lui L. M. Milne-Thomson privind determinarea potențialului complex al mișcării fluide incompresibile în prezența unui obstacol mobil.

Se știe [1] că dacă se consideră mișcarea plană, irotațională a unui fluid ideal, produsă prin deplasarea unui cilindru mobil, de secțiune D, limitată de curba C, prin planul Oxy, atunci potențialul complex al mișcării absolute $f(z, t) = \varphi + i\psi$ este definit, într-un sistem de axe legate de mobil, prin condiția ca să fie o funcție olomorfă de z în domeniul D exterior lui C și astfel ca pe C să avem condiția

$$\psi = u_0(t)\,y - v_0(t)x - \frac{\omega(t)}{2}(x^2 + y^2), \tag{1}$$

unde $u_0(t)$, $v_0(t)$ sînt proiecțiile pe axele Ox și Oy ale vitezei originii mobile O și $\omega(t)$ este rotația instantanee a plăcii.

L. M. Milne-Thomson [2] a dat o metodă pentru determinarea explicită a potențialului complex $f(z, t)$ în unele cazuri particulare.

În cele ce urmează vom da o generalizare a acestei metode, folosind unele rezultate date de C. Iacob [3] în legătură cu rezolvarea directă a problemei lui Dirichlet în anumite cazuri.

Fie

$$z = g(\zeta) \tag{2}$$

transformarea conformă a lui D pe exteriorul unui cerc Γ ($|\zeta| = a$) din planul $\zeta = \xi + i\eta$, cu corespondența punctelor de la infinit. Vom presupune că $g(\zeta)$ este *o funcție rațională de* ζ.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 5, P. 751–753, BUCUREȘTI, 1969

Condiţia la limită (1) se mai scrie:

$$\operatorname{Re}\{-if(z,t)\}_C = u_0 \frac{z-\bar{z}}{2i} - v_0 \frac{z+\bar{z}}{2} - \frac{\omega}{2} z\bar{z} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[i(u_0 - iv_0)z - i(u_0 + iv_0)\bar{z} + \omega z\bar{z}\right].$$

În virtutea lui (2), putem deci să scriem

$$\operatorname{Re}\{-if\}_\Gamma = -\frac{1}{2}\left[i(u_0 - iv_0)g(\zeta) - i(u_0 + iv_0)\bar{g}(\zeta) + \omega g(\zeta)\bar{g}(\zeta)\right]. \tag{3}$$

Să considerăm funcţia

$$A(\zeta) = i(u_0 - iv_0)\,g(\zeta) - i(u_0 + iv_0)\,\bar{g}\left(\frac{a^2}{\zeta}\right) + \omega\, g(\zeta)\,\bar{g}\left(\frac{a^2}{\zeta}\right). \tag{4}$$

Este evident că $A(\zeta)$ este o funcţie raţională de ζ care este reală pe Γ, deoarece pe această circumferinţă $\zeta\bar{\zeta} = a^2$.

Condiţia (3) se mai poate scrie:

$$\operatorname{Re}\{-if\}_\Gamma = -\frac{1}{2}A(\zeta) = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\{A(\zeta)\}. \tag{3'}$$

Funcţia $A(\zeta)$ nu poate să aibă decît singularităţi polare în puncte izolate din Δ_i ($|\zeta| < a$) sau Δ_e ($|\zeta| < a$). Aceste poluri trebuie să fie respectiv inverse faţă de circumferinţa Γ.

Fie $A_0(\zeta)$ partea principală a lui $A(\zeta)$ relativă la singularităţile din Δ_e.

Conform teoremei cercului, avem

$$A(\zeta) = A_0(\zeta) + \bar{A}_0\left(\frac{a^2}{\zeta}\right) + 2k, \tag{5}$$

unde k este o constantă reală.

Se ştie că $\bar{A}_0\left(\frac{a^2}{\zeta}\right)$ este partea principală a lui $A(\zeta)$ relativă la singularităţile sale polare aparţinînd lui Δ_i.

În consecinţă condiţia la limită (3′) devine

$$\operatorname{Re}\{-if\}_\Gamma = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{A_0(\zeta) + \bar{A}_0\left(\frac{a^2}{\zeta}\right) + 2k\right\}_\Gamma \tag{3''}$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{\bar{A}_0\left(\frac{a^2}{\zeta}\right) + \bar{A}_0\left(\frac{a^2}{\zeta}\right) + 2k\right\}_\Gamma$$

$$= -\operatorname{Re}\left\{\bar{A}_0\left(\frac{a^2}{\zeta}\right) + k\right\}_\Gamma.$$

Rezultă de aici, observînd că $\bar{A}_0\left(\frac{a^2}{\bar{\zeta}}\right)$ este o funcție olomorfă în Δ_e,

$$if = \bar{A}_0\left(\frac{a^2}{\bar{\zeta}}\right) + k, \tag{6}$$

constanta aditivă neavînd nici un rol. Putem scrie în definitiv

$$f = -i\bar{A}_0\left(\frac{a^2}{\bar{\zeta}}\right), \tag{7}$$

unde $A_0(\zeta)$ a fost definit anterior.

Rezultatul dat mai sus conține ca un caz foarte particular pe acela al lui Milne-Thomson.

Dacă $A(\zeta)$ nu admite ca poluri decît punctul $\zeta = \infty$ și deci și pe $\zeta = 0$, avem evident

$$A(\zeta) = A_1(\zeta) + A_2(\zeta) + 2k,$$

unde $A_1(\zeta)$ este o serie de puteri pozitive ale lui ζ și $A_2(\zeta)$ o serie după puterile negative ale lui ζ.

Avem deci, abstracție făcînd de o constantă,

$$f = -iA_2(\zeta). \tag{8}$$

Aplicații ale metodei propuse aici vor fi dezvoltate într-o altă lucrare.

Primită la redacție la 12 septembrie 1968

Institutul pedagogic București

SUR LA DÉTERMINATION DU POTENTIEL COMPLEXE, DANS LE CAS DU MOUVEMENT FLUIDE EN PRÉSENCE D'UN CYLINDRE MOBILE

(RÉSUMÉ)

Dans le présent travail on donne une extension d'un théorème de L. M. Milne-Thomson concernant la détermination du potentiel complexe de l'écoulement fluide incompressible en présence d'un cylindre mobile.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Jacob, *Introduction mathématique à la Mécanique des fluides*. Bucarest—Paris, 1959.
2. L. M. Milne-Thomson, *Theoretical Hydrodynamics*. Mac-Millan and Co., New York, 1959, ed. II, p. 237.
3. C. Jacob, *Sur la résolution du problème plan de Dirichlet dans quelques cas particuliers*. Journal de Mathématiques pures et appliquées, **44**, 289 (1965).

O PROBLEMĂ DE INDEX

DE

GHEZA KLINCSEK

Pentru un sistem eliptic de operatori pseudodiferenţiali, se demonstrează următorul rezultat. Fie σ simbolul lui A, $\sigma_1 = \det \sigma$ şi A_1 operatorul Calderon-Zygmund avînd σ_1 ca simbol. Atunci indexele lui A şi A_1 sînt egale.

Fie X o C^∞ varietate diferenţială compactă, fără frontieră, de dimensiune n şi $T(X)$ spaţiul fibrat tangent. Vom numi operator CZ (Calderon-Zygmund) un operator singular integrodiferenţial matricial A de dimensiune $N \times N$ pe X [3]. Simbolul CZ-operatorului îl notăm cu $\sigma(A)$; este o matrice de dimensiune $N \times N$ în variabila $(x, \lambda) \in T(X)$ satisfăcînd restricţiile date în [5]. Dacă este dat un simbol σ, operatorul CZ construit peste aceasta [4] îl vom nota cu Op (σ).

DEFINIŢIE. Operatorul A este eliptic, dacă funcţia $\sigma_1(x, \lambda) = \det \sigma(A)$ nu se anulează pe $T(X)$.

Operatorul CZ eliptic A este fredholmian [1] şi indexul lui (notat cu $\chi(A)$) se poate calcula pe cale topologică [10]. Cum

$$A_1 = \mathrm{Op}(\sigma_1) = \mathrm{Op}(\det \sigma(A)) \tag{1}$$

este un operator CZ eliptic scalar, se pune problema dacă există o relaţie între $\chi(A)$ şi $\chi(A_1)$.

Pentru fiecare $(x, \lambda) \in T(X)$ matricea $\sigma(A)$ poate fi pusă sub forma

$$\sigma_A(x, \lambda) = U^* V U, \tag{2}$$

unde U este ortogonal şi V triunghiular [8].

TEOREMA. *Dacă matricea U poate fi simbolul unui CZ-operator, atunci $\chi(A) = \chi(A_1)$, unde A_1 este dat de* (1).

Demonstraţie. În condiţiile teoremei există deci operatorii CZ eliptici Op (U), Op (U^*) şi $W = \mathrm{Op}(V)$.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 5, P. 755—757, BUCUREŞTI, 1969

Din [1] teorema 5 și [3], propoziția 7.6, avem

$$\operatorname{Op}(\sigma_A \sigma_B) = \operatorname{Op}(\sigma_A) \operatorname{Op}(\sigma_B) + K, \tag{3}$$

unde K este un operator complet continuu. (În cele ce urmează, toți operatori complet continuu îi vom nota cu aceeași literă K).

Din (2) și (3) avem [9]

$$\chi(A) = \chi(\operatorname{Op}(U^*)) + \chi(W) + \chi(\operatorname{Op}(U)). \tag{4}$$

Analog relației (3) avem și $[\operatorname{Op}(U)]^* = \operatorname{Op}(U^*) + K$ și deci $\chi(\operatorname{Op}(U)) = -\chi(\operatorname{Op}(U^*))$, de unde

$$\chi(A) = \chi(W). \tag{4'}$$

Notăm cu V_i elementele de pe diagonala matricii V, operatorii CZ scalari $W_i = \operatorname{Op}(V_i)$ sînt eliptici. Din [4] rezultă că există CZ operatori R_i astfel încît

$$R_i W_i = I + K. \tag{5}$$

Fie

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & R_2 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots R_N \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Avem $RW = I + K + B$, unde $\sigma(B)$ este o matrice de formă $(b_{i,j})$ cu $b_{i,j} = 0$ pentru $i \geqslant j$. Din $[\sigma(B)]^N = 0$ și (3) avem $B^N = \operatorname{Op}[(\sigma(B)^N] + K = K$ adică $(RW - I)^N = K$. Operatorul $I + (RW - I)$ verifică alternativele lui Fredholm [7], $\chi(W) = -\chi(R)$ din $\chi(RW) = 0$. Din (6) rezultă $\chi(R) = \sum_{i=1}^{N} \chi(R_i)$ și din (5) $\chi(R_i) = -\chi(W_i)$. De unde $\chi(W) = \sum_{i=1}^{N} \chi(W_i)$. Cum $\sum_{i=1}^{N} \chi(W_i) = \chi\left(\prod_{i=1}^{N} W_i\right)$ și $\prod_{i=1}^{N} W_i = \prod_{i=1}^{N} \operatorname{Op}(V_i) = \operatorname{Op}\left(\prod_{i=1}^{N} V_i\right) + K = \operatorname{Op}(\det V) + K = \operatorname{Op}(\sigma_1) + K = A_1 + K$.

Avem $\chi(W) = \chi(A_1)$ care împreună cu (4') ne dă teorema.

Observații. 1) În cazul cînd $\sigma(A)$ este o matrice de structură simplă pe tot $T(X)$, teorema are loc.

2) Ipoteza este de natură algebrică, fiind legată de schimbările subspațiilor ciclice ale matricii $\sigma(A)$. Metoda folosită nu se aplică în cazul cînd avem salturi ale acestor spații.

3) Teorema dă o condiție suficientă; în mod natural se pune problema cadrului cel mai general în care indexul unui sistem de operatori CZ poate fi calculat cu ajutorul indexului unui singur operator CZ.

Primită la redacție la 12 septembrie 1968

INDEX PROBLEM

(ABSTRACT)

For elliptic systems of pseudo differential operators A the author proves the following result. Let σ be the symbol of A, $\sigma_1 = \det \sigma$ and A_1 the Calderon-Zygmund operator having the symbol σ_1. Then the indexes of A and A_1 are equal.

BIBLIOGRAFIE

1. A. P. Calderon — A. Zygmund, *Singular integral operators and differential ecuations.* A.J.M., **79**, *4* (1957).
2. A. F. Calderon — A. Zygmund, *On singular integrals.* A.J.M., **78** (1956).
3. Agranovici, *Operatori singulari integro-diferenţiali.* Uspehi M. N., (**5**) (1965).
4. R. T. Seeley, *Singular integrals and boundary value problems.* A.J.M., **87**, *4*, (1966).
5. R. T. Seeley, *Integro differential operators on vector bundles.* Trans. Am. Math. Soc., (**5**), 117 (1965).
6. Shmuel Kaniel — M. Schechter, *Spectral theory for Fredholm operators.* Comm. Pure Appl. Math., **16** (**4**), (1963).
7. K. Yosida, *Quasi-completely continous linear functionel operators.* Japan Journal of Mathematics, **15** (1939).
8. T. Kato, *Perturbation theory of linear operators.* Springer Verlag, Berlin, 19.
9. M. Schechter, *Basic theory of Fredholm operators.* Annali della Scuola Normale di Pisa, 1967.
10. M. F. Atyah — I. M. Singer, *The index of operators on compact manifolds.* Bull. Am. Math. Soc., **69**, *3* (1963).

MIŞCAREA FLUIDELOR VÎSCOASE, ELECTROCONDUCTOARE, ÎN JURUL PROFILELOR SUBŢIRI, ÎN CAZUL SPECIAL $\sigma_e\mu_e\nu = 1$

DE

N. MARCOV

Se consideră mişcarea plană permanentă a fluidelor vîscoase, incompresibile, electroconductoare în jurul profilelor subţiri, în cazul particular în care numerele Reynolds şi Reynolds magnetic sînt egale. Ecuaţiile sînt liniarizate prin metoda lui Oseen. Problema este redusă la rezolvarea unei ecuaţii integrale. Pentru mişcarea în jurul plăcii plane finite se dă soluţia aproximativă a acestei ecuaţii integrale, atît pentru cazul numerelor Reynolds mici, cît şi pentru cazul numărului Reynolds infinit.

1. Introducere. Problema mişcării plane magnetohidrodinamice a fluidelor vîscoase, incompresibile, electroconductoare în jurul unei plăci plane a fost studiată de către H. P. Greenspan, G. F. Carrier şi H. Cabannes [1], [2], [3], în cadrul aproximaţiei lui Oseen. Recent această problemă a fost reluată pentru cazul incidenţei oarecari a plăcii plane [4].

În cele ce urmează se consideră mişcarea plană a fluidelor electroconductoare în jurul unor profile subţiri, în cazul special, indicat de către Isao Imai [5], în care numărul Reynolds este egal cu numărul Reynolds magnetic. La infinit direcţia vitezei şi direcţia cîmpului magnetic aplicat sînt oarecari. Ecuaţiile neliniare ale mişcării fluidelor se liniarizează prin metoda lui Oseen. Funcţia de curent şi funcţia de forţă se reprezintă prin potenţiali armonici şi de difuzie. În felul acesta problema este redusă la rezolvarea ecuaţiei integrale (1), §5.

Drept aplicaţie se consideră mişcarea în jurul unei plăci plane, în cazul numerelor Reynolds mici sau infinite.

2. *Ecuaţiile de mişcare.* Se consideră mişcarea plană, permanentă a fluidelor vîscoase, incompresibile în jurul unor profile subţiri. Fluidul este presupus omogen, avînd vîscozitatea ν, conductibilitatea electrică σ_e şi permeabilitatea magnetică μ_e. În variabilele adimensionale, într-un

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 5, P. 759–771, BUCUREŞTI, 1969

sistem cartezian drept, ecuaţiile de mişcare, [6], sînt

$$(\vec{V}\,\mathrm{grad})\,\vec{V} = -\,\mathrm{grad}\,P + \frac{1}{R}\Delta\vec{V} + \beta(\vec{H}\,\mathrm{grad})\,\vec{H}, \quad \mathrm{div}\,\vec{V} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \varepsilon R\,(\vec{E} + \vec{V}\times\vec{H}), \quad \mathrm{rot}\,\vec{E} = 0, \quad \mathrm{div}\,\vec{H} = 0 \tag{1}$$

$$P = p + \frac{1}{2}\beta\,(H^2 - 1)$$

în care

$$R = LV_\infty/\nu, \quad \varepsilon = \sigma_e\,\mu_e\,\nu, \quad \beta = \mu_e H_\infty^2/\rho V_\infty^2. \tag{2}$$

În cele ce urmează se presupune mişcarea plană, şi anume

$$\vec{V} = (1 + u)\,\vec{i} + v\vec{j}, \quad \vec{H} = (m + h_x)\,\vec{i} + (n + h_y)\,\vec{j}, \quad m + in = e^{i\alpha_\infty} \tag{3}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ fiind versorii axelor $Oxyz$ iar u, v, h_x, h_y fiind funcţii de variabilele x, y.

Introducînd în ecuaţiile de mişcare şi neglijînd produsele în care intervin mărimile de perturbaţie u, v, h_x, h_y sau derivatele lor, obţinem sistemul liniar

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{R}\Delta u + \beta\left(m\frac{\partial}{\partial x} + n\frac{\partial}{\partial y}\right)h_x \\
&\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{R}\Delta v + \beta\left(m\frac{\partial}{\partial x} + n\frac{\partial}{\partial y}\right)h_y \\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}h_x + \frac{\partial}{\partial y}h_y = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial x}h_y - \frac{\partial}{\partial y}h_x = \varepsilon R\,(h_y - mv + nu) \\
&P = p + \beta\,(mh_x + nh_y)
\end{aligned} \tag{4}$$

cîmpul electric fiind constant

$$\vec{E} = -\sin\alpha_\infty\,\vec{k}.$$

Din relaţiile (4) rezultă că presiunea totală, de perturbaţie, P este o funcţie armonică. Se asociază presiunii P funcţiile Q, χ, χ_1 prin relaţiile

$$\Delta P = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{5}$$

$$\frac{2}{R}(\chi_1 + i\chi) = \int (P + iQ)\,\mathrm{d}z$$

$$\frac{1}{2}RP = \frac{\partial\chi_1}{\partial x} = \frac{\partial\chi}{\partial y}, \quad \frac{1}{2}RQ = \frac{\partial\chi}{\partial x} = -\frac{\partial\chi_1}{\partial y}.$$

Din relaţiile de continuitate din (4), introducem funcţia de curent ψ pentru cîmpul vitezelor de perturbaţie, respectiv funcţia de forţă φ pentru cîmpul magnetic de perturbaţie:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad h_x = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad h_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{6}$$

Introducînd (5), (6) în ecuaţiile de mişcare (4), se obţine

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varepsilon R \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varepsilon R \left(m \frac{\partial}{\partial x} + n \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi \\ \Delta\psi &= R \frac{\partial \psi}{\partial x} - \beta R \left(m \frac{\partial}{\partial x} + n \frac{\partial}{\partial y} \right) \varphi + 2 \frac{\partial \chi}{\partial x}. \end{aligned} \tag{7}$$

Presiunea dinamică şi vîrtejul au expresiile

$$\begin{aligned} p &= \frac{2}{R} \frac{\partial \chi}{\partial y} - \beta (m h_x + n h_y) \\ \Omega &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -2 \frac{\partial \chi}{\partial x} + Rv + \beta R (-m h_y + n h_x). \end{aligned} \tag{8}$$

Funcţia de forţă φ şi funcţia de curent ψ, ca soluţie a sistemului (7), admit reprezentarea

$$\begin{aligned} \varphi &= \Phi - \frac{2}{R\delta} (c_{11}\, \chi + c_{12}\, \chi_1) \\ \psi &= \Psi - \frac{2}{R\delta} (c_{21}\, \chi + c_{22}\, \chi_1). \end{aligned} \tag{9}$$

Funcţiile χ_1, χ sînt armonic conjugate, iar funcţiile Φ, Ψ verifică sistemul

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \varepsilon R \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \varepsilon R \left(m \frac{\partial}{\partial x} + n \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi \\ \Delta\Psi &= R \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \beta R \left(m \frac{\partial}{\partial x} + n \frac{\partial}{\partial y} \right) \Phi. \end{aligned} \tag{10}$$

Constantele din (9) au valorile

$$\begin{aligned} c_{11} &= (1 - \beta)\, m, & c_{12} &= (1 - \beta)\, n \\ c_{21} &= 1 - \beta\, (m^2 - n^2), & c_{22} &= 2 \beta m n \\ \delta &= (1 - \beta)^2 m^2 + (1 + \beta)^2 n^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Pentru ca reprezentarea (9) să existe, este necesară verificarea condiţiei $\delta \neq 0$ sau $(n, \beta) \neq (0, 1)$. În felul acesta se exceptează cazul mişcării alfvenice pentru cîmpuri aliniate la infinit.

În cazul particular $\varepsilon = \sigma_e \mu_e \nu = 1$, ecuaţiile sistemului (10) pot fi separate considerînd funcţiile $R(\Psi \pm \sqrt{\beta}\Phi)/2$. Se obţine următoarea reprezentare pentru funcţia de forţă φ şi pentru funcţia de curent ψ

$$(12) \qquad \varphi = \frac{2}{R}\left\{\frac{1}{\sqrt{\beta}}(\tilde{\varphi} - \tilde{\psi}) - \frac{1}{\delta}(c_{11}\chi + c_{12}\chi_1)\right\}$$

$$\psi = \frac{2}{R}\left\{\tilde{\varphi} + \tilde{\psi} - \frac{1}{\delta}(c_{21}\chi + c_{22}\chi_1)\right\}.$$

Funcţiile $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ verifică ecuaţiile

$$(13) \qquad \Delta\tilde{\varphi} = 2a\left\{\cos\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha_1 \frac{\partial}{\partial y}\right\}\tilde{\varphi}$$

$$\Delta\tilde{\psi} = 2b\left\{\cos\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha_2 \frac{\partial}{\partial y}\right\}\tilde{\psi}.$$

Constantele din ecuaţiile (13) sînt definite de relaţiile

$$(14) \qquad \frac{1}{2}R(1 - \sqrt{\beta}\, e^{i\alpha_\infty}) = a e^{i\alpha_1}$$

$$\frac{1}{2}R(1 + \sqrt{\beta}\, e^{i\alpha_\infty}) = b e^{i\alpha_2}$$

astfel încît

$$(14') \qquad a = \frac{1}{2}R\{1 - 2\sqrt{\beta}\cos\alpha_\infty + \beta\}^{1/2}$$

$$b = \frac{1}{2}R\{1 + 2\sqrt{\beta}\cos\alpha_\infty + \beta\}^{1/2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \sqrt{\beta}\sin\alpha_\infty/(\sqrt{\beta}\cos\alpha_\infty - 1)$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \sqrt{\beta}\sin\alpha_\infty/(\sqrt{\beta}\cos\alpha_\infty + 1).$$

Fără restricţie se poate considera că unghiul α_∞ dintre cîmpul magnetic aplicat şi viteza de la infinit a fluidului, este cuprins în intervalul $[0, \pi)$. În acest caz rezultă

$$(14'') \qquad \alpha_1 \in (-\pi, 0], \quad \alpha_2 \in [0, \alpha_1 + \pi).$$

Din (11) se obţine

$$(15) \qquad c_0 = 1 - \beta e^{2i\alpha_\infty} = \frac{4ab}{R^2} e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad \delta = |c_0|^2$$

$$\frac{1}{\delta}(c_{11} + ic_{12}) = \frac{1}{c_0} e^{i\alpha_\infty}, \quad \frac{1}{\delta}(c_{21} + ic_{22}) = \frac{1}{c_0}.$$

3. *Condiţiile la limită şi la infinit.* Presupunem că mişcarea fluidului are loc în jurul unui profil subţire caracterizat în planul xOy prin arcul neted

(1) $$x = x(s), \quad y = y(s), \quad s \in [0, l],$$

s fiind coordonata curbilinie, iar lL lungimea profilului în planul dimensional.

Fluidul fiind vîscos, se impune condiţia aderenţei fluidului la peretele profilului

(2) $$u = -1, \quad v = 0 \quad \text{pe profil.}$$

Dacă prin profil nu trec curenţi de suprafaţă, atunci se impune condiţia continuităţii cîmpului magnetic la trecerea peste placă. Această condiţie de salt se scrie

(3) $$[h_x] = [h_y] = 0 \quad \text{pe profil.}$$

Deoarece presiunea P, viteza $\vec{v}$ şi cîmpul magnetic $\vec{h}$ sînt mărimi de perturbaţie, ele trebuie să se anuleze la infinit. Prin relaţiile (5), (6), (12), § 2, rezultă

(4) $$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \chi\} = 0 \quad \text{la infinit.}$$

4. ***Reprezentarea prin potenţiali a cîmpului magnetic şi a cîmpului vitezelor de perturbaţie.*** Fiind date două puncte ale arcului (1), § 3, însemnăm

(1) $$\xi + i\eta = x(s) - x(t) + i\{y(s) - y(t)\} = \rho e^{i\omega} \operatorname{sgn}(s - t)$$
$$\lambda = a(\xi \cos \alpha_1 + \eta \sin \alpha_1)$$
$$\mu = b(\xi \cos \alpha_2 + \eta \sin \alpha_2).$$

Pentru un punct din plan şi pentru un punct al arcului, însemnăm

(2) $$\tilde{x} + i\tilde{y} = x - x(t) + i\{y - y(t)\} = \tilde{r} e^{i\tilde{\theta}}$$
$$\tilde{\lambda} = a(\tilde{x} \cos \alpha_1 + \tilde{y} \sin \alpha_1)$$
$$\tilde{\mu} = b(\tilde{x} \cos \alpha_2 + \tilde{y} \sin \alpha_2).$$

Ţinem seama de ecuaţiile (5), (13), § 2, şi de condiţiile de la infinit (4), § 3, şi considerăm următoarele reprezentări

(3) $$\tilde{\varphi} = \int_0^l \{A_1(t)\, \Theta(a\tilde{r}, \tilde{\theta}; \alpha_1) + B_1(t)\, K_0(a\tilde{r})\}\, e^{\tilde{\lambda}}\, dt$$
$$\tilde{\psi} = \int_0^l \{A_2(t)\, \Theta(b\tilde{r}, \tilde{\theta}; \alpha_2) + B_2(t)\, K_0(b\tilde{r})\}\, e^{\tilde{\mu}}\, dt$$

$$\chi = \int_0^l \{A_3(t)\,\widetilde{\theta} - B_3(t) \lg \widetilde{r}\}\,\mathrm{d}t$$

$$\chi_1 = -\int_0^l \{B_3(t)\,\widetilde{\theta} + A_3(t) \lg \widetilde{r}\}\,\mathrm{d}t.$$

Funcţiile K_0, K_1 sînt funcţiile Bessel de argument imaginar, [7]. Funcţia $\Theta(ar, \theta; \alpha_1)$ se obţine din sistemul

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} K_0(ar) - a \cos \alpha_1\,\Theta - a \sin \alpha_1\,K_0(ar)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} K_0(ar) - a \sin \alpha_1\,\Theta + a \cos \alpha_1\,K_0(ar)$$

şi are expresia

$$\Theta(ar, \theta; \alpha_1)\,\mathrm{e}^{ar \cos \theta_1} = \theta_1 + \sin \theta_1 \int_0^{ar} K_0(z)\,\mathrm{e}^{z \cos \theta_1}\,\mathrm{d}z, \quad \theta_1 = \theta - \alpha_1.$$

Prin derivarea relaţiilor (3) se obţine

$$(4) \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} + i\frac{\partial}{\partial x}\right)\widetilde{\varphi} = \int_0^l a\,\{\overline{C_1(t)}\,\mathrm{e}^{-i\widetilde{\theta}} K_1(a\widetilde{r}) + C_1(t)\,\mathrm{e}^{-i\alpha_1} K_0(a\widetilde{r})\}\,\mathrm{e}^{\widetilde{\lambda}}\,\mathrm{d}t$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + i\frac{\partial}{\partial x}\right)\widetilde{\psi} = \int_0^l b\,\{\overline{C_2(t)}\,\mathrm{e}^{-i\widetilde{\theta}} K_1(b\widetilde{r}) + C_2(t)\,\mathrm{e}^{-i\alpha_2} K_0(b\widetilde{r})\}\,\mathrm{e}^{\widetilde{\mu}}\,\mathrm{d}t$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + i\frac{\partial}{\partial x}\right)\chi = -i\left(\frac{\partial}{\partial y} + i\frac{\partial}{\partial x}\right)\chi_1 = \int_0^l \overline{C_3(t)}\,\mathrm{e}^{-i\widetilde{\theta}}\,\frac{\mathrm{d}t}{\widetilde{r}},$$

unde

$$C_1 = A_1 + iB_1, \ldots$$

Trecem la limită la stînga / dreapta plăcii pentru

$$x + iy \to x(s) + iy(s), \quad s \in (0, l).$$

Rezultă

$$(5) \quad \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} + i\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)(s) = \mp \pi i \overline{C_3(s)}\,\mathrm{e}^{-i\theta(s)} + \int_0^l \overline{C_3(t)}\,\frac{\mathrm{d}t}{\xi + i\eta}$$

$$\left(\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial y} + i\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x}\right)(s) = \mp \pi i \overline{C_1(s)}\,\mathrm{e}^{-i\theta(s)} +$$

$$+ \int_0^l a\left\{\overline{C_1(t)}\,\frac{\xi - i\eta}{\rho}\,K_1(a\rho) + C_1(t)\,\mathrm{e}^{-i\alpha_1} K_0(a\rho)\right\}\mathrm{e}^{\lambda}\,\mathrm{d}t,$$

integralele fiind considerate în sensul valorii principale. $\theta(s)$ este unghiul dintre axa Ox şi tangenta din punctul s la arcul considerat. Funcţiile ξ, η, ρ, λ, μ sînt definite în (1).

Prin relaţiile (6), (12), (15), § 2, (4) se obţine următoarea reprezentare pentru cîmpul magnetic şi pentru cîmpul vitezelor de perturbaţie

$$(6)\qquad \frac{1}{2}Rh=\frac{1}{2}R\,(h_x-ih_y)=-\frac{e^{i\alpha_\infty}}{c_0}\int_0^l\overline{C_3(t)}\,e^{-i\widetilde{\theta}}\,\frac{dt}{\widetilde{r}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\beta}}\int_0^l a\,\{\overline{C_1(t)}\,e^{-i\widetilde{\theta}}K_1(a\widetilde{r})+C_1(t)\,e^{-i\alpha_1}K_0(a\widetilde{r})\}\,e^{\widetilde{\lambda}}\,dt-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\beta}}\int_0^l b\,\{\overline{C_2(t)}\,e^{-i\widetilde{\theta}}K_1(b\widetilde{r})+C_2(t)\,e^{-i\alpha_2}K_0(b\widetilde{r})\}\,e^{\widetilde{\mu}}\,dt.$$

$$(7)\qquad \frac{1}{2}Rw=\frac{1}{2}R\,(u-iv)=-\frac{1}{c_0}\int_0^l\overline{C_3(t)}\,e^{-i\widetilde{\theta}}\,\frac{dt}{\widetilde{r}}+$$

$$+\int_0^l a\,\{\overline{C_1(t)}\,e^{-i\widetilde{\theta}}K_1(a\widetilde{r})+C_1(t)\,e^{-i\alpha_1}K_0(a\widetilde{r})\}\,e^{\widetilde{\lambda}}\,dt+$$

$$+\int_0^l b\,\{\overline{C_2(t)}\,e^{-i\widetilde{\theta}}K_1(b\widetilde{r})+C_2(t)\,e^{-i\alpha_2}K_0(b\widetilde{r})\,e^{\widetilde{\mu}}\,dt.$$

Impunem condiţiile la limită (2), (3), §3. Prin egalităţile (5) se obţin următoarele relaţii de salt

$$\frac{1}{2}R\,[h]=-2\pi i\,e^{-i\theta(s)}\left\{\frac{1}{\sqrt{\beta}}\bar{C}_1-\frac{1}{\sqrt{\beta}}\bar{C}_2-\frac{e^{-i\alpha_\infty}}{c_0}\bar{C}_3\right\}=0$$

$$\frac{1}{2}R\,[w]=-2\pi i\,e^{-i\theta(s)}\left\{\bar{C}_1+\bar{C}_2-\frac{1}{c_0}\bar{C}_3\right\}=0.$$

Rezultă deci

$$(8)\qquad C_1=a_0\,C,\quad C_2=b_0\,C,\quad C_3=\bar{c}_0\,C$$

constantele avînd expresiile

$$a_0=\frac{1}{2}(1+\sqrt{\beta}\,e^{-i\alpha_\infty})=\frac{b}{R}e^{-i\alpha_2}$$

$$b_0=\frac{1}{2}(1-\sqrt{\beta}\,e^{-i\alpha_\infty})=\frac{a}{R}e^{-i\alpha_1}.$$

5. *Ecuaţia integrală ataşată problemei la limită.* Punînd condiţia aderenţei fluidului la peretele profilului, deci condiţiile (2), §3, pentru reprezentarea (7), §4, se obţine pentru funcţia $C\,(t)$ ecuaţia integrală

$$(1)\qquad \int_0^l a\left\{\overline{a_0\,C(t)}\,\frac{\xi-i\eta}{\rho}\,K_1(a\rho)+a_0\,C\,(t)\,e^{-i\alpha_1}K_0(a\rho)\right\}e^{\lambda}\,dt+$$

$$+\int_0^l b\left\{\overline{b_0\,C\,(t)}\,\frac{\xi-i\eta}{\rho}\,K_1(b\rho)+b_0\,C\,(t)\,e^{-i\alpha_2}K_0(b\rho)\right\}e^{\mu}\,dt-$$

$$-\int_0^l\overline{C(t)}\,\frac{dt}{\xi+i\eta}=-\frac{1}{2}R.$$

6. *Rezistența la înaintarea profilului.* Efortul dinamic unitar exercitat de fluid asupra profilului are expresia, [8],

$$\vec{T} = -p\vec{n} + \frac{1}{R}\vec{n} \times \operatorname{rot} \vec{v} = -p\vec{n} + \frac{\Omega}{R}\vec{n} \times \vec{k}.$$

Rezistența hidrodinamică are deci expresia

$$R_x + iR_y = \oint (\vec{T}\cdot\vec{i}) + i\,(\vec{T}\cdot\vec{j})\,\mathrm{d}s = \oint \left(ip + \frac{\Omega}{R}\right)\mathrm{d}z.$$

Deoarece profilul este subțire, iar viteza și cîmpul magnetic sînt continui la trecerea peste profil, din (8), §2, se obține

$$R_x + iR_y = -i\int_0^l \left[p + i\,\frac{\Omega}{R}\right]\mathrm{d}z = -\frac{2i}{R}\int_0^l \left[\frac{\partial\chi}{\partial y} + i\,\frac{\partial\chi}{\partial x}\right]\mathrm{e}^{i\theta(s)}\,\mathrm{d}s.$$

Saltul din ultima integrală este dat de relațiile (5) și (8), § 4. Se obține

$$R_x + iR_y = -\frac{4\pi}{R}(1 - \beta\mathrm{e}^{2i\alpha_\infty})\int_0^l \overline{C(s)}\,\mathrm{d}s. \tag{1}$$

7. *Mișcarea în jurul unei plăci plane. Ecuația integrală.* Presupunem că mișcarea fluidului are loc în jurul unei plăci plane, una din extremitățile plăcii fiind situată în originea sistemului de referință xOy. În acest caz particular rezultă

$$\begin{gathered} x(t) + iy(t) = t\mathrm{e}^{i\alpha}, \quad t \in [0, 1]. \\ \xi + i\eta = (t - \tau)\,\mathrm{e}^{i\alpha}, \quad \rho = |t - \tau| \\ \lambda = \lambda_0(t - \tau), \quad \lambda_0 = a\cos(\alpha - \alpha_1) \\ \mu = \mu_0(t - \tau), \quad \mu_0 = b\cos(\alpha - \alpha_2). \end{gathered} \tag{1}$$

Ecuația integrală atașată problemei la limită (1), § 5, este în acest caz

$$\begin{aligned} &\int_0^1 a\{\overline{a_0 C(\tau)}\,\mathrm{e}^{-i\alpha}K_1(a|t - \tau|)\operatorname{sgn}(t - \tau) + \\ &\quad + a_0\,C(\tau)\,\mathrm{e}^{-i\alpha_1}K_0(a|t - \tau|)\}\,\mathrm{e}^{\lambda_0(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau + \\ &+ \int_0^1 b\{\overline{b_0\,C(\tau)}\,\mathrm{e}^{-i\alpha}K_1(b|t - \tau|)\operatorname{sgn}(t - \tau) + \\ &\quad + b_0\,C(\tau)\,\mathrm{e}^{-i\alpha_2}K_0(b|t - \tau|)\}\,\mathrm{e}^{\mu_0(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau - \\ &\quad - \int_0^1 \overline{C(\tau)}\,\mathrm{e}^{-i\alpha}\,\frac{\mathrm{d}\tau}{t - \tau} = -\frac{1}{2}R. \end{aligned} \tag{2}$$

Efectuăm substituția

$$t, \tau, \alpha \to 1 - t,\ 1 - \tau,\ \pi + \alpha$$

în ecuaţia integrală precedentă. Scădem rezultatul tot din această ecuaţie. Se obţine o ecuaţie integrală omogenă pentru

$$C(\tau;\alpha) - C(1-\tau;\pi+\alpha)$$

astfel încît

$$C(\tau;\alpha+\pi) = C(1-\tau;\alpha). \tag{3}$$

Dată fiind această relaţie, este suficient a considera pentru α un interval de variaţie de lungime π şi anume intervalul $[\alpha_1, \alpha_1+\pi)$. Acest interval conţine valoarea α_2 conform (14''), § 2.

În cele ce urmează se dă soluţia aproximativă a ecuaţiei integrale (2) pentru cazul numerelor Reynolds mici sau a numerelor Reynolds infinite.

8. *Cazul numerelor Reynolds mici.* Dacă numărul presiunii magnetice este finit, atunci, din (14'), § 2, rezultă

$$a,\ b = 0(R).$$

Astfel pentru numere Reynolds mici, ecuaţia integrală (2), §7, se aproximează reţinînd termenii de ordin de mărime mai mare sau egal cu $R\lg R$. Se obţine ecuaţia aproximativă

$$\int_0^1 \left\{\overline{a_0\, C(\tau)}\, e^{-i\alpha}\lambda_0 - a\,a_0\, C(\tau)\, e^{-i\alpha_1}\left(\gamma + \lg\frac{1}{2}a\,|t-\tau|\right)\right\} d\tau + \tag{1}$$
$$+\int_0^1 \left\{\overline{b_0\, C(\tau)}\, e^{-i\alpha}\mu_0 - b\,b_0\, C(\tau)\, e^{-i\alpha_2}\left(\gamma + \lg\frac{1}{2}b\,|t-\tau|\right)\right\} d\tau = -\frac{1}{2}R.$$

Soluţia acestei ecuaţii este

$$C(\tau) = -\frac{\Gamma}{\pi\sqrt{\tau(1-\tau)}}. \tag{2}$$

Înlocuind-o în ecuaţie se obţine

$$(\overline{a}_0\lambda_0 + \overline{b}_0\mu_0)\, e^{-i\alpha}\,\overline{\Gamma} - \left\{a\,a_0\left(\gamma + \lg\frac{a}{8}\right)e^{-i\alpha_1} + b\,b_0\left(\gamma + \lg\frac{b}{8}\right)e^{-i\alpha_2}\right\}\Gamma = \frac{1}{2}R.$$

Ţinem seama de relaţiile (8), §4, (1), §7. Rezultă

$$\Gamma = \frac{R}{2\,a\,b\,l}\{l_0\, e^{-i(\alpha_1+\alpha_2)} - \cos(\alpha_2-\alpha_1) - e^{i(2\alpha-\alpha_1-\alpha_2)}\} \tag{3}$$

în care

$$l_0 = \lg\frac{64}{a\,b} - 2\gamma = 2\left(\lg\frac{16}{R} - \gamma\right) - \frac{1}{2}\lg\{(1-\beta)^2 + 4\beta\sin^2\alpha_\infty\}$$
$$l = l_0^2 - \{1 + 2\cos(\alpha_2-\alpha_1)\cos(2\alpha-\alpha_1-\alpha_2) +$$
$$+\cos^2(\alpha_2-\alpha_1)\}.$$

Rezistența la înaintare are expresia

$$R_x + i R_y = \frac{4\pi}{R}(1 - \beta\, e^{2i\alpha_\infty})\, \overline{\Gamma}.$$

Prin relațiile (15), §2, (3) se obține

$$R_x + i R_y = \frac{8\pi}{Rl}\{l_0 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)\, e^{i(\alpha_1+\alpha_2)} - e^{2i\alpha}\}. \tag{4}$$

În cazul particular al mișcării alfvenice, se obține

$$R_x + i R_y = \frac{8\pi}{Rl}\{l_0 - e^{2i\alpha}\}. \tag{5}$$

în care

$$l_0 = 2\left(\lg \frac{16}{R} - r\right) - \lg 2 \sin \alpha_\infty, \quad l = l_0^2 - 1.$$

În cazul în care cîmpul magnetic aplicat este perpendicular pe direcția vitezei neperturbate, rezultă

$$R_x + i R_y = \frac{8\pi}{Rl}\left\{l_0 - \frac{1-\beta}{1+\beta} - e^{2i\alpha}\right\} \tag{6}$$

în care

$$l_0 = 2\left(\lg \frac{16}{R} - \gamma\right) - \lg(1 + \beta)$$

$$l = l_0^2 - \left\{1 + 2\,\frac{1-\beta}{1+\beta}\cos 2\alpha + \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2\right\}.$$

9. *Cazul numerelor Reynolds mari.* În cazul numerelor Reynolds mari, parametrii *a*, *b* au valori mari. Pentru a aproxima în acest caz ecuația integrală (2), §7, vom utiliza o propoziție stabilită în [9]. Puțin modificat, enunțul propoziției stabilite este

PROPOZIȚIE. *Dacă funcția $C : (0, 1) \to R$ este continuă, iar la extremitățile intervalului este absolut integrabilă, atunci*

$$\lim_{a\to\infty} a\int_0^1 C(\tau)\, e^{a(t-\tau)\cos\alpha} K_0(a\,|\,t - \tau|)\, d\tau = \pi\, C(t)/\sin|\alpha|\,;$$

dacă în plus C este hölderiană pe (0, 1), atunci

$$\lim_{a\to\infty} a\int_0^1 C(\tau)\, e^{a(t-\tau)\cos\alpha} K_1(a\,|t - \tau|)\, \mathrm{sgn}\,(t-\tau)\, d\tau = \pi\, C(t)\, \mathrm{ctg}\,|\alpha|$$

pentru $t \in (0, 1)$ *și* $|\alpha| \in (0, \pi)$.

Datorită acestei propoziţii, ecuaţia integrală (2), §7, în care λ_0, μ_0 sînt exprimaţi prin (1), §7, va fi aproximată prin ecuaţia

$$\pi\{\overline{c\,C(t)}\,e^{-i\alpha}+d\,C(t)\,e^{i\alpha}\}-\int_0^1\overline{C(\tau)}\,e^{-i\alpha}\frac{d\tau}{t-\tau}=-\frac{1}{2}R. \tag{1}$$

Constantele c, d sînt date de relaţiile

$$\begin{aligned} c=c_1+i\,c_2&=a_0\operatorname{ctg}(\alpha-\alpha_1)+b_0\operatorname{ctg}|\alpha-\alpha_2|=\\ &=b\operatorname{ctg}(\alpha-\alpha_1)\,e^{-i\alpha_2}+a\operatorname{ctg}|\alpha-\alpha_2|\,e^{-i\alpha_1}\\ d=d_1+i\,d_2&=\left\{\frac{a_0}{\sin(\alpha-\alpha_1)}e^{-i\alpha_1}+\frac{b_0}{\sin(\alpha-\alpha_2)}e^{-i\alpha_2}\right\}e^{-i\alpha}=\\ &=\left\{\frac{b}{\sin(\alpha-\alpha_1)}+\frac{a}{\sin|\alpha-\alpha_2|}\right\}e^{-i(\alpha+\alpha_1+\alpha_2)}\end{aligned} \tag{2}$$

Însemnăm

$$C(t)=-\frac{R}{2\pi}e^{-i\alpha}F(t),\quad F=f+i\,g. \tag{3}$$

Funcţia F verifică ecuaţia

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\overline{F(\tau)}\,d\tau}{t-\tau}=\overline{cF(t)}+d\,F(t)-1. \tag{4}$$

Separînd partea reală şi partea imaginară, se obţine sistemul

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{x(\tau)\,d\tau}{t-\tau}=A\,x(t)-k'$$

în care

$$x=\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}c_1+d_1 & -c_2-d_2\\ c_2-d_2 & c_1-d_1\end{pmatrix},\quad k'=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Pentru a scrie acest sistem în forma diagonală, se efectuează transformarea cu coeficienţi constanţi

$$x=My,\quad M=\begin{pmatrix}c_1+d_1-\varkappa_2 & c_2+d_2\\ c_2-d_2 & c_1+d_1-\varkappa_2\end{pmatrix},$$

$$M^{-1}=\frac{1}{|M|}\begin{pmatrix}c_1+d_1-\varkappa_2 & -(c_2+d_2)\\ -c_2+d_2 & c_1+d_1-\varkappa_2\end{pmatrix}.$$

Mărimile $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ sînt rădăcinile polinomului caracteristic

$$\begin{vmatrix}c_1+d_1-\varkappa & -c_2-d_2\\ c_2-d_2 & c_1+d_1-\varkappa\end{vmatrix}=0$$

şi au expresiile reale, conform relaţiilor (2),

$$\varkappa_{1,2}=c_1\pm\sqrt{|d|^2-c_2^2}. \tag{5}$$

Pentru funcţia y se obţine ecuaţia

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{y(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{t-\tau} = Dy(t) - k$$

în care

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \varkappa_1 & 0 \\ 0 & \varkappa_2 \end{pmatrix}, \quad k = M^{-1}k'.$$

Soluţia acestei ecuaţii este, [10],

$$y_1(\tau) = k_1\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{\gamma_1/2\pi}\sin\frac{\gamma_1}{2}, \qquad y_2(\tau) = k_2\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{\gamma_2/2\pi}\sin\frac{\gamma_2}{2}.$$

Revenind la funcţia x, deci la funcţiile f, g, se obţine soluţia ecuaţiei (4) sub forma

$$f(\tau) = \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{\gamma_1/2\pi}\sin\frac{\gamma_1}{2} + \Gamma_1\left\{\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{\gamma_2/2\pi}\sin\frac{\gamma_2}{2} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{\gamma_1/2\pi}\sin\frac{\gamma_1}{2}\right\} \tag{6}$$

$$g(\tau) = \Gamma_2\left\{\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{\gamma_2/2\pi}\sin\frac{\gamma_2}{2} - \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{\gamma_1/2\pi}\sin\frac{\gamma_1}{2}\right\}$$

în care

$$\gamma_1 = \arg\frac{\varkappa_1 + i}{\varkappa_1 - i}, \qquad \gamma_2 = \arg\frac{\varkappa_2 + i}{\varkappa_2 - i}$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{2}(d_2 - c_2)/\sqrt{|d|^2 - c_2^2}, \qquad \Gamma_1 = \Gamma_2(d_2 + c_2)/(\sqrt{|d|^2 - c_2^2} + d_1).$$

Din relaţiile (1), §6, (3), se obţine rezistenţa la înaintare

$$R_x + i\,R_y = (1 - \beta\,\mathrm{e}^{2i\alpha_\infty})\{\gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)(\Gamma_1 - i\,\Gamma_2)\}\,\mathrm{e}^{i\alpha}. \tag{7}$$

Primită la redacţie la 12 aprilie 1968

Universitatea din Bucureşti
Facultatea de matematică-mecanică,
Str. Academiei nr. 14.

THE VISCOUS FLOW OF CONDUCTING FLUIDS PAST THIN AIRFOILS, FOR THE SPECIAL CASE $\sigma\mu\nu = 1$

(ABSTRACT)

The steady, two-dimensional flow of viscous, incompressible, conducting fluids past thin airfoils in the presence of a magnetic field, is considered. The undisturbed flow and applied magnetic field are not parallel. The magnetic Prandtl number $\sigma\mu\nu$ where σ is the fluid electrical conductivity, μ is the magnetic permeability and ν is the coefficient of viscosity, is supposed equal to unit.

Using Oseen-type approximation, the general expressions are obtained for the velocity and magnetic field. Thus, the problem may be formulated as a singular integral equation.

As an example of application, the flows at large or small Reynolds numbers past a finite flat plate, were considered.

BIBLIOGRAFIE

1. H. P. Greenspan, G. F. Carrier, *The magnetohydrodynamic flow past a flat plate.* J. Fluid Mech., **6**, 77 (1959).
2. H. P. Greenspan, *Flat Plate in Magnetohydrodynamic Flow.* Phys. Fluids, **3**, 581 (1960).
3. H. Cabannes, *Magnétodynamique des fluides.* Paris, 1965.
4. L. Dragoş, N. Marcov, *L'écoulement des fluides visqueux, electroconducteurs, en présence d'une plaque plane à incidence non nulle.* J. de Mécanique, **7** (1968).
5. Isao Imai, *On flows of conducting fluids past bodies.* Rev. Mod. Phys., **32**, 992 (1960).
6. L. Dragoş, *Introducere în magnetodinamica fluidelor.* Ed. Academiei, Bucureşti, 1969.
7. G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions.* Cambridge, 1922.
8. C. Iacob, *Introduction Mathématique à la Mécanique des fluides.* Bucarest—Paris, 1959.
9. N. Marcov, *Teoreme de limită privind funcţiile Bessel* K_0 *şi* K_1. St. cerc. mat., **21**, 3 (1969).
10. Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные Интегральные Уравнения.* Москва, 1962.

ECUAŢII DIFERENŢIALE LINIARE ŞI SISTEME DE ECUAŢII DIFERENŢIALE LINIARE ÎN SOLUŢIA CĂRORA APAR FUNCŢIILE LUI PAUL APPELL

DE

N. NEUHAUS

(Timişoara)

Se cercetează structura unor tipuri de ecuaţii diferenţiale şi sisteme de ecuaţii diferenţiale a căror soluţie se poate exprima cu ajutorul funcţiilor lui P. Appell [1], [2] de două variabile proporţionale. În continuare se dă soluţia generală a ecuaţiilor precum şi a sistemelor de ecuaţii diferenţiale studiate şi anume exprimată efectiv cu ajutorul funcţiilor P. Appell.

Cercetînd literatura de specialitate [1], [2], [3], [4], [5], [9] — — [17], nu se găsesc tratate ecuaţii diferenţiale sau sisteme de ecuaţii diferenţiale a căror soluţie se exprimă cu ajutorul funcţiilor Appell de o variabilă.

În lucrările diverşilor autori ca J. Devisme [2], M. Roşculeţ [3], [4], O. E. Gheorghiu [5] şi H. Schmidt [17] se aplică desigur funcţiile Appell dar nu în legătură cu ecuaţii diferenţiale şi sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare.

În [6] şi [7] autorul încearcă să aducă o contribuţie tocmai în această direcţie, cercetînd structura unor ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene precum şi a unor sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare, în a căror soluţie apar funcţiile lui Appell.

Soluţia generală a acestor ecuaţii şi sisteme se exprimă aici cu ajutorul funcţiilor Appell $P(x, 0)$, $Q(x, 0)$, $R(x, 0)$, definite şi de M. Roşculeţ [3]. Se folosesc aici notaţiile după M. Roşculeţ [3] şi anume $P(x, 0) = apx$, $R(x, 0) = cpx$, $Q(x, 0) = spx$.

Lucrarea [8] elaborată în colaborare cu P. Izverceanu este o generalizare a lui [6]. Soluţia generală a ecuaţiilor diferenţiale studiate se exprimă aici cu ajutorul funcţiilor exponenţiale de ordin superior (n şi de clasă k).

ST. CERC. MAT., TOM, 21. NR· 5, P. 773—791, BUCUREŞTI, 1969

Dacă în funcţiile Appell $P(\varphi, \psi)$, $R(\varphi, \psi)$, $Q(\varphi, \psi)$, [1], [2] se pune $\varphi = bx$, $\psi = cx$, se obţin funcţiile Appell de două variabile proporţionale $P(bx, cx)$, $R(bx, cx)$, $Q(bx, cx)$.

În lucrarea de faţă se cercetează structura unor ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale, a căror soluţie se exprimă cu ajutorul funcţiilor $P(bx, cx)$, $R(bx, cx)$, $Q(bx, cx)$. Rezultatele obţinute în [6] şi [7] se pot obţine aici prin particularizarea lui b şi c şi anume pentru $b = 1$ şi $c = 0$. În acest sens lucrarea de faţă poate fi privită ca o generalizare şi în acelaşi timp ca o sinteză a lui [6] şi [7].

§1. NOTAŢII ŞI TERMINOLOGIE

Se notează prin $P(bx, cx)$, $R(bx, cx)$, $Q(bx, cx)$, funcţiile P. Appell definite astfel:

$$P(bx, cx) = \frac{e^{bx+cx} + e^{bxj+cxj^2} + e^{bxj^2+cxj}}{3}$$

$$R(bx, cx) = \frac{e^{bx+cx} + je^{bxj+cxj^2} + j^2e^{bxj^2+cxj}}{3}$$

$$Q(bx, cx) = \frac{e^{bx+cx} + j^2\, e^{bxj+cxj^2} + j\, e^{bxj^2+cxj}}{3},$$

unde $j^3 = 1$, $j \neq 1$.

Relaţiile

$$\begin{aligned} e^{bx+cx} &= P(bx, cx) + R(bx, cx) + Q(bx, cx) \\ e^{bxj+cxj^2} &= P(bx, cx) + j^2 R(bx, cx) + jQ(bx, cx) \\ e^{bxj^2+cxj} &= P(bx, cx) + j\, R(bx, cx) + j^2 Q(bx, cx) \end{aligned}$$

folosite în lucrare se deduc cu uşurinţă din expresiile de mai sus ale funcţiilor $P(bx, cx)$, $R(bx, cx)$, $Q(bx, cx)$.

În partea a doua a lucrării expunerea se face cu ajutorul matricilor. Matricile se notează prin litere mari scrise de mînă sau de tipar (cu excepţia literelor P, Q, R, prin care se însemnează funcţiile P. Appell.)

Matricea unitate se notează cu E, iar matricea nulă prin „0”.

Pentru a asigura o scriere cît mai simplă şi concentrată se folosesc matrici, ale căror elemente sînt de asemenea matrici (matrici celulare).

Tipul matricii se notează prin $(m \times n)$, unde m = numărul liniilor iar n = numărul coloanelor.

Matricile folosite în expunere sînt notate după cum urmează:

$$S_1 = \begin{bmatrix} P \\ R \\ Q \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} R \\ Q \\ P \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} Q \\ P \\ R \end{bmatrix}, \quad \text{unde} \quad \begin{aligned} P &= P(bx, cx) \\ R &= R(bx, cx) \\ Q &= Q(bx, cx) \end{aligned}$$

$$S_\nu = S_\nu(bx, cx), \ \nu = 1, 2, 3$$

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ \vdots \\ y_{3m} \end{bmatrix}, \quad Z(x) = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ z_{3m} \end{bmatrix},$$

unde $y_k = y_k(x)$

$z_k = z_k(x)$

$k = 1,2,\ldots,3m-1,3m$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ c & 0 & b \\ b & c & 0 \end{bmatrix},$$

unde „0" este numărul zero, iar b şi c sînt numere reale.

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ (b+c)E & B & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2(b+c)E & B & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3(b+c)E & B \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & (m-1)(b+c)E & B \end{bmatrix}$$

unde prin „0" se notează matricea nulă de tipul (3×3), iar prin „E" matricea unitate de tip (3×3).

Matricea A poate fi privită ca o matrice celulară de tipul $(m\times m)$ cu elementele B, E, O, sau ca matrice de tip $(3m\times 3m)$ cu elemente numerice.

$$Y_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} \left.\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{de} \\ (m-\mu-1) \\ \text{ori} \end{matrix} \\ C^0_{m-\mu-1} S_\nu \\ C^1_{m-\mu} \quad (1+bx+cx) S_\nu \\ \vdots \\ C^{\mu-1}_{m-2} \quad (1+bx+cx)^{\mu-1} S_\nu \\ C^{\mu}_{m-1} \quad (1+bx+cx)^{\mu} S_\nu \end{bmatrix}$$

unde prin „0" se notează matricea nulă de tipul (3×1), iar prin $C^0_{m-\mu-1}$, $C^1_{m-\mu} \ldots C^{\mu-1}_{m-2}$ C^{μ}_{m-1} combinări

$Y_{\nu\mu} = Y_{\nu\mu}(bx, cx)$ este deci o matrice de tipul $(3m\times 1)$ cu elementele 0, $C^{\mu-k}_{m-k-1}(1+bx+cx)^{\mu-k}\, P$, $C^{\mu-k}_{m-k-1}(1+bx+cx)^{\mu-k} R$, $C^{\mu-k}_{m-k-1}(1+bx+cx)^{\mu-k} Q$

unde $k = \mu, \mu-1, \ldots 2, 1, 0$.

$Y_{\nu\mu}$ poate fi privit şi ca matrice celulară de tipul $(m\times 1)$ cu elementele 0, $C^{\mu-k}_{m-k-1}(1+bx, cx)^{\mu-k} S_\nu$, $k = \mu, \mu-1 \ldots 2, 1, 0$
α_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ sînt numere întregi pozitive.

$$A_i = \begin{bmatrix} B_i & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ (b_i+c_i)E & B_i & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2(b_i+c_i)E & B_i & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3(b_i+c_i)E & B_i \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & (\alpha_i-1)(b_i+c_i)E & B_i \end{bmatrix}$$

unde prin „0” se notează matricea nulă de tipul (3×3), iar prin B_i matricea următoare:

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 & b_i & c_i \\ c_i & 0 & b_i \\ b_i & c_i & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} (b_i,\ c_i \text{ sînt numere reale}) \\ i = 1, 2, \ldots, s \end{array}$$

A_i poate fi privită ca o matrice celulară de tipul $(\alpha_i \times \alpha_i)$ sau ca matrice cu elemente numerice de tipul $(3\alpha_i \times 3\alpha_i)$.

$$Y_i = \begin{bmatrix} y_{\rho_{i-1}+1} \\ y_{\rho_{i-1}+2} \\ \vdots \\ y_{\rho_i-1} \\ y_{\rho_i} \end{bmatrix}$$

unde $y_k = y_k(x)$ $k = \rho_{i-1}+1,\ \rho_{i-1}+2, \ldots, \rho_i$
$Y_i = Y_i(x)$
$\rho_i = 3\sum_{k=1}^{i} \alpha_k$ şi $\rho_0 = 0$ $i = 1,2, \ldots s$

Este evident că matricea Y_i este de tipul $(3\alpha_i + 1)$, deoarece $\rho_i = \rho_{i-1} + 3\alpha_i$

$$\mathfrak{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_i \\ \vdots \\ Y_s \end{bmatrix}$$

E_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ sînt matrici unitate de tipul (3×3)

$$[a_1E_1,\ a_2E_2, \ldots, a_iE_i, \ldots a_sE_s] = \begin{bmatrix} a_1E_1 & 0\ldots & 0\ldots0 \\ 0 & a_2E_2\ldots & 0\ldots0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0\ldots & a_iE_i\ldots0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0\ldots & 0\ldots\ a_sE_s \end{bmatrix}$$

adică o matrice celulară cvasidiagonală de tipul $(s\times s)$ sau o matrice cu elemente numerice de tipul $\left(3\sum_{k=1}^{s}\alpha_k \times 3\sum_{k=1}^{s}\alpha_k\right)$. Cu „0” se însemnează matrici nule de tipul corespunzător. Astfel se are pe linia „i” matrici nule de tipul $(3\alpha_i \times 3\alpha_k)$, unde $k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, s$.

a_i ($i = 1, 2, \ldots, s$) sînt numere reale

$$[A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_s] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & A_i & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & A_s \end{bmatrix}$$

adică o matrice celulară cvasidiagonală de tipul $(s \times s)$ sau „0” matrice cu elemente numerice de tipul $\left(3 \sum_{k=1}^{s} \alpha_k \times 3 \sum_{k=1}^{s} \alpha_k\right)$. „0” are aceeaşi semnificaţie ca în cazul precedent.

$$Y_{\nu\mu i} = \begin{bmatrix} & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \\ C^0_{\alpha_i-\mu-1} & S_\nu & \\ C^1_{\alpha_i-\mu} & (1 + b_i x + c_i x) & S_\nu \\ & \vdots & \\ C^{\mu-1}_{\alpha_i-2} & (1 + b_i x + c_i x)^{\mu-1} & S_\nu \\ C^{\mu}_{\alpha_i-1} & (1 + b_i x + c_i x)^{\mu} & S_\nu \end{bmatrix}$$

unde $S_\nu = S_\nu (b_i x, \ c_i x)$
$Y_{\nu\mu i} = Y_{\nu\mu i}(b_i x, c_i x)$
$i = 1,2,3, \ldots, s$
$\nu = 1,2,3$
$\mu = 0,1,2, \ldots \alpha_i - 1$

„0” este matricea nulă de tip (3×1)

$C^{\mu-k}_{\alpha_i-k-1}$ $(k = \mu, \ \mu - 1, \ldots 2,1,0)$ sînt combinări.

$Y_{\nu\mu i}$ este de tipul $(3\alpha_i \times 1)$

$$Z_i(x) = \sum_{\mu=0}^{\alpha_i-1} \sum_{\nu=1}^{3} \mathrm{d}_{\nu\mu} \cdot Y_{\nu\mu i}(b_i x, \ c_i x), \quad i = 1,2, \ldots s,$$

unde $\mathrm{d}_{\nu\mu}$ $(\nu = 1, 2, 3; \ \ \mu = 0, 1, 2, \ldots, \ \ \alpha_i - 1)$ sînt constante arbitrare.

$$\mathfrak{y}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Z_i e^{a_i x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \ldots, s$$

Prin „0” au fost notate matrici nule de tipul $(3\alpha_k \times 1)$, $k = 1, 2, \ldots, i - 1, \ \ i + 1, \ldots, s$ (citind de sus în jos).

$\mathcal{Y}_i(x)$ este o matrice celulară de tipul $(s \times 1)$

$$\mathcal{Y}_{\nu\mu i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Y_{\nu\mu i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

unde $\mathcal{Y}_{\nu\mu i} = \mathcal{Y}_{\nu\mu i}(b_i\, x,\ c_i\, x)$

Cu „0'' se notează matrici celulare nule de tipul $(3\alpha_k \times 1)$, $k = 1,\ 2, \ldots,\ i-1,\ i+1, \ldots\ s$ (citind de sus în jos).

$\mathcal{Y}_{\nu\mu i}(b_i\, x,\ c_i\, x)$ poate fi privită ca matrice celulare de tipul $(s \times 1)$ precum și ca matrice scalară de tipul $\left(3 \sum\limits_{k=1}^{s} \alpha_k \times 1\right)$.

$A_{ik}\ B_{ik},\ C_{ik}\ (i=1,2,\ldots,s;\ k=1,2,\ldots,\alpha_i)$, (a se vedea pagina 8, 11, 12) $C_{lk}(i = 1,2,\ldots,\ v;\ k = 1,2,\ldots,\ \beta_l)$; (a se vedea pag. 11, 13) sînt constante arbitrare.

§ 2.1. ECUAŢII DIFERENŢIALE LINIARE OMOGENE CU COEFICIENŢI CONSTANŢI

1. În general o ecuație diferențială liniară omogenă cu coeficienți constanți

$$(1)\quad y^{(n)} + d_1\, y^{(n-1)} + d_2\, y^{(n-2)} + \ldots + d_n\, y = 0$$

cu ecuația caracteristică de formă:

$$(2)\quad \prod_{i=1}^{s} [r - (a_i + b_i + c_i)]^{\alpha_i} \cdot [r - (a_i + b_i j + c_i j^2)]^{\alpha_i}\, [\, r - (a_i + b_i j^2 + c_i j)]^{\alpha_i} = 0$$

sau

$$\prod_{i=1}^{s} [r^3 - 3a_i r^2 + 3\,(a_i^2 - b_i r)\, r - (a_i^3 + b_i^3 + c_i^3 - 3\, a_i\, b_i\, c_i)]^{\alpha_i} = 0$$

are sistemul fundamental de soluții:

$$(2')\quad \begin{array}{cccc} e^{(a_i + b_i + c_i)x} & e^{(a_i + b_i j + c_i j^2)x} & e^{(a_i + b_i j^2 + c_i j)x} & \\ x e^{(a_i + b_i + c_i)x} & x e^{(a_i + b_i j + c_i j^2)x} & x e^{(a_i + b_i j^2 + c_i j)x} & \\ x^2 e^{(a_i + b_i + c_i)x} & x^2 e^{(a_i + b_i j + c_i j^2)x} & x^2 e^{(a_i + b_i j^2 + c_i j)x} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ x^{\alpha_i - 1} e^{(a_i + b_i + c_i)x} & x^{\alpha_i - 1} e^{(a_i + b_i j + c_i j^2)x} & x^{\alpha_i - 1} e^{(a_i + b_i j^2 + c_i j)x} & i = 1,\ 2, \ldots,\ s, \end{array}$$

unde $3 \sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i = n$

adică

$$n = 3m \tag{3}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_s$ sînt numere naturale, iar „s'' este egal cu numărul total al tripletelor distincte de rădăcini (de formă $r_{1i} = a_i + b_i + c_i$; $r_{2i} = a_i + b_i j + c_i j^2$; $r_{3i} = a_i + b_i j^2 + c_i j$) ale ecuaţiei caracteristice. a_i, b_i, c_i sînt numere reale.

Atunci şi combinaţiile liniar independente

$$x^{\alpha_i - 1} \frac{e^{(a_i+b_i+c_i)x} + e^{(a_i+b_ij+c_ij^2)x} + e^{(a_i+b_ij^2+c_ij)x}}{3} = x^{\alpha_i-1} e^{a_i x} P$$

$$x^{\alpha_i - 1} \frac{e^{(a_i+b_i+c_i)x} + j\, e^{(a_i+b_ij+c_ij^2)x} + j^2\, e^{(a_i+b_ij^2+c_ij)x}}{3} = x^{\alpha_i-1} e^{a_i x} R$$

$$x^{\alpha_i - 1} \frac{e^{(a_i+b_i+c_i)x} + j^2\, e^{(a_i+b_ij+c_ij^2)x} + j e^{(a_i+b_ij^2+c_ij)x}}{3} = x^{\alpha_i-1} e^{a_i x} Q$$

$i = 1, 2, 3, \ldots, s$; $P = P(b_i x, c_i x)$, $R = R(b_i x, c_i x)$, $Q = Q(b_i x, c_i x)$, adică

$$\left. \begin{array}{lll} e^{a_i x} P & e^{a_i x} R & e^{a_i x} Q \\ x e^{a_i x} P & x e^{a_i x} R & x e^{a_i x} Q \\ x^2 e^{a_i x} P & x^2 e^{a_i x} R & x^2 e^{a_i x} Q \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x^{\alpha_i-1} e^{a_i x} P & x^{\alpha_i-1} e^{a_i x} R & x^{\alpha_i-1} e^{a_i x} Q \end{array} \right| \quad i = 1, 2, 3, \ldots, s \tag{2''}$$

formează de asemenea un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia diferenţială (1).

În consecinţă, soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (1) se poate scrie:

$$\begin{aligned} y = & \sum_{k=1}^{\alpha_i} x^{k-1} [A_{1k} P(b_1 x, c_1 x) + B_{1k} R(b_1 x, c_1 x) + C_{1k} Q(b_1 x, c_1 x)] e^{a_1 x} + \ldots \\ & + \sum_{k=1}^{\alpha_i} x^{k-1} [A_{ik} P(b_i x, c_i x) + B_{ik} R(b_i x, c_i x) + C_{ik} Q(b_i x, c_i x)] e^{a_i x} + \ldots \\ & + \sum_{k=1}^{\alpha_i} x^{k-1} [A_{sk} P(b_s x, c_s x) + B_{sk} R(b_s x, c_s x) + C_{sk} Q(b_s x, c_s x)] e^{a_s x} \end{aligned}$$

sau restrîns:

$$y = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{\alpha_i} x^{k-1} [A_{ik} P(b_i x, c_i x) + B_{ik} R(b_i x, c_i x) + C_{ik} Q(b_i x, c_i x)] e^{a_i x} \tag{4}$$

Reciproc, să presupunem acum că ecuaţia diferenţială dată admite triplete de soluţii particulare de forma (2''). Fie $x^{\alpha_i-1} e^{a_i x} P(b_i x, c_i x)$; $x^{\alpha_i-1} e^{a_i x} R(b_i x, c_i x)$; $x^{\alpha_i-1} e^{a_i x} Q(b_i x, c_i x)$ un triplet oarecare de soluţii particulare din (2'').

Raţionamentul pe care îl vom face asupra acestui triplet se poate aplica în mod analog oricărui triplet din (2″).

Tripletul de soluţii particulare ales se mai poate scrie :

$$x^{\alpha_i-1} e^{a_i x} P(b_i x, c_i x) = \frac{e^{b_i x+c_i x} + e^{b_i x j+c_i x j^2} + e^{b_i x j^2+c_i x j}}{3} x^{\alpha_i-1} e^{a_i x}$$

$$x^{\alpha_i-1} e^{a_i x} R(b_i x, c_i x) = \frac{e^{b_i x+c_i x} + j e^{b_i x j+c_j x j^2} + j^2 e^{b_i x j^2+c_i x j}}{3} x^{\alpha_i-1} e^{a_i x}$$

$$x^{\alpha_i-1} e^{a_i x} Q(b_i x, c_i x) = \frac{e^{b_i x+c_i x} + j^2 e^{b_i x j+c_i x j^2} + j e^{b_i x j^2+c_i x j}}{3} x^{\alpha_i-1} e^{a_i x}$$

unde : $j^3 = 1,\ j \neq 1;\ 1 + j + j^2 = 0$ sau $j + j^2 = -1$.

Este cunoscut faptul că orice combinaţie liniar independentă a celor trei soluţii particulare este de asemenea o soluţie particulară pentru ecuaţia diferenţială dată.

Deci şi combinaţiile liniar independente

$$x^{\alpha_i-1} e^{a_i x} (P + R + Q) = x^{\alpha_i-1} e^{a_i x} e^{(b_i+c_i)x} = x^{\alpha_i-1} e^{(a_i+b_i+c_i)x}$$

$$x^{\alpha_i-1} e^{a_i x} (P + j^2 R + jQ) = x^{\alpha_i-1} e^{a_i x} e^{(b_i j+c_i j^2)x} = x^{\alpha_i-1} e^{(a_i+b_i j+c_i j^2)x}$$

$$x^{\alpha_i-1} e^{a_i x} (P + j R + j^2 Q) = x^{\alpha_i-1} e^{a_i x} e^{(b_i j^2+c_i j)x} = x^{\alpha_i-1} e^{(a_i+b_i j^2+c_i j)x}.$$

(unde $P = P(b_i x, c_i x)$, $R = R(b_i x, c_i x)$, $Q = Q(b_i x, c_i x)$) sînt de asemenea soluţii particulare ale ecuaţiei (1).

Din expresiile (2′) ale soluţiilor particulare rezultă atunci că $a_i + b_i + c_i$, $a_i + b_i j + c_i j^2$, $a_i + b_i j^2 + c_i j$, sînt rădăcini multiple de ordinul α_i pentru ecuaţia caracteristică a ecuaţiei diferenţiale liniare date. Acestor rădicini le corespund în ecuaţia caracteristică factorii :

$$[r - (a_i + b_i + c_i)]^{\alpha_i} [r - (a_i + b_i j + c_i j^2)]^{\alpha_i} \cdot [r - (a_i + b_i j^2 + c_i j)]^{\alpha_i} = [(r - a_i)^3 - 3 b_i c_i (r - a_i) - (b_i^3 + c_i^3)]^{\alpha_i} =$$

$$= [r^3 - 3a_i r^2 + 3(a_i^2 - b_i c_i) r - (a_i^3 + b_i^3 + c_i^3 - 3 a_i b_i c_i)]^{\alpha_i}.$$

Dacă ţinem cont că $i = 1, 2, \ldots, s$, ecuaţia caracteristică a ecuaţiei diferenţiale date se poate scrie :

$$\prod_{i=1}^{s} [r^3 - 3 a_i r^2 + 3(a_i^2 - b_i c_i) r - (a_i^3 + b_i^3 + c_i^3 - 3 a_i b_i c_i)]^{\alpha_i} = 0.$$

Gradul acestei ecuaţii este evident :

$$3(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s) = 3 \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 3m.$$

Dar gradul ecuaţiei caracteristice este egal cu ordinul „n" al ecuaţiei diferenţiale liniare omogene corespunzătoare, şi deci $n = 3m$.

Consideraţiile făcute pînă aici se pot exprima prin următoarea

TEOREMĂ. *Dacă ecuaţia caracteristică a unei ecuaţii diferenţiale liniare omogene, cu coeficienţi constanţi, este de forma* (2) *şi dacă ordinul ecuaţiei diferenţiale date este un multiplu de* 3 ($n = 3m$), *atunci şi numai atunci soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale date este de forma* (4).

2. Fie acum

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{d}_k\, y^{(n-k)}(x) = 0 \tag{6}$$

o ecuaţie diferenţială liniară omogenă cu coeficienţi constanţi şi

$$\prod_{i=1}^{\nu} [(r-a_i)^6 - 6b_i c_i (r-a_i)^4 + 9\, b_i^2 c_i^2 (r-a_i)^2 - (b_i^3 + c_i^3)^2]^{\alpha_i} = 0 \tag{7}$$

ecuaţia caracteristică ataşată. Atunci este evident că:

$$n = 6 \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i = 6m.$$

Se poate arăta că ecuaţia (6) este un caz particular al ecuaţiei (1) (şi anume pentru m = număr par pozitiv) şi în consecinţă integrala generală a ecuaţiei (6) se poate deduce ca un caz particular din integrala generală a ecuaţiei (1).

3. În continuare se tratează alte tipuri de ecuaţii diferenţiale liniare (ordinul putînd fi şi diferit de un multiplu de 3, adică $n \neq 3m$), a căror integrală generală se poate exprima cu ajutorul funcţiilor P. Appell.

3 a. Un asemenea tip este de exemplu ecuaţia diferenţială

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{d}_k\, y^{(n-k)}(x) = 0 \tag{8}$$

a cărei ecuaţie caracteristică este de forma

$$\prod_{i=1}^{s} [r - (a_i + b_i j + c_i j^2)]^{\alpha_i} \cdot [r - (a_i + b_i j^2 + c_i j]^{\alpha_i} = 0. \tag{9}$$

Ecuaţia (9) se poate scrie şi sub forma:

$$\prod_{i=1}^{s} [r^2 - (2a_i - b_i - c_i)\, r + a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 - a_i b_i - a_i c_i - b_i c_i]^{\alpha_i} = 0,$$

unde

„s'' este numărul total al perechilor distincte de rădăcini (de formă $a_i + b_i j + c_i j^2$, $a_i + b_i j^2 + c_i j$, $i = 1, 2, \dots, s$) a ecuaţiei caracteristice.

α_i, $i = 1, 2, \ldots, s$ sînt numere naturale, care indică ordinul de multiplicitate al perechilor de rădăcini $(a_i + b_i j + c_i j^2,\ a_i + b_i j^2 + c_i j;\ i = 1, 2, \ldots, s)$ a ecuației caracteristice.

a_i, b_i, c_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, sînt numere reale.

j, j^2 sînt rădăcinile ecuației $z^2 + z + 1 = 0$.

Este evident că $n = 2 \sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i = 2m$ (multiplu de 2).

Pentru (8) se poate scrie următorul sistem fundamental:

$$
\begin{array}{ll}
e^{a_i x}(2P - Q - R) & e^{a_i x}(2Q - R - P) \\
x e^{a_i x}(2P - Q - R) & x e^{a_i x}(2Q - R - P) \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
x^{\alpha_i - 1} e^{a_i x}(2P - Q - R) & x^{\alpha_i - 1} e^{a_i x}(2Q - R - P)
\end{array}
\tag{10}
$$

unde $i=1, 2, \ldots, s$ și $P=P(b_i x, c_i x)$, $Q(b_i x, c_i x)$, $R=R(b_i x, c_i x)$.

Soluția generală a ecuației (8) este atunci

$$
y = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{\alpha_i} x^{k-1} e^{a_i x}[A_{ik}(2P - Q - R) + B_i(2Q - R - P)],
\tag{10'}
$$

unde $P = P(b_i x, c_i x)$; $Q = Q(b_i x, c_i x)$; $R = R(b_i x, c_i x)$.

3b. Fie acum

$$
\sum_{k=0}^{n} d_k y^{(n-k)}(x) = 0
\tag{11}
$$

o ecuație diferențială liniară omogenă cu coeficienți constanți și ecuația caracteristică atașată de forma

$$
\prod_{i=1}^{s} [r - (b_i^{*} + c_i^{*})]^{\alpha_i} = 0,
\tag{12}
$$

unde:

„s" indică numărul total al rădăcinilor reale distincte $(b_i^{*} + c_i^{*})$, $i = 1, 2, \ldots, s$,

α_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, au aceeași semnificație ca la (9).

Evident, $n = \sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i$ și deci ordinul ecuației (11) este oarecare.

Întrucît

$$
e^{(b_i^{*} + c_i^{*})x} = P(b_i^{*} x, c_i^{*} x) + R(b_i^{*} x, c_i^{*} x) + Q(b_i^{*} x, c_i^{*} x)
$$

se poate afirma că (11) admite următorul sistem fundamental de soluții

$$
P + Q + R,\ x(P + Q + R) \ldots x^{\alpha_i - 1}(P + Q + R) \quad i = 1, 2, \ldots, s,
\tag{13}
$$

unde $P = P(b_i^{*} x, c_i^{*} x)$; $Q = Q(b_i^{*} x, c_i^{*} x)$; $R = R(b_i^{*} x, c_i^{*} x)$.

Integrala generală a ecuaţiei (11) are în consecinţă forma

$$y = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{\alpha_i} x^{k-1} A_{ik} (P + Q + R). \tag{13'}$$

3c. În baza rezultatelor obţinute din (8) şi (10) se poate afirma că ecuaţia diferenţială liniară omogenă

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{d}_k \, y^{(n-k)} (x) = 0 \tag{14}$$

a cărei ecuaţie caracteristică este de forma

$$\begin{aligned} &\prod_{i=1}^{s} [r^2 - (2\, a_i - b_i - c_i)\, r + a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 - a_i\, b_i - a_i\, c_i - b_i\, c_i]^{\alpha_i} \times \\ &\qquad \times \prod_{l=1}^{v} (r - b_l^* - c_l^*)^{\beta_l} = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

admite un sistem fundamental de soluţii care se compune dintr-un sistem fundamental de soluţii de forma (10) şi un sistem fundamental de forma (13)

Evident că $n = 2 \sum_{i=1}^{s} \alpha_i + \sum_{l=1}^{v} \beta_l = 2\, m + \sum_{l=1}^{v} \beta_l$ şi deci ecuaţia diferenţială (14) poate fi de un ordin oarecare.

Notaţiile s; α_i; a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$; v; β_l; b_l^*, c_l^* $(l = 1, 2, \ldots v)$ au aceeaşi semnificaţie ca şi în (8) şi (11).

Soluţia generală a ecuaţiei (14) se poate scrie atunci :

$$\begin{aligned} y = &\sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{\alpha_i} x^{k-1} \mathrm{e}^{a_i x} \{A_{ik} [2\, P (b_i\, x,\, c_i\, x) - Q (b_i\, x, c_i\, x) - R (b_i\, x,\, c_i\, x) + \\ &+ B_{ik} [2\, Q (b_i\, x, c_i\, x) - R (b_i\, x, c_i\, x) - P (b_i\, x, c_i\, x)]\} + \\ &+ \sum_{l=1}^{v} \sum_{k=1}^{\beta_l} x^{k-1} C_l\, [P (b_l^*\, x, c_l^*\, x) + Q (b_l^*\, x, c_l^*\, x) + R (b_l^*\, x, c_l^*\, x)]. \end{aligned} \tag{16}$$

Dacă în cazul unei ecuaţii de tipul (14) avem $v = s$; $\beta_l = \alpha_i$; $b_l^* + c_l^* = a_i + b_i + c_i$, atunci ecuaţia caracteristică ataşată are forma :

$$\prod_{i=1}^{s} [r^2 - (2a_i - b_i - c_i) r + a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 - a_i\, b_i - a_i\, c_i - b_i c_i]^{\alpha_i} \prod_{i=1}^{s} (r - a_i - b_i - c_i)^{\alpha_i} =$$

$$= \prod_{i=1}^{s} [r^3 - 3\, a_i\, r^2 + 3\, (a_i^2 - b_i\, c_i)\, r - (a_i^3 + b_i^3 + c_i^3 - 3\, a_i\, b_i\, c_i)]^{\alpha_i} = 0.$$

Această ecuaţie este de forma (2) şi reprezintă ecuaţia caracteristică a unei ecuaţii diferenţiale de tipul (1). Ecuaţiile diferenţiale de tipul (1) sînt deci un caz particular al ecuaţiilor diferenţiale de tipul (14).

Analog se poate arăta că (pentru $\alpha_i = 0$, respectiv $\beta_i = 0$) ecuaţiile (8) şi (11) sînt cazuri particulare ale lui (14).

§ 2.2. ECUAŢIA LUI EULER

Se ştie că o ecuaţie de forma (17)

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{d}_k\, x^{n-k}\, y^{(n-k)}(x) = 0$$

se transformă prin schimbarea de variabilă $x = \mathrm{e}^t$ într-o ecuaţie de forma (18)

$$\sum_{k=0}^{n} p_k\, y^{(n-k)}(t) = 0.$$

Dacă ecuaţia caracteristică ataşată ecuaţiei (18) este de forma (2), atunci soluţia generală a ecuaţiei (18) se poate scrie sub forma:

$$y = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{\alpha_i} t^{k-1} (A_{ik} P + B_{ik} R + C_{ik} Q)\, \mathrm{e}^{a_i t} \tag{19}$$

unde

$$P = P(b_i t, c_i t)$$

$$R = R(b_i t, c_i t)$$

$$Q = Q(b_i t, c_i t).$$

Dar cum $t = \ln x$ ($x > 0$), soluţia generală a lui (17) se poate scrie sub forma

$$y = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{\alpha_i} (\ln x)^{k-1} (A_{ik} P + B_{ik} R + C_{ik} Q)\, x^{a_i}, \tag{19'}$$

unde $P = P(\ln x^{b_i}, \ln x^{c_i})$; $Q = Q(\ln x^{b_i}, \ln x^{c_i})$; $R = R(\ln x^{b_i}, \ln x^{c_i})$.

Dacă ecuaţia caracteristică a ecuaţiei (17) este de forma (9), atunci integrala generală a lui (17) este de forma

$$y = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{\alpha_i} x^{a_i} (\ln x)^{k-1} [A_{ik}(2P - Q - R) + B_{ik}(2Q - R - P)], \tag{20}$$

(unde P, Q, R au semnificaţia din (19)).

Dacă ecuația (17) are o ecuație caracteristică de forma (15), atunci soluția generală a ecuației (17) se scrie după cum urmează :

$$y = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{\alpha_i} x^{a_i} (\ln x)^{k-1} \{A_{ik} [2P (\ln x^{b_i}, \ln x^{c_i}) - Q (\ln x^{b_i}, \ln x^{c_i}) -$$

$$- R (\ln x^{b_i}, \ln x^{c_i})] + B_{ik} [2\, Q (\ln x^{b_i}, \ln x^{c_i}) - R (\ln x^{b_i}, \ln x^{c_i}) -$$

$$- P (\ln x^{b_i}, \ln x^{c_i})]\} + \sum_{l=1}^{v} \sum_{k=1}^{\beta_l} (\ln x)^{k-1}\, C_{ik} [P (\ln x^{b^*_l}, \ln x^{c^*_l}) +$$

$$+ Q (\ln x^{b^*_l}, \ln x^{c^*_l}) + R (\ln x^{b^*_l}, \ln x^{c^*_l})].$$

§. 3. SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE

1. Să considerăm sistemul de ecuații diferențiale liniare omogene cu coeficienți constanți

$$(1) \quad \begin{cases} y'_{3k-2} = a y_{3k-2} + b\, [(k-1)\, y_{3k-5} + y_{3k-1}] + c\, [(k-1)\, y_{3k-5} + y_{3k}] \\ y'_{3k-1} = a y_{3k-1} + b\, [(k-1)\, y_{3k-4} + y_{3k}] + c\, [(k-1)\, y_{3k-4} + y_{3k-2}] \\ y'_{3k} = a y_{3k} + b\, [(k-1)\, y_{3k-3} + y_{3k-2}] + c\, [(k-1)\, y_{3k-3} + y_{3k-1}] \\ \qquad k = 1, 2, \ldots m. \end{cases}$$

Pe baza notațiilor introduse de la început, sistemul (1) se poate scrie și sub forma

$$(2) \qquad Y'(x) = aE\, Y(x) + A Y(x),$$

unde prin E a fost notată matricea unitate de tipul $(3m \times 3m)$. Rezolvarea sistemului (1) se reduce astfel la rezolvarea ecuației matriciale (2).

Prin transformarea $Y(x) = e^{ax}\, \mathfrak{Z}(x)$, ecuația (2) se transformă în ecuația

$$(3) \qquad \mathfrak{Z}'(x) = A\, \mathfrak{Z}(x)$$

TEOREMĂ. *Ecuația* (2) *admite un sistem fundamental de soluții* (*exprimat cu ajutorul funcțiilor matriciale P. Appell* $S_\nu\, (bx,\, cx)$ ($\nu = 1, 2, 3$)) *de forma*

$$\mathfrak{Z}_{\nu\mu}(x) = Y_{\nu\mu}(bx, cx) \quad (\nu = 1,\ 2,\ 3)$$

$$(\mu = 0, 1,\ 2, \ldots m - 1) \text{ (a se vedea notațiile)}$$

Demonstrație. Într-adevăr, avem

$$AY_{\nu\mu} \equiv$$

$$\equiv \left[\begin{array}{l} \left.\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} \text{de } (m-\mu-1) \text{ ori} \\ C^{0}_{m-\mu-1}\; B \;\; S_\nu \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (m-3)\, C^{\mu-3}_{m-4}(b+c)(1+bx+cx)^{\mu-3} S_\nu + C^{\mu-2}_{m-3}(1+bx+cx)^{\mu-2} B \;\, S_\nu \\ (m-2)\, C^{\mu-2}_{m-3}(b+c)(1+bx+cx)^{\mu-2} S_\nu + C^{\mu-1}_{m-2}(1+bx+cx)^{\mu-1} B \;\, S_\nu \\ (m-1)\, C^{\mu-1}_{m-2}(b+c)(1+bx+cx)^{\mu-1} S_\nu + C^{\mu}_{m-1}(1+bx+cx)^{\mu} \;\, B \;\, S_\nu \end{array}\right]$$

unde prin „0'' se notează matricea nulă de tipul (3 ×1), dar

$$(m-3)\, C^{\mu-3}_{m-4} = \frac{(\mu-2)(m-3)(m-4)\ldots[m-3-(\mu-2)+1]}{(\mu-2)\,!} = (\mu-2) C^{\mu-2}_{m-3}$$

$$(m-2)\, C^{\mu-2}_{m-3} = (\mu-1)\, C^{\mu-1}_{m-2}$$

$$(m-1)\, C^{\mu-1}_{m-2} = \mu\, C^{\mu}_{m-1}$$

iar $B\, S_\nu = S'_\nu$, $\nu = 1, 2, 3$, și deci se poate scrie:

$$AY_{\nu\mu} \equiv$$

$$\equiv \left[\begin{array}{rl} & \left.\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} \text{de } (m-\mu-1) \text{ ori} \\ C^{0}_{m-\mu-1} & S_\nu \\ & \vdots \\ (\mu-2)\, C^{\mu-2}_{m-3} & (b+c)(1+bx+cx)^{\mu-3} S_\nu + C^{\mu-2}_{m-3}(1+bx+cx)^{\mu-2} S'_\nu \\ (\mu-1)\, C^{\mu-1}_{m-2} & (b+c)(1+bx+cx)^{\mu-2} S_\nu + C^{\mu-1}_{m-2}(1+bx+cx)^{\mu-1} S'_\nu \\ \mu\, C^{\mu}_{m-1} & (b+c)(1+bx+cx)^{\mu-1} S_\nu + C^{\mu}_{m-1}(1+bx+cx)^{\mu} S'_\nu \end{array}\right] \equiv$$

$$\equiv \left[\begin{array}{ll} & \left.\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} \text{de } (m-\mu-1) \text{ ori} \\ [C^{0}_{m-\mu-1} & S_\nu]' \\ & \vdots \\ [C^{\mu-2}_{m-3} & (1+bx+cx)^{\mu-2} S_\nu]' \\ [C^{\mu-1}_{m-2} & (1+bx+cx)^{\mu-1} S_\nu]' \\ [C^{\mu}_{m-1} & (1+bx+cx)^{\mu} \;\; S_\nu]' \end{array}\right] \equiv Y'_{\nu\mu}.$$

Funcțiile $Y_{\nu\mu}$ verifică deci ecuația (2) și în consecință ele sînt soluții pentru (2). Rămîne de verificat dacă aceste soluții sînt liniar independente. Pentru aceasta este suficient să se arate că din ecuația

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=1}^{3} \lambda_{\nu\mu} Y_{\nu\mu} \equiv 0, \tag{4}$$

unde $\lambda_{\nu\mu}$ sînt constante arbitrare rezultă $\lambda_{\nu\mu} = 0$ (pentru $\nu = 1, 2, 3$; $\mu = 0, 1, 2, \ldots, m - 1$).

Să presupunem că (4) are loc. Atunci efectuînd operaţiile de însumare se obţine:

$$\tag{4'} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sum\limits_{\nu=1}^{3} \lambda_{\nu,m-1} S_\nu \\ \sum\limits_{\nu=1}^{3} [\lambda_{\nu,m-2} C_1^0 + \lambda_{\nu,m-1} C_1^1] S_\nu \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{\nu=1}^{3} [\lambda_{\nu,m-\mu-1} C_{m-\mu-1}^0 + \ldots + \lambda_{\nu,m-1} C_{m-\mu-1}^{m-\mu-1} (1 + bx + cx)^{m-\mu-1}] S_\nu \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \begin{array}{l} \sum\limits_{\nu=1}^{3} [\lambda_{\nu 1} C_{m-2}^0 + \lambda_{\nu 2} C_{m-2}^1 (1 + bx + cx) + \ldots + \lambda_{\nu\mu} C_{m-2}^{\mu-1} \\ (1 + bx - cx)^{\mu-1} + \ldots + \lambda_{\nu,m-1} C_{m-2}^{m-2} (1 + bx + cx)^{m-2}] S_\nu \end{array} \\ \begin{array}{l} \sum\limits_{\nu=1}^{3} [\lambda_{\nu 0} C_{m-1}^0 + \lambda_{\nu 1} C_{m-1}^1 (1 + bx + cx) + \ldots + \lambda_{\nu\mu} C_{m-1}^{\mu} \\ (1 + bx + cx)^{\mu} + \ldots + \lambda_{\nu,m-1} C_{m-1}^{m-1} (1 + bx + cx)^{m-1}] S_\nu \end{array} \end{bmatrix}$$

unde prin „0" s-a notat matricea nulă de tipul (3 × 1).

Dar cum funcţiile S_ν ($\nu = 1, 2, 3$) sînt liniar independente, din (4') se deduce:

$$\sum_{\nu=1}^{3} \lambda_{\nu,m-1} S_\nu \equiv 0 \text{ de unde } \lambda_{\nu,m-1} \equiv 0 \ (\nu = 1, 2, 3)$$

$$\sum_{\nu=1}^{3} (\lambda_{\nu,m-2} C_1^0 + O C_1^1) S_\nu \equiv 0 \text{ de unde } \lambda_{\nu,m-2} \equiv 0 \ (\nu = 1, 2, 3) \text{ ş.a.m.d.}$$

. . . .

$$\sum_{\nu=1}^{3} [\lambda_{\nu,m-\mu-1} C_{m-\mu-1}^0 + O C_{m-\mu-1}^1 (1 + bx + cx) + \ldots + \\ + O C_{m-\mu-1}^{m-\mu-1} (1 + bx + cx)^{m-\mu-1}] S_\nu \equiv 0$$

$$\text{de unde } \lambda_{\nu,m-\mu-1} = 0 \ (\nu = 1, 2, 3)$$

. . . .

$$\text{de unde } \lambda_{\nu,2} = 0 \ (\nu = 1, 2, 3)$$

$$\sum_{\nu=1}^{3} [\lambda_{\nu 1} C_{m-2}^0 + O C_{m-2}^1 (1 + bx + cx) + \ldots + O C_{m-2}^{m-2} (1 + bx + cx)^{m-2}] S_\nu \equiv 0$$

$$\text{de unde } \lambda_{\nu,1} = 0 \ (\nu = 1, 2, 3)$$

$$\sum_{\nu=1}^{3} [\lambda_{\nu 0} C_{m-1}^0 + O C_{m-1}^1 (1 + bx + cx) + \ldots + O C_{m-1}^{m-1} (1 + bx + cx)^{m-1}] S_\nu \equiv 0$$

$$\text{de unde } \lambda_{\nu,0} = 0 \ (\nu = 1, 2, 3).$$

Rezultă că $\lambda_{\nu\mu} = 0$ $(\nu = 1, 2, 3, ; \mu = 0, 1, 2, \ldots, m - 1)$ şi prin aceasta independenţa liniară a soluţiilor $Y_{\nu\mu}$ $(\nu = 1, 2, 3 ; \mu = 0, 1, 2, \ldots, m - 1)$ este dovedită.

Soluţiile $Y_{\nu\mu}$ $(\nu = 1, 2, 3, ; \mu = 0, 1, 2, \ldots, m - 1)$ formează deci un sistem fundamental pentru (2).

Atunci soluţia generală a lui (2) se poate scrie sub forma

$$Y(x) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=1}^{3} \mathrm{d}_{\nu\mu} Y_{\nu\mu} (bx, cx). \tag{5}$$

Dacă se ţine cont de transformarea efectuată în (2), soluţia generală a ecuaţiei (2) se scrie cu uşurinţă după cum urmează :

$$Y(x) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=1}^{3} \mathrm{d}_{\nu\mu} Y_{\nu\mu} (bx, cx)\, \mathrm{e}^{ax}. \tag{6}$$

Soluţia generală a sistemului (1) se obţine din (6).

2. Un sistem mai general decît (1) este :

$$\tag{7} \begin{cases} y'_{\rho_{i-1}+1} = a_i y_{\rho_{i-1}+1} + b_i y_{\rho_{i-1}+2} + c_i y_{\rho_{i-1}+3} \\ y'_{\rho_{i-1}+2} = a_i y_{\rho_{i-1}+2} + b_i y_{\rho_{i-1}+3} + c_i y_{\rho_{i-1}+1} \\ y'_{\rho_{i-1}+3} = a_i y_{\rho_{i-1}+3} + b_i y_{\rho_{i-1}+1} + c_i y_{\rho_{i-1}+2} \\ y'_{\rho_{i-1}+4} = a_i y_{\rho_{i-1}+4} + b_i (y_{\rho_{i-1}+1} + y_{\rho_{i-1}+5}) + c_i (y_{\rho_{i-1}+1} + y_{\rho_{i-1}+6}) \\ y'_{\rho_{i-1}+5} = a_i y_{\rho_{i-1}+5} + b_i (y_{\rho_{i-1}+2} + y_{\rho_{i-1}+6}) + c_i (y_{\rho_{i-1}+2} + y_{\rho_{i-1}+4}) \\ y'_{\rho_{i-1}+6} = a_i y_{\rho_{i-1}+6} + b_i (y_{\rho_{i-1}+3} + y_{\rho_{i-1}+4}) + c_i (y_{\rho_{i-1}+3} + y_{\rho_{i-1}+5}) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_{\rho_i-2} = a_i y_{\rho_i-2} + b_i [(k-1) y_{\rho_i-5} + y_{\rho_i-1}] + c_i [(k-1) y_{\rho_i-5} + y_{\rho_i}] \\ y_{\rho_i-1} = a_i y_{\rho_i-1} + b_i [(k-1) y_{\rho_i-4} + y_{\rho_i}] + c_i [(k-1) y_{\rho_i-4} + y_{\rho_i-2}] \\ y_{\rho_i} = a_i y_{\rho_i} + b_i [(k-1) y_{\rho_i-3} + y_{\rho_i-2}] + c_i [(k-1) y_{\rho_i-3} + y_{\rho_i-1}]. \end{cases}$$

Ecuaţia matricială corespunzătoare (ataşată) lui (7) este de formă

$$\mathfrak{Y}' = [a_1 E_1, a_2 E_2, \ldots, a_s E_s]\, \mathfrak{Y} + [A_1, A_2, \ldots, A_s]\, \mathfrak{Y} \tag{8}$$

TEOREMĂ. *Ecuaţia* (8) *are un sistem fundamental de soluţii de forma*

$\mathfrak{Y}_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ (a se vedea notaţiile)

Demonstrație. Într-adevăr, avem :

$$[a_1 E_1, a_2 E_2, \ldots, a_s E_s]\, \mathcal{Y}_i + [A_1 A_2, \ldots, A_s]\, \mathcal{Y}_i \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_i E_i Z_i e^{a_i x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_i \cdot Z_i \cdot e^{a_i x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_i E_i Z_i e^{a_i x} + A_i \cdot Z_i \cdot e^{a_i x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Din definiția funcției $Z_i(x)$, rezultă în mod evident că $Z_i(x)\, e^{a_i x}$ este soluția generală a unei ecuații de forma

$$(9) \qquad Y_i = a_i E_i Y_i + A_i Y_i \qquad i = 1, 2, \ldots, s.$$

În consecință avem

$$a_i E_i Z_i(x)\, e^{a_i x} + A_i Z_i(x)\, e^{a_i x} \equiv [Z_i(x)\, e^{a_i x}]'.$$

Pe baza acestei identități se poate scrie

$$[a_1 E_1, \ldots, a_s E_s]\, \mathcal{Y}_i + [A_1, A_2, \ldots, A_s]\, \mathcal{Y} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Z_i \cdot e^{a_i x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Z_i \cdot e^{a_i x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathcal{Y}_i'$$

și deci oricare din funcțiile $\mathcal{Y}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ este o soluție a ecuației (8).

Rămîne doar să se arate că aceste soluții sînt liniar independente.

Presupunem că pentru „s" numere λ_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ am avea relația

$$(10) \qquad \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \mathcal{Y}_i(x) \equiv 0\,;$$

aceasta înseamnă că :

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} Z_1 e^{a_1 x} \\ \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ Z_2 e^{a_2 x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + \lambda_i \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ Z_i e^{a_i x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + \lambda_s \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Z_s e^{a_s x} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 Z_1 e^{a_1 x} \\ \lambda_2 Z_2 e^{a_2 x} \\ \vdots \\ \lambda_i Z_i e^{a_i x} \\ \vdots \\ \lambda_s Z_s e^{a_s x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dar cum $Z_i e^{a_i x} \neq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, s$) (ca soluție generală a unei ecuații de tip (9)) rezultă că $\lambda_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ și deci soluțiile sînt liniar independente.

Atunci soluțiile $\mathcal{Y}_i(x)$ formează un sistem fundamental de soluții pentru ecuația (8) și soluția generală a acestei ecuații se poate scrie după cum urmează :

$$\mathcal{Y}(x) = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{d}_i . \mathcal{Y}_i(x) = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{d}_i \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ Z_i(x) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} e^{a_i x} =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \mathrm{d}_i \sum_{\mu=0}^{\alpha_i - 1} \sum_{\nu=1}^{3} \mathrm{d}_{\nu\mu} . \mathcal{Y}_{\nu\mu i} . e^{a_i x} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{\mu=0}^{\alpha_i - 1} \sum_{\nu=1}^{3} \mathrm{d}_i . \mathrm{d}_{\nu\mu} . \mathcal{Y}_{\nu\mu i}\, e^{a_i x}$$

sau dacă se pune $\mathrm{d}_i \mathrm{d}_{\nu\mu} = \mathrm{d}_{\nu\mu i}$ se obține în definitiv

$$\mathcal{Y}(x) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{\mu=0}^{\alpha_i - 1} \sum_{\nu=1}^{3} \mathrm{d}_{\nu\mu i} . \mathcal{Y}_{\nu\mu i}(b_i x, c_i x)\, e^{a_i x} \tag{11}$$

Soluția generală a sistemului (7) se obține cu ușurință din (11).

Primită la redacție la 12 aprilie 1968

Institutul Politehnic Timișoara

BIBLIOGRAFIE

1. P. Appell, C. R. Acad. Sci. Paris, **84**, 540, 1378 (1877).
2. J. Devismé, Ann. Fac. Sci. Toulouse, **XXV** (1933).
3. M. Roşculeţ, St. cerc. mat. **5**, 361—401 (1954).
4. M. Roşculeţ, *Algebre infinite asociate la ecuaţii cu derivate parţiale, omogene, cu coeficienţi constanţi de ordin oarecare*. St. cerc. mat., **VI**, *3—4* (1955).
5. O. Gheorghiu, V. Mioc, *Despre un sistem de ecuaţii funcţionale*. Comunicările Acad. R.S.R., **VIII**, *8* (1958).
6. N. Neuhaus, *Typen von homogenen und linearen Differentialgleichungen in deren Lösung die Funktionen von P. Appell vorkommen*. Matematicki vesnik, Beograd **4** (**19** (1967).
7. N. Neuhaus, *Lineare Differentialgleichungssysteme in deren Lösung die Funktionen von P. Appell vorkommen*. Matematicki vesnik, Beograd, **4** (**19**) (1967).
8. N. Neuhaus, P. Izverceanu, *Tipuri de ecuaţii diferenţiale lineare şi omogene în a căror soluţie apar funcţiile exponenţiale de ordin superior*. Buletinul ştiinţific şi tehnic al Inst. politehnic Timişoara, seria II, **12** (**26**), *1* (1967).
9. M. N. Krilov, D.A.N., **55**, *8* (1947).
10. M. N. Erughin, Prkladnaia matematika i mehanika, **14**, 3 (1950).
11. B. E. Slivinski, D.A.N., **74**, *5* (1950).
12. E. Kamke, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen* t. I, Leipzig 1955.
13. E. Kamke, *Differentialgleichungen I*. 4, Auflage, Leipzig, 1962 p. 134—156.
14. D. S. Mitrinovic, *Dopolnenia k knige E. Kamke*

    I. p. 670—672
    II. p. 672
    III. p. 673—675
    IV. p. 675—678
    V. p. 678—685
    VI. p. 685—687

    Spravotschnik po oboknovenim Diferentialnim uravneniam. Perevod s nemetzkovo S. V. Fomina. *Izdanie tretia izpravlenoie*, Moskva, 1965

    Complements au Traite de Kamke. Publikacija, Elektrotehnickog Fakulteta. Serija Matematika i Fizika (Beograd):
    11 (1959), Note VII
    82 (1962), Note VII, p. 16—18.
    90 (1962), Note VIII, p. 19—20.
    108 (1963), Note IX, p. 78—79.
15. M. N. Matveev, *Metodi integrirovania obiknovennih diferentialnih uravnenii*. Leningrad 1955, p. 581—624.
16. F. R. Gantmaher, *Teoria Matriz*. Cap. XIV, Moskva, 1954.
17. H. Schmidt, *Über das Additionstheorem der zyklischen Funktionen*. Math. Zeitschrift, **76**, 46—50 (1961).

ASUPRA CURBELOR $B(\varepsilon)$ DIN V_n

DE
P. STAVRE
(Craiova)

Folosind [1] [2] se face un studiu al acestor curbe. Se stabilesc condiţiile necesare şi suficiente ce le caracterizează.

Fie V_n o varietate diferenţiabilă. Se ştie că un arc parametric Γ al lui V_n de clasă C^k este definit prin darea unui $I \subset R$ şi o aplicaţie $f : I \to V_n$ de clasă C^k. Numim (I, f) reprezentare parametrică a lui Γ iar $f(I)$ imaginea sa. Dacă Γ este simplu şi luăm ca deschise imaginile deschiselor lui I, se defineşte pe Γ o topologie mai fină ca topologia indusă de topologia spaţiului Hausdorff V_n. Dacă I este compact, atunci cele două topologii pe Γ coincid şi deci f este un homeomorfism al compactului I pe o parte a spaţiului Hausdorff V_n.

Mai amintim că dacă $(I_1 f_1) \sim (I_2 f_2)$ (sînt echivalente), adică există un difeomorfism φ de clasă C^k al lui I_1 pe I_2 aşa ca $f_1 = f_2 \circ \varphi$, atunci vom spune că o clasă de echivalenţă

$$C_{(I_1 f_1)} = \{(I, f)/(I, f) \sim (I_1 f_1)\}$$

defineşte un „arc geometric Γ". Elementele lui $C_{(I_1 f_1)}$ se numesc „reprezentări parametrice admisibile" ale lui Γ. Dacă $t \in I_1$, $u \in I_2$, atunci $t = \varphi^{-1}(u)$ o numim „transformare admisibilă de parametru" pe Γ.

Să admitem că V_n este un spaţiu Riemann iar $g_{\alpha\beta}$ sînt componentele tensorului metric într-o hartă locală a atlasului ce acopere V_n. Dacă un punct $M \in \Gamma$ are coordonatele (x^λ) în harta $(U_1 \varphi_1)$ şi (x'^λ) în harta (U_2, ψ_2) iar $M \in U_1 \cap U_2$, atunci $x'^\lambda = x'^\lambda(x^1 \dots x^n)$ constituie o transformare de coordonate.

V_n fiind o varietate metrică, putem găsi un difeomorfism aşa încît (I_1, f_1) să fie înlocuită cu o reprezentare normală echivalentă (în care $t = \varphi^{-1}(s)$).

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 5, P. 793–797, BUCUREŞTI, 1969

Fie, dar,

$$(1) \qquad (C) : x^{\lambda} = x^{\lambda}(s) \quad (\widetilde{C}) : \widetilde{x}^{\lambda} = \widetilde{x}^{\lambda}(\widetilde{s})$$

ecuațiile a două curbe (C), $(\widetilde{C})$ din V_n, în harta locală considerată în condițiile dinainte. Să presupunem că $(\widetilde{C})$ este o curbă vecină cu (C) dată prin

$$(2) \qquad \widetilde{x}^{\lambda} = x^{\lambda} + \varepsilon\, \sigma(s) \underset{2}{I}^{\lambda},$$

unde ε este o constantă suficient de mică, iar $\underset{2}{I}$ $(\underset{2}{I}^{\lambda})$ este normala principală în $M(x^{\lambda}) \in (C)$. Vom considera (2) în condițiile [1].

Definiția 1. Punctele $\widetilde{M}(\widetilde{x}^{\lambda}) \in (\widetilde{C})$ $M(x^{\lambda}) \in (C)$, unde $\widetilde{x}^{\lambda}$, x^{λ} sînt legate prin (2), le vom numi „puncte corespondente''.

În M, $\widetilde{M}$ putem asocia curbelor formulele Frenet :

$$(3) \qquad \frac{D}{ds}\zeta^{\lambda}_{p} = -K_{p-1}\zeta^{\lambda}_{p-1} + K_{p}\zeta^{\lambda}_{p+1}, \quad \frac{D}{d\widetilde{s}}\widetilde{\zeta}^{\lambda}_{p} = -\widetilde{K}_{p-1}\widetilde{\zeta}^{\lambda}_{p-1} + \widetilde{K}_{p}\widetilde{\zeta}^{\lambda}_{p+1}$$

$$p = 1,2,\ldots,n \quad K_0 = 0 \quad K_n = 0 \quad \widetilde{K}_0 = 0 \quad \widetilde{K}_n = 0.$$

Tot în M, $\widetilde{M}$ se pot asocia formulele :

$$(4) \qquad \frac{D}{ds}\underset{1}{I}^{\lambda} = K_1 \underset{2}{I}^{\lambda} \quad \frac{D}{ds}\underset{2}{I}^{\lambda} = -K_1 \underset{1}{I}^{\lambda} - \sum_{a=3}^{n} T_{a-1}\underset{a}{I}^{\lambda} \quad \frac{D}{ds}\underset{a}{I}^{\lambda} = T_{a-1}\underset{2}{I}^{\lambda}$$

cu

$$\underset{1}{I}^{\lambda} = \underset{1}{\zeta}^{\lambda} \quad \underset{2}{I}^{\lambda} = \underset{2}{\zeta}^{\lambda} \quad \underset{i}{I}^{\lambda}\underset{j}{I}_{\lambda} = \delta_{ij} \quad \underset{1}{I}^{[\lambda_1}\ldots\underset{n}{I}^{\lambda_n]} \neq 0 \text{ în } M \in (C)$$

(și formule asemănătoare pentru $(\widetilde{C})$ dar notate cu $\widetilde{K}_a$ $\widetilde{T}_a$, $\underset{a}{\widetilde{I}}$ ... $\widetilde{\zeta}_1$) (a se vedea [2]). Considerații asupra acestor formule s-au făcut și în [3]. Situîndu-se în condițiile [1], fie $'\underset{2}{\widetilde{I}}^{\lambda}$ componentele vectorului ce se obține din vectorul de componente $\underset{2}{\widetilde{I}}^{\lambda}$ prin transport paralel din $\widetilde{M}$ în M.

Definiția 2. Dacă $('\underset{2}{\widetilde{I}}^{\lambda})$ coincide cu $(\underset{2}{I}^{\lambda})$ în $M \in (C)$, spunem că (C) este o curbă $B(\varepsilon)$.

Folosind procedeul [1], cum

$$\text{a)} \qquad \frac{D}{ds}\underset{p}{I}^{\lambda} = \frac{d}{ds}\underset{p}{I}^{\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}\underset{p}{I}^{\alpha}\underset{1}{I}^{\beta} \quad g_{\alpha\beta}I^{\beta} = I_{\alpha}$$

obținem

$$\text{b)} \qquad \left(\frac{d\widetilde{s}}{ds}\right)^2 = 1 + 2\varepsilon\sigma \underset{1}{I}_{\lambda}\left(-K_1\underset{1}{I}^{\lambda} - \sum_{a=3}^{n} T_{a-1}\underset{a}{I}^{\lambda}\right)$$

sau cum $\underset{1}{I}^{\lambda}\underset{a}{I}_{\lambda} = 0$ $(a > 1)$ avem

$$(5) \qquad \left(\frac{d\widetilde{s}}{ds}\right)^2 = 1 - 2\varepsilon\sigma K_1 .$$

Procedînd ca în [1] avem

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{s}}{\mathrm{d}s} = 1 - \varepsilon\sigma K_1 \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\widetilde{s}} = 1 + \varepsilon\sigma K_1. \tag{6}$$

Din (a), (2), (4) obținem

$$\underset{1}{\widetilde{I}}{}^{\lambda} = \underset{1}{I}{}^{\lambda} - \varepsilon\sigma \sum_{a=3}^{n} T_{a-1} \underset{a}{I}{}^{\lambda} - \varepsilon\sigma\, \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}\, \underset{2}{I}{}^{\alpha} \underset{1}{I}{}^{\beta} + \varepsilon \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}s} \underset{2}{I}{}^{\lambda}. \tag{7}$$

Transportînd prin paralelism $\underset{1}{I}{}^{\lambda}$ din $\widetilde{M}$ în M avem $'\underset{1}{\widetilde{I}}{}^{\lambda}$ cu

$$'\underset{1}{\widetilde{I}}{}^{\lambda} = \underset{1}{I}{}^{\lambda} - \varepsilon\sigma \sum_{a=3}^{n} T_{a-1} \underset{a}{I}{}^{\lambda} + \varepsilon \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}s} \underset{2}{I}{}^{\lambda}. \tag{8}$$

Fie $\sphericalangle\, \theta$ unghiul vectorilor $(\underset{1}{\widetilde{I}}{}^{\lambda})$ $(\underset{2}{\widetilde{I}}{}^{\lambda})$ în M. Cum în V_n unghiul θ se conservă la transportul paralelei ținînd seama și de definiția 2, rezultă că $'\underset{1}{\widetilde{I}}{}^{\lambda}$, $\underset{2}{I}{}^{\lambda}$ sînt ortogonali în M. Din (8) deducem $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}s} = 0$, adică $\sigma = \text{const}$. Putem deci înlocui în continuare pe $\varepsilon\sigma$ chiar prin ε. Avem

$$\underset{1}{\widetilde{I}}{}^{\lambda} = \underset{1}{I}{}^{\lambda} - \varepsilon \sum_{a=3}^{n} T_{a-1} \underset{a}{I}{}^{\lambda} - \varepsilon\, \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}\, \underset{2}{I}{}^{\alpha} \underset{1}{I}{}^{\beta}. \tag{8'}$$

Deoarece avem

$$\widetilde{K}_1 \underset{2}{\widetilde{I}}{}^{\lambda} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \underset{1}{\widetilde{I}}{}^{\lambda} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\widetilde{s}} + \left(\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} + \varepsilon \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} \underset{2}{I}{}^{\gamma}\right) \underset{1}{\widetilde{I}}{}^{\alpha} \underset{1}{\widetilde{I}}{}^{\beta}, \tag{9}$$

ținînd seama de (8′) și de ipotezele [1] relative la (C), $(\widetilde{C})$ avem

$$\begin{aligned} \widetilde{K}_1 \underset{2}{\widetilde{I}}{}^{\lambda} = {} & K_1 \underset{2}{I}{}^{\lambda} - \varepsilon \sum_{a=3}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} T_{a-1} \underset{a}{I}{}^{\lambda} + \varepsilon \left(K_1^2 - \sum_{a=3}^{n} T_{a-1}^2\right) \underset{2}{I}{}^{\lambda} + \\ & + \varepsilon\, R^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma} \underset{1}{I}{}^{\alpha} \underset{2}{I}{}^{\beta} \underset{1}{I}{}^{\gamma} - \varepsilon K_1\, \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} \underset{2}{I}{}^{\alpha} \underset{2}{I}{}^{\beta}, \end{aligned} \tag{10}$$

unde $R^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma}$ este tensorul de curbură al lui V_n.

Din faptul că $'\underset{2}{\widetilde{I}}{}^{\lambda}$ se obține din $(\underset{2}{\widetilde{I}}{}^{\lambda})$ prin transport paralel și din (10) avem

$$\begin{aligned} \widetilde{K}_1\, '\underset{1}{\widetilde{I}}{}^{\lambda} = {} & K_1 \underset{2}{I}{}^{\lambda} + \varepsilon \left(K_1^2 - \sum_{a=3}^{n} T_{a-1}^2\right) \underset{2}{I}{}^{\lambda} - \varepsilon \sum_{a=3}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} T_{a-1} \underset{a}{I}{}^{\lambda} + \\ & + \varepsilon\, R^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma} \underset{1}{I}{}^{\alpha} \underset{2}{I}{}^{\beta} \underset{1}{I}{}^{\gamma}. \end{aligned} \tag{11}$$

De aici, cum $\gamma^{a}_{bcd} = R^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma} \underset{a}{I_{\lambda}} \underset{b}{I^{\alpha}} \underset{c}{I^{\beta}} \underset{d}{I^{\gamma}}$ (coeficienţii lui Ricci cu patru indici), avem

$$(12) \qquad \widetilde{K}_1 = K_1 + \varepsilon\left(K_1^2 - \sum_{a=3}^{n} T_{a-1}^2\right) + \varepsilon\,\gamma_{121}^{2}$$

$$(13) \qquad \gamma^{a}_{121} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} T_{a-1}\,, \qquad a = 3,\ \ldots,\ n.$$

Se constată uşor că acestea sînt şi suficiente pentru ca (C), $(\widetilde{C})$ să fie curbe $B\,(\varepsilon)$.

TEOREMA 1. *Condiţiile necesare şi suficiente ca* (C), $(\widetilde{C})$ *să fie curbe* $B\,(\varepsilon)$ *sînt date de* (12), (13) (*cu* ε *din* $\tilde{x}^{\lambda} = x^{\lambda} + \varepsilon \underset{2}{I^{\lambda}}$).

Dacă (C), $(\widetilde{C})$ sînt într-un spaţiu euclidian ε^{n}, avem $R^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma} = 0$ şi deci

$$(14) \qquad T_{a-1} = C_a \ (\text{const. } a = 3,\ \ldots,\ n)$$

Deci în ε^{n} o curbă $B\,(\varepsilon)$ are T_{a-1} constante (nu toate nule, căci presupunem că (C) nu este „plană").

Dar cum o curbă $B\,(\varepsilon)$ din ε^{n} este şi o curbă Bertrand în ε^{n} în sensul [4], avem

$$(15) \qquad C K_1 + C_a T_{a-1} = 1, \qquad a = 3, \ldots, n$$

(cu C_a, C constante). Din (14), (15) rezultă $K_1 = \text{constant}$.

TEOREMA 2. *O curbă* $B\,(\varepsilon)$ *din* ε^{n} *are curbura* K_1 *constantă şi torsiunile* T_{a-1} $(a = 3,\ \ldots,\ n)$ *constante.*

În cazul unui spaţiu V_n avem

$$(16) \qquad K_2 = \sum_{a=3}^{n} T_{a-1}^2\,, \qquad K_3 = \frac{-1}{\sqrt{\sum\limits_{a=3}^{n} T_{a-1}^2}} \sum \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} T_{a-1} \cos \varphi_{a4}$$

(vezi [2], [3]).

TEOREMA 3. *Dacă curba* $B\,(\varepsilon) \in \varepsilon^{n}$ *şi nu toate* T_{a-1} *sînt nule, atunci* $K_2 = \text{constant}$.

Aşadar, regăsim pe această cale rezultatul din [1] „O curbă $B(\varepsilon)$ din ε^{n} nu este generală" (în sensul non $\forall_a\, K_a \neq 0$).

Dacă revenim la spaţiul riemannian V_n şi presupunem că V_n are curbură constantă, cum coeficienţii γ^{a}_{bcd} cu patru şi trei indici diferiţi sînt nuli iar $\gamma^{a}_{bab} = K$ (curbura riemanniană) rezultă :

$$(17) \qquad T_{a-1} = C_{a-1}$$

şi deci vom avea

$$(18) \qquad K_3 = 0, \quad K_2 = C \ (\text{constantă}).$$

TEOREMA 4. *Într-un* V_n *cu curbură constantă, curbele* $B\,(\varepsilon)$ *dacă există, nu sînt generale.*

Dacă (V^{λ}) sînt componentele contravariante ale unei vector definit în $M \in B(\varepsilon)$ din V_n, ecuaţiile care definesc paralelismul vectorilor în lungul lui $B(\varepsilon)$ sînt:

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}V^1}{\mathrm{d}s} - V^1 K_1 = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}V^2}{\mathrm{d}s} + V^1 K_1 - V^3 K_2 = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}V^3}{\mathrm{d}s} + V^2 K_2 = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}V^a}{\mathrm{d}s} = 0 \qquad a = 4, \ldots, n \end{cases}$$

de unde

$$(20)\quad V^a = C^a \text{ (const.)}, \; a = 4, \ldots, n$$

TEOREMA 5. *Dacă V_n are curbură constantă şi posedă curbe $B(\varepsilon)$ cu $K_1 = ct.$, atunci studiul paralelismului vectorilor în lungul lui $B(\varepsilon)$ se reduce la o problemă algebrică (rezolvarea lui* (19) *— sistem cu coeficienţi constanţi).*

Primită la redacţie la 3 martie 1968

Universitatea din Craiova
Facultatea de matematică mecanică.

SUR LES COURBES $B(\varepsilon)$ DE V_n

(RÉSUMÉ)

En utilisant [1] [2] dans cette Note nous donnerons une condition nécessaire et suffisante pour les courbes $B(\varepsilon)$ (théorème 1) et on indique quelques-unes de leurs propriétés.

On étudie le parallélisme des vecteurs sur les courbes $B(\varepsilon)$.

BIBLIOGRAFIE

1. L. R. PEARS, *Bertrand curves in Riemannian space.* The Journal of the London Mathematical Society, (1935).
2. GH. N. RIZESCU, N. N. TEODORESCU, *Asupra generalizării formulelor Frenet.* St. cerc. mat., **17**, (1965).
3. P. STAVRE, *Asupra formulelor Frenet.* St. cerc. mat., **19**, *3* (1967).
4. P. STAVRE, *Asupra unor clase de curbe.* St. cerc. mat., **19**, *5* (1967).

DIVERSE EXTENSIUNI ALE „PROBLEMEI ACULUI" A LUI BUFFON

DE

RODICA TRANDAFIR

În această lucrare se dau cîteva extensiuni în spaţiul euclidian cu trei dimensiuni a problemei acului a lui Buffon.

0. Este cunoscută „problema acului" a lui Buffon: *Se consideră un parchet regulat format din lame de egală lăţime a şi se aruncă pe acest parchet un ac de lungime l, $(l < a)$. Probabilitatea ca acul să intersecteze una din liniile parchetului este*

$$p = \frac{2l}{\pi a}\,.$$

În această lucrare vom da cîteva extensiuni ale acestei teoreme în cazul spaţiului euclidian cu trei dimensiuni.

1. Fie E_3 un spaţiu euclidian cu trei dimensiuni de coordonate carteziene ortogonale x, y, z şi $(\sum)$ un ovaloid de volum V şi arie S şi a cărui curbură medie este H.

Dacă notăm cu (E) un plan oarecare de ecuaţie

$$x \cos\varphi \sin\theta + y \sin\varphi \sin\theta + z \cos\theta - p = 0\,,$$

atunci măsura elementară a mulţimii acestor plane este [3][1]

$$\mathrm{d}E = |\sin\theta|\,[\mathrm{d}p\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta] = [\mathrm{d}p\,\mathrm{d}\Omega]\,. \tag{1}$$

De aici rezultă că măsura mulţimii planelor care intersectează un segment de lungime l este

$$\mu_1 = \pi l\,, \tag{2}$$

---

[1] Pag. 92.

iar măsura mulţimii planelor care intersectează o curbă închisă convexă de lungime L este [3] ²)

$$\mu_2 = \frac{\pi}{2} L. \tag{2'}$$

De asemenea, notînd cu γ lungimea curbei de intersecţie dintre planul (E) şi frontiera $(\partial\Sigma)$ a ovaloidului şi cu σ aria secţiunii determinate de (Σ) pe (E), avem [3] ³)

$$\int\limits_{\{E \cap \Sigma \neq \emptyset\}} \gamma \, \mathrm{d}E = \frac{\pi^2}{2} S \tag{3}$$

şi [2] ⁴)

$$\int\limits_{\{E \cap \Sigma \neq \emptyset\}} \sigma \, \mathrm{d}E = 2\pi V. \tag{4}$$

În sfîrşit, notînd

$$\overline{H} = \int_{\partial\Sigma} H \, \mathrm{d}\sigma,$$

$\mathrm{d}\sigma$ fiind elementul de arie pe suprafaţa $(\partial\Sigma)$, avem [4] ⁵)

$$\int\limits_{\{E \cap \Sigma \neq \emptyset\}} \mathrm{d}E = \overline{H}. \tag{5}$$

Fie acum (K) o figură în spaţiul E_3 şi $(\mathcal{K})$ mulţimea tuturor figurilor obţinute din aceasta prin transformări ortogonale. Măsura elementară $\mathrm{d}K$ a mulţimii $(\mathcal{K})$ este măsura elementară cinematică în spaţiul E_3 şi avem [1] ⁶)

$$\mathrm{d}K = [\mathrm{d}P \, \mathrm{d}\Omega \, \mathrm{d}\psi], \tag{6}$$

unde $P(x, y, z)$ este vectorul translaţiei iar θ, φ, ψ sînt unghiurile lui Euler ale rotaţiei.

Măsura elementară $\mathrm{d}K$ se poate pune de asemenea sub forma [5] ⁷)

$$\mathrm{d}K = [\mathrm{d}\vec{E} \, \mathrm{d}K_e], \tag{6'}$$

unde $(\vec{E})$ este un plan orientat iar $\mathrm{d}K_e$ este măsura elementară cinematică în acest plan.

2. Să considerăm acum în spaţiul E_3 o sferă de rază R şi un segment de lungime l interior ei. Ţinînd seama că în cazul unei sfere de rază

---

²) Pag. 93.
³) Pag. 94.
⁴) Pag. 732.
⁵) Pag. 241.
⁶) Pag. 60.
⁷) Pag. 13.

R avem $H = \frac{1}{R}$, rezultă că $\overline{H} = 4\pi R$, deci măsura mulţimii planelor care intersectează sfera este $4\pi R$. De aici şi din (2) rezultă că:

Probabilitatea ca un plan aleator, uniform repartizat într-un domeniu care conţine o sferă de rază R, care intersectează această sferă, să intersecteze şi un segment de lungime l interior sferei este

$$p = \frac{l}{4R}.$$

Această formulă ne dă o primă extensiune a problemei lui Buffon şi anume:

PROPOZIŢIA 1. *Fiind dată în spaţiul euclidian E_3 o reţea formată din plane paralele echidistante situate la distanţa a, probabilitatea ca un ac de lungime l, $(l < a)$, aruncat pe reţea să intersecteze un plan al ei este*

$$p = \frac{l}{2a}.$$

Din formula (2′) rezultă că măsura mulţimii planelor care intersectează un cerc de rază r este $\pi^2 r$. Avînd în vedere că măsura mulţimii planelor care intersectează sfera de rază R este $4\pi R$, rezultă că:

Probabilitatea ca un plan aleator, uniform repartizat într-un domeniu care conţine o sferă de rază R, care intersectează această sferă să intersecteze şi un cerc de rază r, $(r < R)$, situat în interiorul ei este

$$p = \frac{\pi r}{4R}.$$

De aici deducem

PROPOZIŢIA 2. *Fiind dată în spaţiul euclidian E_3 o reţea formată din plane paralele echidistante situate la distanţa a, probabilitatea ca un cerc de rază r, $\left(r < \frac{a}{2}\right)$, aruncat pe reţea să intersecteze un plan al ei este*

$$p = \frac{\pi r}{2a}. \tag{7}$$

Să considerăm acum o reţea formată din paralelipipede cu laturile a, b, c, care acoperă spaţiul E_3. Vrem să determinăm probabilitatea p ca un cerc de rază r să intersecteze unul din planele reţelei.

Această probabilitate este egală cu probabilitatea ca un cerc aleator de rază r, uniform repartizat într-un domeniu care conţine unul din paralelipipedele reţelei, al cărui centru este în interiorul paralelipipedului, să intersecteze feţele acestuia.

Să notăm cu (Σ_0) un paralelipiped oarecare al reţelei. Volumul lui este $V = abc$, iar aria $S = 2\,(ab + bc + ca)$. De asemenea vom nota cu (K) un cerc mobil de rază r.

Dacă q este probabilitatea ca cercul (K) al cărui centru este în interiorul lui (Σ_0) să nu intersecteze feţele lui (Σ_0), atunci

$$p = 1 - q. \tag{8}$$

Notînd cu $\mathfrak{M}$ mulţimea cercurilor (K) al căror centru P este în interiorul lui (Σ_0) avem

$$\mu(\mathfrak{M}) = \int_{P\in\Sigma_0} \mathrm{d}K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\psi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \int_{P\in\Sigma_0} \mathrm{d}P = 2\pi^2 abc. \tag{9}$$

Să notăm cu $\mathfrak{N}$ mulţimea cercurilor (K) al căror centru este în interiorul lui (Σ_0) şi nu intersectează forţele lui (Σ_0). Ţinînd seama de (6′) avem

$$\mu(\mathfrak{N}) = \int_{\{P\in\Sigma_0;\, K\cap(\partial\Sigma_0)=\emptyset\}} \mathrm{d}\vec{E}\,\mathrm{d}K_e.$$

Dar

$$\mathrm{d}K_e = [\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}P_e],$$

P_e fiind un punct în planul (E) iar ψ unghiul de rotaţie în jurul acestui punct, în planul (E).

Paralelipipedul (Σ_0) determină pe planul (E) un paralelogram $(\mathfrak{Q})$ a cărui arie o notăm cu σ iar perimetrul cu γ. Notînd cu $(\mathfrak{Q}')$ paralelogramul interior lui $(\mathfrak{Q})$ ale cărui laturi sînt paralele cu ale acestuia şi la distanţa r de ele, aria lui $(\mathfrak{Q}')$ este

$$\sigma' = \sigma - \frac{r}{2}(\gamma + \gamma'),$$

unde γ' este perimetrul lui $(\mathfrak{Q}')$.

Cu aceste notaţii avem

$$\int_{\{P\in\Sigma_0;\, K\cap(\partial\Sigma_0)=\emptyset\}} \mathrm{d}K_e = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\psi \int_{P_e\in\mathfrak{Q}'} \mathrm{d}P_e = \frac{\pi}{2}\sigma' = \frac{\pi}{2}\left[\sigma - \frac{r}{2}(\gamma+\gamma')\right],$$

deci

$$\mu(\mathfrak{N}) = \int_{\{P\in\Sigma_0;\, K\cap(\partial\Sigma_0)=\emptyset\}} \mathrm{d}\vec{E}\,\mathrm{d}K_e = 2\int_{\{E\cap\Sigma_0\neq\emptyset\}} \mathrm{d}E \int_{\{P\in\Sigma_0;\, K\cap(\partial\Sigma_0)=\emptyset\}} \mathrm{d}K_e =$$

$$= \pi \int_{\{E\cap\Sigma_0\neq\emptyset\}} \left[\sigma - \frac{r}{2}(\gamma+\gamma')\right] \mathrm{d}E.$$

Ţinînd seama aici de formulele (3) şi (4), obţinem

$$\mu(\mathfrak{N}) = 2\pi^2 V - \frac{\pi^3}{4} rS - \frac{\pi^3}{4} rS',$$

unde S' este aria paralelipipedului interior lui (Σ_0) ale cărui feţe sînt paralele cu feţele lui (Σ_0) şi situate la distanţa r de acestea, adică

$$S' = 2\,[(a-2r)(b-2r) + (b-2r)(c-2r) + (c-2r)(a-2r)]$$

şi deci

$$\mu(\mathfrak{N}) = 2\pi^2 abc - \pi^3(ab+bc+ca)\,r + 2\pi^3(a+b+c)\,r^2 - 6\pi^3 r^3.$$

De aici şi din (9) deducem

$$q = 1 - \frac{\pi(ab + bc + ca)r}{2\,abc} + \frac{\pi(a + b + c)r^2}{abc} - \frac{3\pi r^3}{abc}.$$

Înlocuind această valoare în (8) se obţine

$$p = \frac{\pi(ab + bc + ca)r}{2\,abc} - \frac{\pi(a + b + c)r^2}{abc} + \frac{3\pi r^3}{abc}.$$

Avem deci

PROPOZIŢIA 3. *Fiind dată în spaţiul euclidian* E_3 *o reţea formată din paralelipipede de laturi* a, b, c, *probabilitatea ca un cerc de rază* r, $\left(r < \frac{1}{2}\min(a, b, c)\right)$, *aruncat pe reţea să intersecteze un plan al ei este*

$$p = \frac{\pi(ab + bc + ca)r}{2\,abc} - \frac{\pi(a + b + c)r^2}{abc} + \frac{3\pi r^3}{abc}.$$

Făcînd aici b, $c \to \infty$, regăsim probabilitatea (7).

În cazul unei reţele formate din tetraedre regulate de latură a obţinem în mod analog

$$p = \frac{3\sqrt{6}}{2}\pi\,\frac{(a^2 - 2\sqrt{6}\,ar + 12\,r^2)\,r}{a^3}.$$

Primită la redacţie la 12 iunie 1968

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”
Bucureşti, Str. Polizu nr. 1.

SOME EXTENSIONS OF THE “NEEDLE’S PROBLEM” OF BUFFON

(ABSTRACT)

In this paper we shall give some extensions of the “Needle’s problem” of **Buffon**, in the case of a three-dimensional Euclidean space.

BIBLIOGRAFIE

1. BLASCHKE, W., *Vorlesungen über Integralgeometrie.* ed. 3, V.E.B. Deutscher Verlag der Wiss., Berlin, 1955.
2. CZUBER, E., *Zur Theorie der geometrieschen Wahrscheinlichkem.* Sitz. Akad. Wiss. Wien, **90** (**21**), 719—742 (1884).
3. DELTHEIL, R., *Probabilités géométriques.* Gauthier-Villars, Paris, 1926.
4. MINKOWSKI, H., *Volumen und Oberfläche.* Math. Ann., **59**, 447—495 (1903).
5. SANTALÓ, L. A., *Über das Kinematische Mass in Raum.* Act. Sci. et Ind. 357, **Hermann**, Paris, 1936.

ASUPRA UNOR GENERALIZĂRI ALE ECUAȚIILOR LUI LAGRANGE

DE

IOSIF ŢEPOSU

În lucrarea de faţă vor fi deduse formele generalizate ale ecuaţiilor dinamicii pentru sisteme mecanice olonome şi neolonome şi vor fi date criterii de aplicare a acestor ecuaţii la sistemele neolonome. În partea a doua a lucrării va fi dată o generalizare a sistemului canonic al lui Hamilton, care ne va conduce la cîteva observaţii asupra integralelor prime ale acestui sistem de ecuaţii.

1. Introducere. Se ştie că principiul lucrului mecanic virtual al lui D'Alembert l-a condus pe Langrange la stabilirea ecuaţiilor ce-i poartă numele. Încă din 1935, I. Nielsen [10], a găsit o altă formă a ecuaţiilor de mişcare legată de principiul variaţional al lui Jourdain, aşa cum rezultă din [2]. Au fost formulate şi alte principii variaţionale ca cel al lui Gauss, sau principiul universal al lui D'Alembert care le generalizează pe primele două, acesta din urmă fiind considerat de Bl. Dolaptschiew în [3]. Toate acestea au condus la ecuaţiile generalizate, care sub diverse forme au apărut în lucrările lui I. Nielsen, I. Tzenoff [4, 5, 6], D. Mangeron [7, 8, 9], Bl. Dolaptschiew [1, 2, 3]. Pentru deducerea acestor ecuaţii va fi prezentată sub o nouă formă demonstraţia dată de Bl. Dolaptschiew în [1], unde prin intermediul unor identităţi la care satisface energia cinetică T, a sistemului mecanic considerat, stabilirea lor este direct legată de principiul lucrului mecanic virtual al lui D'Alembert.

2. Să considerăm funcţia

$$z(x) = z(x,\ y_i,\ y'_i)\quad (i = 1,\ \ldots,\ s) \tag{2.1}$$

unde y_i sînt de asemenea funcţii de x. Notînd cu $y_i^{(n)}$ derivata de ordinul n a funcţiei y_i în raport cu x, vom constata că au loc identităţile :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial z}{\partial y'_i}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial y_i^{(n)}} - \frac{\partial z}{\partial y_i}\right),\quad z^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n z}{\mathrm{d}x^n}. \qquad \begin{matrix}(i = 1,\ \ldots,\ s)\\ (n = 1,\ 2, \ldots)\end{matrix} \tag{2.2}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 5, P. 805–817, BUCUREŞTI, 1969

Demonstraţie. Derivînd total pe z în raport cu x de trei ori obţinem :¹)

$$z' = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y_i} y'_i + \frac{\partial z}{\partial y'_i} y''_i \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} z'' &= 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y'_i} y''_i + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y_i \partial y'_j} y'_i y''_j + \\ &+ \frac{\partial^2 z}{\partial y'_i \partial y'_j} y''_i y''_j + \frac{\partial z}{\partial y_i} y'''_i + \frac{\partial z}{\partial y'_i} y'''_i + \dots \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\left\{\begin{aligned} z''' &= 3\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y'_i} y'''_i + \frac{\partial^2 z}{\partial y'_i \partial y_j} y'_j y'''_i + \frac{\partial^2 z}{\partial y'_i \partial y'_j} y''_j y'''_i\right) + \\ &+ \frac{\partial z}{\partial y_i} y'''_i + \frac{\partial z}{\partial y'_i} y^{\mathrm{IV}}_i + \dots \end{aligned}\right. \tag{2.5}$$

Expresia derivatei de ordinul n se deduce prin inducţie din (2.5)

$$\begin{aligned} z^{(n)} &= n\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y'_i} y^{(n)}_i + \frac{\partial^2 z}{\partial y'_i \partial y_j} y'_j y^{(n)}_i + \frac{\partial^2 z}{\partial y'_i \partial y_j} y''_j y^{(n)}_i\right) + \\ &+ \frac{\partial z}{\partial y_i} y^{(n)}_i + \frac{\partial z}{\partial y'_i} y^{(n+1)}_i + \dots \end{aligned} \tag{2.6}$$

Din relaţia (2.6) obţinem :

$$\frac{\partial z^{(n)}}{\partial y^{(n)}_i} = n\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y'_i} + \frac{\partial^2 z}{\partial y'_i \partial y_j} y'_j + \frac{\partial^2 z}{\partial y'_i \partial y'_j} y''_j\right) + \frac{\partial z}{\partial y_i}. \tag{2.7}$$

Pe de altă parte, constatăm că :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial z}{\partial y'_i}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y'_i} + \frac{\partial^2 z}{\partial y'_i \partial y_j} y'_j + \frac{\partial^2 z}{\partial y'_i \partial y'_j} y''_j \tag{2.8}$$

Astfel din (2.7) şi (2.8) rezultă identităţile (2.2)

3. Fie un sistem material $P_k(m_k, \vec{r}_k)$ $(k = 1, \dots, N)$ constituit din punctele P_k de mase m_k şi vectori de poziţie $\vec{r}_k$, a cărui poziţie în spaţiu este unic determinată de coordonatele generalizate $q_i = q_i(t)$ $(i = 1, \dots, s)$.

Rezultă că putem scrie :

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \qquad (k = 1, \dots, N). \tag{3.1}$$

Pentru un astfel de sistem mecanic supus unor legături olonome sînt cunoscute în special următoarele două forme ale ecuaţiilor de mişcare :

---

¹) Vom adopta convenţia de sumare a lui Einstein : repetarea a doi indici, reprezintă sumă după aceşti indici.

Ecuaţiile lui I. Nielsen [10]

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_i} - 2\frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, \ldots, s) \tag{3.2}$$

şi ecuaţiile lui I. Tzenoff [4]

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_i} - 3\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = Q_i \qquad (i = 1, \ldots, s). \tag{3.3}$$

Aici T este energia cinetică a sistemului,

$$T = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\dot{\vec{r}}_k^{\,2}}{2} \tag{3.4}$$

$\dot{q}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q_i^{(t)}$ reprezintă vitezele generalizate, iar $\ddot{q}_i = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} q_i^{(t)}$ acceleraţiile generalizate,

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \frac{\partial \ddot{\vec{r}}_k}{\partial \ddot{q}_i} \qquad (i = 1, \ldots, s) \tag{3.5}$$

sînt forţele generalizate. $\vec{F}_k$ este rezultanta tuturor forţelor ce acţionează asupra punctului material P_k :

$$\dot{T} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{\vec{r}}_k = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_k}{\mathrm{d}t}, \quad \ddot{T} = \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2}, \quad \ddot{\vec{r}}_k = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r}_k.$$

Sistemele diferenţiale (3.2) şi (3.3) sînt forme diferite ale ecuaţiilor lui Lagrange de speţa a doua

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, \ldots, s). \tag{3.6}$$

Cele trei sisteme (3.2), (3.3) şi (3.6) se mai pot scrie în felul următor :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i \qquad (i = 1, \ldots, s), \tag{3.6a}$$

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i \qquad (i = 1, \ldots, s) \tag{3.6b}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i \qquad (i = 1. \ldots, s) \tag{3.6c}$$

De aici rezultă identităţile :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\cdot \qquad (i = 1, \ldots, s) \tag{3.7}$$

Dar, avînd în vedere că energia cinetică $T\,(t)$ are o structură asemănătoare funcţiei $z\,(x)$ din (2.1), adică

$$T(t) = T(q_i,\, \dot{q}_i,\, t) \qquad (i = 1, \ldots, s) \tag{3.8}$$

în virtutea identităţilor (2.2) putem scrie

$$\begin{gathered} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial T^{(n)}}{\partial q_i^{(n)}} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right) \qquad (i = 1, \ldots, s) \\ T^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n T}{\mathrm{d}t^n},\, q_i^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n q_i}{\mathrm{d}t^n} \end{gathered} \tag{3.9}$$

Pentru $n = 1,\ 2$ din (3.9) se regăsesc identităţile (3.7).

4. Se observă că pentru stabilirea identităţilor (3.9) care se referă la energia cinetică, nu a fost întrebuinţată forma ei de definiţie (3.4), formă care se foloseşte pentru obţinerea ecuaţiilor (3.6) ale lui Lagrange. Introducînd acum identitatea (3.9) în (3.6), găsim ecuaţiile generalizate

$$\frac{1}{n}\left(\frac{\partial T^{(n)}}{\partial q_i^{(n)}} - (n+1)\,\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = Q_i \qquad (i = 1, \ldots, s). \tag{4.1}$$

Se vede că ecuaţiile lui Nielsen ca şi cele ale lui Tzenoff sînt cazuri speciale (pentru $n = 1,\ 2$) ale formei generale (4.1). Ecuaţiile (4.1) se numesc ecuaţiile generalizate ale lui Lagrange pentru sisteme mecanice olonome.

Pentru $n = 3$ obţinem:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\partial \dddot{T}}{\partial \dddot{q}_i} - 4\,\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = Q_i \qquad (i = 1, \ldots, s). \tag{4.2}$$

5. Tzenoff [4] a dat formei sale (3.3) o altă reprezentare introducînd o nouă funcţie T_0. Prin aceasta trebuie să înţelegem funcţia T, presupusă independentă de vitezele generalizate $\dot{q}_i$ (aceste mărimi vor fi privite ca nişte constante). T_0 este aşadar funcţie numai de coordonatele generalizate q_i şi de timpul t, deci

$$\dot{T}_0 = \frac{\partial T}{\partial q_i}\,\dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial t}$$

şi

$$T_0^{(n)} = \frac{\partial T}{\partial q_i}\,q_i^{(n)} + \ldots \qquad (n = 1,\ 2, \ldots). \tag{5.1}$$

Din (5.1) rezultă în continuare,

$$\frac{\partial T_0^{(n)}}{\partial q_i^{(n)}} = \frac{\partial T}{\partial q_i}. \tag{5.2}$$

Considerînd transformarea lui Tzenoff [5],

$$R_n = \frac{1}{n}\left(T^{(n)} - (n+1)T_0^{(n)}\right) \tag{5.3}$$

ecuaţiile lui Lagrange (4.1) se pot scrie sub forma:

$$\frac{\partial R_n}{\partial q_i^{(n)}} = Q_i \qquad (i = 1, \ldots, s). \tag{5.4}$$

Se observă că relaţiile (5.4) sînt asemănătoare cu ecuaţiile lui Appell [11] pentru sisteme mecanice olonome.

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} = Q_i \qquad (i = 1, \ldots, s), \tag{5.5}$$

unde S este energia acceleraţiilor definită de relaţia

$$S = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\ddot{\vec{r}}_k^{\,2}}{2}. \tag{5.6}$$

Reprezentarea (5.4) semănînd formal cu aceea a lui Appell este numită „forma generalizată a ecuaţiilor lui Appell”.

Pentru $n = 2$, care corespunde cazului lui Tzenoff, ecuaţiile (5.4) devin:

$$\frac{\partial R_2}{\partial \ddot{q}_i} = Q_i \qquad (i = 1, \ldots, s). \tag{5.7}$$

Din confruntarea relaţiilor (5.5) şi (5.7) rezultă că funcţiile R_2 şi S se deosebesc prin numai termenii care nu conţin acceleraţiile generalizate $\ddot{q}_k$. Se observă de asemenea că toţi R_n (5.3) depind de diferite derivate totale ale energiei cinetice T şi nu de energia acceleraţiilor S.

A. Wassmuth [1] a încercat să generalizeze ecuaţiile lui Appell. El a dat următoarea formă, care din nou conţine energia acceleraţiilor S a lui Appell:

$$\frac{\partial \dot{S}}{\partial \dddot{q}_i} = Q_i \qquad (i = 1, \ldots, s). \tag{5.8}$$

Procedeul poate fi continuat prin inducţie şi ecuaţiile generalizate ale lui Appell după Wassmuth pot fi scrise sub forma:

$$\frac{\partial S^{(n)}}{\partial q_i^{(n+2)}} = Q_i \qquad (i = 1, \ldots, s). \tag{5.9}$$

Fie acum transformarea lui Appell

$$K_n = R_n - \sum_{i=1}^{s} Q_i q_i^{(n)} \tag{5.10}$$

cu condiţiile

$$\frac{\partial Q_k}{\partial q_i^{(n)}} = 0 \tag{5.11}$$

asupra cărora atrage atenţia B. Dolaptschiew [3].

Rezultă că ecuaţiile (5.4) se pot scrie sub forma

$$\frac{\partial K_n}{\partial q_i^{(n)}} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, s) \tag{5.12}$$

ceea ce înseamnează că determinarea mişcării sistemului material revine la o problemă de extremum pentru funcţia $K_n = K_n\,[q_i^{(n)}]$.

6. Să presupunem sistemul mecanic neolonom, fiind supus unor legături diferenţiale neintegrabile de forma

$$\Phi^n_\rho(t, q_i, \dot{q}_i, \ldots, q_i^{(n)}) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, s). \tag{6.1}$$

Considerăm două cazuri :

a) Legăturile (6.1) sînt liniare, adică :

$$q_\rho^{(n)} = \sum_{\lambda=1}^{l} a_{\rho\lambda}\, q_\lambda^{(n)} + a_\rho \; (\rho = l+1, \ldots, l+r = s). \tag{6.2}$$

În (6.2) $a_{\rho\lambda}$ şi a_ρ sînt funcţii de t, q_i, $\dot{q}_i, \ldots, q_i^{(n-1)}$.

Înlocuind $q_\rho^{(n)}$ în K_n aşa cum ne indică (6.2), obţinem o altă funcţie K_n^*, care va depinde de parametrii independenţi $q_\lambda^{(n)}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$. Condiţia de extremum revine la

$$(6.3) \quad \frac{\partial K_n^*}{\partial q_\lambda^{(n)}} = 0 \;\; (\lambda = 1, \ldots, l) \;\; \text{sau} \;\; (6.3') \quad \frac{\partial K_n}{\partial q_\lambda^{(n)}} + \frac{\partial K_n}{\partial q_\rho^{(n)}}\, a_{\rho\lambda} = 0.$$

b) Dacă legăturile (6.1) sînt neliniare în $q_i^{(n)}$, derivînd total aceste relaţii cu timpul t obţinem :

$$\frac{\partial \Phi^n_\rho}{\partial q_i^{(n)}}\, q_i^{(n+1)} + \ldots = 0 \tag{6.4}$$

relaţii liniare relativ la acceleraţiile $q_i^{(n+1)}$ de grad imediat superior şi procedînd ca în cazul a) ajungem la ecuaţiile :

$$\frac{\partial K_{n+1}^*}{\partial q_i^{(n+1)}} = 0. \tag{6.5}$$

În acest caz indicele din ecuaţiile generalizate depăşeşte cu o unitate pe cel din legături.

7. Criterii de aplicare a ecuaţiilor generalizate la sisteme neolonome.

Pentru alegerea indicelui n în ecuaţiile (4.1), respectiv (5.12) şi (6.5), trebuie să considerăm în acelaşi timp formulele (3.5), (5.10), (5.11), (5.12), (6.2), (6.3). Considerăm următoarele cazuri :

a) $n = 1$. Pentru a putea aplica în acest caz ecuaţiile

$$\frac{\partial K_1^*}{\partial \dot{q}_\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, l) \tag{7.1}$$

sau pe cele ale lui Nielsen

$$\frac{\partial \dot T}{\partial \dot q_i} - 2\,\frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, \dots, s) \tag{7.2}$$

este necesar ca legăturile neolonome să aibă forma

$$\dot q_\rho = \sum_{\lambda=1}^{l} a_{\rho\lambda}\,\dot q_\lambda + a_\rho \; (\rho = l + 1, \dots, l + r = s) \tag{7.3}$$

şi suficient ca forţele $\overrightarrow{F}_k$ să nu depindă de vitezele $\overrightarrow{v}_k$, caz în care condiţiile $\dfrac{\partial Q_k}{\partial \dot q_i} = 0$ sînt satisfăcute.

b) $n = 2$. Vom utiliza ecuaţiile lui Tzenoff

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ddot T}{\partial \ddot q_i} - 3\,\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = Q_i \qquad (i = 1, \dots, s) \tag{7.4}$$

care ne conduc la

$$\frac{\partial K_2^*}{\partial \ddot q_\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 1, \dots, l). \tag{7.5}$$

Este necesar că legăturile să fie liniare în acceleraţiile generalizate

$$\ddot q_\rho = \sum_{\lambda=1}^{l} \alpha_{\rho\lambda}\,\ddot q_\lambda + \alpha_\rho \; (\rho = l + 1, \dots, l + r = s) \tag{7.6}$$

şi suficient ca forţele $\overrightarrow{F}_k$ să nu depindă de acceleraţiile $\overrightarrow{a}_k$, caz în care $\dfrac{\partial Q_k}{\partial \ddot q_i} = 0$ şi ecuaţiile pot fi întrebuinţate.

c) $n = 3$. Să presupunem că forţele $\overrightarrow{F}_k$ depind de acceleraţiile $\overrightarrow{a}_k$. În acest caz vom recurge la ecuaţiile generalizate pentru $n = 3$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\partial \dddot T}{\partial \dddot q_i} - 4\,\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = Q_i \qquad (i = 1, \dots, s) \tag{7.7}$$

sau la ecuaţiile

$$\frac{\partial K_3^*}{\partial \dddot q_\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 1, \dots, l). \tag{7.8}$$

Condiţiile $\dfrac{\partial Q_k}{\partial \dddot q_i} = 0$ trebuie să fie verificate. Putem include în acest caz pe acela în care legăturile sînt neliniare în $\ddot q_i$.

CONSIDERAȚII ASUPRA INTEGRALELOR PRIME ALE UNUI SISTEM MECANIC

8. Să considerăm ecuațiile lui Nielsen,

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_i} - 2\frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, \ldots, s) \tag{8.1}$$

pentru care presupunem

$$\frac{\partial Q_k}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots s) \tag{8.2}$$

adică forțele ce acționează asupra sistemului material nu depind de viteze.

Ecuațiile (8.1) sînt ecuații diferențiale de ordinul II, pe care ne propunem să le reducem la un număr dublu de ecuații de ordinul I. Pentru aceasta vom considera impulsurile generealizate

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, \ldots, s) \tag{8.3}$$

precum și funcția

$$H^* = p_i\,\dot{q}_1 - T \text{ (sumă după } i). \tag{8.4}$$

Ținînd seamă de relațiile (8.3) putem obține

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i\,(p_k,\ q_k,\ t) \tag{8.5}$$

ceea ce ne permite să scriem

$$H^* = H^*(p_i,\ q_i,\ t) \qquad (i = 1, \ldots, s). \tag{8.6}$$

O variație arbitrară a funcției H^* poate fi scrisă astfel:

$$\left\{\begin{aligned} \delta H^* &= p_i\delta\dot{q}_i + \dot{q}_i\delta p_i - \frac{\partial T}{\partial q_i}\,\delta q_i - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\,\delta\dot{q}_i - \frac{\partial T}{\partial t}\,\delta t = \\ &= \dot{q}_i\delta p_i - \frac{\partial T}{\partial q_i}\,\delta q_i - \frac{\partial T}{\partial t}\,\delta t \\ &\text{și} \\ \delta H^* &= \frac{\partial H^*}{\partial p_i}\,\delta p_i + \frac{\partial H^*}{\partial q_i}\,\delta q_i + \frac{\partial H^*}{\partial t}\,\delta t \end{aligned}\right. \tag{8.7}$$

dacă ținem seama de relațiile (8.4) și (8.6).

Din (8.7) rezultă:

$$\left\{\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H^*}{\partial p_i} \\ \frac{\partial H^*}{\partial q_i} &= -\frac{\partial T}{\partial q_i}. \end{aligned}\right. \tag{8.8}$$

Ca urmare a faptului că $T = T(q_i, \dot{q}_i, t)$, obţinem :

$$\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k + \frac{\partial T}{\partial t} \tag{8.9}$$

şi

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial^2 T}{\partial q_k \partial \dot{q}_i}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial t} + \frac{\partial T}{\partial q_i}. \tag{8.10}$$

Însă ţinînd seama de (8.3) avem

$$\dot{p}_i = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial t}. \tag{8.11}$$

Relaţiile (8.10) şi (8.11) ne dau

$$\dot{p}_i = \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \ldots, s) \tag{8.12}$$

iar dacă ţinem seama de ecuaţiile (8.1) obţinem :

$$\dot{p}_i = Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i}. \tag{8.13}$$

Dacă mai luăm în considerare şi a doua relaţie din (8.8), putem scrie în final

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H^*}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = Q_i - \dfrac{\partial H^*}{\partial q_i}. \end{cases} \tag{8.14}$$

Am ajuns astfel la o nouă formă, mai generală, a sistemului canonic al lui Hamilton, care era valabil numai în cazul cînd forţele ce acţionau asupra sistemului de puncte materiale admiteau o funcţie de forţă U. Să observăm că dacă sistemul mecanic admite o astfel de funcţie de forţă, din (8.14) obţinem sistemul canonic obişnuit al lui Hamilton în care intervine funcţia :

$$H = p_i\,\dot{q}_i - L,\ L = T + U.$$

şi se vede că în acest caz $H^* = H + U$.

Ipoteza (8.2) nu este esenţială, generalizarea putînd fi făcută şi în cazul cînd forţele depind de vitezele generalizate $\dot{q}_i$ Lucrul acesta este clar dacă luăm în consideraţie (8.5).

Putem obţine sistemul (8.14) pornind şi de la ecuaţiile lui Lagrange de speţa II, sau de la ecuaţiile lui Tzenoff, urmînd un procedeu analog.

Să mai observăm că în cazul în care energia cinetică nu depinde explicit de timpul t (sistem scleronom), ea este formă pătratică în $\dot{q}_i$ şi H^* se reduce la :

$$H^* = p_i\,\dot{q}_i - T = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - T = 2T - T = T.$$

Deci

$$H^* = T. \tag{8.15}$$

(În scrierea relaţiei (8.15) am folosit identitatea lui Euler pentru funcţii omogene).

9. Pe baza acestei generalizări vom face cîteva observaţii referitoare la teorema lui Poisson de obţinere a integralelor prime.

O funcţie $f(p_i, q_i, t)$ care rămîne constantă pe traiectorii tot timpul mişcării se numeşte integrală primă pentru sistemul mecanic considerat. Derivata sa totală în raport cu timpul t este:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k + \frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k. \tag{9.1}$$

Înlocuind $\dot{p}_k$ şi $\dot{q}_k$ prin expresiile luate din (8.14), obţinem:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + (H^*, f) + \frac{\partial f}{\partial p_k} Q_k, \tag{9.2}$$

unde

$$(H^*, f) = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial H^*}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H^*}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial f}{\partial p_k}\right) \tag{9.3}$$

reprezintă paranteza lui Poisson pentru funcţiile H^* şi f. Condiţia ca f să fie integrală primă este $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0$, adică

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (H^*, f) + \frac{\partial f}{\partial p_k} Q_k = 0. \tag{9.4}$$

Să considerăm două integrale prime arbitrare f şi g. Vom arăta că, pentru ca paranteza Poisson (f, g) să fie de asemenea integrală primă, este suficient să existe o funcţie $U = U(q_1, q_2, \ldots, q_s, t)$ astfel încît $Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}$, adică forţele generalizate să derive dintr-un potenţial.

Funcţia g fiind integrală primă, ea satisface relaţia

$$\frac{\partial g}{\partial t} + (H^*, g) + \frac{\partial g}{\partial p_k} Q_k = 0. \tag{9.5}$$

Paranteza Poisson pentru funcţiile f şi g este:

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial g}{\partial p_k}\right). \tag{9.6}$$

Prin ipoteză avem $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f, g) = 0$, adică

$$\frac{\partial}{\partial t}(f, g) + (H^*, (f, g)) + \frac{\partial}{\partial p_k}(f, g)\, Q_k = 0. \tag{9.7}$$

Vom aminti următoarele proprietăţi ale parantezelor lui Poisson :

$$(9.8)\qquad \begin{cases} (f, g) = -\,(g, f) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(f, g) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial t}, g\right) + \left(f, \dfrac{\partial q}{\partial t}\right) \\ (f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g) \\ (f_1 \cdot f_2, g) = f_1 \cdot (f_2, g) + f_2 \cdot (f_1, g) \end{cases}$$

precum şi identitatea lui Jacobi

$$(9.9)\qquad (H^*, (f, g)) + (f, (g, H^*)) + (g, (H^*, f)) = 0\,.$$

Relaţia (9.7) poate fi scrisă sub forma :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}, g\right) + \left(f, \frac{\partial g}{\partial t}\right) - (f, (g, H^*)) - (\hat{g}, (H^*, f)) + \frac{\partial}{\partial p_k}(f, g)\, Q_k =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + (H^*, f), g\right) + \left(f, \frac{\partial g}{\partial t} + (H^*, g)\right) + \frac{\partial}{\partial p_k}(f, g)\, Q_k = 0$$

$$(9.10)\qquad \left(-\frac{\partial f}{\partial p_k} Q_k, g\right) + \left(f, -\frac{\partial g}{\partial p_k} Q_k\right) + \frac{\partial}{\partial p_k}(f, g)\, Q_k = 0\,.$$

Să evaluăm fiecare termen ce apare în (9.10)

$$(9.11)\qquad \left(-\frac{\partial f}{\partial p_k} Q_k, g\right) = -\frac{\partial f}{\partial p_k}(Q_k, g) + \left(-\frac{\partial f}{\partial p_k}, g\right) Q_k$$

$$(9.12)\qquad \left(f, -\frac{\partial g}{\partial p_k} Q_k\right) = \frac{\partial g}{\partial p_k}(Q_k, f) - \left(-\frac{\partial g}{\partial p_k}, f\right) Q_k.$$

Dacă ţinem seama de faptul că f şi g au derivate parţiale de ordinul II continue, putem scrie :

$$(9.13)\qquad \frac{\partial f}{\partial p_k}(f, g) = \left(\frac{\partial f}{\partial p_k}, g\right) + \left(f, \frac{\partial g}{\partial p_k}\right)$$

Din ultimele trei relaţii rezultă pentru (9.10) următoarea formă :

$$(9.14)\qquad -\frac{\partial f}{\partial p_k}(Q_k, g) + \frac{\partial g}{\partial p_k}(Q_k, f) = 0.$$

Ţinînd seama de ipoteza (8.2) rezultă

$$(9.15)\qquad \begin{cases} (Q_k, f) = -\displaystyle\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial p_i} \\ (Q_k, g) = -\displaystyle\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_i} \end{cases}$$

şi

$$(9.16)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial f}{\partial p_k}(Q_k,\, g) = \sum\limits_{i,k=1}^{s} \dfrac{\partial f}{\partial p_k}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial p_i}\cdot\dfrac{\partial Q_k}{\partial q_i} \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial p_k}(Q_k,\, f) = -\sum\limits_{i,k=1}^{s} \dfrac{\partial f}{\partial p_i}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial p_k}\cdot\dfrac{\partial Q_k}{\partial q_i}. \end{cases}$$

Deci (9.14) devine :

$$(9.17)\qquad \sum_{i,k=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial g}{\partial p_i}\,\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} = \sum_{i,k=1}^{s}\cdot\frac{\partial f}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial g}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}.$$

În ambii membri ai relației (9.17) indicii i şi k sînt indici de sumare ceea ce ne permite, de exemplu, în membrul II să-i permutăm Acum (9.17) se scrie :

$$(9.18)\qquad \sum_{i,k=1}^{s}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} - \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\right)\frac{\partial f}{\partial p_k}\,\frac{\partial g}{\partial p_i} = 0.$$

Pentru ca această sumă să fie nulă, este suficient să avem îndeplinite condițiile

$$(9.19)\qquad \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}$$

pentru orice indici i şi k. Din (9.19) rezultă că există o funcție $U = U(q_1, q_2, \ldots, q_s)$, astfel încît

$$(9.20)\qquad Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}.$$

Trebuie remarcat faptul că ipoteza (8.2) este esențială în demonstrație, ceea ce denotă că procedeul lui Poisson de construcție al integralelor prime este valabil pentru sisteme mecanice destul de particulare.

Primit la redactie la 28 iunie 1968

Universitatea din București
Facultatea de matematică — mecanică
Str. Academiei nr. 14.

ÜBER EINIGE VERALLGEMEINERUNGEN DER LAGRANGESCHEN GLEICHUNGEN

In der vorliegenden Arbeit werden die verallgemeinerten Formen der Gleichungen der Dynamik für holonome und nicht holonome mechanische Systeme hergeleitet, sowie Kriterien über die Anwendungsmöglichkeiten dieser Gleichungen auf nichtholonome Systeme aufgestellt. Im zweiten Teil der Arbeit wird eine Verallgemeinerung des kanonischen Systems von Hamilton gegeben, die uns zu einigen Bemerkungen über die Prim-Integrale dieses Systems führen wird.

BIBLIOGRAFIE

1. Bl. Dolaptschiew, ZAMP, *3*, 443—449 (1966).
2. — ZAMM, **46**, 351—355 (1966).
3. — C.R. Acad. Sci. Paris, **262**, *11* 631—635 (1966).
4. Iv. Tzenoff, D.A.N. SSSR, **89**, *1*, *2*, *3*, *4* 21—24, 225—228, 415—418, 623—626 (1953).
5. — C. R. Acad. Bulg. Sci., **9**, 5—8 (1956).
6. — Bul. Inst. politeh. Iaşi s.n., **5** (**9**), *1—2*, 119—124 (1959).
7. D. Mangeron, S. Deleanu, C. R. Acad. Bulg. Sci., **15**, *1*, 9—12 (1962).
8. D. Mangeron, S. Niang, St. cerc. mat., *5*, 637—640 (1965).
9. D. Mangeron, Izv. acad. nauc SSSR, meh. i mas., **2**, 128—129 (1962).
10. I. Nielsen, *Vorlesungen über elementare Mechanik*. Berlin, 1935.
11. P. Appell, *Traité de mécanique rationnelle*, t. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1931, p. 382.

CÎMPURI DE VECTORI PE VARIETĂȚI KÄHLERIENE COMPACTE CU CURBURĂ OLOMORFĂ CONSTANTĂ NENULĂ

DE

T. WESZELY

(Tîrgu Mureș)

În această lucrare se studiază existența unui cîmp continuu de vectori fără singularități pe varietăți kähleriene compacte C_p ($p > 1$) cu curbură olomorfă constantă nenulă.

Să considerăm o varietate diferențiabilă compactă cu $2p$ dimensiuni V_{2p}.

Presupunem că în această varietate se poate introduce o structură complexă kähleriană. Varietatea astfel obținută o vom nota cu C_p.

Se numește *fațetă analitică*, fațeta determinată de vectorii u^k și v^k care satisfac condiția [2]

$$v^\alpha = iu^\alpha,\ v^{\bar\alpha} = -iu^{\bar\alpha},\ \text{unde } i = \sqrt{-1},\ \alpha = 1, \ldots, p \text{ și } \bar\alpha = \alpha + p.$$

Varietatea kähleriană compactă C_p care se bucură de proprietatea că în fiecare punct al varietății curbura tuturor fațetelor analitice în punctul respectiv este aceeași, se numește *varietate kähleriană compactă cu curbură olomorfă constantă.*

Componentele nenule ale tensorului de curbură pentru această varietate sînt [2]

$$R_{\alpha\bar\beta\gamma\bar\delta} = \frac{k}{2}\,(a_{\alpha\bar\beta}\, a_{\gamma\bar\delta} + a_{\alpha\bar\delta}\, a_{\gamma\bar\beta}),$$

unde k este o constantă reală.

Vom studia existența unui cîmp continuu de vectori tangenți, fără singularități pe varietăți kähleriene compacte C_p cu curbură olomorfă constantă nenulă ($k \neq 0$).

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 5, P. 819–821, BUCUREȘTI, 1969

Suma indicilor singularităţilor unui cîmp continuu de vectori pe o varietate diferenţiabilă compactă V_{2p} este dată de formula [3]

$$\Sigma_{js} = \frac{2}{\omega_{2p}} \int_{V_{2p}} K \mathrm{d}v, \tag{1}$$

unde ω_{2p} este aria hipersferei de rază 1 în spaţiul euclidian E_{2p+1}, K curbura generalizată a lui Gauss, iar dv elementul de volum al varietăţii V_{2p}.

Pentru curbura generalizată a lui Gauss avem [1]

$$K = \frac{1}{(2p)!\, 2^p \,|\, a_{jk} \,|} R_{j_1 j_2 k_1 k_2} \ldots R_{j_{2p-1}\, j_{2p}\, k_{2p-1}\, k_{2p}}\, \varepsilon^{j_1 \ldots j_{2p}} \varepsilon^{k_1 \ldots k_{2p}}.$$

În cazul nostru

$$K =$$

$$= \frac{1}{(2p)!\, 2^p |a_{\alpha\overline{\beta}}|^2} 4^p R_{\alpha_1 \overline{\alpha}_2 \beta_1 \overline{\beta}_2} \ldots R_{\alpha_{2p-1}\, \overline{\alpha}_{2p}\, \beta_{2p-1}\, \overline{\beta}_{2p}}\, \varepsilon^{\alpha_1 \overline{\alpha}_2 \ldots \alpha_{2p-1}\, \overline{\alpha}_{2p}} \varepsilon^{\beta_1 \overline{\beta}_2 \ldots \beta_{2p-1}\, \overline{\beta}_{2p}} =$$

$$= \frac{2^p}{(2p)!\, |a_{\alpha\overline{\beta}}|^2} \cdot \frac{k^p}{2^p} (a_{\alpha_1 \overline{\alpha}_2} a_{\beta_1 \overline{\beta}_2} + a_{\alpha_1 \overline{\beta}_2} a_{\beta_1 \overline{\alpha}_2}) \ldots (a_{\alpha_{2p-1}\, \overline{\alpha}_{2p}} a_{\beta_{2p-1}\, \overline{\beta}_{2p}} +$$

$$+ a_{\alpha_{2p-1}\, \overline{\beta}_{2p}} a_{\beta_{2p-1}\, \overline{\alpha}_{2p}}) \cdot \varepsilon^{\alpha_1 \overline{\alpha}_2 \ldots \alpha_{2p-1}\, \overline{\alpha}_{2p}} \varepsilon^{\beta_1 \overline{\beta}_2 \ldots \beta_{2p-1}\, \overline{\beta}_{2p}} =$$

$$= \frac{k^p}{(2p)!\, |a_{\alpha\overline{\beta}}|^2} |a_{\alpha\overline{\beta}}|^2 = \frac{k^p}{(2p)!},$$

adică o constantă reală.

Prin urmare folosind formula (1) putem scrie în acest caz

$$\Sigma j_s = \frac{2}{\omega_{2p}} \int_{C_p} \frac{k^p}{(2p)!} \mathrm{d}v = \frac{2k^p}{\omega_{2p} (2p)!} V,$$

unde V reprezintă volumul spaţiului C_p.

Dacă presupunem $k \neq 0$, rezultă $\Sigma j_s \neq 0$.

Avem deci teorema

Pe varietăţi kähleriene compacte C_p ($p > 1$) cu curbură olomorfă constantă nenulă, nu există un cîmp continuu de vectori fără singularităţi.

Pentru $k > 0$, acest rezultat este o consecinţă a unei teoreme a lui S. Goldberg [4], care a arătat că numerele Betti ale unei varietăţi kähleriene compacte cu curbură olomorfă constantă pozitivă sînt

$$b_{2i} = 1;\ b_{2i+1} = 0,\ 0 \leqslant i \leqslant p.$$

Primită la redacţie la 23 mai 1968

Institutul pedagogic Tîrgu Mureş

VECTOR FIELDS ON COMPACT KÄHLER MANIFOLDS WITH NONVANISHING CONSTANT HOLOMORPHIC CURVATURE

(ABSTRACT)

The present paper shows that on a compact Kähler manifold C_p with a nonvanishing constant holomorphic curvature no continuous vector field without singularities can exist.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Vrănceanu, *Lecţii de geometrie diferenţială*, vol. II, Bucureşti, 1964.
2. K. Yano, S. Bochner, *Curvature and Betti numbers*. Princeton, 1953.
3. T. Weszely, *On a theorem of H. Hopf*, Rev. Roum. math. pures et appl., **XIII**,*2* (1968).
4. S. I. Goldberg, *Curvature and homology*. Academic Press, New York and London, 1962.

RECENZII

RIESZ FRÉDÉRIC, SZ.-NAGY BÉLA, *Leçons d'analyse fonctionnelle.* (*Lecții de analiză funcțională*). Quatrième édition. Académie des Sciences de Hongrie. Gauthier-Villars, Paris; Académiai Kiadó. Budapest, 1965, viii + 490 pp.

Aceasta este o reeditare a celei de-a treia ediții (1955) a cunoscutului tratat de analiză funcțională. Prima parte a cărții „Teoria modernă a derivării și a integrării", prezintă teorema lui Lebesgue asupra funcțiilor monotone, construirea integralei (Darboux, Riemann, Lebesgue, Stieltjes, Daniel) și spațiile C, L^2, L^p și dualele lor. A doua parte „Ecuații integrale-Transformări liniare" este consacrată studierii ecuațiilor integrale (în special în L^2) și alternativei lui Fredholm, și a transformărilor liniare mărginite și nemărginite într-un spațiu Hilbert. Se dau prezentările spectrale ale operatorilor normali, unitari și autoadjuncți și teorema lui Stone asupra grupurilor de transformări unitare.

Apendicele, scris de al doilea autor, conține rezultate privind dilatări ale operatorilor în spații Hilbert. Demonstrațiile sînt simple și elegante.

Cartea se adresează atît studenților cît și specialiștilor.

Conținutul este următorul: I Derivarea, II. Integrala Lebesgue, III. Integrala Stieltjes și generalizările sale, IV. Ecuații integrale, V. Spații Hilbert și Banach, VI. Transformări autoadjuncte compacte, într-un spațiu Hilbert, VII. Operatori autoadjuncți, unitari, normali într-un spațiu Hilbert, VII. Transformări liniare nemărginite într-un spațiu Hilbert, IX. Transformări autoadjuncte: calcul funcțional, spectru, perturbări, X. Grupuri și semigrupuri de transformări, XI. Teorie spectrală pentru transformări liniare generale.

C. Apostol

L. S. PONTRJAGIN, V. G. BOLTJANSKY, R. V. GAMKRELIDZE, E. F. MISCENKO, *Mathematische Theorie optimaler Prozesse* (*Teoria matematică a proceselor optimale*), VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1964, 340 p., 87 fig. și 25 table.

Celebra carte sovietică a suscitat un interes deosebit în întreaga lume. Traducerea ei în limba engleză a apărut în 1962 (*The mathematical theory of optimal processes*, Interscience, New York). Desigur că de atunci unele rezultate s-au extins; astfel, principiul maximului al lui Pontriaghin a fost generalizat și demonstrația s-a simplificat (a se vedea, de exemplu, R. Pallu de la Barrière, *Cours d'automatique théorétique*, Dunod, Paris, 1965, p. 371). Totuși cartea va rămîne multă vreme deosebit de interesantă și lectura ei indispensabilă înțelegerii aspectelor moderne ale calculului variațiilor.

Cartea este alcătuită dintr-o introducere și șapte capitole: principiul maximului, demonstrația principiului maximului, sisteme optimale liniare, probleme mixte, principiul maximului şi calculul variaţiilor, procese optimale cu coordonate de faze mărginite, o problemă statistică a comenzilor optimale.

Conţine o bibliografie cu lucrări apărute pînă în 1961 la care traducătorii au adăugat cîteva lucrări apărute pînă în 1963.

I. Barbălat

A. DEWEZE, *Traitement de l'information linguistique par l'homme et par la machine*. (*Prelucrarea informaţiilor lingvistice de către om şi maşină*). Dunod, Paris, 1966, 214 pagini.

Cartea de faţă prezintă în mod sistematic unele probleme ale documentării automate, ale traducerii automate şi, în general, ale prelucrării automate a informaţiei lingvistice. Prezentînd în adevărata lor lumină realizările dobîndite şi fără a exagera perspectivele dezvoltării ulterioare, autorul dă o imagine veridică şi echilibrată a stadiului în care se află ştiinţa — mai bine zis, se afla în 1965, atunci cînd autorul îşi scria cartea — în anul dintre domeniile ei cele mai noi.

Preocuparea principală a autorului este aceea de a defini un sistem capabil să aducă servicii imediate în difuzarea rapidă şi în căutarea retrospectivă a documentelor. În carte se urmăreşte cristalizarea unei metode de codaj şi adresare care să permită ca informaţia înregistrată să poată fi utilizată într-o multiplicitate de moduri, mergînd pînă la exploatarea capacităţilor euristice ale modelului şi dezvoltarea posibilităţilor de autoinstruire ale maşinii. Autorul manifestă un dezvoltat simţ al realităţii, distingînd net între ceea ce este realizabil cu maşinile existente şi ceea ce presupune nişte mecanisme cognitive mai evoluate, la care structura calculatoarelor actuale nu poate face faţă, în măsura în care, pentru stabilirea asociaţiilor necesare, este nevoie de un spaţiu cu n dimensiuni.

Cartea este alcătuită din două părţi, fiecare dintre ele fiind alcătuită din cîte şase capitole.

Prima parte a cărţii este dedicată automaticii documentare şi mecanismelor cognitive. În capitolul întîi se prezintă un model documentar analogic. Obiectul celui de-al doilea capitol îl constituie transformarea — prin autodresare — a modelului analogic într-un sistem discret. Se studiază aici, între altele, diversele tipuri de fişiere şi modulaţiile corespunzătoare în cursul unei cercetări retrospective. Se dau clasificările şi modul de structurare a mesajelor. Necesitatea, concepţia şi perspectivele memoriilor asociative sînt prezentate în capitolul al treilea. O deosebită atenţie este acordată aici prezentării memoriei asociative optoelectronice studiate de Loebner. În capitolul al patrulea se face o confruntare interesantă între memoriile asociative, pe de o parte, şi memoria umană, pe de altă parte. Instruirea şi autoinstruirea maşinilor şi instruirea reciprocă între om şi maşină constituie obiectul ultimelor două capitole din prima parte a cărţii.

Cea de-a doua parte a cărţii, formată din capitolele 7—12, este dedicată recunoaşterii formelor vizuale şi sonore. În capitolul al şaptelea se prezintă noţiunea de zgomot şi aceea de recunoaştere a unei structuri. Un mare interes prezintă capitolul al optulea, în care sînt studiate diferite procedee de citire automată. Sînt expuse aici analiza şi identificarea caracterelor, sisteme de citire magnetice, principiile analizei optice, procedeele de identificare. Tratarea automată a limbajului vorbit face obiectul capitolului al nouălea, unde sînt prezentate analiza, recunoaşterea şi sinteza limbajului vorbit, caracteristicile spectrului vorbirii, clasificarea binară a formelor, variaţiile de distribuţie a spectrului, analizorii şi posibilităţile lor actuale de recunoaştere a limbajului vorbit, confruntarea diferitelor procedee de recunoaştere a formelor sonore şi confruntarea perspectivelor de aplicare industrială a tehnicilor de recunoaştere automată a formelor vizuale şi sonore. Chestiunea delicată a facultăţilor şi organelor de recunoaştere automată în organismele biologice face obiectul capitolului al zecelea, în timp ce capitolul al unsprezecelea prezintă perceptorii şi matricele de instruire. În sfîrşit, capitolul 12-lea prezintă cîteva concluzii.

Cuprinzînd o bibliografie bogată, îmbinînd armonios prezentarea aspectelor tehnice cu viziunea umanistă şi filozofică, volumul de faţă se adresează inginerului automatician, documentalistului, lingvistului, foneticianului şi neurofiziologului interesaţi în problemele de simulare a mecanismelor de percepţie şi a funcţiilor cerebrale superioare.

Solomon Marcus

N. RADU — *Inele locale*, vol. I, Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti, 1968, 378 p., 19 lei.

Îmbinînd armonios rezultatele clasice moderne cu unele rezultate personale ale unor tineri matematicieni din ţara noastră, această monografie reuneşte, pentru prima oară în literatura noastră de specialitate, într-un volum elementele de bază ale teoriei inelelor locale. Această teorie a luat în ultima vreme o mare amploare, deoarece ea ocupă un loc de seamă atît în cadrul algebrei, cît şi al geometriei. Aşa, de exemplu, se poate aminti, pe de o parte, că studiul idealelor unui inel se reduce prin localizare la studiul idealelor unui inel local, iar pe de altă parte, în geometria algebrică, geometria diferenţială şi în teoria spaţiilor analitice, vecinităţile diverselor elemente (puncte, subvarietate) pun în evidenţă inele locale şi studiul lor se reduce în mare parte la studiul inelelor locale.

Din materialul prezentat în volum se vede clar că în tratarea principalelor probleme se are în vedere aplicaţiile în geometria algebrică şi spaţiile analitice, folosindu-se intensiv metodele algebrei omologice atît în scopul dobîndirii unor rezultate cît mai generale, cît şi al unificării metodelor de studiu.

Cartea conţine opt capitole.

În primul capitol se studiază algebrele întregi finite şi de tip finit, teoremele Krull—Cohen—Seidenberg, lema de normalizare pentru algebre de tip finit peste un corp, teorema lui Hilbert a zerourilor şi inele Jacobson.

În cel de-la doilea capitol se prezintă inele de valuare, extinderea unei valuări şi valori absolute.

Capitolul trei conţine descompunerea primară în inele şi în module şi proprietăţile idealelor prime asociate unui modul şi aplicaţiile lor. Noţiunea de radical şi de modul primar sînt date într-o formă mai generală ca de obicei, ceea ce permite generalizarea substanţială a rezultatelor clasice ale lui Lasker—Noether.

De asemenea, în acest capitol se mai prezintă inele dedekindiene şi inele Krull.

În cel de-al patrulea capitol se studiază inelele şi modulele plate şi fidel plate.

Al cincilea capitol este consacrat teoriei completării inelelor, modulelor şi corpurilor topologice. Această teorie este expusă pentru întîia oară în cadrul general natural prin introducerea unei noţiuni noi, aceea de spaţiu Cauchy în locul aceleia de spaţiu uniform.

În cel de-al şaselea capitol se studiază inele şi module liniar topologizate, topologia asociată unei filtrări pe un inel şi pe un modul, topologiile adice pe inele şi module şi completarea lor.

Capitolul şapte cuprinde studiul diverselor noţiuni de dimensiune în teoria inelelor şi modulelor : dimensiunea Krull, dimensiunea coomologică, profunzimea şi proprietăţile lor.

În capitolul opt se dau definiţiile şi proprietăţile inelelor regulate, inelelor factoriale şi inelelor henseliene.

În încheiere se dă bibliografia şi un util indice de materie.

Acest volum constituie un bun exemplu de activitate colectivă. La elaborarea lui au colaborat cu N. Radu o serie de tineri cercetători din cadrul Institutului de matematică al Academiei Republicii Socialiste România şi anume : C. Bănică, A. Brezuleanu, A. Duma, M. Jurchescu, O. Stănăşilă şi Mamulea Stoian.

De asemenea au mai colaborat atît Alexandru Radu cît şi Alexandru Lascu.

În acest prim volum, deosebit de bogat în conţinut, materialul este prezentat clar şi concis într-o înlănţuire logică, reuşind să-l introducă, fără prea mare dificultate, pe cititorul interesat în acest domeniu modern al algebrei.

P. Mocanu

L. RÉDEI, *Foundation of Euclidian and non-Euclidean geometries according to F. Klein.* (*Bazele geometriilor euclidiene şi neeuclidiene după F. Klein*). Akadémiai Kiadó, Budapesta, 1968, X + 396 p.

Autorul se ocupă de problemele clasice ale geometriei, considerate dintr-un punct de vedere original. Sistemul de axiome, ales ca punct de plecare de autor, cuprinde axiomele de aparţinere (incidenţă), de relaţii de tip ,,între'' (de aranjare) de continuitate şi de mişcare, În prima parte a cărţii se discută consecinţele primelor trei axiome. În a doua parte se tratează în mod paralel cele trei geometrii posibile, prin aplicarea celei dea a IV-a axiome (axiomele de mişcare).

Monografia este împărţită în şapte capitole : I. Axiome (Axiome de incidenţă , axiome de relaţii de tip ,,între'' II, axiome de continuitate III şi axiome de mişcare IV), II. Consecinţele sistemului de axiome I, III. Consecinţe simple ale sistemului de axiome I—II, IV. Închidere proiectivă, V. Studiul spaţiului proiectiv, VI. Consecinţele sistemului de axiome I, II, III, VII. Consecinţele sistemului de axiome I, II, III, IV. Se dau, de asemenea, o bibliografie (9 titluri) şi un index.

Cartea este scrisă clar şi are un caracter original; ea este deosebit de utilă cercetătorilor în acest domeniu.

P. P. Teodorescu

K. L. NAGY, *State vector spaces with indefinite metric in quantum field theory.* (*Spaţii vectoriale de stare cu metrică nedefinită în teoria cuantică a cîmpului*). Adadémiai Kiadó, Budapesta, 1966, X + 132 p.

Această monografie se bazează pe cercetările anterioare ale autorului ; în ea sînt tratate proprietăţile generale ale spaţiilor vectoriale de stare cu metrică nedefinită, precum şi teoriile fizice în care metrica nedefinită joacă un rol important.

Cartea este împărţită în patru capitole : 1. Spaţiu vectorial de stare cu metrică nedefinită (Spaţii vectoriale, operatori, η-formalismul, postulatele fizice), 2. Exemple teoretice de cîmpuri (oscilator, cîmp cu un comutator nerelativistic, cîmp electromagnetic liber, teorii de cîmp cu lagrangieni de ordin superior, cîmpuri de regularizare auxiliare, modelul Yocoyama, modelul Shimodaira, propoziţia lui Markov, teoria lui Heisenberg, modelul Froissart, cîmp scalar cuplat cu o sursă fixă, modelul Lee, model modificat conducînd la un tripol secundar, alte teorii), 3. Dificultăţi legate de interpretarea probabilistică (descompunerea spaţiului vectorial de stare, teorii interpretabile şi neinterpretabile, observaţii asupra teoriei formale a dispersiunii, propuneri pentru obţinerea de teorii interpretabile, metrica nelocală şi nedefinită), 4. Metode axiomatice (reprezentări spectrale ale propagatorilor, relaţii de dispersie). Se dă, de asemenea, o bogată bibliografie (117 titluri).

Scrisă într-un mod clar şi concis, monografia este utilă cercetătorilor în acest domeniu.

P. P. Teodorescu

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date din text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale. Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase gratuit. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, Calea Griviţei nr. 21, Bucureşti 12.

1969 JUL 7

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

P. CARAMAN, **Homeomorfisme evasiconforme *n*-dimensionale**, 1968, 594 p., 31 lei

I. COLOJOARĂ, **Elemente de teorie spectrală**, 1968, 311 p., 19,50 lei.

I. CUCULESCU, **Procese Markov și funcții excesive**, 1968, 356 p., 19 lei.

ALEXANDRU GHIKA, **Opera matematică**, 1968, 955 p., 50 lei.

R. THEODORESCU, **Teoria matematică a informației**, 1966, 227 p., 8,25 lei.

S. GUIAȘU, **Aplicații ale teoriei informației (Sisteme dinamice — Sisteme cibernetice)**, 1968, 350 p., 17 lei.

A. HALANAY, D. WEXLER, **Teoria calitativă a sistemelor cu impulsuri**, 1968, 313 p., 13 lei.

M. IOSIFESCU și P. TĂUTU, **Procese stohastice și aplicații în biologie și medicină**, 1968, 345 p., 22 lei.

N. RADU, **Inele locale**, vol. I, 1968, 377 p., 19 lei.

* * *, **Scrieri matematice ale lui Gheorghe Lazăr** (sub îngrijirea prof. AXENTE CREANGĂ), 1968, 160 p. 6 lei.

SIMION SANIELEVICI, **Opera matematică**, 1968, 298 p., 15,50 lei.

G. VRĂNCEANU, **Lecții de geometrie diferențială**, vol. IV, 1968, 380 p., 19 lei

ST. CERC. MAT., TOM 21, NR. 5, P. 683 – 828, BUCUREȘTI, 1969

I. P. „Informația" c. 818

43831

Lei 20.

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

6

TOMUL 21

1969

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACȚIE

Acad. MIRON NICOLESCU – redactor responsabil;
Acad. GR. C. MOISIL – redactor responsabil adjunct;
Acad. GH. MIHOC;
Acad. G. VRĂNCEANU;
Acad. CAIUS IACOB;
Acad. TIBERIU POPOVICIU;
Acad. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAȘ – secretar de redacție.

La revue „STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE" paraît 10 fois par an. Le prix d'un abonnement annuel est de $ 10. –; £ 4.3.0; F. F. 49. –; D. M. 40. –.
Toute commande de l'étranger sera adressée à CARTIMEX, Boîte postale 134–135, Bucarest, Roumanie, ou à ses représentants à l'étranger.
En Roumanie, vous pourrez vous abonner par les bureaux de poste ou chez votre facteur.
În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție al revistei pe adresa: Calea Griviței nr. 21, București 12

F 762

TOM. 21, Nr. 6
1969

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

S U M A R

Pag.

FELICIA BALTUSCH, Maşini matematice şi gramatici generative . 831

C. BĂNICĂ, A. DUMA, O. STĂNĂŞILĂ, Proprietăţi ale spaţiilor Stein (Consecinţe ale teoremelor A şi B) 877

ŞTEFAN CRUCEANU, Asupra unei metode de stabilire a existenţei soluţiilor ecuaţiilor funcţionale neliniare 909

ANDREI DOBRESCU, Asupra grupurilor de mişcări ale unor ecuaţii ale fizicii matematice (II) 915

G. GODINI, Despre cea mai bună aproximare în spaţii vectoriale normate prin elemente din conuri convexe 931

IOANA ISTRĂŢESCU şi VASILE ISTRĂŢESCU, Operatori normaloizi (II) 937

GH. MOCANU, Observaţie asupra unui criteriu de comutativitate în algebre Banach 947

I. SĂCUIU, Dispersia produsului unui număr oarecare de variabile aleatoare independente 953

MIHAELA ŞABAC, Functorii derivaţi ai unui functor aditiv . . . 965

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 6, P. 829—972, BUCUREŞTI, 1969

MAŞINI MATEMATICE ŞI GRAMATICI GENERATIVE

DE

FELICIA BALTUSCH

În articolul de faţă se sintetizează un număr mare de formaţiuni matematice din teoria sistemelor formale, teoria maşinilor matematice şi teoria gramaticilor generative şi se stabileşte, într-o serie de cazuri, raportul logic dintre diferitele variante în care sînt prezentate aceste formaţiuni matematice în literatura de specialitate.

INTRODUCERE

Expunerea de faţă îşi propune să organizeze şi să sintetizeze un număr mare de formaţiuni matematice utilizate în logica matematică, în teoria automatelor şi în teoria limbajelor formalizate. Aceste formaţiuni sînt astăzi prezentate în numeroase monografii şi articole, însă varianta în care ele apar prezintă nuanţe diferite de la un autor la altul, iar problema raportului logic dintre diferitele variante este de obicei lăsată fără răspuns. În articolul de faţă am căutat să stabilim aceste raporturi într-un număr destul de mare de situaţii.

Se ştie, în linii mari, că teoria sistemelor formale, teoria maşinilor matematice şi teoria gramaticilor generative sînt teorii oarecum paralele, dar precizarea acestui paralelism este de multe ori deficitară. Şi în această direcţie am încercat să facem unele observaţii.

Într-un cuvînt, ne-am străduit să înglobăm într-o expunere unitară un ansamblu de fapte dintre cele mai actuale, care nicăieri nu au fost strînse laolaltă şi confruntate în mod sistematic. Rezultatele existente în literatura de specialitate le-am enunţat doar sau am dat pentru ele o schiţă de demonstraţie care să permită cititorului să urmărească linia mare a expunerii, fără a se pierde în detalii tehnice ; am indicat însă întotdeauna sursa bibliografică în care chestiunea este tratată mai dezvoltat.

Cu acest prilej, aduc mulţumirile mele tovarăşului profesor Solomon Marcus pentru sugestiile, indicaţiile şi observaţiile primite.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 6, P. 831–875, BUCUREŞTI, 1969

CAPITOLUL I

NOŢIUNI INTRODUCTIVE

1. MONOID LIBER

Fie $\mathcal{A}$ o mulţime nevidă — numită *mulţime de bază* (*vocabular* sau *dicţionar*).

Elementele ei se numesc *elemente de bază, simboluri* sau *cuvinte*.

Notăm cu $\mathcal{A}^*$ mulţimea secvenţelor finite formate cu elementele lui $\mathcal{A}$ (este posibil ca acelaşi element să apară de mai multe ori într-o secvenţă). În această mulţime introducem o lege de compoziţie, numită *concatenare*, care constă în alăturarea secvenţelor :

$$A = a_1 \dots a_n$$

$$B = b_1 \dots b_m .$$

Prin concatenare obţinem :

$$C = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m = AB.$$

Această lege de compoziţie este asociativă, dar necomutativă şi are ca element neutru secvenţa vidă E. Concatenarea secvenţelor defineşte pe $\mathcal{A}^*$ o structură de monoid. $\mathcal{A}^*$ se numeşte *monoidul liber peste* $\mathcal{A}$, avînd ca *generatori* elementele lui $\mathcal{A}$. Elementele lui $\mathcal{A}^*$ le numim *cuvinte* sau *fraze*.

DEFINIŢIE. *Lungimea unui cuvînt* este egală cu numărul simbolurilor care îl formează.

2. LIMBAJE ŞI OPERAŢII CU LIMBAJE

DEFINIŢIE. *Limbaj formal* L, definit pe o mulţime de bază $\mathcal{A}$, este orice submulţime a monoidului liber $\mathcal{A}^*$ (pe scurt se spune limbaj).

Altfel spus : L este o mulţime (finită sau infinită) de cuvinte, fiecare de lungime finită, adică obţinut prin concatenarea unui număr finit de elemente.

Considerăm următoarele operaţii în $\mathfrak{P}(\mathcal{A}^*)$ (mulţimea părţilor lui $\mathcal{A}^*$) :

— *Reuniunea* a două limbaje L_1 şi L_2 este mulţimea cuvintelor care se găsesc cel puţin într-unul din aceste limbaje ; se notează $L_1 \cup L_2$.

— *Intersecţia* a două limbaje L_1 şi L_2 este mulţimea cuvintelor care se găseşte în ambele limbaje ; se notează $L_1 \cap L_2$.

— *Complementara* unui limbaj L este mulţimea cuvintelor din $\mathcal{A}^*$ care nu se află în L ; se notează $\mathcal{A}^* \setminus L$.

— *Produsul a două limbaje* L_1 *şi* L_2 este limbajul notat L_1L_2 şi obţinut astfel :

$$L_1 L_2 = \{ X_1 X_2 \mid X_1 \in L_1 , X_2 \in L_2 \}.$$

Produsul este asociativ şi necomutativ.

— *Operaţia stea* (Kleene) — aplicată limbajului L — conduce la limbajul:

$$L^* = E \cup L \cup L^2 \cup L^3 \cup \dots \cup L^n \cup \dots$$

— *Operaţia de inversare* aplicată limbajului L conduce la limbajul:

$$\widetilde{L} = \{\widetilde{X} \mid X \in L;\ X = x_1 \dots x_n,\ \widetilde{X} = x_n \dots x_1\}.$$

Această operaţie are proprietăţile:

— involutivă $\widetilde{\widetilde{L}} = L$;

— este legată de produs prin relaţia $\widetilde{LM} = \widetilde{M}\widetilde{L}$.

CAPITOLUL II

SISTEME FORMALE SISTEMUL COMBINATOR — CAZ PARTICULAR DE SISTEM FORMAL

1. SISTEME FORMALE

Vom considera aici acele sisteme formale, numite de J. Porte ([12]) ,,systèmes logistiques".

În teoria sistemelor formale s-a ajuns la studiul multor sisteme, printre care putem cita şi mulţimea matematicilor actuale ca un sistem logistic particular.

Unele dintre aceste sisteme pot reprezenta în mod abstract unele aspecte ale raţionamentului matematic (de exemplu formulările calculului propoziţional clasic), altele sînt mai mult adecvate unor metode de calcul, altele nu sînt adecvate la nimic concret — acesta e cazul general.

Teoria sistemelor formale este denumită uneori metamatematică (de exemplu S.C. Kleene).

De obicei se face deosebirea între studiul sistemelor formale ca sisteme de sine stătătoare, care se numeşte ,,sintaxă", şi studiul raporturilor dintre sistemele formale şi alte structuri matematice, care se numeşte ,,semantică".

Această împărţire nu poate fi însă considerată absolută, adică nu vorbim despre ,,sintaxă pură" şi ,,semantică pură", ci de studii ,,mai mult sintactice" sau ,,mai mult semantice".

DEFINIŢIE. *Sistem formal* — este o structură matematică

$$\mathfrak{S} = < \mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathcal{A}, R, \mathfrak{N} >,$$

unde:

$\mathfrak{A}$ este alfabet numărabil ale cărui litere pot fi considerate ca numerotate;

$\mathfrak{F}$ submulţime a lui $\mathfrak{A}^*$ (limbaj pe alfabetul $\mathfrak{A}$); se numeşte mulţimea formulelor.

$\mathcal{A}$ submulţime a lui $\mathfrak{F}$, se numeşte mulţimea axiomelor;

R mulțime de reguli de deducție, pe care le numim primitive;

$\mathcal{N}$ „numerotarea” alfabetului (este o funcție care face să corespundă fiecărei litere din alfabet un număr natural).

Numărul regulilor de deducție poate fi 0, finit sau infinit. O regulă care e o relație $(n+1)$-ară $(n \geqslant 1)$ se numește „regulă cu n antecedente”; primele n argumente se numesc *antecedente* și ultimul argument se numește *consecință*.

Definiție. O formulă y se numește *imediat deductibilă* în $\mathfrak{S}$ din șirul de formule $< x_1, \ldots, x_n >$ dacă $\mathfrak{R}(x_1, \ldots, x_n, y)$, $\mathfrak{R}$ fiind una din regulile primitive ale lui $\mathfrak{S}$. (Se mai notează în loc de $\mathfrak{R}(x_1, \ldots, x_n, y)$: $< x_1, \ldots, x_n > \mathfrak{R}\, y$).

Relația de deductibilitate imediată este deci definită pe $\mathfrak{F}^n \times \mathfrak{F}$.

Definiție. Se numește *deducție* a lui y în $\mathfrak{S}$ cu premizele $< x_1, \ldots, x_n >$ ($y, x_1, \ldots, x_n$ sînt formule), orice șir de formule $< z_1 \ldots, z_i, \ldots, z_k >$ cu proprietatea: $z_k = y$ și cel puțin una din următoarele trei condiții trebuie să fie satisfăcută pentru orice i $(1 \leqslant i \leqslant k)$:

a) z_i este o axiomă.

b) z_i este una din premize.

c) z_i este imediat deductibilă din unele din formulele care o preced în $< z_1, \ldots, z_k >$.

Definiție. O formulă y se numește *deductibilă* (în $\mathfrak{S}$) din premizele $< x_1, \ldots, x_n >$ dacă există în $\mathfrak{S}$ o deducție a lui y cu aceste premize. Se notează: $< x_1, \ldots, x_n > \mathrel{|\!\underset{\mathfrak{S}}{=\!=\!=}} y$.

Definiție. O formulă x se numește *teză* a sistemului dacă și numai dacă ea este deductibilă dintr-o mulțime vidă de premize. Se notează: $\mathrel{|\!\underset{\mathfrak{S}}{-\!-\!-}} x$.

Următoarele rezultate sînt imediate:

— Ordinea premizelor nu are importanță în deductibilitate.

— Fie Φ și Ψ mulțimi de premize. Dacă Ψ conține Φ, atunci $\Phi \mathrel{|\!\underset{\mathfrak{S}}{=\!=\!=}} y$ implică $\Psi \mathrel{|\!\underset{\mathfrak{S}}{=\!=\!=}} y$.

— Deductibilitatea imediată implică deductibilitatea.

— O formulă e deductibilă din ea însăși.

— Dacă nu există axiomă, atunci nu există teză.

— Dacă nu există reguli, atunci singurele teze sînt axiomele.

2. SISTEME COMBINATORII

Fie alfabetul $\mathcal{A} = \{a_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ și monoidul liber $\mathcal{A}^*$. Notăm cu litere latine mari de tipar elementele lui $\mathcal{A}^*$.

Definiții: a. Sistemul $(G, H, K; \overline{G}, \overline{H}, \overline{K})$ se numește *schemă de producție*.

b. $GPHQK \to \overline{G}P\overline{H}Q\overline{K}$ se numește *producția* asociată sextetului de mai sus prin intermediul lui P și Q.

c. $\overline{G}P\overline{H}Q\overline{K} \to GPHQK$ se numește *producția inversă* producției de mai sus.

Un sistem combinator este definit dacă se dau :

— $\mathcal{A}$, alfabet finit (numit alfabetul sistemului) ;

— Uneori se dă $\mathcal{L}$, alfabet auxiliar pentru scrierea producţiilor ;

— Un cuvînt distinct, nevid, A în $\mathcal{A}^*$, numit axioma sistemului ;

— Un număr de scheme de producţie.

Pe baza acestor observaţii, putem defini *sistemul combinator* ca un sistem formal în care :

— orice cuvînt din $\mathcal{A}^*$ (eventual din $(\mathcal{A} \cup \mathcal{L})^*$) este o formulă ;

— mulţimea axiomelor este formată dintr-un singur element ;

— regulile de deducţie sînt date de producţii.

O noţiune des întîlnită în teoria sistemelor combinatorii este aceea de demonstraţie :

Definiţie. Fie $\mathcal{S}$ un sistem combinator. Şirul $(X_1, \ldots, X_n)$ este o *demonstraţie* în $\mathcal{S}$ dacă X_1 este axioma sistemului $\mathcal{S}$ şi dacă X_j este o consecinţă a lui X_{j-1} $(1 < j \leqslant n)$ în raport cu o producţie a lui $\mathcal{S}$.

— X_n se numeşte *teoremă* a sistemului $\mathcal{S}$.

— Trecerea de la X_{j-1} la X_j este un *pas al demonstraţiei.*

— Sistemul combinator $\mathcal{S}$ este *monogen* dacă fiecare teoremă admite cel mult o demonstraţie în raport cu producţiile sistemului.

— Două *demonstraţii* ale unei teoreme sînt *distincte* dacă ele diferă una de cealaltă prin cuvintele care le conţin sau prin ordinea lor.

— *Cuvîntul final* al unei demonstraţii este *ambiguu* dacă există cel puţin două demonstraţii distincte.

Sisteme combinatorii particulare

1) *Sistem semi-Thue* — are doar producţii semi-Thue :

— schema de producţie $(E, H, E; E, \overline{H}, E)$, $|H| \neq 0$;

— producţii : $EPHQE \to EP\overline{H}QE$, care se mai scriu : $PHQ \to P\overline{H}Q$ sau, dacă nu sînt confuzii posibile, $H \to \overline{H}$.

2) *Sistem Thue* — este un sistem semi-Thue cu proprietatea că o dată cu orice producţie pe care o conţine, conţine şi inversa ei.

3) *Sistem normal* — are doar producţii normale :

— schema de producţie $(G, E, E; E, E, \overline{K})$ sau schimbînd notaţia $(G, E, E; E, E, \overline{G})$;

— producţii $GPEQE \to EPEQ\overline{G}$, care se mai scriu $GPQ \to PQ\overline{G}$ sau $GP \to P\overline{G}$.

4) *Sistem Post* — este un sistem normal cu proprietatea că o dată cu orice producţie pe care o conţine, conţine şi inversa ei.

CAPITOLUL III

NOŢIUNEA DE GRAMATICĂ

Definiţia 1. Considerăm un limbaj L peste un alfabet $\mathcal{A}$.

O *gramatică* G este un algoritm peste $\mathcal{A}$ care ne permite să enumerăm cuvintele (frazele) unui limbaj L.

Cu alte cuvinte (N. Chomsky [2]) :

O *gramatică* este o mulţime finită de reguli care specifică recursiv cuvintele (frazele) unui limbaj.

În general, fiecare regulă este de forma:

$$\Phi_1, \ldots, \Phi_n \rightarrow \Phi_{n+1},$$

unde fiecare Φ_i este o anumită structură și relația $\rightarrow$ poate fi interpretată ca o expresie a faptului că dacă acest proces recursiv generează structurile $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, atunci el generează și structura Φ_{n+1}.

Specificarea precisă a felului regulilor se face îndeosebi în cazul gramaticilor care joacă un rol important în lingvistica matematică.

L se numește *limbajul generat de gramatica* G.

O definiție mai precisă a noțiunii de gramatică este dată de M. Davis ([3]):

DEFINIȚIA 2. Fie V_N și V_T mulțimi finite și $V = V_N \cup V_T$.

Gramatica G, peste vocabularul terminal V_T și vocabularul neterminal (auxiliar) V_N, este un sistem semi-Thue (producțiile au forma $PgQ \rightarrow P\overline{g}Q$) cu proprietățile: axioma este un element S din V_N (simbol inițial); pentru fiecare producție $PgQ \rightarrow P\overline{g}Q$ există șirurile φ, ψ, ω peste V și un șir χ peste V_N, astfel ca: $g = \varphi\,\chi\,\psi$ și $\overline{g} = \varphi\,\omega\,\psi$; P și Q sînt variabile care iau ca valori șiruri din V^*.

Observație. Notăm: $g \rightarrow \overline{g}$, pe care o numim *regulă* a gramaticii G (se notează și $(g, \overline{g})$).

În general pentru orice șiruri σ, τ din V^*, scriem $\sigma \rightarrow \tau$ dacă (σ, τ) satisface o producție din G, adică dacă există o regulă $g \rightarrow \overline{g}$ a lui G și π, ρ din V^* astfel ca $\sigma = \pi g \rho$, $\tau = \pi \overline{g} \rho$.

Gramatica G poate fi scrisă, deci, *ca un sistem formal* $< V_T, \mathfrak{F}, \{S\}, \rightarrow >$.

DEFINIȚIA 3[1].

— Sistemul $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ este o ψ-*derivație* a lui χ dacă $\psi = \varphi_1$, $\chi = \varphi_n$, $\varphi_i \rightarrow \varphi_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$.

— *Derivația* este un sistem $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ pentru care există ψ și χ cu proprietatea că $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ este o ψ-derivație a lui χ.

— φ_i se numesc *termenii derivației* $(i = 1, \ldots, n)$.

— Notăm $\psi \Rightarrow \chi$ dacă există o ψ-derivație a lui χ.

DEFINIȚIA 4. *Limbaj terminal generat de gramatica* G (notat $L(G)$) este o mulțime $\{\varphi \mid S \Rightarrow \varphi,\ S$ — axioma lui G, $\varphi \in V_T^*\}$, adică mulțimea frazelor terminale generate de gramatica G.

Se vede imediat că definiția precisă a unei gramatici, dată mai sus, corespunde definiției (mai puțin precisă), pe care am dat-o la început, ca algoritm cu care se pot obține frazele unui limbaj.

DEFINIȚIA 5. Două gramatici G și G' *sînt echivalente* dacă generează același limbaj, deci dacă $L(G) = L(G')$.

CAPITOLUL IV

IERARHIA LUI CHOMSKY

În [1] Noam Chomsky stabilește o ierarhie de tipuri de gramatici, fiecare corespunzînd unui anumit tip de mașină matematică.

În cele ce urmează vom studia aceste tipuri de gramatici, precum și automatele care acceptă limbajele generate de ele.

---

[1] Notăm cu litere mici grecești șirurile de elemente din V.

N. Chomsky dă următoarea definiţie :

DEFINIŢIA 1. *Gramatică* G este un sistem de obiecte (V, V_T, H, S, $\#$, $\rightarrow$), unde :

— V este o mulţime finită de elemente, numită dicţionar sau alfabet.

— V_T este o parte a lui V formată din cel puţin două elemente : E — simbolul unitate şi $\#$ — simbolul frontieră care satisface condiţia ③ de mai jos ; V_T se numeşte dicţionar terminal.

$V_N = V - V_T$ se numeşte dicţionar neterminal.

Punem condiţia : $V_N \neq \emptyset$.

Alegem $S \in V_N$, numit simbolul propoziţiei (va interveni în definiţia limbii terminale generate de G).

— H este un subsemigrup al lui V^*, care conţine E, cu proprietatea că dacă $a \in V$, atunci şirul format doar din a aparţine lui H.

$\rightarrow$ este relaţie binară în H cu condiţiile :

① ,,$\rightarrow$,, nu este reflexivă.

② $A \in V_N$ dacă şi numai dacă există φ, ψ, $\omega \in V^*$ cu proprietatea $\varphi A \psi \rightarrow \varphi \omega \psi$.

③ Nu există trei elemente φ, ψ, $\omega \in V^*$ astfel ca $\varphi \rightarrow \psi \# \omega$ şi $\psi \neq E \neq \omega$.

④ Există o mulţime finită de perechi ordonate $(\chi_1, \omega_1), \ldots, (\chi_n, \omega_n)$ de elemente din V^* astfel încît, oricare ar fi φ, $\psi \in H$, relaţia $\varphi \rightarrow \psi$ are loc dacă şi numai dacă există φ_1, $\varphi_2 \in V^*$ şi $j \leqslant n$ cu proprietatea : $\varphi = \varphi_1 \ \chi_j \ \varphi_2, = \varphi_1 \omega_j \varphi_2$.

Observaţie. În ultima condiţie apare caracterul finit al gramaticii.

DEFINIŢIA 2. *Regulă gramaticală* este orice pereche (χ_j, ω_j) introdusă în condiţia ④.

DEFINIŢIA 3. Notăm $\lambda = \# S \#$. Mulţimea şirurilor x de elemente din V_T pentru care există o λ-derivaţie (definită în capitolul III) a lui x se numeşte *limba terminală generată de G* şi se notează $L(G)$:

$$L(G) = \{x \mid x \in V_T^*, \ \lambda \Rightarrow x\}.$$

Din definiţia gramaticii (condiţia ③) se vede că $\#$ nu apare în mijlocul unei fraze, deci $x \in L(G)$ este de forma $x = \# y \#$ cu $y \in (V_T - \{\#\})^*$, adică : $L(G) = \{\# y \# \mid y \in (V_T - \{\#\})^*, \ \# S \# \Rightarrow \# y \#\}$.

DEFINIŢIA 4. Se poate modifica definiţia 1 în felul următor : Considerăm că simbolul frontieră $\#$ este în V_N şi definim $L(G) = \{y \mid y \in V_T^*, \ \# S \# \Rightarrow \# y \#\}$. Evident, se obţin aceleaşi fraze cu deosebirea că nu luăm în consideraţie simbolurile frontieră care le mărginesc. G se numeşte *gramatică cu simbol frontieră.*

DEFINIŢIA 5. Considerăm acum o gramatică care este definită la fel ca în definiţia 4 : $G = (V, \ V_T, \ H, \ S, \rightarrow)$ cu excepţia faptului că $\#$ nu apare în reguli şi $L(G) = \{y \mid S \Rightarrow y\}$. Ea se numeşte *gramatică fără simbol frontieră.* Această gramatică este, după cum se vede imediat, cea dată de definiţia 2, cap. III.

Observaţie. Putem lucra cu oricare din definiţiile 2 (cap. III) sau 1 deoarece deosebirea dintre ele poate fi ,,ştearsă'' prin următoarea teoremă :

TEOREMA 4.1. (Landweber [9]). *Orice gramatică cu simbol frontieră este echivalentă cu o gramatică fără simbol frontieră.*

Schiţă de demonstraţie. Fie $G = (V, V_T, H, S, \#, \xrightarrow[G]{})$ gramatică cu simbol frontieră. Construim $G_1 = (V_1, V_{T_1}, S_1, \xrightarrow[G_1]{})$ gramatică fără simbol frontieră astfel ca $L(G) = L(G_1)$.

Fie $V = V_N \cup V_T$, $V_1 = V_{N_1} \cup V_{T_1}$.

Pentru fiecare $\alpha \in V$, diferit de $\#$, introducem simbolurile noi $\#\alpha$, $\alpha\#$ şi $\#\alpha\#$.

Definim

$$V_{N_1} = \{\#\alpha,\ \alpha\#,\ \#\alpha\# \mid \alpha \in V,\ \alpha \neq \#\} \cup \{A \in V_N \mid A \neq \#\}.$$

Dacă $\varphi = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r$ $(r \geqslant 1)$ este un cuvînt din V^* care nu conţine $\#$, fie $\#\varphi = \#\alpha_1 \dots \alpha_r$, $\varphi\# = \alpha_1 \dots \alpha_r \#$, $\#\varphi\# = \#\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r^{\#}$; astfel $\#\varphi$, $\varphi\#$ şi $\#\varphi\#$ sînt definite pentru orice cuvînt (nevid) din V^* care nu conţine $\#$.

Luăm : $V_{T_1} = V_T$, $S_1 = \#S\#$ şi regulile lui G_1 :

I. Dacă $\varphi \to \psi$ este o regulă a lui G, atunci $\varphi \to \psi$, $\#\varphi \to \#\psi$, $\varphi\# \to \psi\#$, $\#\varphi\# \to \#\psi\#$ sînt reguli ale lui G_1.

II. Dacă $\#\varphi \to \#\psi$ este o regulă a lui G, atunci $\#\varphi \to \#\psi$ şi $\#\varphi\# \to \#\psi\#$ sînt reguli ale lui G_1.

III. Dacă $\varphi\# \to \psi\#$ este o regulă a lui G, atunci $\varphi\# \to \psi\#$ şi $\#\varphi\# \to \#\psi\#$ sînt reguli ale lui G_1.

IV. Pentru $a \in V_T$, $\#a \to a$, $a\# \to a$ şi $\#a\# \to a$ sînt reguli ale lui G_1.

Se arată că $L(G_1) = L(G)$, adică oricare ar fi $y \in V_T$: $\#S\# \underset{G}{\Rightarrow} \#y\#$ dacă şi numai dacă $\#S\# = S_1 \underset{G_1}{\Rightarrow} y$.

Fie gramatica $G = \langle V, V_T, H, S, \#, \to \rangle$ (definiţia 1).

Considerăm un şir de restricţii care pot fi impuse unei gramatici :

1) Dacă $\varphi \to \psi$, atunci există trei secvenţe φ_1, φ_2, ω şi $A \in V_N$ astfel încît :

$$\varphi = \varphi_1 A \varphi_2, \quad \psi = \varphi_1 \omega \varphi_2, \quad \omega \neq E.$$

2) Dacă $\varphi \to \psi$, atunci există trei secvenţe φ_1, φ_2, ω şi $A \in V_N$ astfel încît :

$$\varphi = \varphi_1 A \varphi_2, \quad \psi = \varphi_1 \omega \varphi_2, \quad \omega \neq E \text{ şi } A \to \omega.$$

3) Dacă $\varphi \to \psi$, atunci există trei secvenţe φ_1, φ_2 şi ω, $a \in V_T$ şi A, $B \in V_N$ astfel încît :

$$\varphi = \varphi_1 A \varphi_2, \quad \psi = \varphi_1 \omega \varphi_2, \quad \omega \neq E, \quad A \to \omega$$

şi are loc una din relaţiile : $\omega = aB$ sau $\omega = a (a \neq \#)$.

Aceste restricţii se referă în special la condiţia ④.

DEFINIŢIA 6. *Context*, este orice pereche ordonată de elemente din V^*; se notează (φ, ψ).

A considera pe χ *în contextul* (φ, ψ), înseamnă a considera secvenţa $\varphi \chi \psi$.

(De exemplu : în restricţia 1) apare regula $A \to \omega$ în contextul (φ_1, φ_2), în restricţia 2) regula $A \to \omega$ apare sub forma $A \to \omega$, adică în contextul nul (I, I), deci independentă de context).

Pe baza condițiilor de mai sus, introducem patru tipuri de gramatici și patru tipuri corespunzătoare de limbi :

— *Gramatica de tipul 0* este gramatica dată de definiția 1, căreia nu i s-a impus nici o condiție. Deci ea este de fapt un sistem semi-Thue particular. Limba generată de ea este *o limbă de tipul 0*. Vom demonstra că este în esență echivalentă cu o mașină Turing.

— *Gramatica de tipul i* ($i = 1, 2, 3$) este o gramatică G căreia i s-a impus condiția i. Limba generată de ea este o *limbă de tipul i*.

— *Gramatica de tipul 1* (context-sensitive grammar) se mai numește gramatică cu reguli contextuale (notăm : CS). Ea este echivalentă cu un automat cu memoria liniar-mărginită (m.l.m), adică clasa limbajelor generate de gramaticile de tipul 1 coincide cu clasa limbajelor acceptate (generate) de automatele cu memoria liniar-mărginită.

— *Gramatică de tipul 2* (context-free grammar) — gramatică acontextuală sau gramatică independentă de context (notăm : CF). Clasa limbajelor acontextuale coincide cu clasa limbajelor acceptate (generate) de automatele cu pilă de memorie (PDS- push-down storage automata).

— *Gramatica de tipul 3* — gramatica cu un număr finit de stări. Clasa limbajelor cu un număr finit de stări („langages à nombre fini d'états", „langages d'état fini", „finite-state languages") coincide cu clasa limbajelor acceptate (generate) de automatele finite.

Din aceste definiții rezultă imediat :

TEOREMA 4.2. *Tip 0 $\supseteq$ tip 1 $\supseteq$ tip 2 $\supseteq$ tip 3.*

Se poate arăta că incluziunile sînt stricte :

Clasa limbajelor cu reguli contextuale este foarte largă, de aceea exemple de limbaje de tipul 0, care să nu fie de tipul 1, sînt destul de greu de găsit.

Exemple de limbaje de tipul 1 care nu sînt de tipul 2 :

$L = \{ \# a^n b^m a^n b^m ccc \# \mid m, n \geqslant 1\}$ (N. Chomsky [1]),

$L = \{a^n b^n a^n \mid n \geqslant 1\}$ (S. Ginsburg [5]),

$L = \{xx \mid x \in \{a, b\}^*\}$ (N. Chomsky [1]).

Exemple de limbaje de tipul 2 care nu sînt de tipul 3 (N. Chomsky [1]) :

$$L = \{a^n b^n \mid n > 0\},$$

$$L = \{x\tilde{x} \mid x \in \{a, b\}^*\}.$$

CAPITOLUL V

MAȘINI TURING

1. DESCRIERE INTUITIVĂ. DEFINIȚIE

Church a fost primul care, în 1936, a dat ideea identificării conceptului intuitiv de algoritm cu unul riguros definit. Așa-numita teză a lui Church este admisă astăzi de majoritatea logicienilor matematici. Un fapt remarcabil este acela că se poate demonstra că diferite înlocuiri ale conceptului de algoritm cu altele riguros matematice se dovedesc a fi echivalente. Vom studia aici doar unul dintre ele, anume *mașina Turing*, descrisă de Turing și Post în anii 1936—1937 (se mai numește mașina Turing-Post).

DESCRIERE FIZICĂ

Dispozitivul este format din :

— *Bandă*, împărțită în celule, considerată infinită în ambele sensuri. Pe bandă se înscriu, la pornire, datele de prelucrat și, în timpul funcționării, calculele intermediare. Pe bandă se scrie cu ajutorul unui alfabet $\$ = \{S_0, \ldots, S_n\}$, cîte un simbol într-o celulă. S_0 este celula vidă, care se mai notează B sau $\#$. (A înlocui S_i cu S_0 înseamnă a șterge S_i). Considerăm banda orientată și celulele ei le vom cerceta de la stînga la dreapta.

— *Unitate centrală*, care prezintă un număr de stări interne. Presupunem că numărul stărilor posibile este finit și, pentru fiecare mașină, fixat. Numim stările $q_0, \ldots, q_m$, printre care distingem q_0 cu un rol special : starea finală.

— *Cap de citire-scriere*, care asigură comunicarea între unitatea centrală și bandă. Într-un anumit moment, acesta explorează o singură celulă ; se consideră fie că se deplasează în fața benzii, fie că este legat de mașină și că banda se mișcă. Capul de citire-scriere poate să înlocuiască simbolul citit cu alt simbol sau să deplaseze banda în stînga sau în dreapta.

Mașina funcționează în felul următor : Într-o situație determinată de o stare internă și de un simbol citit pe bandă, mașina își schimbă starea și acționează pe bandă, după anumite reguli, care sînt de trei tipuri :

a) $q_iS_j \to S_kq_e$.

Mașina înlocuiește S_j cu S_k și trece din starea q_i în starea q_e.

b) $q_iS_j \to Rq_e$.

Mașina deplasează banda cu o celulă spre dreapta și trece din starea q_i în starea q_e.

c) $q_i\,S_j \to Lq_e$.

Mașina deplasează banda cu o celulă spre stînga și trece din starea q_i în starea q_e.

DEFINIȚIE. q_iS_j se numește *situație* a mașinii Turing. Pentru o anumită pereche (q_i, S_j) nu există decît o singură regulă care să aibă q_iS_j în partea stîngă a săgeții, deci considerăm mașina *deterministă*, adică cunoscînd o situație a mașinii Turing, evoluția ulterioară este determinată.

Mașina începe să calculeze cu capul de citire-scriere situat pe primu simbol din stînga, aplică regulile și sfîrșește dacă ajunge în starea finală q_0, cînd nu se mai produc schimbări. (Se poate întîmpla ca în mașină să nu se producă nici o schimbare și într-o altă stare q_i. Totuși în acest caz vom spune că mașina nu se oprește și vom considera că ea continuă lucrul ,,veșnic'').

Dispozitivul descris mai sus reprezintă descrierea intuitivă a automatului abstract : mașina Turing.

DEFINIȚIE. Fie $\$ = \{S_0, \ldots, S_n\}$; S_0 — simbolul nul; $R, L \notin \$$

$Q = \{q_0 \cdots q_m\}$; q_0 — stare finală.

Maşina Turing este o matrice M, în care fiecare linie are patru elemente şi este de una din formele:

a) $q_i \quad S_j \quad S_k \quad q_e$

b) $q_i \quad S_j \quad R \quad q_e$

c) $q_i \quad S_j \quad L \quad q_e$

deci o mulţime finită de astfel de sisteme de patru elemente.

Aceste linii ale matricii M corespund regulilor date mai sus, numite şi comenzi. Tipul comenzii este determinat, după cum am văzut, de perechea finală a comenzii.

Totalitatea comenzilor unei maşini Turing formează *programul* maşinii.

DEFINIŢIE. *Descriere instantanee* este o expresie cu următoarele proprietăţi:

— nu conţine nici o apariţie a lui R sau L;

— conţine o apariţie de tip q_i şi doar una;

— această apariţie a lui q_i nu figurează la extremitatea dreaptă.

DEFINIŢIE. *Descriere instantanee a unei maşini Turing* Z este o descriere instantanee α cu proprietatea că q_i care apare în α este o stare a lui Z şi simbolurile fac parte din alfabetul lui Z.

Descrierea instantanee a maşinii Turing Z dă în mod precis comportarea maşinii deoarece, spre deosebire de situaţia maşinii, ea ţine seama de totalitatea simbolurilor de pe bandă. A. I. Malţev ([10]) numeşte această descriere *configuraţia maşinii* şi o prezintă ca un şir: $S_{i1} S_{i2} \ldots q_i S_{ij} \ldots S_{ir}$, unde $S_{i1}, \ldots, S_{ir}$ sînt simbolurile consecutive de pe bandă, q_i este starea internă şi capul de citire-scriere explorează celula în care se află simbolul S_{ij} (deci $q_i S_{ij}$ este situaţia maşinii). Şirul $S_{i1} S_{i2} \ldots q_i S_{ij} \ldots S_{ir}$ este numit *cuvînt-maşină*.

DEFINIŢIE. Fie α şi β descrieri instantanee pentru o maşină Turing Z.

$\alpha \to \beta$ înseamnă că ne găsim într-unul din cazurile (P şi Q sînt secvenţe de simboluri din alfabet):

— există P şi Q astfel încît: $\alpha = Pq_iS_jQ$ şi $\beta = Pq_eS_kQ$ (formalizează acţiunea care constă în a înlocui S_j cu S_k şi a trece la starea q_e);

— există P şi Q astfel încît: $\alpha = Pq_iS_jQ$ şi $\beta = PS_jq_eQ$ (formalizează acţiunea de deplasare a benzii cu o celulă spre dreapta şi de trecere de la starea q_i la starea q_e);

— există P şi Q astfel încît: $\alpha = PS_kq_iS_jQ$ şi $\beta = Pq_eS_kS_jQ$ (formalizează acţiunea de deplasare a benzii cu o celulă spre stînga şi de trecere de la starea q_i la starea q_e).

Din definiţie rezultă imediat că:

a) $\alpha \to \beta$ şi $\alpha \to \gamma$ implică $\beta = \gamma$.

b) Dacă Z şi Z' sînt două maşini Turing cu proprietatea că $Z \subset Z'$ (adică orice linie din matricea care reprezintă Z este linie şi în matricea care reprezintă Z'), atunci $\alpha \to \beta$ relativ la Z implică $\alpha \to \beta$ relativ la Z'.

DEFINIȚIE. O descriere instantanee α se numește *terminală* relativ la o mașină Z, dacă nu există nici o descriere instantanee β cu proprietatea că $\alpha \to \beta$.

DEFINIȚIE. *Calcul al unei mașini Turing* Z, este un șir de descrieri instantanee : $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, cu proprietatea că $\alpha_i \to \alpha_{i+1}$ $(1 \leqslant i < p)$ și α_p este o descriere instantanee terminală. Notăm $\alpha_p = \text{Rez}\, Z\,(\alpha_1)$, adică α_p este rezultatul lui α_1 pentru mașina Z.

DEFINIȚIE. Un *șir este acceptat* de mașina Turing Z dacă fiind dat prin descrierea instantanee α_1, ca dată de intrare pentru Z, există $\alpha_p = \text{Rez}\,(\alpha_1)$.

DEFINIȚIE. *Mulțime recursiv enumerabilă* este o mulțime de șiruri cu proprietatea că există o mașină Turing Z care să accepte toate șirurile sale și numai pe ele.

CALCULUL FUNCŢIILOR

Între mașinile „numerice" și cele „nenumerice" nu există o diferență fundamentală. Se poate da o interpretare numerică simbolurilor și pentru întregii nenegativi se folosește un alfabet abstract $\{S_0, S_1\}$, care se mai notează, mai simplu, $\{B, |\}$ (fiecare întreg nenegativ n se reprezintă cu $(n+1)$ semne | și B se folosește ca separator).

Notăm :

$\overline{n}$ = reprezentarea lui n ;

$\overline{n}_1 B \overline{n}_2 B \ldots B\, \overline{n}_k$ = reprezentarea lui $(n_1, \ldots, n_k)$;

$<M>$ = numărul de semne | pe care le conține expresia $M \in \{B, | ; q_1, q_2, \ldots ; L, R\}^*$.

Fie mașina Turing Z cu stările $q_0, \ldots, q_m$. Fiecărui sistem $< m_1, \ldots, m_g >$ de întregi nenegativi îi asociem descrierea instantanee $\alpha_1 = q_1 \overline{m}_1\, B\, \overline{m}_2 \ldots B\, \overline{m}_g$.

Dacă există pentru mașina Z un calcul care începe cu α_1 și sfîrșește cu descrierea instantanee terminală α_p (adică : $\alpha_1 \to \alpha_2 \to \ldots \to \alpha_p$), atunci numărul întreg $<\alpha_p>$ este o funcție care depinde de Z și de sistemul dat inițial $<m_1, \ldots, m_g>$. Notăm

$$<\alpha_p> = \Psi_Z^{(g)}(m_1, \ldots, m_g).$$

Dacă nu există un calcul care să înceapă cu α_1, adică nu există p astfel încît α_p să fie descriere instantanee terminală, atunci $\Psi_Z^{(g)}$ nu este definit pentru sistemul respectiv.

Am obținut o funcție definită sau parțial definită pe N^g, pornind de la o mașină Turing Z. Reciproc, putem porni de la o funcție definită sau parțial definită pe N^g.

DEFINIȚIE. O *funcție* f definită pe N^g este *parțial calculabilă* dacă există o mașină Turing Z, astfel încît oricare ar fi sistemul de g numere pentru care există o valoare a lui f, are loc egalitatea :

$$f(x_1, \ldots, x_g) = \Psi_Z^{(g)}(x_1, \ldots, x_g).$$

O *funcţie* este *calculabilă* dacă este definită pe N^0 şi parţial calculabilă.

Observaţii : M. Davis ([3]) dă o altă variantă a maşinii Turing, anume : se adaugă la maşina Turing Z o mulţime A de întregi şi în matricea M mai apar linii de tipul : d) $q_iS_jq_kq_e$, care înseamnă că în situaţia (q_i, S_j) şi pentru descrierea instantanee α, maşina Z trece în starea q_k sau în starea q_e după cum conţinutul $<\alpha>$ al descrierii este sau nu în A. Maşina Turing la care nu apar aceste linii în matrice este numită maşină Turing simplă.

— H. Hermes ([7]) prezintă maşina Turing în acelaşi mod în care am prezentat-o aici. Comportarea maşinii este dată de următoarea

DEFINIŢIE. *Configuraţie* K a unei maşini este un triplet ordonat (A, B, C), unde :

— A este o celulă dată de numărul său ;

— B este o funcţie definită pe mulţimea numerelor întregi, care asociază fiecărui întreg n simbolul care se află în celula cu numărul n. B dă astfel expresia de pe bandă ;

— C este o stare q_j a maşinii Z.

Fiecare configuraţie (A, B, C) corespunde unei linii care începe cu $CB(A)$. Aceasta se numeşte *linia configuraţiei* K.

2. SISTEME COMBINATORII ŞI MAŞINI TURING

Teoria maşinilor Turing poate fi interpretată ca o parte a teoriei sistemelor semi-Thue.

Fie maşina Turing Z, căreia i se dă data m, prin reprezentarea sa $\overline{m}$. Calculul relativ la m se începe în descrierea instantanee $q_1\overline{m}$. Este posibil să existe sau nu un rezultat pentru acest calcul. Notăm cu P_z mulţimea întregilor nenegativi pentru care calculul ajunge la un rezultat. Presupunem că calculele sînt închise între două simboluri frontieră # (modificăm eventual Z).

Unei perechi (Z, m) îi asociem un sistem semi-Thue $(ST)_1$, de axiomă $\# \, q_1 \, \overline{m} \, \#$; alegem producţiile astfel încît unele teoreme ale sistemului $(ST)_1$ să corespundă descrierilor instantanee ale lui Z, în timp ce alte teoreme ne permit să facem să corespundă unei descrieri instantanee terminale teorema $\# \, r \, \#$ care are semnificaţia : există un rezultat pentru calculul cu data m la maşina Turing Z. Iată construcţia formală a sistemului $(ST)_1$:

(1) Fiecărei linii (din matricea M care descrie Z) de tipul : (a) $q_iS_jS_kq_e$ îi asociem schema de producţie :

$$Pq_iS_jQ \longrightarrow Pq_eS_kQ$$

care are ca efect trecerea de la descrierea instantanee Pq_iS_jQ la descrierea instantanee care decurge din aplicarea liniei respective.

(2) Fiecărei linii de tipul : (b) $q_iS_jRq_e$ şi fiecărui S_k din $\$$ (alfabetul maşinii Z) îi asociem toate producţiile :

$$Pq_iS_jS_kQ \longrightarrow PS_jq_eS_kQ$$

$$Pq_iS_j\#Q \longrightarrow PS_jq_eS_0\#Q.$$

(3) Fiecărei linii de tipul : (c) $q_iS_jLq_e$ și fiecărui simbol S_k din $\$$ îi asociem toate producțiile :

$$PS_kq_iS_jQ \longrightarrow Pq_eS_kS_jQ$$

$$P\#q_iS_jQ \longrightarrow P\#q_eS_0S_jQ.$$

Considerăm acum toate liniile pentru care mașina se oprește. Vrem să înlocuim rezultatul calculului într-un singur răspuns : $\# \ r \ \#$(existența unui rezultat). Pentru aceasta introducem producții care sînt asociate descrierilor instantanee terminale :

(4) $Pq_iS_jQ \longrightarrow PqS_jQ$ pentru toate perechile (q_i, S_j) care nu sînt situații ale mașinii Z.

(5) $PqS_jQ \longrightarrow PqQ$ pentru orice $S_j \in \$$;

(6) $Pq\#Q \longrightarrow Pr\#Q$;

(7) $PS_jrQ \longrightarrow PrQ$ pentru orice $S_j \in \$$.

Ceea ce am prezentat aici este o schiță de demonstrație (M. Davis [3]) pentru teorema :

TEOREMA 5.2.1. *Mașina Turing Z este aplicabilă datei m dacă și numai dacă $\# \ r \ \#$ este o teoremă a sistemului semi-Thue $(ST)_1$ asociat lui Z prin construcția precedentă.*

(Se poate scrie : $m \in P_z$ dacă și numai dacă $\vdash_{(ST)_1} \# \ r \ \#$).

Observații : — Sistemul $(ST)_1$ este monogen (adică fiecare teoremă admite cel mult o demonstrație în raport cu producțiile sistemului).

— $(ST)_1$ depinde de m doar prin axioma sa (producțiile și alfabetul sistemului nu depind de m).

— Considerăm familia de sisteme semi-Thue de tipul $(ST)_1$, care se obține cînd m parcurge mulțimea întregilor nenegativi, și o submulțime a întregilor nenegativi m pentru care se obține un calcul și care duce deci la teorema unică $\# \ r \ \#$.

Construim sistemul semi-Thue $(ST)_2$, cu axioma $\# \ r \ \#$ și avînd ca producții inversele producțiilor comune tuturor sistemelor $(ST)_1$.

TEOREMA 5.2.2. (M. Davis [3])$\cdot$ *$m \in P_z$ dacă și numai dacă $\vdash_{(ST)_2} \# q_1\overline{m} \#$.*

Într-adevăr, $m \in P_z$ dacă și numai dacă $\vdash_{(ST)_1} \# \ r \ \#$, care are loc dacă și numai dacă $\vdash_{(ST)_2} \# \ q_1\overline{m} \ \#$.

TEOREMA 5.2.3. (M. Davis [3]). *Fie sistemul Thue (T) cu același alfabet ca și sistemele* considerate mai sus, cu axioma $\#r\#$ și avînd ca producții reuniunea producțiilor sistemelor $(ST)_1$ și $(ST)_2$.

Mulțimea teoremelor sistemului Thue (T) coincide cu mulțimea teoremelor sistemului semi-Thue $(ST)_2$.

TEOREMA 5.2.4. (M. Davis [3]). *Fiind dat un sistem semi-Thue cu alfabetul $\{a, b, c, \ldots\}$, lui i se poate asocia un sistem normal cu alfabetul $\{a, a', b, b' \ c, c', \ldots\}$ astfel încît teoremele sistemului semi-Thue să fie acele teoreme ale sistemului asociat care nu conțin litere accentuate.*

TEOREMA 5.2.5. (M. Davis [3]). *Fiind dat un sistem Thue cu alfabetul $\{a, b, c, \ldots\}$, lui i se poate asocia un sistem Post cu alfabetul $\{a, a'$*

b, b', ... } astfel încît teoremele sistemului Thue să fie acele teoreme ale sistemului asociat care nu conţin litere accentuate.

Din teoremele 5.2.1 – 5.2.5 rezultă :

TEOREMA 5.2.6. *Orice mulţime recursiv enumerabilă poate fi generată de un sistem semi-Thue, de un sistem Thue, de un sistem normal sau de un sistem Post.*

Reciproca teoremei 5.2.6 o vom da mai jos, după cîteva observaţii preliminare (M. Davis [3]) :

Putem folosi tehnica lui Gödel pentru numerotarea simbolurilor dintr-un sistem combinator. Asociem fiecărui simbol a_i numărul impar $2i + 1$. Dacă $W = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$, atunci scriem $ng(W) = \prod_j Pr(j)^{2i_j+1}$ (unde $Pr(j)$ este al j-lea număr prim), $ng(E) = 1$.

Notăm cu $T_{\mathfrak{S}}$ mulţimea numerelor Gödel ale tuturor teoremelor sistemului combinator $\mathfrak{S}$. Evident :

(α) $\vdash_{\mathfrak{S}} W$ dacă şi numai dacă $ng(W) \in T_{\mathfrak{S}}$.

Notăm $S_{\mathfrak{S}} = \{x \mid \vdash_{\mathfrak{S}} \bar{x}\}$. Evident :

(β) $x \in S_{\mathfrak{S}}$ dacă şi numai dacă $\vdash_{\mathfrak{S}} \bar{x}$.

Din relaţiile (α) şi (β) rezultă :

(γ) $S_{\mathfrak{S}} = \{x \mid ng(\bar{x}) \in T_{\mathfrak{S}}\}$.

LEMA 1. *Dacă R este o mulţime recursiv enumerabilă şi $f(x)$ este recursivă, atunci $S = \{x \mid f(x) \in R\}$ este recursiv enumerabilă.*

LEMA 2. *$T_{\mathfrak{S}}$ este recursiv enumerabilă.*

LEMA 3. *$gn(\bar{x})$ este recursivă.*

Din cele trei leme rezultă imediat :

TEOREMA 5.2.7. *$S_{\mathfrak{S}}$ este o mulţime recursiv enumerabilă.*

Din teoremele 5.2.2 şi 5.2.7 rezultă că clasa maşinilor Turing este echivalentă cu o clasă particulară de sisteme combinatorii semi-Thue, care sînt tocmai gramaticile fără nici o restricţie — gramaticile de tipul 0.

CAPITOLUL VI

GRAMATICI ŞI LIMBAJE DE TIPUL 1

1. DEFINIŢIE. TEOREME DE CARACTERIZARE

După definiţia dată de N. Chomsky (în cadrul ierarhiei prezentate în capitolul IV), *o gramatică de tip 1* este deci o gramatică în care fiecare regulă este astfel încît al doilea cuvînt se obţine din primul înlocuind un singur simbol printr-un cuvînt nevid, contextul fiind păstrat.

DEFINIŢIE. *Gramatică de tip 1'* este o gramatică G care verifică condiţia : pentru orice regulă din G de forma $\varphi \to \psi$, $|\varphi| \leqslant |\psi|$.

Observație. Orice gramatică G de tip 1 este o gramatică de tip 1'. Într-adevăr, o regulă oarecare din G : $\varphi \to \psi$ este de forma :

$$\varphi_1 A \varphi_2 \to \varphi_1 \omega \varphi_2 (A \in V_N;\quad \varphi_1, \varphi_2, \omega \in V^*) \text{ cu } |\omega| \neq 0,$$

deci $|\omega| \geqslant 1$. Rezultă că :

$$|\varphi| = |\varphi_1| + |\varphi_2| + 1 \leqslant |\varphi_1| + |\varphi_2| + |\omega| = |\psi|.$$

Vom prezenta mai departe reciproca, deci gramaticile de tip 1 sînt echivalente cu gramaticile de tip 1'.

DEFINIȚIE. Un limbaj L este un *limbaj de tip 1* (*respectiv* 1') dacă există o gramatică G de tip 1 (resp. 1') care îl generează, adică pentru care :

$$L = L(G).$$

Observație. Putem defini gramatici de tipul 1 cu și fără simbol frontieră. Ca în cazul general, se demonstrează echivalența definițiilor.

Vom prezenta acum o serie de definiții și teoreme din care vor rezulta alte moduri echivalente de a defini gramaticile cu reguli contextuale.

DEFINIȚIE. Fie două gramatici $G = (V, V_T, S, P)$ și $G' = (V', V_T, S', P')$. Un homomorfism de monoid $\chi : V^* \to V'^*$ se numește *homomorfism de gramatici*, dacă sînt îndeplinite următoarele condiții :

1) restricția lui χ la V_T (deci la V_T^*) este aplicația identică;

2) $\chi(S) = S'$;

3) pentru orice regulă din P (mulțimea regulilor lui G) de forma $\varphi \to \psi$ avem :

— sau $\chi(\varphi) \to \chi(\psi)$ este o regulă a lui G';

— sau $\chi(\varphi) = \chi(\psi)$.

În primul caz punem pentru regula $\mathcal{R}$, $\chi(\mathcal{R}) \overset{\text{not}}{=} \mathcal{R}'$, în al doilea caz : $\chi(\mathcal{R}) \overset{\text{not}}{=} 0_{P'}$ ($0_{P'}$ — regula fără efect în G').

CONSECINȚĂ. *Gramatica G' este cel puțin „tot atît de tare" ca gramatica G, adică : $L(G) \subseteq L(G')$.*

Demonstrație. Fie derivația $\varphi_1 \varphi \varphi_2 \xrightarrow[G]{} \varphi_1 \psi \varphi_2$, cu regula $\mathcal{R} : \varphi \to \psi$:

— dacă $\chi(\mathcal{R}) = \mathcal{R}' : \chi(\varphi) \to \chi(\psi)$, atunci

$$\chi(\varphi_1 \varphi \varphi_2) \xrightarrow[G']{} \chi(\varphi_1 \psi \varphi_2);$$

— dacă $\chi(\mathcal{R}) = 0_{P'}$, atunci $\chi(\varphi) = \chi(\psi)$ și deci

$$\chi(\varphi_1 \varphi \varphi_2) = \chi(\varphi_1 \psi \varphi_2).$$

Deci în orice caz $\chi(\varphi_1 \psi \varphi_2)$ derivă din $\chi(\varphi_1 \varphi \varphi_2)$ după G'. Acest rezultat se extinde imediat la orice derivație care este o succesiune de derivații imediate.

În particular, pentru $y \in L(G)$, dacă : $S \underset{G}{\Rightarrow} y$, atunci : $\chi(S) = S' \Rightarrow \chi(y) = y$ pentru că $y \in V_T^*$. Astfel y este, de asemenea, o frază în $L(G')$, ceea ce demonstrează teorema.

DEFINIȚIE. O gramatică $G = (V, V_T, S, P)$ se numește *gramatică sintactică* dacă, pentru orice regulă, $\varphi \to \psi$ din P, sau $\psi \in V_N^*$ sau $\psi \in V_T^*$. Deci pentru o gramatică sintactică putem separa regulile în felul următor:

P_N — mulțimea regulilor neterminale,
P_T — mulțimea regulilor terminale,
$P_N \cup P_T = P$, $P_N \cap P_T = \emptyset$,

adică se realizează o partiție a lui P.

TEOREMA 6.1.1. (J. Friant [4]). *Orice gramatică de tipul 1 (respectiv 1') este echivalentă cu o gramatică sintactică de tipul 1 (resp. 1') (în demonstrație nu intervin condițiile din definiție, de aceea este indiferent cu care din cele două gramatici se lucrează).*

Schiță de demonstrație. Fie $G = (V, V_T, S, P)$ o gramatică de tipul 1. Definim $G' = (V', V_T, S, P')$ astfel:

$V'_N = V_N \cup V_1$ cu $V \cap V_1 = \emptyset$ și există o bijecție $\chi : V_T \to V_1$

— pentru $a_i \in V_T$, notăm $a'_i = \chi(a_i)$;

— pentru $A_j \in V_N$, punem $A_j = \chi(A_j)$.

Aplicația χ se poate extinde la un homomorfism $\chi : V^* \to V'^*$. Pentru $\varphi \in V^*$ notăm $\varphi' = \chi(\varphi)$. Un cuvînt $\varphi \in V^*$ se transformă astfel într-un cuvînt neterminal $\varphi' \in V'^*$, orice simbol terminal din φ fiind înlocuit cu simbolul corespunzător din $V_1 \subseteq V'_N \cdot P'$ este definit astfel:

— producții neterminale: unei reguli $\varphi \to \psi$ din P îi corespunde biunivoc $\chi(\varphi) \to \chi(\psi)$ în P'_N;

— producții terminale: pentru orice $a_i \in V_T$, $a'_i \to a_i$ este în P'_T.

Evident, G' este o gramatică sintactică.

Se arată că $L(G) = L(G')$.

DEFINIȚIE. O regulă $\varphi \to \psi$ a unei gramatici G de tipul 1 se numește *regulă de ordinul p dacă* $|\psi| = p$.

— G se numește *gramatică de ordinul n* dacă toate regulile sale au ordinul cel mult egal cu n.

TEOREMA 6.1.2. *Orice gramatică de tipul 1' este echivalentă cu o gramatică de tipul 1', de ordinul doi.*

(Demonstrația în J. Friant [4], pag. 58—62).

Se arată că o gramatică de ordinul n, $n \geqslant 3$, este echivalentă cu o gramatică de ordinul $n - 1$, ceea ce ne conduce la o gramatică de ordinul doi, prin repetarea procedeului.

DEFINIȚIE. *Gramatică normală de tipul 1'*, este o gramatică de tipul 1', sintactică și de ordinul doi (ceea ce se poate presupune conform rezultatelor obținute) în care regulile terminale sînt de ordinul întîi și regulile neterminale de tipul $A \to B$ sînt înlăturate, deci regulile neterminale sînt de una din formele: $AB \to CD$ sau $A \to BC$ (înlăturarea regulilor $A \to B$ nu micșorează capacitatea generativă a gramaticii).

Observație. Vom regăsi rezultatul obținut aici în cazul gramaticilor acontextuale.

TEOREMA 6.1.3. (Rezultă imediat din definiția de mai sus). *Orice gramatică de tipul 1' este echivalentă cu o gramatică normală de tipul 1'.*

Definiție. Se spune că o *gramatică G de tipul 1′ păstrează lungimea*, dacă pentru orice regulă din G, $\varphi \to \psi$:

— sau φ este simbolul inițial;

— sau ψ nu conține simbolul inițial și φ și ψ au aceeași lungime, adică, oricare ar fi regula $\varphi \to \psi$, $\varphi \neq S$ implică $|\varphi| = |\psi|$ și ψ nu conține simbolul inițial S.

Definiție. *O gramatică de tipul 1′ liniar mărginită* este o gramatică G de tipul $1'$, de ordinul doi, care păstrează lungimea și în care orice regulă de forma : $S \to A\alpha$ are $A = S$ și $\alpha \neq S$ $(\alpha \in V)$.

Teorema 6.1.4. (S. J. Kuroda [8]). *Orice gramatică de tipul 1′ este echivalentă cu o gramatică de tipul 1′ liniar mărginită.*

Schiță de demonstrație. Fie $G = (V, V_T, S, P)$ presupusă normală, de tip $1'$. Deci regulile terminale sînt de tipul : (1) $A \to a$, iar regulile neterminale sînt de unul din tipurile : (2) $\alpha_i\alpha_j \to \alpha_k\alpha_l$ sau (3) $\alpha_i \to \alpha_k\alpha_l (\alpha \in V)$. Putem presupune $S = \alpha_0$.

Definim gramatica $G' = (V', V_T, S', P')$ astfel : $V' = V \cup \{S', W\}$ (S' și W sînt simboluri noi).

S' este simbolul inițial al lui V'.

P' conține regulile :

— reguli speciale :

(4′) $S' \to S'W$;

(5′) $S' \to S$;

(6′) $\forall A_i \in V_N,\ A_iW \to WA_i$;

— reguli care corespund celor din P :

— Orice regulă de tip (1) și (2) va fi regulă în G', deci $P'_T = P_T$.

— Orice regulă de tip (3) se înlocuiește în P' cu o regulă :

(3′) $\alpha_i W \to \alpha_k \alpha_l$.

Se vede imediat că G' este o gramatică liniar mărginită. Se arată că $L(G) = L(G')$.

Teorema 6.1.5 (J. Friant [4]). *Mulțimea limbajelor de tipul 1 este identică cu mulțimea limbajelor de tipul 1′.*

Schiță de demonstrație. a) Orice limbaj de tipul 1 este un limbaj de tipul 1′ deoarece, după cum am arătat, orice gramatică de tipul 1 este o gramatică de tipul 1′.

b) Orice limbaj de tipul 1′ este un limbaj de tipul 1. Într-adevăr :

Fie L un limbaj de tipul 1′, adică există o gramatică $G = (V, V_T, S, P)$ de tipul 1′ pentru care $L = L(G)$. Putem presupune (pe baza teoremelor anterioare) că G este sintactică și de ordinul 2. Deci regulile de producție sînt de unul din tipurile :

(1) $\alpha_i \to \alpha_k$

(2) $\alpha_i \alpha_j \to \alpha_k \alpha_l$

(3) $\alpha_i \to \alpha_k \alpha_l$.

Vom construi $G' = (V', V_T, S, P')$, de tipul 1, echivalentă cu G, cu $V \subset V'$ și P' definit astfel :

— regulile (1) și (3), care satisfac condițiile ce trebuiesc îndeplinite de o gramatică de tipul 1, vor fi reguli și în G';

— pentru fiecare regulă (2) vom introduce două simboluri, de fiecare dată altele, şi în G' regula (2) va fi înlocuită cu următoarele patru reguli care sînt reguli ale unei gramatici de tipul 1.

$$(2_1) \quad \alpha_i \alpha_j \to \alpha'_i \alpha_j$$
$$(2_2) \quad \alpha'_i \alpha_j \to \alpha'_i \alpha'_j$$
$$(2_3) \quad \alpha'_i \alpha'_j \to \alpha_k \alpha'_j$$
$$(2_4) \quad \alpha_k \alpha'_j \to \alpha_k \alpha_l; \qquad \alpha'_i, \alpha'_j \notin V.$$

Este evident că G' este o gramatică de tip 1.

Se defineşte aplicaţia $\chi : P \to P'$ astfel :

— dacă $\mathfrak{R} \in P$ este de tip (1) sau (3), atunci $\chi(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R} \in P'$.

— dacă $\mathfrak{R} \in P$ este de tip (2), atunci $\chi((2)) = (2_1)\,(2_2)\,(2_3)\,(2_4)$.

Pentru a demonstra că G şi G' sînt echivalente se foloseşte un criteriu de echivalenţă ([4] — pag. 51—54).

Consecinţe. — Orice gramatică de tipul 1 este echivalentă cu o gramatică de tipul 1 şi de ordinul doi.

— Orice gramatică de tipul 1 este echivalentă cu o gramatică de tipul 1, normală.

— Orice gramatică de tipul 1 este echivalentă cu o gramatică de tipul 1, liniar mărginită.

(Evident, din teorema 6.1.5 şi teoremele 6.1.2, 6.1.3. şi 6.1.4. respectiv)

2. PROPRIETĂŢI DE ÎNCHIDERE ÎN CLASA LIMBAJELOR CONTEXTUALE

DEFINIŢIE. *O mulţime M se numeşte închisă (stabilă)* faţă de o operaţie dacă, aplicînd această operaţie oricărui element din M dacă este unară sau oricărei perechi de elemente din M dacă este binară etc., rezultatul aparţine mulţimii M.

TEOREMA 6.2.1. (J. Friant [4]). *Mulţimea limbajelor contextuale este închisă faţă de operaţiile : reuniune, produs, imagine inversă, stelare.*

Tot în [4], J. Friant introduce o nouă operaţie : operaţia de prelungire a unui limbaj, definită astfel :

DEFINIŢIE. *Fie L_1, L_2* limbaje pe acelaşi vocabular terminal. Se numeşte *prelungire la stînga* (resp. *la dreapta*) *a limbajului L_2 în limbajul L_1*, mulţimea :

$$L_1[L_2] = \{x \mid x \in L_1,\ y \in L_2 : x = zy\}$$
$$\text{(resp.)}\ [L_2]L_1 = \{x \mid x \in L_1,\ y \in L_2 : x = yz\}.$$

Se demonstrează că :

— Prelungirea unui limbaj acontextual într-un limbaj acontextual nu este în mod necesar un limbaj acontextual.

— Prelungirea unui limbaj contextual într-un limbaj contextual este un limbaj contextual.

TEOREMA 6.2.3. (P. S. Landweber [9]). *Mulţimea limbajelor contextuale este închisă faţă de operaţia de intersecţie.*

3. RECURSIVITATE ŞI NEDECIDABILITATE

Recursivitate. Problema cuvîntului este următoarea : Pentru un limbaj L se pune întrebarea dacă, fiind dat un cuvînt oarecare x , există un procedeu efectiv pentru a determina dacă x este sau nu o frază a lui L.

DEFINIŢIE. *Limbaj recursiv* este un limbaj pentru care această problemă este efectiv rezolvată.

TEOREMA 6.3.1. *Limbajele de tipul 1 sînt limbaje recursive* (N. Chomsky [2]).

Demonstraţia se bazează în mod esenţial pe faptul că lungimea cuvîntului nu descreşte. Deci nu trebuie să considerăm pentru fiecare cuvînt decît un număr finit de derivări care duc la el, pornind de la S.

Nedecidabilitate. DEFINIŢIE. *O proprietate este decidabilă*, dacă există un algoritm general care să permită să afirmăm, în *toate* cazurile particulare, sau că este adevărată sau că este falsă.

Observaţie. Pentru a stabili nedecidabilitatea, este suficient să o stabilim pentru o clasă mai restrînsă decît clasa în cauză.

Din această observaţie rezultă că nedecidabilitatea unor proprietăţi pentru limbajele contextuale este demonstrată dacă s-a demonstrat în cazul limbajelor acontextuale. De aceea, anticipînd unele rezultate pe care le vom da în capitolul VIII, paragraful 3, putem enunţa următoarele teoreme :

— Problema de a şti dacă intersecţia a două limbaje contextuale este vidă sau nu este nedecidabilă.

— Problema de a şti dacă intersecţia a două limbaje contextuale este infinită este nedecidabilă.

— Problema de a şti dacă intersecţia a două limbaje contextuale este un limbaj de tipul 2 sau dacă este un limbaj de tipul 3 este nedecidabilă.

— Problema de a şti dacă complementara unui limbaj contextual este un limbaj vid, finit, de tip 2 sau de tip 3 este nedecidabilă.

— Problema de a şti dacă două limbaje contextuale sînt echivalente este nedecidabilă.

— Problema de a şti dacă pentru două limbaje contextuale L_1 şi L_2 are loc relaţia $L_1 \subseteq L_2$ este nedecidabilă.

CAPITOLUL VII

AUTOMATE CU MEMORIA LINIAR-MĂRGINITĂ

Automatele cu memoria liniar-mărginită (automatele liniar mărginite sau m.l.m) au fost definite de J. Myhill în 1960 (în *Linear-bounded automata*, WADD Tech. Note No. 60—165, Wright-Patterson, Air Force Base, Ohio). Myhill le consideră *deterministe* cu o mică modificare făcută de S. J. Kuroda (pe care o vom preciza), definiţia automatului m.l.m. este următoarea :

DEFINIŢIE. *Automat cu memoria liniar-mărginită* este un sistem $(\mathcal{S}, V, S_0, F, \mu)$, unde :

— $\mathcal{S}$ este o mulţime finită (mulţimea stărilor) ;
— V este o mulţime finită (vocabularul) ;
— S_0 este un element din $\mathcal{S}$ (stare iniţială) ;
— F este o submulţime a lui $\mathcal{S}$ (mulţimea stărilor finale) ;
— μ este funcţia de comportare a automatului.

$\mu : V' \times \mathcal{S} \rightarrow V' \times \mathcal{S} \times \{-1, 0, 1\}$, unde $V' = V \cup \{\#\}$. Simbolul $\#$ satisface condiţia : dacă $\mu(\#, S) = (a, S', k)$, atunci $a = \#$ ($\#$ nu este din V şi această condiţie arată că $\#$ nu este afectat în timpul calculului).

Acest automat poate fi considerat ca obţinut prin abstractizarea unui dispozitiv fizic, format dintr-o bandă împărţită în celule, un cap de citire-scriere şi o unitate centrală.

Pe bandă se scrie cu ajutorul unui vocabular V completat cu un simbol special $\#$ care serveşte doar la încadrarea cuvîntului examinat.

Unitatea centrală prezintă o mulţime finită de stări $\mathcal{S} = \{S_0, S_1, \ldots, S_n\}$, printre care se distinge o stare iniţială şi o mulţime de stări finale.

Capul de citire-scriere efectuează operaţiile indicate de o mulţime finită de instrucţiuni de tipul : $(a, S) \rightarrow (a', S', k)$, $k \in \{-1, 0, 1\}$, fiecare astfel de instrucţiune corespunzînd relaţiei $\mu(a, S) = (a', S', k)$.

Automatul funcţionează astfel : Data de intrare este un şir de elemente din V, încadrat de simboluri frontieră : $\# x \#$. Înainte de a opera asupra datei, automatul este plasat în starea iniţială S_0.

(i) La început examinează simbolul frontieră din stînga.

(ii) Aplică instrucţiunile. O instrucţiune este interpretată astfel : Dacă simbolul citit pe bandă este a, în timp ce unitatea centrală se află în starea S, atunci unitatea centrală trece în starea S', capul de citire-scriere înlocuieşte a cu a' şi se poziţionează pe celula din dreapta pentru $k = +1$, pe celula din stînga pentru $k = -1$ şi rămîne pe aceeaşi celulă pentru $k = 0$. După cum am mai spus, dacă $a = \#$, atunci şi $a' = \#$.

(iii) Dacă capul de citire-scriere atinge simbolul frontieră din dreapta şi dacă unitatea centrală se găseşte atunci într-o stare finală, şirul x este *acceptat* de automat ; în caz contrar, x este *refuzat* de automat.

DEFINIŢIE. *Limbaj acceptat de un automat m.l.m.* este mulţimea şirurilor acceptate de acel automat.

Observaţie. Dacă presupunem că μ este o funcţie multivalentă, obţinem un *automat nedeterminist*. Vom înţelege prin automat m.l.m. un automat nu în mod necesar determinist.

DEFINIŢIE. *Şir acceptat de un automat* $\mathcal{A}$ este un şir pentru care există un calcul al lui $\mathcal{A}$ astfel încît, dacă şirul este prezentat automatului ca dată de intrare, acest calcul ajunge la simbolul frontieră din dreapta, în timp ce automatul se află într-o stare finală.

DEFINIŢIE. *Şir refuzat de* $\mathcal{A}$ este un şir pentru care există un calcul al lui $\mathcal{A}$, astfel încît dîndu-ne şirul ca dată de intrare, calculul să nu se termine niciodată, să se termine dincolo de capătul stîng al benzii sau dincolo de capătul drept al benzii, dar nu într-o stare finală.

Datorită caracterului nedeterminist al lui $\mathcal{A}$, un şir poate fi, în general, atît acceptat, cît şi refuzat de $\mathcal{A}$.

DEFINIȚIE. — *Limbajul acceptat de* $\mathcal{A}$ este mulțimea șirurilor acceptate de $\mathcal{A}$.

— *Limbajul refuzat de* $\mathcal{A}$ este mulțimea șirurilor refuzate de $\mathcal{A}$.

Observație. Definiția dată aici a automatului cu memoria liniar mărginită este în esență aceeași cu cea dată de Myhill, dar pare diferită deoarece scoate în evidență rolul simbolurilor frontieră. Se vede imediat că ne putem lipsi de simbolul frontieră din stînga. Într-adevăr, putem, de exemplu, să dublăm vocabularul, asociind fiecărei litere o copie marcată. La prima explorare a literei, care este prima din stînga, presupunem că automatul o înlocuiește cu copia sa marcată și că literele marcate nu pot fi înlocuite decît tot prin litere marcate. În felul acesta la capătul din stînga se află întotdeauna o literă marcată și automatul poate recunoaște capătul stîng al benzii. Pe de altă parte, simbolul frontieră din dreapta este necesar, dar trebuie să ne referim la el doar odată. Într-adevăr, la începutul calculului înlocuim litera din capătul drept (care precede $\#$) cu copia sa marcată. Astfel automatul poate recunoaște și capătul drept al benzii. Deci putem face convenția, o dată pentru totdeauna, că automatul m.l.m. poate recunoaște ambele capete ale benzii și că funcția $\mu : V' \times \$$ este mai curînd $\mu : V \times \$$.

Vom da acum o teoremă importantă care stabilește legătura între limbajele de tipul 1 și limbajele acceptate de automatele cu memoria liniar-mărginită.

TEOREMA 7. *Clasa limbajelor contextuale coincide cu clasa limbajelor acceptate de automatele m.l.m.*

Teorema este demonstrată prin următoarele două rezultate :

TEOREMA 7′ (S. J. Kuroda [8]). *Pentru orice gramatică contextuală* G, *există un automat m.l.m. care acceptă limbajul* $L(G)$.

TEOREMA 7″ (Peter S. Landweber [9]). *Dacă* $\mathcal{A}$ *este un automat m.l.m., atunci există o gramatică contextuală* G *astfel încît* $L(G) = L(\mathcal{A})$ (*am notat* : $L(\mathcal{A})$ = *limbajul acceptat de* $\mathcal{A}$).

CAPITOLUL VIII

GRAMATICI ȘI LIMBAJE DE TIPUL 2

1. DEFINIȚII

Gramaticile de tipul 2 ocupă, după cum am văzut, un loc intermediar în ierarhia lui Chomsky.

Se cunosc diverse variante ale definiției unei gramatici și unui limbaj acontextual care (vom arăta), în majoritate, se dovedesc a fi echivalente.

DEFINIȚIA I. Aceasta este cea dată de N. Chomsky în 1959, anume definiția 1 a gramaticii (capitolul IV) cu restricția : Dacă $\varphi \rightarrow \psi$, atunci există trei secvențe φ_1, φ_2, ω și $A \in V_N$ astfel încît : $\varphi = \varphi_1 A \varphi_2$, $\psi = \varphi_1 \omega \varphi_2$, $\omega \neq E$, $A \rightarrow \omega$.

Gramaticile acontextuale apar astfel ca sisteme semi-Thue particulare.

DEFINIȚIE. *Limbaj acontextual* este un limbaj L generat de o gramatică acontextuală G (se notează $L(G)$).

Observaţii :

— *Cuvîntul E*, de lungime nulă, *nu aparţine limbajului* generat de această gramatică.

— Simbolul frontieră # nu apare în reguli, dar am arătat că se poate da o variantă în care $\# \in V_N$ şi # apare în reguli (capitolul IV).

Această definiţie a gramaticii de tipul 2 este adoptată ca punct de plecare şi în [8] şi [11].

Sub o altă formă, evident echivalentă, o găsim la M. P. Schützenberger ([15]) :

DEFINIŢIA II. *Limbaj acontextual* — pe un alfabet V_T — este o submulţime L a mulţimii V_T^*, care poate fi obţinută prin următorul procedeu : Fie $V_A = \{\xi_j\}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ o altă mulţime de litere (vocabular neterminal sau auxiliar în terminologia lui N. Chomsky) şi fie $V^* = (V_T \cup V_A)^*$. O gramatică acontextuală asociază fiecărui $\xi_j \in V_A$ o mulţime finită p_j de cuvinte din V^* care nu conţine cuvîntul vid E sau alt cuvînt care constă dintr-o singură literă din $V_A \cdot V_A$ şi V_T sînt finite.

Fie H cea mai mică submulţime a mulţimii V^* care conţine ξ_j şi fiecare cuvînt $h'hh''$ $(h, h', h'' \in V^*)$, dacă conţine $h' \xi_j h''$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ şi dacă $h \in p_j$. Atunci $L = H \cap V_T^*$ este limbajul acontextual generat de gramatica $\{p_j\}$.

Observaţie. Condiţia ca p_j să nu conţină un cuvînt format dintr-o singură literă din V_A nu micşorează capacitatea generativă a gramaticii. Într-adevăr, putem contracta (vezi definiţia de mai jos) regulile $\xi_i \to \xi_j$, $\xi_j \to \omega_j$ $(\omega_j \in p_j)$ într-o regulă $\xi_j \to \omega_j$ şi limbajul generat rămîne acelaşi.

DEFINIŢIE. Considerăm o derivare $A \Rightarrow \varphi$, cu $A \in V_A$ şi $\varphi \in V^*$. *A contracta* această *derivare* înseamnă a adăuga la gramatică regula $A \to \varphi$, ceea ce nu schimbă limbajul generat de gramatică.

DEFINIŢIA III. (S. Scheinberg [14]). *Gramatica acontextuală* este o mulţime finită de reguli : $\alpha \to \psi$, unde α este un simbol şi ψ este un şir finit de simboluri dintr-un alfabet V. V conţine exact simbolurile care apar în aceste reguli plus simbolul frontieră # care nu apare în reguli. Regula $\alpha \to \alpha$ (care nu are efect) nu este permisă.

Definim V_N şi V_T astfel încît $V_N \cup V_T = V$, $V_N \cap V_T = \varnothing$ şi V_N este mulţimea tuturor simbolurilor α din V care apar în partea stîngă a regulilor lui G, deci a tuturor simbolurilor α pentru care există un şir φ cu $\alpha \to \varphi$ regulă în G.

G generează o relaţie binară „$\to$" pe mulţimea V^* astfel : $\varphi \to \psi$ dacă şi numai dacă există şirurile φ_1, φ_2, α, σ astfel încît $\varphi = \varphi_1 \alpha \varphi_2$, $\psi = \varphi_1 \sigma \varphi_2$ şi $\alpha \to \sigma$ este o regulă în G.

DEFINIŢIE. *Limbajul generat de G* : $L(G) = \{x \mid x \in V_T^*, \# S \# \Rightarrow x\}$.

Observaţie. Faptul că regula $\alpha \to \alpha$ nu este permisă nu micşorează capacitatea generativă a gramaticii pentru că este un caz particular al celui discutat mai sus : regulile $\alpha \to \alpha$ şi $\alpha \to \varphi$ se pot contracta într-o singură regulă $\alpha \to \varphi$.

Nu se specifică existenţa sau nonexistenţa simbolului unitate E printre frazele terminale ale limbajului. Deoarece nu se pune condiţia ca pentru o regulă $\alpha \to \varphi$ să avem $\varphi \neq E$, clasa limbajelor generate de gramatica definită de Scheinberg este mai largă decît clasa limbajelor după definiţiile I şi II.

Vom da mai jos o teoremă care arată că dacă $L(G)$ este un limbaj acontextual care conține E, atunci se poate construi o gramatică G' „vecină" cu G astfel ca $L(G') = L(G) - \{E\}$.

DEFINIȚIA IV. *Gramatică acontextuală* este un sistem $G = (V, V_T, S, P)$, unde :

V — alfabet : mulțime finită de simboluri

$V_T \subseteq V$, V_T = alfabetul terminal

$V_N = V - V_T$ = alfabetul neterminal

$S \in V_N$, S — simbol inițial

$P = \{(u, v)) \mid u \in V_N,\ v \in V^*\}$ mulțime finită de reguli (Observație : (u, v) se mai notează $u \to v$).

Limbaj acontextual $L(L \subseteq V^*)$ este un limbaj generat de o gramatică acontextuală G.

Se notează ca mai sus : $L(G)$.

Se scrie : $\varphi \to \psi$ pentru $\varphi, \psi \in V^*$ dacă există $\varphi_1, \varphi_2, u, v$ din V^* $(u \in V_N)$ cu proprietățile : $\varphi = \varphi_1 u \varphi_2$, $\psi = \varphi_1 v \varphi_2$ (definiție dată de S. Ginsburg [5]).

Observație. La fel ca în cazul definiției II și spre deosebire de definițiile I și III, gramatica acontextuală dată de S. Ginsburg este fără simbol frontieră. Teorema 1 din capitolul IV demonstrează că acest fapt nu micșorează capacitatea generativă a gramaticii.

La fel ca în cazul precedent, E poate figura printre frazele terminale.

Deci, remarcînd că în rest definițiile coincid, putem trage concluzia că gramatica dată de definiția III este echivalentă cu gramatica dată de definiția IV (clasa limbajelor generate de gramaticile III coincide cu clasa limbajelor generate de gramaticile IV).

Enunțăm acum o teoremă anunțată mai sus, pentru care sînt necesare unele considerații preliminare.

Uneori, este preferabil să considerăm toate producțiile din P de forma : $\xi \to v$ cu $v \neq E$. Dacă E este în $L(G)$, atunci există producții de forma $\xi \to E$. Dacă E nu este în $L(G)$, atunci o gramatică care generează $L(G)$ trebuie să nu aibă producții de această formă.

DEFINIȚIE. *O gramatică* $G = (V, V_T, S, P)$ se numește „*E-free*" dacă $v \neq E$ pentru toate producțiile $\xi \to v$ din P.

LEMĂ. *Fie* $G = (V, V_T, S, P)$ *o gramatică acontextuală cu n simboluri neterminale.*

Fie

$$W_1 = \{\xi \mid \xi \to E\}$$

și

$W_{k+1} = W_k \cup \{\xi \mid$ *există* $v \in W_k^*,\ \xi \to v\}$ (*pentru toți* $k \geqslant 0$). *Atunci* :

a) $W_i \subseteq W_n$ *pentru fiecare i* ;

b) $\xi \in W_n$ *dacă și numai dacă* $\xi \in V_N$ și $\xi \Rightarrow E$ (*demostrația este imediată*).

TEOREMA 8.1.1. (S. Ginsburg [5]). *Fie* $G = (V, V_T, S, P)$ *o gramatică acontextuală cu n neterminale.*

Fie W_n *cel obţinut din lemă.*

Fie P' *mulţimea tuturor producţiilor* $\xi \to x$ *cu* $x \neq E$ *obţinute astfel: există o producţie* $\xi \to y$ *în* P *astfel ca* x *să fie obţinut din* y *prin suprimarea lui* E *sau a apariţiilor în* y *ale elementelor din* W_n.

Atunci, $G' = (V, V_T, S, P')$ *este o gramatică „E-free"* *şi* $L(G') = L(G) - \{E\}$.

REPREZENTAREA LIMBAJELOR ACONTEXTUALE CU GRAFURI

DEFINIŢIE. *Graf finit direct* este o pereche (V, D), unde:

V este mulţime finită nevidă (mulţimea nodurilor);

D şir finit $(p_1, q_1), \ldots, (p_r, q_r)$ de elemente din $V \times V$. (p_i, q_i) se numeşte linie directă (arc) de la p_i la q_i.

DEFINIŢIE. *Graf finit direct, cu rădăcină, cu noduri etichetate* este un sistem (V, D, H, f, S_0), unde:

a) (V, D) este un graf finit direct, cu $D: (p_1, q_1), \ldots, (p_r, q_r)$.

b) H este o mulţime finită nevidă (mulţimea etichetelor nodurilor).

c) $f: V \to H$ ($f(v)$ este eticheta lui v).

d) $s_0 \in V$ este rădăcina.

e) $q_i \neq q_j$ pentru $i \neq j$.

f) pentru $q \neq s_0$, există un drum (o succesiune de arce) de la s_0 la q.

g) nu există q în V astfel încît să existe un drum de la q la q.

Într-o gramatică acontextuală $G = (V, V_T, S, P)$ asociem fiecărei derivaţii $\xi = w_1 \to \ldots \to w_r = w (\xi \in V_N, w_i \in V^*)$ un arbore finit direct cu rădăcină şi noduri marcate, numit *arbore generator*.

Arborele generator pentru $\xi = w_1 \to \ldots \to w_r = w$ sau arborele generator pentru $\xi \Rightarrow w$ este construit astfel: Nodurile sînt sisteme $(i_1, \ldots, i_k)$, unde $k \leqslant r$ şi i_j întreg pozitiv. Liniile directe ale arborelui sînt toate perechi ordonate $(i_1, \ldots, i_k)$, $(i_1, \ldots, i_k, i_{k+1})$ de noduri.

Pentru fiecare i, fie Π_i producţia $y_i \to z_i$, astfel ca $u_i y_i v_i = w_i$ şi $u_i z_i v_i = w_{i+1}$. 1-uplul (1) este rădăcină şi ξ este eticheta sa. Dacă $w_2 = E$, fie (1,1) un nod în arbore şi E eticheta lui (1,1). Dacă $w_2 = x_{21} \ldots x_{2n(2)}$ este un cuvînt, fie $(1, i)$, $1 \leqslant i \leqslant n(2)$, un nod şi x_{2i} eticheta sa. Presupunem că, pentru orice $t \leqslant k$, fiecare apariţie în w_t a unui element din V serveşte ca etichetă pentru un nod. Acum:

$$(\ast) \quad u_k y_k v_k = w_k \Rightarrow w_{k+1} = u_k z_k v_k.$$

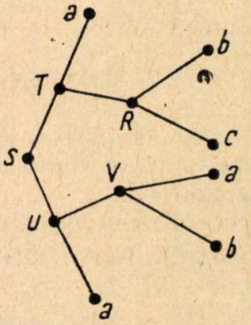
Fie $(i_1, \ldots, i_s)$ nodul a cărui etichetă este apariţia lui y_k indicată în $(\ast)$. Dacă $z_k = E$, fie $(i_1, \ldots, i_s, 1)$ un nod şi E eticheta sa. Dacă $z_k = x_{k1} \ldots x_{kn(k)}$ este un cuvînt, fie $(i_1, \ldots, i_s, i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n(k))$ un nod şi x_{ki} eticheta sa. Procedeul se repetă pentru toţi $k \leqslant r - 1$. Arborele finit, direct, cu rădăcină şi cu noduri etichetate care rezultă este un arbore generator. Se spune că *realizează* sau *este realizat de*:

$$\xi = w_1 \to \ldots \to w_r = w.$$

Din construcţie, fiecare apariţie a fiecărui element din V este eticheta unui nod în arborele generator. Uneori, pentru simplificare, spunem de exemplu : „apare în arborele generator'' în loc de „este eticheta unui nod în arborele generator''.

Exemplu :

$$G = (V, V_T, S, P),\ P: \left|\begin{array}{l} S \to TU \\ T \to aR \\ R \to bc \\ U \to Va \\ V \to ab \end{array}\right|$$



DEFINIŢIA V. *Gramatica acontextuală normală* este o gramatică dată de oricare din definiţiile de mai sus cu condiţia ca regulile neterminale să fie de forma : $A \to BC$ ($B \neq C$; A, B, $C \in V_N$) şi regulile terminale să fie de forma : $A \to a$ ($A \in V_N$, $a \in V_T$). Arătăm că aceste condiţii, care impun o anumită formă regulilor gramaticii, nu constituie o restricţie, deci nu micşorează capacitatea generativă a gramaticilor acontextuale.

TEOREMA 8.1.2. *Dacă G este o gramatică de tipul 2, atunci există o gramatică G^* de tipul 2, normală, echivalentă cu G (invers este banal).*

Demonstraţie. Regulile lui G sînt de forma : $A \to \beta_1 \ldots \beta_n$.

Fiecare regulă de această formă, cu $n > 2$, o înlocuim cu regulile :

$$R_1 : A \to \beta_1 \ldots \beta_{n-2} B$$

$$R_2 : B \to \beta_{n-1} \beta_n$$

unde B este un neterminal nou. Continuînd astfel obţinem o gramatică G_1. în care regulile sînt de forma : $A \to \beta_1\beta_2$.

Dacă G_1 conţine regula $A \to ab$, o înlocuim cu $A \to BC$, $B \to a$, $C \to b$, unde B şi C sînt simboluri neterminale noi. Dacă G_1 conţine regula $A \to aB$, o înlocuim cu $A \to CB$ şi $C \to a$, unde C este un neterminal nou. Dacă G_1 conţine regula $A \to Ba$, o înlocuim cu $A \to BC$ şi $C \to a$, unde C este un neterminal nou. Regulile $A \to BC$ le lăsăm neschimbate. Obţinem astfel o gramatică G_2, care este tocmai gramatica G^* cerută de teoremă.

c.c.t.d.

Rezultă de aici că toate limbajele de tipul 2 pot fi generate de gramatici reprezentate cu arbori care nu au mai mult ca două ramuri pornind de la un nod.

DEFINIŢIA VI. În sfîrşit, vom introduce clasa aşa-numitor „*ALGOL-like languages*'' care reprezintă un model pentru limba internaţională de programare ALGOL. Formalizarea se numeşte *forma normală a lui Backus* (BNF) şi este folosită la descrierea mai multor limbaje de programare.

Considerăm următoarele „ecuaţii", care sînt tipice pentru definirea claselor sintactice din ALGOL:

(1) < identificator > : : = < literă > | < identificator > < literă > | < identificator > < cifră >

(2) < întreg fără semn > : : = < cifră > | < întreg fără semn > < cifră >

(3) < marcă > : : = < identificator > | <întreg fără semn >

Înlocuim < identificator > cu I_1, < literă > cu L, < cifră > cu C, < întreg fără semn > cu I_2, < marcă > cu M, : : = cu = şi | cu $\bigcup$. Obţinem „ecuaţiile" sub forma:

(1′) $I_1 = L \cup I_1L \cup I_1C$

(2′) $I_2 = C \cup I_2C$

(3′) $M = I_1 \cup I_2$.

În ALGOL, L şi C sînt mulţimi finite de cuvinte (L este o mulţime finită de litere şi C este o mulţime formată din primii zece întregi nenegativi).

„Ecuaţiile" (1′), (2′) şi (3′) definesc mulţimile de cuvinte I_1, I_2 şi M astfel:

(4) $I_1 \supseteq L$, $I_2 \supseteq C$.

(5) Dacă $I_1 \supseteq I_1'$, $I_2 \supseteq I_2'$ şi $M \supseteq M'$, atunci
$I_1 \supseteq L \cup I_1'L \cup I_1'C$, $I_2 \supseteq C \cup I_2'C$, $M \supseteq I_1' \cup I_2'$.

(6) Singurele cuvinte în I_1, I_2 şi M sînt cele obţinute de ecuaţiile (4), (5).

Ignorînd cele două mulţimi finite L şi C, ecuaţiile (1′) — (3′) pot fi reprezentate în forma funcţională:

(1″) $I_1 = f_1(I_1, I_2, M)$

(2″) $I_2 = f_2(I_1, I_2, M)$

(3″) $M = f_3(I_1, I_2, M)$.

Pe baza teoremei de punct fix, soluţia minimală a sistemului (1″) — (3″) se obţine astfel:

(7) $I_1(0) = f_1(\emptyset, \emptyset, \emptyset) = L \cup \emptyset L \cup \emptyset C = L$

$I_2(0) = f_2(\emptyset, \emptyset, \emptyset) = C \cup \emptyset C = C$

$M(0) = f_3(\emptyset, \emptyset, \emptyset) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

(8) Pentru $k \geqslant 0$, fie:

$I_1(k+1) = f_1(I_1(k), I_2(k), M(k))$

$I_2(k+1) = f_2(I_1(k), I_2(k), M(k))$

$M(k+1) = f_3(I_1(k), I_2(k), M(k))$

(9) $I_1 = \bigcup_{k=0}^{\infty} I_1(k)$, $I_2 = \bigcup_{k=0}^{\infty} I_2(k)$, $M = \bigcup_{k=0}^{\infty} M(k)$.

Abstractizăm noţiunea de sistem de ecuaţii şi soluţia sa dată mai sus.

Considerăm funcţiile $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, care generalizează funcţiile $f_i(I_1, I_2, M)$ $(i = 1, 2, 3)$.

Definiţie. Fie Σ un alfabet. Fie $\xi_1, \ldots, \xi_n$ mulţime de variabile în 2^{Σ^*} şi fie $V = \Sigma \cup \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Considerăm funcţiile $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ construite cu variabilele ξ_i şi un număr finit de submulţimi ale lui Σ^* (numite coeficienţi), folosind operatorii de reuniune şi produs, de un număr finit de ori ; deci $f : (2^{\Sigma^*})^n \to 2^{\Sigma^*}$. Deoarece produsul e distributiv față de reuniune, fiecare astfel de funcție poate fi considerată ca un polinom $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \bigcup\limits_{i=1}^{s} \Pi_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, unde fiecare $\Pi_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, numit termen, este un produs de variabile și coeficienți. O funcție polinomială $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ în care toți coeficienții sînt finiți se numește *funcție standard*.

Deoarece produsul este distributiv față de reuniune, putem presupune că fiecare termen într-o funcție standard este un cuvînt în V^*.

Deoarece este vorba de un ,,sistem de ecuații'', este necesară o metodă de a discuta mai multe funcții simultan.

DEFINIȚIE. Fie $f_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ funcții standard $f_i : (2^{\Sigma^*})^n \to 2^{\Sigma^*}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Funcția $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) : (2^{\Sigma^*})^n \to (2^{\Sigma^*})^n$ definită astfel : $f(A_1, \ldots, A_n) = (f_1(A_1, \ldots, A_n), \ldots, f_n(A, \ldots, A_n))$ pentru fiecare $(A_1, \ldots, A_n)$ în $(2^{\Sigma^*})^n$, se numește *funcție standard n-ară*.

DEFINIȚIE. Fie $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ o funcție standard n-ară. Fie $\alpha^{(0)} = (\alpha_1^{(0)}, \ldots, \alpha_n^{(0)}) = f(\emptyset, \ldots, \emptyset)$ și, pentru fiecare k, fie $\alpha^{(k+1)} = (\alpha_1^{(k+1)}, \ldots, \alpha_n^{(k+1)}) = f(\alpha^{(k)})$. Pentru fiecare j, fie $\alpha_j = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_j^{(k)}$. Atunci, fiecare α_j se numește ,,*ALGOL-like language*'' și $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ se numește *soluția ecuației* $(\xi_1, \ldots, \xi_n) = f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Observație. Deși ,,ALGOL-like languages'' se obțin prin abstractizarea definiției claselor sintactice din ALGOL, aceste limbaje reprezintă doar *aproximații* ale claselor sintactice ale limbajelor de programare. Trebuie să se facă unele ipoteze suplimentare (J. Floyd). Ca și în cazul limbilor naturale, nu există un model complet satisfăcător pentru limbile de programare.

TEOREMA 8.1.3 (Ginsburg [5]). *Clasa limbajelor acontextuale coincide cu clasa limbajelor date de forma normală a lui Backus.*

Exemple de limbaje de tipul 2.

a) $L_m = \{x c \tilde{x} \mid x \in \{a, b\}^*\}$

$$G_m : \left| \begin{array}{l} S \to aSa \\ S \to bSb \\ S \to c \end{array} \right|$$

$V_N = \{S\}$, $V_T = \{a, b, c\}$

b) $L_{2m} = \{xc\tilde{x}yc\tilde{y} \mid x, y \in \{a, b\}^*\}$

$$G_{2m} : \left| \begin{array}{l} S \to TT \\ T \to aTa \\ T \to bTb \\ T \to c \end{array} \right|$$

$V_N = \{S, A, B, C,\}$, $V_T = \{a, b, c\}$

c) $L_1 = \{x\tilde{x} \mid x \in \{a, b\}^*\}$

$$G_1 : \left| \begin{array}{l} S \to aSa \\ S \to bSb \\ S \to aa \\ S \to bb \end{array} \right|$$

$V_N = \{S\}$, $V_T = \{a, b\}$

d) $L_2 = \{a^n c b^n\}$

$$G_2 : \left| \begin{array}{l} S \to CB \\ C \to AS \\ A \to a \\ B \to b \\ S \to c \end{array} \right|$$

$V_N = \{S, A, B, C\}$, $V_T = \{a, b, c\}$.

Observaţie. Am notat cu litere latine mari de tipar elementele lui V_N şi cu litere latine mici de tipar elementele lui V_T.

2. PROPRIETĂŢI DE ÎNCHIDERE ÎN CLASA LIMBAJELOR ACONTEXTUALE

TEOREMA 8.2. *Mulţimea limbajelor acontextuale este închisă faţă de operaţiile de reuniune, produs, stea, inversare, dar nu este închisă faţă de operaţiile de intersecţie şi de luare a complementarei.*

Demonstraţie. Fie $G_1 = (V_1, V_{T1}, S_1, P_1)$, $G_2 = (V_2, V_{T2}, S_2, P_2)$ şi $G = (V, V_T, S, P)$ gramatici acontextuale care generează L_1, L_2 şi L respectiv.

a) Dacă L_1 şi L_2 sînt limbaje acontextuale, atunci $L_1 \cup L_2$ este un limbaj acontextual.

Într-adevăr, pentru $i = 1, 2$ se înlocuieşte fiecare apariţie a fiecărui simbol neterminal α din G_i cu α_i, unde α_i este un simbol nou şi se adaugă regula $S \to S_i$ la regulile lui G_1 şi G_2. Se obţin gramaticile acontextuale : G_1' şi G_2' care generează respectiv L_1 şi L_2. S este singurul simbol neterminal comun şi apare doar în primul pas al derivării.

$G_1' \cup G_2'$ este, evident, o gramatică acontextuală care generează limbajul $L_1 \cup L_2$.

b) Dacă L_1 şi L_2 sînt limbaje acontextuale, atunci $L = L_1L_2$ este un limbaj acontextual.

Într-adevăr, se arată uşor că gramatica acontextuală G, care generează L_1L_2, are ca axiomă un simbol nou S şi ca reguli reuniunea regulilor lui G_1 şi G_2 completată cu $S \to S_1 S_2$, adică : $P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}$.

c) Operaţia stea aplicată unui limbaj acontextual dă un limbaj acontextual.

Într-adevăr, fie L generat de gramatica G.

Formăm L^2, L^3, ...

Considerăm : $L^* - \{E\} = L \cup L^2 \cup L^3 \cup \ldots$

Luăm ca axiomă T, un simbol nou, şi completăm G cu $T \to ST$, $T \to S$, deci $G^* = (V^*, V_T, T, P^*)$, unde

$$V_N^* = V_N \cup \{T\}$$

$$P^* = P \cup \{T \to ST,\ T \to S\}$$

G^* este, evident, o gramatică acontextuală.

Se arată uşor că $\underline{L^* = L(G^*)}$.

d) Operaţia de inversare aplicată unui limbaj acontextual L conduce la un limbaj acontextual $\widetilde{L}$.

Într-adevăr, fie limbajul L generat de gramatica G în care $P = \{A \to \varphi\}$. Prin operaţia de inversare, lui L îi corespunde $\widetilde{L}$ care este generat de gramatica $\widetilde{G} = \{A \to \widetilde{\varphi}\}$. Evident, $\widetilde{G}$ este o gramatică acontextuală.

e) Dacă L_1 şi L_2 sînt limbaje acontextuale, atunci $L = L_1 \cap L_2$ poate fi, dar nu este în mod necesar, un limbaj acontextual.

Într-adevăr,

(I) $L_0 = \{a^n ca^n\}$, $L_m = \{x c \widetilde{x} \mid x \in \{a, b\}^*\}$ sînt limbaje acontextuale.

$L_0 \cap L_m = L_0$ este un limbaj acontextual.

(II) $L_1 = \{a^n b^n c^n\}$, $L_2 = \{a^m b^q c^q\{$ sînt limbaje acontextuale.

$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^p\}$ nu este un limbaj acontextual (demonstrația în M. Gross și A. Lentin [6]).

e) Fie L un limbaj acontextual. Notăm $\overline{L}$ complementara lui L. $\overline{L}$ poate fi, dar nu este în mod necesar, un limbaj acontextual.

Într-adevăr, limbajul V_T^* este un limbaj acontextual pentru că poate fi generat de o gramatică care conține toate regulile de tipul $S \to aS$, $S \to Sa$, $S \to a$. Prin complementara unui limbaj înțelegem complementara în raport cu V_T^*.

Știm că: $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L}_1 \cup \overline{L}_2}$.

De aici se vede că dacă complementara ar păstra proprietatea de a fi limbaj acontextual, intersecția ar păstra-o de asemenea.

3. PROBLEME DE DECIZIE ȘI RECURSIVITATEA LIMBAJELOR ACONTEXTUALE

Observație. Am definit noțiunea de decidabilitate și am observat că pentru a stabili nedecidabilitatea este suficient s-o stabilim pentru o clasă mai restrînsă decît clasa în cauză (capitolul VI.3).

Proprietățile nedecidabile ale gramaticilor acontextuale rezultă din reducerea lor la *problema corespondenței lui Post*, care este următoarea:

Fie un alfabet V format din cel puțin două litere și $\Sigma = \{(x_1, y_1), \ldots, \ldots, (x_n, y_n)\}$ o mulțime finită de perechi de șiruri din V^*. O secvență de întregi $I = (i_1, \ldots, i_m)$, $1 \leqslant i_j \leqslant n$, o numim secvență de indexare pentru Σ. Spunem că I satisface Σ cînd: $x_{i_1} \ldots x_{i_m} = y_{i_1} \ldots y_{i_m}$.

Problema corespondenței este problema de a determina, dîndu-se Σ, dacă există I care să satisfacă Σ. Post a arătat în 1946 că această problemă este recursiv nedecidabilă, adică nu există un algoritm care să decidă, dîndu-se o mulțime arbitrară Σ de perechi de șiruri, dacă există o secvență de indexare care să satisfacă Σ.

Să observăm că dacă I satisface Σ, atunci și $II = (i_1, \ldots, i_m, i_1, \ldots, i_m)$ o satisface. În consecință, sau nu există o secvență de indexare care să satisfacă Σ sau există o infinitate de secvențe de indexare care satisfac Σ și de aceea problema de a ști dacă există o infinitate este de asemenea recursiv nedecidabilă.

Vom da ca model doar două demonstrații de acest tip, care se reduc la problema lui Post.

TEOREMA 8.3.1. *Problema de a ști dacă intersecția a două limbaje acontextuale este vidă sau nu este nedecidabilă.*

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm teorema într-un caz particular.

Fie două limbaje acontextuale, cu $V_T = \{a, b, c\}$:

L'_m generat de gramatica :	L_n generat de gramatica :
$G'_m : \left\lvert \begin{array}{l} S \to aSa \\ S \to bSb \\ S \to aca \\ S \to bcb \end{array} \right\rvert$	$G_n : \left\lvert \begin{array}{l} S \to g_i S\widetilde{h}_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n \\ S \to c \end{array} \right\rvert$
(coincide cu L_m cu excepția faptului că nu conține fraza „c”)	unde g_i și h_i sînt cuvinte nevide peste subalfabetul $\{a, b\}$

Problema de a ști dacă $L'_m \cap L_n$ este vid sau nu revine la aceea de a ști dacă există în L_n o frază $M\,c\,\widetilde{M}$. Altfel spus revine la a ști dacă există o secvență de indici $(i_1, \ldots, i_m)$, cu proprietatea că $g_{i_1} \ldots g_{i_m}$ este imaginea inversă a șirului $\widetilde{h}_{i_m} \ldots \widetilde{h}_{i_1}$. Deci problema este : dacă există o secvență de indici $(i_1, \ldots, i_m)$, astfel ca $g_{i_1} \ldots g_{i_m}$ și $h_{i_1} \ldots h_{i_m}$ să reprezinte aceeași frază M.

Se recunoaște aici problema lui Post pentru $\Sigma = \{(g_1, h_1) \ldots, \ldots, (g_n, h_n)\}$, care este nedecidabilă.

Deci, *problema generală este nedecidabilă.*

Observație. Știm că problema (Post) dă : sau nici o secvență de indexare, sau o infinitate de secvențe. De aici rezultă :

TEOREMA 8.3.2. *Problema de a ști dacă intersecția a două limbaje acontextuale este un limbaj infinit este nedecidabilă.*

TEOREMA 8.3.3. *Problema de a ști dacă intersecția a două limbaje de tipul 2 este sau nu un limbaj de tipul 3 este nedecidabilă.*

Demonstrație. Dacă $L_m \cap L_n$ conține o frază $g_{i_1} \ldots g_{i_m}\, c\, \widetilde{h}_{i_m} \ldots \widetilde{h}_{i_1} = x\, c\, \widetilde{x}$ (corespunzînd unei soluții a problemei lui Post), atunci conține pentru orice n, frazele : $(g_{i_1} \ldots g_{i_m})^n\, c\, (\widetilde{h}_{i_m} \ldots \widetilde{h}_{i_1})^n$. Intersecția este deci o submulțime infinită a lui L_m. Prin urmare, nu poate fi un limbaj de tipul 3 decît dacă este vid. Dar problema e de a ști dacă intersecția a două limbaje acontextuale este vidă sau nu este nedecidabilă. Deci și problema pusă este nedecidabilă.

TEOREMA 8.3.4. *Problema de a ști dacă intersecția a două limbaje acontextuale este un limbaj acontextual este nedecidabilă* (N. Chomsky [2], p. 384).

TEOREMA 8.3.5. *Problema de a ști dacă complementara unui limbaj acontextual este un limbaj vid, finit, de tip 2 sau de tip 3 este nedecidabilă.* (Y. Bar-Hillel, M. Perles, E. Shamir, *On formal properties of simple phrase structure grammars*, 1960).

TEOREMA 8.3.6. *Problema de a ști dacă două limbaje acontextuale sînt echivalente este nedecidabilă.*

Demonstrație. Dacă ar exista un algoritm care să decidă dacă două limbaje sînt echivalente, atunci s-ar putea decide dacă $L_1 = V^*_T$. Dar aceasta revine la a decide dacă $\overline{L}_1$ este vid.

TEOREMA 8.3.7. *Problema de a ști dacă pentru două limbaje acontextuale oarecari L_1 și L_2 are loc relația $L_1 \subseteq L_2$ este nedecidabilă.*

Într-adevăr, dacă această problemă ar fi decidabilă, atunci ar fi decidabilă şi cea referitoare la echivalenţa a două limbaje.

TEOREMA 8.3.8. *Problema de a şti dacă un limbaj acontextual este nevid, finit sau infinit este decidabilă* (S. Ginsburg [5]).

Teorema 8.3.9. *Problema de a şti dacă un cuvînt arbitrar este sau nu într-un limbaj arbitrar este o problemă decidabilă* (S. Ginsburg [5]).

TEOREMA 8.3.10. *Limbajele acontextuale sînt recursive.*

Demonstraţia rezultă, ca un caz particular, din teorema corespunzătoare referitoare la limbajele contextuale.

4. *Clase de limbaje acontextuale.*

Clase ale limbajelor acontextuale se obţin punînd diferite restricţii regulilor $A \to \varphi$ $(A \in V_N,\ \varphi \in V^*)$.

DEFINIŢII. Regula liniară — este de forma $A \to \alpha B \beta$.

Regula liniară la dreapta — este de forma $A \to \alpha B$.

Regula liniară la stînga — este de forma $A \to B\alpha$.

Regula terminală — este de forma $A \to \alpha$.

DEFINIŢIE. *O gramatică acontextuală G este liniară* dacă toate regulile sale neterminale sînt liniare; în particular, regulile pot fi liniare la dreapta sau la stînga.

Limbaj liniar este un limbaj care poate fi generat de o gramatică liniară.

Limbajele minimale formează o subclasă a limbajelor liniare:

— $V_N = \{S\}$

— Mulţimea regulilor terminale se reduce la $S \to c$, simbolul c neapărînd în nici o altă regulă.

Exemplu. Limbajul $L_m = \{x c \tilde{x} \mid x \in \{a, b\}^*\}$

DEFINIŢIE. *O gramatică acontextuală G* este *semiliniară* dacă fiecare regulă neterminală este liniară la dreapta sau fiecare regulă neterminală este liniară la stînga.

Observaţie. Putem presupune (după cum am mai arătat) că regulile terminale sînt de forma $A \to a$. Astfel noţiunea de gramatică semiliniară coincide cu cea de gramatică de tipul 3 (vom studia).

DEFINIŢIE. *O gramatică acontextuală* este *metaliniară* dacă orice φ, cu proprietatea $S \Rightarrow \varphi$, este în mod necesar de grad mărginit în raport cu V_N.

— *Limbaj metaliniar*, este un limbaj ce poate fi generat de o gramatică metaliniară. Exemplu: L_{2m}.

DEFINIŢIE. *O gramatică acontextuală* este *normală* dacă toate regulile neterminale sînt de forma $A \to BC$ şi toate regulile terminale sînt de forma $A \to a$.

DEFINIŢIE. *O gramatică acontextuală este secvenţială* dacă, o dată aplicate regulile cu neterminalul A, acesta dispare definitiv

Exemplu: $L_m = \{x c \tilde{x} \mid x \in \{a, b\}^*\}$

— Notez $\lambda = \{L \mid L$ limbaj liniar$\}$

$\lambda_1 = \{L \mid L$ limbaj semiliniar$\}$

$\lambda_m = \{L \mid L$ limbaj metaliniar$\}$

$\nu = \{L \mid L$ limbaj generat de o gramatică normală$\}$

$\sigma = \{L \mid L$ limbaj secvenţial$\}$.

$\gamma = \{L \mid L$ limbaj acontextual$\}$.

TEOREMA 8.4. *Avem*

(1) $\lambda_1 \subsetneqq \lambda \subsetneqq \lambda_m$ (N. Chomsky, *Three models for the description of language*. IRE Trans. on Inform. Theory, 1956, **2**, 113—124; Schützenberger & Chomsky 1962).

(2) $\nu = \gamma$ (am demonstrat)

(3) $\lambda_1 \subsetneqq \lambda \subsetneqq \gamma$ (S. Ginsburg & H. G. Rice, *Two families of languages related to ALGOL*. J. Assoc. Computing Machinery, 1962, **10**, 350—371).

5. *Observaţii.* — Corespondenţa dintre gramatici şi limbaje:

O gramatică generează întotdeauna un limbaj, eventual vid. Corespondenţa nu este, însă, injectivă — un limbaj poate fi generat de mai multe gramatici.

De exemplu, dacă pentru un limbaj L avem o gramatică G care îl generează, se pot adăuga (sau scoate dacă există) reguli neproductive din punct de vedere terminal (am procedat astfel cu regulile de forma: $A \to A$, $A \in V_N$) sau se pot contracta reguli şi obţinem gramatici care generează acelaşi limbaj L.

— Un limbaj poate fi generat de gramatici definite cu mai multe axiome (extindem astfel definiţia gramaticii).

De exemplu, în cazul limbajului $L = L_1 \cup L_2$ (despre care am arătat că este acontextual dacă L_1 şi L_2 sînt limbaje acontextuale), acesta poate fi generat de „gramatica" $G_1 \cup G_2$ (fără a mai adăuga regulile $S \to S_i$ şi deci fără a introduce neterminalul S) care are ca axiome S_1 şi S_2.

6. LIMBAJE DE DERIVAŢIE

În [13], G. Rozenberg introduce noţiunea de limbă de derivaţie pentru o gramatică dată G şi studiază problema existenţei unei gramatici pentru o astfel de limbă, în cazul în care G este de tipul O, de tipul 1 sau de tipul 2.

(*Observaţie.* Definiţiile şi notaţiile sînt date după S. Ginsburg [5]).

Problema este dacă, fiind dată o gramatică acontextuală $G = (V, V_T, S, P)$, există o gramatică $G' = (V', V \cup \{\to\}, S', P')$, astfel ca $x \in L(G')$ să fie echivalent cu $x = w_0 \to w_1 \to \ldots \to w_r$, $w_0 = S$ şi $(w_0, \ldots, w_r)$ este o derivaţie în G. Limbajul $L(G')$ generat de o astfel de gramatică G' se va numi *limbaj de derivaţie* în G, iar gramatica G' se va numi *gramatică de derivaţie* în G.

Aceeaşi problemă este pusă pentru gramaticile de tipul 0 şi de tipul 1. Răspunsul este afirmativ. Sînt construite gramaticile de derivaţie respective. De asemenea, în cazul limbajelor contextuale şi acontextuale este dată următoarea teoremă, care stabileşte tipul gramaticilor de derivaţie.

TEOREMA 8.6. *Dacă G_1 este o gramatică de tipul 1 şi G_2 este o gramatică de tipul 2, atunci $L(G_1')$ şi $L(G_2')$ (limbajele de derivaţie respective) sînt limbaje de tipul 1.*

CAPITOLUL IX

AUTOMATE CU PILĂ DE MEMORIE

Clasa automatelor *PDS* este clasa de automate care este asociată (vom preciza) limbajelor acontextuale.

Prin automat *PDS* vom înțelege un automat nu în mod necesar determinist.

1. AUTOMAT CARE ACCEPTĂ FRAZELE UNUI LIMBAJ („PUSH-DOWN ACCEPTOR")

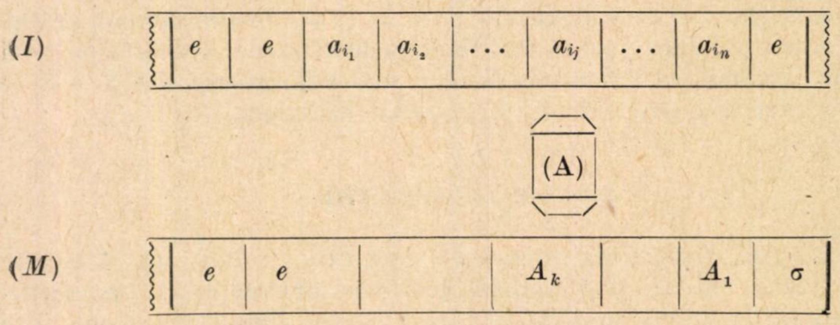
Descriere fizică. Automatul prezintă :

1) O bandă de intrare (*I*) împărțită în celule și potențial infinită în ambele sensuri.

2) O bandă de memorie (*M*) limitată de o parte (convenim să fie limitată la dreapta) și potențial infinită de cealaltă parte.

(*M*) este de asemenea împărțită în celule.

3) Un organ de calcul (*A*) cu două capete : un cap poate citi (*I*) și un cap poate citi (*M*), poate să șteargă (*M*) și să scrie pe ea :



Banda de intrare. Pentru a scrie pe (*I*) se folosește un vocabular de intrare $V_I = \{a_1, \ldots, a_p\}$.

Înainte de funcționare, pe bandă se poate scrie cîte un simbol într-o celulă.

La V_I se adaugă un simbol special : cuvîntul neutru *e*.

Scrierea se face doar într-un singur sens, să spunem de la stînga la dreapta.

Banda de memorie. Automatul scrie pe această bandă cu ajutorul unui vocabular $V_N = \{A_1, \ldots, A_q\}$. La acesta se adaugă cuvîntul neutru *e* și un simbol nou σ. Obținem astfel

$$\overline{V}_M = V_M \cup \{e\} \cup \{\sigma\}.$$

Organul de calcul. (*A*) prezintă un număr finit de stări interne : $S_0, \ldots, S_n$.

S_0 se numește stare inițială.

Se consideră o submulţime a lui $\{S_0, \ldots, S_n\}$, numită mulţimea stărilor finale.

Iată cîteva definiţii necesare pentru a descrie funcţionarea automatului :

DEFINIŢIE. *Gradul* λ (se referă la elementele lui $V_M^* \cup \{\sigma\} \cup \{e\}$) este dat de :

$$\lambda(\sigma) = 1$$

$$\lambda(e) = 0$$

$\lambda(\varphi)$ = numărul cuvintelor lui φ (unde $\varphi \in V_M^*$).

DEFINIŢII. — *Situaţie fizică a automatului* este un triplet (S_j, a_i, A_k) unde :

— a_i este un simbol scris pe (I) în celula care se află în dreptul primului cap.

— S_j este starea automatului.

— A_k este un simbol scris pe (M) în celula care se află în dreptul celui de-al doilea cap.

— *Situaţie a automatului* este sau tripletul unei situaţii fizice sau un triplet obţinut dintr-o situaţie fizică, înlocuind a_i sau A_k sau amîndouă prin e.

Observaţie. Apare aici caracterul nedeterminist al automatului : pentru o situaţie fizică dată, automatul se află simultan în patru situaţii)

— *Instrucţiune* este un sistem de cinci elemente, de forma :

$\Sigma \rightarrow (S_m, x)$, unde :

Σ este o situaţie

S_m este o stare

x este fie e, fie σ, fie un element din V_M^*.

Data prezentată automatului este un element al lui V_I^*, scris în prealabil pe banda de intrare şi mărginit de simboluri e.

La începutul calculului , (A) se află în starea iniţială S_0 şi primul cap se află fixat pe primul simbol (simbolul cel mai din stînga) al secvenţei date. Se scrie σ pe prima celulă (din dreapta) a lui (M) şi se pune această celulă în dreptul celui de-al doilea cap.

Deci *calculul începe în situaţia fizică* (S_0, a_i, σ) *şi se desfăşoară astfel* :

Presupunem că automatul este în situaţia Σ. Dacă nu există nici o instrucţiune aplicată lui Σ, automatul se opreşte. Dacă există una sau mai multe instrucţiuni referitoare la Σ, atunci automatul alege una ; fie ea $\Sigma \rightarrow (S_m, x)$. Efectul ei este următorul :

— (A) trece în starea S_m.

— Dacă al doilea simbol al situaţiei este e, atunci banda de intrare rămîne imobilă ; dacă acest simbol este a_i, atunci (I) se deplasează astfel ca simbolul de la dreapta lui a_i să treacă în dreptul primului cap.

— Dacă $x = \sigma$, deci $\lambda(x) = -1$, atunci banda de memorie se deplasează cu o celulă la stînga încît al doilea cap să se afle în dreptul simbolului de la dreapta celui precedent şi aceasta din urmă este şters ; dacă $x = e$, deci $\lambda(x) = 0$, atunci (M) nu se deplasează şi nu se scrie nimic ; dacă $x = \varphi$, deci $\lambda(x) = m$, atunci pe (M) se scrie secvenţa x la stînga ultimului simbol şi banda se deplasează cu m celule la dreapta astfel ca al doilea cap să vadă simbolul cel mai din stînga dintre simbolurile scrise.

DEFINIȚII. *Secvența* x se numește *acceptată de automat*, dacă calculul se termină în situația $(S_F,\ e,\ e)$ cu $S_F \in F$.

— *Secvența* x se numește *acceptabilă* dacă există un calcul care începe în situația și condițiile descrise și se termină în situația (S_F, e, e) cu $S_F \in F$. Automatul fiind nedeterminist, este posibil ca o secvență acceptabilă să nu fie acceptată în cursul unui calcul particular.

DEFINIȚIE. *Limbaj acceptat* de un automat este mulțimea secvențelor acceptabile pentru un anumit automat.

Dispozitivul descris aici reprezintă, de fapt, *intuitiv*, ceea ce se numește ,,automat *abstract* cu pilă de memorie, care acceptă un limbaj'' (automat PDS).

DEFINIȚIE. *Automat cu pilă de memorie* este un sistem

$\mathcal{A} = (\mathcal{S},\ V_I,\ V_M,\ \sigma,\ \delta,\ S_0,\ F)$, unde :

$\mathcal{S}$ este o mulțime finită nevidă (mulțimea stărilor);

V_I mulțime finită nevidă (vocabularul de intrare);

V_M mulțime finită nevidă (vocabularul memoriei);

σ element ce se adaugă la V_M (simbol inițial);

δ aplicație definită pe $\mathcal{S} \times (V_I \cup \{e\}) \times (V_M \cup \{\sigma\})$ cu valori într-o submulțime finită a lui $\mathcal{S} \times (V_M^* \cup \{\sigma\} \cup \{e\})$ (va reprezenta instrucțiunile automatului fizic descris mai sus).

S_0 un simbol din $\mathcal{S}$ (stare inițială).

F submulțime a lui $\mathcal{S}$ (mulțimea stărilor finale).

Notații. Notăm $\overset{*}{\underset{\mathcal{A}}{\vdash}}$ (sau $\overset{*}{\vdash}$) relația pe $\mathcal{S} \times V_I^* \times V_M^*$, definită astfel: pentru $A \in V_M$ și $a \in V_I \cup \{e\}$ scriem $(S,\ a,\ w,\ \alpha A) \vdash (T,\ w,\ \alpha\gamma)$, numită deplasare, dacă $\delta(S,\ a,\ A)$ conține $(T,\ \gamma)$. Scriem $(S,\ w,\ \alpha) \overset{*}{\vdash} (S,\ w,\ \alpha)$ pentru orice S, w și α.

Pentru $\alpha, \beta \in V_M^*$ și $a_i \in V_I \cup \{e\}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, scriem $(S,\ a_1 \ldots \ldots a_k,\ w,\ \alpha) \overset{*}{\vdash} (T,\ w,\ \beta)$, dacă există $S_1 = S, \ldots, S_{k+1} = T$ în $\mathcal{S}$ și $\alpha_1 = \alpha, \ldots, \alpha_{k+1} = \beta$ în V_M^* astfel ca $(S_i,\ a_i \ldots a_k w,\ a_i) \vdash (S_{i+1},\ a_{i+1} \ldots \ldots a_k w,\ \alpha_{i+1})$ pentru $1 \leqslant i < k$.

De obicei scriem :

$(\ast)$ $(S_1,\ a_1 \ldots a_k w,\ \alpha_1) \vdash (S_2,\ a_2 \ldots a_k w,\ \alpha_2) \vdash \ldots \vdash (S_{k+1},\ w,\ \alpha_{k+1})$ în loc de $(S_i,\ a_i \ldots a_k w,\ \alpha_i) \vdash (S_{i+1},\ a_{i+1} \ldots a_k w,\ \alpha_{i+1})$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Spunem că $(S,\ a_1 \ldots a_k w,\ \alpha) \overset{*}{\vdash} (T,\ w,\ \beta)$ este *realizată* prin $(\ast)$.

Tripletul $(S,\ w,\ \alpha)$ reprezintă faptul că S este starea automatului, α este pe (M) și w este cuvîntul de pe (I). Deplasarea $(S,\ aw,\ \alpha A) \vdash \vdash (T,\ w,\ \alpha\gamma)$ arată că un mod de a acționa pentru automatul $\mathcal{A}$, în starea S cu A simbolul cel mai din dreapta pe banda de memorie și a sau simbolul cel mai din stînga de pe (I) sau e, este să treacă în stare T, să înlocuiască A cu γ și să șteargă a.

Notația $(S,\ a_1 \ldots a_k w,\ \alpha) \overset{*}{\vdash} (T,\ w,\ \beta)$ indică faptul că poate trece din starea S, cu cuvîntul de pe banda de intrare $a_1 \ldots a_k w$ și cu α pe banda de memorie, în starea T, cu β pe (M) și să șteargă $a_1 \ldots a_k$.

Uneori, automatul poate trece din starea S în starea T (cu schimbarea corespunzătoare pe (M)), fără să șteargă nici o literă de pe (I). Acest lucru este posibil dacă există S, T, w și A astfel ca $(T,\ w) \in \delta(S,\ e,\ A)$.

DEFINIȚIE. Un cuvînt w este *acceptat* de un automat PDS : $\mathcal{A} = (\$, V_I, V_M, \sigma, \delta, S_0, F)$, dacă există $S_F \in F$ astfel ca : $(S_0, w, \sigma) \overset{*}{\vdash} (S_F, e, e)$.

— Mulțimea cuvintelor acceptabile pentru $\mathcal{A}$ o notăm cu $\Gamma(\mathcal{A})$.

Rolul lui σ în automat este evident : un automat PDS nu se poate deplasa dacă banda sa de memorie este vidă, adică : $(S, w, e) \vdash (T, y, \gamma)$ este fals pentru orice S, T, w, y şi γ. σ este trecut pe (M), pentru a permite automatului să înceapă şirul de deplasări pentru a determina dacă un cuvînt dat este acceptat.

2. LIMBAJE ACONTEXTUALE ŞI AUTOMATE CU PILĂ DE MEMORIE

TEOREMA 9.2. (N. Chomsky [2], S. Ginsburg [5]). *Clasa limbajelor de tipul 1 coincide cu clasa limbajelor acceptate de automatele cu pilă de memorie (altfel spus, o mulțime de cuvinte L este un limbaj acontextual dacă şi numai dacă există un automat cu pilă de memorie $\mathcal{A}$, astfel ca $L = \Gamma(\mathcal{A})$).*

Observație. S. Ginsburg dă în [5] o altă definiție a unui cuvînt acceptat de un automat cu pilă de memorie :

DEFINIȚII. w este *acceptat* de $\mathcal{A} = (\$, V_T, V_M, \sigma, \delta, S_0, F)$ dacă $(S_0, w, \sigma) \overset{*}{\vdash} (S, e, \alpha)$, cu $\alpha \in V_M^*$, $S \in F$.

— *Limbaj acceptat de $\mathcal{A}$* este mulțimea cuvintelor acceptate (în acest sens) de $\mathcal{A}$ (notăm $L(A)$). Ginsburg demonstrează că mulțimea $\{L(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A}\}$ coincide cu mulțimea limbajelor acontextuale. Deci clasa limbajelor acceptate de automatele „push-down" în primul sens coincide cu clasa limbajelor acceptate în al doilea sens. Oricare dintre ele este identică cu clasa limbajelor acontextuale.

DEFINIȚIE. Automatul $\mathcal{A} = (\$, V_I, V_M, \sigma, \delta, S_0, F)$ se numeşte *determinist* dacă funcția δ este univalentă şi *nedeterminist* dacă funcția δ este multivalentă.

3. AUTOMAT CARE GENEREAZĂ FRAZELE UNUI LIMBAJ

În paragraful precedent am interpretat funcția δ cu ajutorul unui dispozitiv fizic, ceea ce ne-a condus la considerarea unor instrucțiuni de tipul $(S_j, a_i, A_k) \rightarrow (S_m, x)$. Acesta era automatul care acceptă frazele unui limbaj.

Considerăm acum automatul generator, care are aceleaşi stări interne ca şi cel acceptor (sau examinator) şi aceeaşi bandă de memorie, dar scrie pe banda de intrare în loc să citească de pe ea.

Instrucțiunii $(S_j, a_i, A_k) \rightarrow (S_m, x)$ a automatului examinator îi facem să-i corespundă instrucțiunea $(S_j, A_k) \rightarrow (a_i, S_m, x)$ a automatului generator.

Din punct de vedere fizic automatul generator, fiind în situația (S_j, A_k), scrie a_i pe banda de intrare (I), trece în starea S_m şi, în rest, se comportă pe (M) ca şi automatul acceptor.

Automatul generator se determină doar după o parte a situației care determină comportarea automatului acceptor, dar e clar că orice calcul corect al automatului acceptor se traduce printr-un calcul corect al automatului generator și reciproc.

Automatul modificat generează limbajul acceptat de primul. Deci este indiferent dacă spunem că un automat acceptă sau generează un limbaj.

CAPITOLUL X

GRAMATICI ŞI LIMBAJE DE TIPUL 3

1. DEFINIȚII. FORMULĂRI ECHIVALENTE

Definiție. *Gramatică de tipul 3* (Gramatică Kleene sau, pe scurt, K-gramatică) este un sistem $G = (V, V_T, S, \to)$ în care elementele sînt date ca în definiția 1 a gramaticii (capitolul IV) cu restricția : Dacă $\varphi \to \psi$, atunci există trei secvențe φ_1, φ_2 și ω, a din V_T, A și B din V_N astfel încît :

$\varphi = \varphi_1 A \varphi_2$, $\psi = \varphi_1 \omega \varphi_2$, $\omega \neq E$, $A \to \omega$ și are loc una din relațiile $\omega = aB$ sau $\omega = a$ $(a \neq \#)$.

— *Limbaj de tipul 3* (K-limbaj) este un limbaj care poate fi generat de o gramatică de tipul 3.

Definiție. (Chomsky și Miller). *Gramatică cu un număr finit de stări* este un sistem $(\mathcal{S}, \mathcal{W}, S_0, T)$ unde :

— $\mathcal{S}$ este o mulțime finită $\{S_0, \ldots, S_n\}$, numită mulțimea stărilor.

— $\mathcal{W}$ este o mulțime finită $\{W_0, \ldots, W_m\}$, numită vocabularul (dicționarul) gramaticii.

— S_0 este un element din $\mathcal{S}$, numit stare inițială.

— $T \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{W} \times \mathcal{S}$, deci $T \subseteq \{(i, j, k) \mid 0 \leqslant i, k \leqslant n;\ 0 \leqslant j \leqslant m\}$.

În cazul general, se consideră că există W_0, element neutru pentru $\mathcal{W}$.

Definiție. *Regulă gramaticală* este orice pereche ordonată (j, k), $0 \leqslant j \leqslant m$, $0 \leqslant k \leqslant n$.

Considerăm mulțimea tripletelor (i, j, k), unde (j, k) este o regulă gramaticală și $0 \leqslant i \leqslant n$.

T *este* o submulțime a acestei mulțimi și se numește *mulțimea tripletelor admise.*

Definiție. *Regula gramaticală* (j, k) *este admisă* dacă există i $(0 \leqslant i \leqslant n)$, astfel ca (i, j, k) să fie triplet admis.

— Dacă tripletul (i, j, k) este admis, atunci spunem că gramatica *G poate trece de la starea* S_i *la starea* S_k *producînd simbolul* W_j.

— $T_t = \{(i, j, k) \mid (i, j, k) \text{ triplet admis}\}$

Definiții. *Frază generată de G*, $W_{i_1} \ldots W_{i_p}$, este o frază cu proprietatea că : există un șir de cuvinte $W_{j_1}, \ldots W_{j_q}$ și un șir de stări $S_{l_1}, \ldots, S_{l_{r+1}}$, astfel încît :

a) $l_1 = l_{r+1} = 0$

b) $l_i \neq 0$ $(1 < i < r + 1)$.

c) (l_i, j_i, l_{i+1}) este din T_{l_i} $(1 \leqslant i \leqslant r)$
d) $W_{i_1} \ldots W_{i_p} = W_{j_1} \ldots W_{j_q}$.

— *Limbaj cu un număr finit de stări* L este un limbaj pentru care există o gramatică G cu un număr finit de stări care să genereze L, adică astfel încît $L = L(G)$.

TEOREMA 10.1.1. (S. Marcus [11]). *Clasa limbajelor de tipul 3 coincide cu clasa limbajelor cu un număr finit de stări.*

Deci, de aci înainte, vom înțelege că gramatica (resp. limbajul) de tipul 3 și gramatica (resp. limbajul) cu un număr finit de stări reprezintă aceeași noțiune.

O caracterizare a limbajelor de tipul 3, privite ca formînd o subclasă a clasei limbajelor de tipul 2, se poate da astfel :

DEFINIȚIE. Într-o gramatică acontextuală, simbolul A *din* V_N se numește *simbol cu autoincluziune* dacă există o derivație $A \Rightarrow \varphi A \psi$ cu $|\varphi||\psi| \neq 0$.

DEFINIȚIE. *Gramatica cu autoincluziune* este o gramatică G cu proprietatea că există $A \in V_N$, A simbol cu autoincluziune.

TEOREMA 10.1.2. (N. Chomsky [1]. *Un limbaj de tipul 2 nu este de tipul 3 dacă și numai dacă toate gramaticile sale sînt cu autoincluziune.*

Deci, putem spune că limbajele cu un număr finit de stări sînt acele limbaje acontextuale pentru care există cel puțin o gramatică ce nu este cu autoincluziune.

— Un exemplu de limbaj de tipul 3 este dat de :

TEOREMA 10.1.3. *Orice limbaj finit este un limbaj de tipul 3.*

Demonstrație. Fie $L = \{x_1, \ldots, x_n\}$, unde

$$x_1 = a_{11} \ldots a_{1i(1)}$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$x_n = a_{n1} \ldots a_{ni(n)}$$

Construim gramatica $G = (V, V_T, A_0, P)$, unde :

$V = V_T \cup V_N$

$V_T = \{a_{11}, \ldots, a_{1i(1)}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{ni(n)}\}$

(în care se elimină unele dintre elemente dacă se repetă, astfel încît un element a_{kj} să apară o singură dată).

$V_N = \{A_0, A_{j1}, A_{j2}, \ldots, A_{ji(j)-1}\}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$

$$\begin{aligned} P:\ A_0 &\rightarrow a_{j1} A_{j1} \\ A_{j1} &\rightarrow a_{j2} A_{j2} \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ A_{ji(j)-2} &\rightarrow a_{ji(j)-1} A_{ji(j)-1} \\ A_{ji(j)-1} &\rightarrow a_{ji(j)} \qquad\qquad (j = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

Se vede că G este o gramatică de tipul 3 și că $L(G) = L$.

2. PROPRIETĂŢI DE ÎNCHIDERE ÎN CLASA LIMBAJELOR DE TIPUL 3

TEOREMA 10.2. *Mulţimea limbajelor de tipul 3 formează o algebră Boole*.

Schiţă de demonstraţie. a) Mulţimea limbajelor de tipul 3 este închisă faţă de operaţia de reuniune.

Într-adevăr, fie L_1 şi L_2 limbaje de tipul 3, generate de gramaticile $G_1 = (V_1, V_{T_1}, A_1, P_1)$ şi $G_2 = (V_2, V_{T_2}, A_2, P_2)$ respectiv, unde:

$$V_{T_1} = \{a_1, \dots, a_p\}, \quad V_{N_1} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \quad A_1 = \alpha_n,$$

$$P_1: \left| \begin{matrix} \alpha_j \to a_i\, \alpha_k \\ \alpha_j \to a_i \end{matrix} \right|$$

unde: $i \in \mathfrak{I} \subseteq \{1, \dots, p\}, \quad j \in \mathfrak{J} \subseteq \{1, \dots, n\}, \quad k \in \mathfrak{K} \subseteq \{1, \dots, n\}$

$$V_2 = \{b_1, \dots, b_q, \beta_1, \dots, \beta_m\},$$

$$V_{T_2} = \{b_1, \dots, b_q\}, \quad V_{N_2} = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}, \quad A_2 = \beta_m,$$

$$P_2: \left| \begin{matrix} \beta_r \to b_t\, \beta_s \\ \beta_r \to b_t \end{matrix} \right|,$$

unde $r \in \mathfrak{R} \subseteq \{1, \dots, m\}, \quad t \in \mathfrak{T} \subseteq \{1, \dots, q\}, \quad s \in \mathfrak{S} \subseteq \{1, \dots, m\}$.

Consider gramatica: $G = (V, V_T, A, P)$, unde

$$V = V_T \cup V_N$$

$$V_T = \{a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q\}$$

$$V_N = \{\gamma_{jm}, \gamma_{ns} \mid j \in \mathfrak{J}, s \in \mathfrak{S}\}, \quad A = \gamma_{nm}.$$

P este format din următoarele producţii:

I. $\gamma_{jm} \to a_i \gamma_{km}$ dacă $\alpha_j \to a_i \alpha_k$ este în P_1,

II. $\gamma_{jm} \to a_i$ dacă $\alpha_j \to a_i$ este în P_1,

III. $\gamma_{nr} \to b_t \gamma_{ns}$ dacă $\beta_r \to b_t \beta_s$ este în P_2,

IV. $\gamma_{nr} \to b_t$ dacă $\beta_r \to b_t$ este în P_2.

Se arată uşor că $L(G) = L_1 \cup L_2$.

b) Mulţimea limbajelor de tipul 3 este închisă faţă de operaţia de intersecţie.

Într-adevăr, fie L_1 şi L_2 limbaje de tipul 3 generate de gramaticile $G_1 = (V_1, V_{T_1}, A_1, P_1)$ şi $G_2 = (V_2, V_{T_2}, A_2, P_2)$ respectiv, unde

$$V_{T_1} = V_T = \{a_1, \dots, a_p\}$$

$$V_{N_1} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \quad A_1 = \alpha_n.$$

$$P_1 = \left| \begin{matrix} \alpha_j \to a_i\, \alpha_k \\ \alpha_j \to a_i \end{matrix} \right|,$$

unde $i \in \mathcal{J} \subseteq \{1, \ldots, p\}$, $j \in \mathfrak{J} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $k \in \mathcal{K} \subseteq \{1, \ldots, n\}$

$$V_{T_2} = V_T = \{a_1, \ldots, a_p\}$$

$$V_{N_2} = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}, \quad A_2 = \beta_m$$

$$P_2 : \left| \begin{array}{l} \beta_r \rightarrow a_i \beta_s \\ \beta_r \rightarrow a_i \end{array} \right|,$$

unde $r \in \mathcal{R} \subseteq \{1, \ldots, m\}$, $s \in \mathcal{S} \subseteq \{1, \ldots, m\}$.

(Am presupus, deci, că G_1 şi G_2 au acelaşi vocabular terminal.) Definim gramatica $G = (V, V_T, A, P)$ astfel:

$$V_T = \{a_1, \ldots, a_p\}$$

V_N este format din acele elemente γ_{jm} şi γ_{ns} $(j \in \mathfrak{J},\ s \in \mathcal{S})$ care apar în P.

$$A = \gamma_{nm}$$

P este format din următoarele producţii:

I. $\gamma_{jm} \rightarrow a_i \gamma_{km}$ şi $\gamma_{nr} \rightarrow a_i \gamma_{ns}$ dacă există $j \in \mathfrak{J}$, $k \in \mathcal{K}$, $r \in \mathcal{R}$, $s \in \mathcal{S}$, $i \in \mathcal{J}$ astfel încît

$$\alpha_j \rightarrow a_i \alpha_k \quad \text{şi} \quad \beta_r \rightarrow a_i \beta_s$$

II. $\gamma_{jm} \rightarrow a_i$ şi $\gamma_{mr} \rightarrow a_i$ dacă există $i \in \mathcal{J}$, $j \in \mathfrak{J}$, $r \in \mathcal{R}$ astfel încît $\alpha_j \rightarrow a_i$ şi $\beta_r \rightarrow a_i$.

Se arată uşor că $L(G) = L_1 \cap L_2$.

c) Mulţimea limbajelor de tipul 3 este închisă faţă de operaţia de luare a complementarei.

Într-adevăr, fie L_1 şi L_2 limbaje de tipul 3.

Relaţia lui De Morgan $L_1 \cup L_2 = \overline{\overline{L_1} \cap \overline{L_2}}$ arată că dacă presupunem prin absurd că această mulţime nu este închisă faţă de operaţia de luare a complementării, atunci este contrazisă proprietatea a), deci presupunerea este falsă.

CAPITOLUL XI

AUTOMATE FINITE

Clasa automatelor finite este clasa de automate asociată gramaticilor de tipul 3.

Descriere fizică. Dispozitivul este format din:

— O bandă împărţită în celule şi potenţial infinită în ambele sensuri. O celulă poate conţine un simbol dintr-un alfabet $V = \{a_i \mid 0 \leqslant i \leqslant m\}$ în care un element, de exemplu a_0, joacă rolul elementului neutru.

— Cap de citire-scriere, care explorează, în fiecare moment, o anumită celulă de pe bandă.

— Unitatea centrală — comportă un număr finit de stări ($S_0, \ldots S_n$), unde una din ele se numeşte stare iniţială, de exemplu S_0, şi există o submulţime a lui $\mathcal{S} = \{S_0, \ldots, S_n\}$ pe care o notăm cu F, numită mulţimea stărilor finale.

Funcţionare. Pe bandă se scrie în celule consecutive o secvenţă de simboluri $a_{i_1}, \ldots, a_{i_p}$, cîte un simbol într-o celulă. Presupunem că simbolul $\#$ ($\# \notin V$) apare în toate celulele de la stînga lui a_{i_1} şi de la dreapta lui a_{i_p}. Unitatea centrală este pusă în starea S_0. Capul de citire-scriere explorează celula care conţine simbolul a_{i_1}. Unitatea centrală este astfel construită încît, atunci cînd capul de citire-scriere explorează o anumită celulă şi ea este într-o anumită stare, trece într-o nouă stare, în timp ce banda se deplasează spre stînga.

Aceste treceri sînt determinate de reguli (ρ) de tipul: $(a_i, S_j) \rightarrow S_k$, regulile fiind în număr finit, unde (a_i, S_j) este situaţia automatului, iar S_k starea în pasul următor.

Maşina lucrează astfel pînă cînd se blochează (dacă ajunge la o situaţie pentru care nu există instrucţiune) sau pînă cînd intră într-o stare finală.

DEFINIŢIE. Dacă maşina ajunge în situaţia ($\#$, S_f) cu $S_f \in F$, atunci spunem că automatul a *acceptat* cuvîntul $a_{i_1} \ldots a_{i_p}$.

Se pot considera unele variante pur notaţionale, de exemplu:

a) Nu mai considerăm mulţimea F a stărilor finale, ci considerăm că automatul termină în situaţia ($\#$, S_0); are loc prima întoarcere la starea iniţială, şi dacă capul de citire-scriere explorează celula de la dreapta lui a_{i_p} care conţine $\# \notin V$, spunem că automatul a acceptat $a_{i_1} \ldots a_{i_p}$.

b) Definim trecerile automatului nu prin reguli (ρ), ci cu ajutorul unei tabele de tranziţii:

$\mathcal{S}$ \ V		a_i	
S_j		S_k	

sau cu o funcţie de tranziţie $M(a_i, S_j)$, definită pe o parte a lui $V \times \mathcal{S}$ cu valori în (eventual pe) $\mathcal{S}$.

Funcţia M se poate extinde la $V^* \times \mathcal{S}$ astfel:

$M(E, S_j) = S_j$ pentru $S_j \in \mathcal{S}$.

$M(\varphi, S_j) = M(\varphi_1, M(a_i, S_j))$ pentru $S_j \in \mathcal{S}$, $\varphi \in V^*$, $\varphi = \varphi_1 a_i$.

Se vede că $M(\varphi, S_j)$ este starea la care se ajunge, pornind de la starea S_j şi parcurgînd elementele secvenţei φ.

Dispozitivul descris aici reprezintă intuitiv automatul finit abstract:

DEFINIŢIE. *Automat finit* este un sistem $\mathcal{A} = (\mathcal{S}, V, M, S_0, F)$, unde:

— $\mathcal{S}$ este o mulţime finită nevidă (mulţimea stărilor).

— V este o mulţime finită nevidă (vocabularul sau alfabetul automatului).

— M este definită pe o submulţime a lui $V \times \mathcal{S}$ cu valori în $\mathcal{S}$ (funcţia de tranziţie).

— S_0 este un element fixat din $\mathcal{S}$ (starea iniţială a automatului).

— F este o submulţime a lui $\mathcal{S}$ (mulţimea stărilor finale).

DEFINIŢII. — *Cuvînt acceptat de automatul* $\mathcal{A}$ este un cuvînt cu proprietatea că, dacă se dă ca dată automatului, atunci calculul efectuat se sfîrşeşte în situaţia $(\#, S_f)$ cu $S_f \in F$.

— *Cuvînt acceptabil pentru automatul* $\mathcal{A}$ este un cuvînt cu proprietatea că, dacă se dă ca dată automatului, atunci există un calcul care să se sfîrşească în situaţia $(\#, S_f)$ cu $S_f \in F$.

— *Limbaj acceptat de* $\mathcal{A}$ este mulţimea cuvintelor acceptabile pentru automatul $\mathcal{A}$ şi se numeşte *limbaj regulat*.

— Două *automate* sînt *echivalente* dacă acceptă acelaşi limbaj.

Automatul descris mai sus este un automat determinist:

DEFINIŢIE. *Automatul* $\mathcal{A}$ *este determinist* dacă funcţia de tranziţie $M(a_i, S_j)$ are cel mult o valoare pentru orice pereche (a_i, S_j) cu $a_i \in V$, $S_j \in \mathcal{S}$.

DEFINIŢIE. *Automat nedeterminist* este un sistem $\mathcal{A}_1 = (S, V, M, \mathcal{S}_0, F)$, unde:

— $\mathcal{S}$, V, F sînt definite ca mai sus.

— $\mathcal{S}_0$ este o submulţime a lui $\mathcal{S}$ (mulţimea stărilor iniţiale).

— $M : V \times \mathcal{S} \to \mathcal{P}(\mathcal{S})$, adică sînt mai multe tranziţii posibile de la o anumită situaţie.

(Definiţie dată de M. O. Rabin şi D. Scott în 1959).

TEOREMA 11.1. *Clasa automatelor finite deterministe coincide cu clasa automatelor finite nedeterministe. Într-adevăr,*

a) *Noţiunea de automat finit determinist este un caz particular al noţiunii de automat finit nedeterminist, în care* $\mathcal{S}_0 = \{S_0\}$ *şi funcţia* M *este univocă.*

b) *Are loc*:

TEOREMA 11.1'. *Orice automat finit nedeterminist* $\mathcal{A}_1$ *este echivalent cu un automat finit determinist* $\mathcal{A}$.

Schiţă de demonstraţie (S. Marcus [11]) Fie $\mathcal{A}_1 = (\mathcal{S}, V, M, \mathcal{S}_0, F)$. Notăm $\mathcal{A} = (\mathcal{T}, V, N, T_0, G)$, unde:

— $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathcal{S})$ (mulţimea părţilor lui $\mathcal{S}$)

— $N : V \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ astfel: pentru $a \in V$, $T \in \mathcal{T}$,

$$N(a, T) = \bigcup_{S \in T} \{M(a, S)\}$$

— $T_0 = \mathcal{S}_0$

— G este mulţimea acelor părţi ale lui $\mathcal{S}$ care conţin cel puţin o stare din F.

Evident, $\mathcal{A}$ este un automat finit determinist. Se arată că limbajul generat de $\mathcal{A}$ este identic cu limbajul generat de $\mathcal{A}_1$.

Reprezentarea cu grafuri. Fiecărui automat i se poate asocia un graf cu noduri marcate cu numele stărilor şi astfel că fiecărei reguli $(a_i, S_j) \to S_k$ i se asociază o săgeată orientată de la S_j la S_k, avînd eticheta a_i.

De exemplu, în cazul variantei a), mergînd de la S_0 pe un drum pînă la prima revenire la S_0, pe căi admise, automatul acceptă secvenţa x formată din simbolurile succesive, etichete ale săgeţilor care formează drumul.

Dăm acum o teoremă care stabileşte echivalenţa dintre gramaticile de tipul 3 şi automatele finite.

TEOREMA 11.2. *Clasa limbajelor regulate coincide cu clasa limbajelor de tipul 3.*

(Demonstraţie în S. Ginsburg [5]).

Acelaşi rezultat se poate obţine şi din teorema următoare ţinînd seama de echivalenţa dintre gramaticile de tipul 3 şi gramaticile cu un număr finit de stări, precum şi de echivalenţa dintre automatele finite deterministe şi cele nedeterministe :

TEOREMA 11.3. *Clasa limbajelor cu un număr finit de stări coincide cu clasa limbajelor generate de automatele finite nedeterministe.*

(Demonstraţia în S. Marcus [11]).

Automat care generează un limbaj. Automatul generator are acelaşi alfabet şi aceeaşi mulţime de stări ca şi cel care acceptă un limbaj. Spre deosebire de acesta, automatul trece de la starea S_j la starea S_k scriind simbolul a_i pe bandă (vidă la pornire) şi o deplasează cu o celulă spre stînga. Deci se dă o nouă interpretare regulilor de tranziţie.

Este evident că orice calcul corect al automatului acceptor se traduce printr-un calcul corect al automatului generator şi invers.

Punctul de vedere al generării şi acceptării cuvintelor fiind acelaşi, rezultă că putem da :

DEFINIŢIE. *Limbaj regulat* este mulţimea cuvintelor generate de un automat finit $\mathcal{A}$.

Observaţie. Definirea limbajelor regulate, deci a limbajelor acceptate (generate) de automatele finite, a avut o importanţă deosebită. S-a găsit un număr mare de proprietăţi, care, transpuse în teoria limbajelor (posibil datorită teoremei 11.2), au dat rezultate neaşteptate.

Primită la redacţie la 14 mai 1968

Universitatea Bucureşti
Facultatea de matematică-mecanică
str. Academiei nr. 14.

MACHINES MATHÉMATIQUES ET GRAMMAIRES GÉNÉRATIVES

(RÉSUMÉ)

L'exposition présente se propose d'organiser et de synthétiser un grand nombre de formations mathématiques utilisées dans la logique mathématique, dans la théorie des automates et dans la théorie des langages formalisés, soit : systèmes formels, machines mathématiques et grammaires génératives.

Il est bien connu, en grandes lignes, que la théorie des systèmes formels, la théorie des machines mathématiques et la théorie des grammaires génératives sont des théories en quelque sorte parallèles, mais la mise au clair de ce parallélisme est très souvent déficitaire. C'est dans cette direction que nous avons essayé de faire certaines observations.

Nous avons introduit la notion de système formel, en nous arrêtant à une classe spéciale de systèmes formels : les systèmes combinatoires. En considérant la notion de grammaire comme partie intégrante de la théorie des systèmes combinatoires semi-Thue, les grammaires génératives apparaissent comme des systèmes combinatoires semi-Thue particuliers. En même temps, différents types de machines mathématiques sont décrits : la machine Turing, l'automate à mémoire linéairement bornée, l'automate à pile de mémoire, l'automate fini, qui se sont avérés comme équivalent chacun à une grammaire d'un certain type.

Les formations mathématiques sus mentionnées sont présentées actuellement en de nombreuses monographies et articles, mais les variantes dans lesquelles elles apparaissent présentent des nuances différentes d'un auteur à l'autre et le problème du rapport logique est généralement laissé sans réponse. Dans le présent article nous avons cherché à établir ces rapports dans un assez grand nombre de situations.

Nous avons essayé d'englober dans une exposition unitaire un ensemble de faits des plus actuels, qui n'ont jamais été réunis et confrontés systématiquement. Nous n'avons fait qu'énoncer les résultats existants dans la littérature de spécialité, ou bien nous avons donné pour ceux-ci une esquisse de démonstration qui permette au lecteur de suivre, en grand la ligne de l'exposition, sans se perdre dans des détails techniques, cependant nous avons toujours indiqué la source bibliographique où la question est traitée d'une manière plus développée.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Chomsky, *On certain formal properties of grammars.* Information and Control, **2**, *4* (1959)
2. N. Chomsky, *Formal properties of grammars* in R. D. Luce, R. R. Bush and E. Galanter, (Eds), *Handbook of Mathematical Psychology*, 2, New York, Wiley, 1963.
3. M. Davis, *Computability and Unsolvability.* New York, Mc. Graw-Hill, 1958.
4. J. Friant, *Les langages ,,context sensitive''.* Annales de l'Institut Henri Poincaré — section B, **III**, *1* (1967).
5. S. Ginsburg, *The mathematical theory of context-free languages.* Mc Graw — Hill Book Company, New York, 1966.
6. M. Gross, A. Lentin, *Notions sur les langages formels.* Gauthier-Villars, Paris, 1967.
7. H. Hermes, *Enumerability, Decidability, Computability. An Introduction to the theory of Recursive Functions.* Translated by G. T. Herman and O. Plassmann Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1965.
8. S. Y. Kuroda, *Classes of languages and linear — bounded automata.* Information and Control, **7**, *2* (1964).
9. P. S. Landweber, *Three theorems on phrase-structure grammars of type 1.* Information and Control, **6**, *2* (1963).
10. A. I. Malţev, *Algoritmî i recursivnîe funcţii.* Moscova, 1965.
11. S. Marcus, *Gramatici şi automate finite.* Editura Academiei . Bucureşti, 1964.
12. J. Porte, *Recherches sur la Théorie générale des systèmes formels et sur les systèmes connectifs.* Gauthier-Villars, Paris, 1965.
13. G. Rozenberg, *Languages of Derivations.* Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Math., Astr. et Phys., **XV**, *11* (1967).
14. S. Scheinberg, *Note on the Boolean properties of context-free languages.* Information and Control, **3** (1960).
15. M. P. Schützenberger, *Context-free languages and push-down automata.* Information and Control, **6**, *3* (1963).

PROPRIETĂȚI ALE SPAȚIILOR STEIN

(Consecințe ale teoremelor A și B)

DE

C. BĂNICĂ, A. DUMA și O. STĂNĂȘILĂ

În cadrul seminarului de spații analitice, s-au demonstrat teoremele A și B ale lui H. Cartan și s-au dat o serie de consecințe. În această lucrare, sînt prezentate aceste consecințe împreună cu alte proprietăți ale fasciculelor analitice coerente pe un spațiu Stein.

INTRODUCERE

În cadrul seminarului de Spații analitice condus de M. Jurchescu au fost demonstrate teoremele A, B ale lui H. Cartan și apoi expuse o serie de consecințe directe sau mai puțin directe ale acestora. Scopul lucrării este de a prezenta aceste consecințe. Presupunem cunoscute elemente de teoria fasciculelor, coomologie, spații analitice, amintind în preliminarii, fără demonstrații, rezultatele necesare.

În §1 se dă definiția spațiului Stein, enunțul teoremelor A, B și teorema de caracterizare a spațiilor Stein, iar în §2 sînt prezentate exemple de astfel de spații. Paragraful 3 tratează problemele Cousin și Poincaré, dînd condiții suficiente (în unele cazuri și necesare) de solubilitate a lor. În §4 sînt demonstrate proprietăți ale mulțimilor analitice din spații Stein (prelungiri de secțiuni, definire prin ecuații globale etc.) și se dă caracterizarea deschișilor Stein din $\mathbf{C}^n$. Paragrafele 5 și 6 conțin proprietăți ale fasciculelor coerente pe spații Stein și ale algebrelor de secțiuni globale pe spații Stein. Se arată că secțiunile globale ale fasciculului structural, sau ale unui fascicul coerent pe un spațiu Stein determină proprietățile spațiului sau ale fasciculului.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 6, P. 877–907, BUCUREȘTI, 1969

PRELIMINARII

1. Considerăm spațiul $\mathbb{C}^n (n \geqslant 1)$ cu topologia uzuală și notăm cu $O_{\mathbb{C}^n}$ fasciculul de germeni de funcții olomorfe. Conform teoremei lui Oka, el este un fascicul coerent de inele (demonstrația se găsește de exemplu în [3], [5], [8]). Pentru un deschis U din $\mathbb{C}^n$ și un ideal coerent $\mathfrak{J} \subset O_U = O_{\mathbb{C}^n}|_U$, considerăm spațiul inelat $(Y,\ O_Y = O_{U/\mathfrak{J}}|_Y)$ cu $Y = \operatorname{Supp} O_{U/\mathfrak{J}}$ (închis în U). Un astfel de spațiu inelat se numește model local de spațiu analitic. Dacă M este o mulțime analitică în U (adică, local, M este mulțimea zerourilor comune ale unui număr finit de funcții olomorfe), notînd $\mathfrak{J}(M)$ idealul din O_U format din germenii de funcții olomorfe pe U nule pe M, atunci $\mathfrak{J}(M)$ este ideal coerent ([3], [5]) numit idealul lui Cartan al mulțimii M. Spațiul inelat $(M,\ O_{U/\mathfrak{J}(M)}|_M)$ este deci un model local de spațiu analitic. Fasciculul $O_M = O_{U/\mathfrak{J}(M)}|_M$ se identifică cu fasciculul de germeni de funcții olomorfe pe M cu valori în $\mathbb{C}$ și $(M,\ O_M)$ este modelul local pentru spațiile analitice reduse (fibrele fasciculului O_M nu au elemente nilpotente). Se numește spațiul analitic complex un spațiu inelat de $\mathbb{C}$-Algebre $(X,\ O_X)$ care local este izomorf (izomorfism de spații inelate) cu un model. Adesea vom desemna un spațiu analitic numai prin componenta topologică. Spațiile analitice sînt local compacte, local conexe, și pentru ele paracompacitatea este echivalentă cu existența unei baze numărabile (de deschiși).

Pentru un spațiu analitic X, notăm prin **Coh** (X) categoria fasciculelor de O_X-module coerente.

Dacă $x \in X$, notăm prin $O_{X,x}$ inelul local al germenilor de secțiuni olomorfe ale lui X în x, cu $\underline{m}_x$ idealul maximal din $O_{X,x}$ și cu $\varepsilon_x : O_{X,x} \to \mathbb{C}$ surjecția canonică. Pentru o secțiune $f \in \Gamma(X,\ O_X)$, notăm $f_x \in O_{X,x}$ germenul lui f în x și cu $f(x)$ numărul $\varepsilon_x(f_x)$; aplicația $X \to \mathbb{C},\ x \rightsquigarrow f(x)$ definește o funcție continuă pe X. Vom spune că f este nulă în x, dacă $f(x) = 0$, adică $f_x \in \underline{m}_x$.

Dacă X este redus (atunci O_X este un fascicul de funcții), $f(x)$ este chiar valoarea funcției f în punctul x. Prin $\dim O_{X,x}$ notăm dimensiunea Krull a inelului $O_{X,x}$ și punem $\dim X = \sup\limits_{x \in X} \dim O_{X,x}$.

2. Subspațiu deschis al unui spațiu analitic X este orice deschis U cu fasciculul structural $O_X|_U$.

Subspațiu închis al lui X este orice spațiu inelat de forma $Y = (Y = \operatorname{Supp} O_{X/\mathfrak{J}},\ O_{X/\mathfrak{J}}|_Y)$ cu $\mathfrak{J} \subset O_X$. Ideal coerent (rezultă că la rîndul lui este un spațiu analitic). O submulțime închisă Y a lui X se numește submulțime analitică închisă dacă este spațiul topologic subiacent al unui subspațiu închis al lui X. Notăm cu $\mathfrak{J}(Y)$ idealul lui O_X format din germenii de secțiuni ale lui O_X nule pe Y. Conform teoremei Cartan-Oka, $\mathfrak{J}(Y)$ este coerent. Subspațiul analitic $(Y,\ O_X/_{\mathfrak{J}(Y)}|_Y)$ se numește subspațiul redus al lui X definit pe Y.

Amintim teorema zerourilor : dacă $\mathfrak{J}, \mathfrak{j} \subset O_X$ sînt două ideale coerente astfel încît $\operatorname{Supp} O_{X/\mathfrak{J}} \subset \operatorname{Supp} O_{X/\mathfrak{j}}$, atunci local $\mathfrak{J}$ conține o putere a lui $\mathfrak{j}$.

3. O submulţime analitică închisă Y a unui spaţiu analitic redus X se numeşte ireductibilă, dacă nu se poate scrie ca reuniune de două submulţimi analitice închise proprii ale sale.

Y se numeşte componentă ireductibilă, dacă este o mulţime ireductibilă închisă maximală.

Au loc următoarele proprietăţi :

— componentele ireductibile $(X_i)_{i\in I}$ formează o acoperire local finită a spaţiului X ;

— $\dim X = \sup\limits_{i\in I} \dim X_i$;

— dacă X este ireductibil, atunci dimensiunea sa este finită şi egală cu $\dim O_{X,x}$ oricare ar fi $x\in X$;

— dacă X are un număr finit de componente ireductibile, atunci $\dim X < \infty$;

— dacă Z este o mulţime analitică închisă a lui X, care nu conţine nici o componentă ireductibilă a lui X, atunci $\dim Z \leqslant \dim X - 1$; în particular, dacă X este ireductibil şi $Z \neq X$, atunci $\dim Z \leqslant \dim X - 1$.

4. Se numeşte morfism între două spaţii analitice $(X, O_X) \to (Y, O_Y)$ un morfism de spaţii inelate (de $\mathbf{C}$-algebre), adică o pereche $f = (f_0, f_1)$, unde $f_0 : X \to Y$ este continuă şi $f_1 : f^{-1}(O_Y) \to O_X$ un morfism de fascicule de $\mathbf{C}$-algebre. Pentru fiecare $x\in X$, notăm $f_x^* : O_{Y,f(x)} \to O_{X,x}$ fibra lui f_1 în x.

Astfel, spaţiile complexe formează o categorie şi se arată [3] că în această categorie există limite proiective finite ; în particular există produse directe finite (componenta topologică corespunde la produsul de componente topologice respective) şi pentru orice diagramă de spaţii analitice complexe :

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "v"] \\ X \arrow[r, "u"'] & S \end{tikzcd}$$

există produsul fibrat $X \times_S Y$. Topologic, el este subspaţiul lui $X \times Y$ format de perechile (x, y) cu $u(x) = v(y)$.

Notînd tot cu $\mathbf{C}^n$ spaţiul analitic $(\mathbf{C}^n, O_{\mathbf{C}^n})$, pentru orice spaţiu analitic X avem o bijecţie de mulţimi

$$\mathrm{Hom}\ (X, \mathbf{C}^n) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X, O_X)^n$$

care asociază oricărui morfism $f : X \to \mathbf{C}^n$ sistemul $(\mathrm{pr}_i \circ f)_{1\leqslant i\leqslant n}$ [3].

Acest fapt se foloseşte în [3] pentru a dovedi existenţa limitelor proiective finite.

Un morfism $f : X \to Y$ de spaţii analitice se zice separat dacă orice două puncte $x, y \in X$ astfel încît $f(x) = f(y)$ se separă. Morfismul f se zice imersie închisă dacă el realizează in izomorfism între X şi un subspaţiu analitic închis în Y. Vom folosi rezultatul următor : dacă X este spaţiu Stein redus de dimensiune finită r, atunci există o imersie închisă $X \to \mathbf{C}^{2r+1}$ [11].

— Morfismul f se zice imersie locală într-un punct $x \in X$ dacă există vecinătăţi U şi V ale lui x şi $f(x)$, astfel încît $f(U) \subset V$ şi $f|_U : U \to V$ este o imersie închisă.

— Morfismul f se zice finit dacă este morfism separat, aplicaţie închisă şi cu fibre finite (pentru orice $y \in Y$, fibra în y, $f^{-1}(y)$ este o mulţime finită). Orice imersie închisă este morfism finit. Vom spune că f este finit într-un punct $x \in X$, dacă există vecinătăţi U şi V ale lui x şi $f(x)$ astfel încît $f(U) \subset V$ şi $f|_U : U \to V$ este o imersie închisă.

Dacă $f : X \to Y$ este un morfism finit de spaţii analitice, atunci au loc următoarele proprietăţi :

1) Dacă $F \in \mathbf{Coh}(X)$, atunci $f_*(\mathcal{F}) \in \mathbf{Coh}(Y)$ (amintim că $f_*(\mathcal{F})$ este O_Y — modulul pentru care $\Gamma(Y, f_*(\mathcal{F})) = \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{F})$, V deschis în Y). În particular, $f_*(O_X)$ este coerent.

2) Functorul $f_* : \mathbf{Coh}(X) \to \mathbf{Coh}(Y)$ este exact.

3) Dacă $\mathcal{F} \in \mathbf{Coh}(X)$ şi $y \in Y$, atunci morfismul canonic $(f_*(\mathcal{F}))_y \to$ $\to \prod_{x \in f^{-1}(y)} \mathcal{F}_x$ este izomorfism.

6. O pereche (X, x) formată dintr-un spaţiu analitic X şi un punct $x \in X$ se zice germen analitic. Morfism $(X, x) \xrightarrow{f} (Y, y)$ între doi germeni analitici este o clasă de morfisme $U \to Y$ care transformă x în y, cu U vecinătate a lui x (Pentru $\varphi : U \to Y$, $\varphi(x) = y$ şi $\psi : V \to Y$, $\psi(x) = y$, spunem că $\varphi \sim \psi$ dacă sînt egale într-o vecinătate a lui x inclusă în $U \cap V$).

Doi germeni (X, x) şi (Y, y) rezultă izomorfi dacă există o vecinătate $U_{(x)}$ şi o vecinătate $V_{(y)}$ şi un izomorfism $U \xrightarrow{f} V$ astfel încît $f(x) = y$.

Prin algebră analitică se înţelege orice $\mathbf{C}$-algebră nenulă de forma $\mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_n\}/\underline{a}$ cu $\underline{a}$ ideal în inelul seriilor convergente $\mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Din definiţia spaţiului analitic, rezultă că fibrele fasciculului structural sînt algebre analitice.

Au loc următoarele rezultate [3] :

1) Asocierile

$$(X, x) \rightsquigarrow O_{X,x}$$

$$(X, x) \xrightarrow{f} (Y, y) \rightsquigarrow O_{Y,y} \xrightarrow{f_x^*} O_{X,x}$$

definesc o echivalenţă a categoriei germenilor analitici cu categoria duală a categoriei algebrelor analitice.

2) Un morfism $X \xrightarrow{f} Y$ este imersie închisă într-un punct $x \in X \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ morfismul $f_x^* : O_{Y,f(x)} \to O_{X,x}$ este surjectiv $\Leftrightarrow$ idealul maximal din $O_{Y,f(x)}$ generează idealul maximal din $O_{X,x}$.

3) Morfismul $X \xrightarrow{f} Y$ este un morfism finit în $x \Leftrightarrow f_x^*$ este morfism finit de inele $\Leftrightarrow$ x este punct izolat în $f^{-1} f(x)$.

7. Fie (X, O_X) un spaţiu complex. Pentru orice $x \in X$, există o vecinătate $U = U_{(x)}$ astfel încît $(U, O_X|_U)$ este izomorf (ca spaţiu inelat) cu un spaţiu (Y, O_Y) de tipul următor : există un policilindru P într-un $\mathbf{C}^n$

şi un ideal coerent $\mathcal{J} \subset O_P$ astfel încît $Y = \operatorname{Supp} O_P/_{\mathcal{J}}$, $O_Y = O_P/_{\mathcal{J}}|_Y$. Conform teoremei B avem $\Gamma(Y, O_X) = \Gamma(P, O_P)/_{\Gamma(P, \mathcal{J})}$ şi acest fapt permite înzestrarea lui $\Gamma(Y, O_Y)$ cu o topologie : în $\Gamma(P, O_P)$ avem topologia convergenţei uniforme pe orice compact şi $\Gamma(P, \mathcal{J})$ este un subspaţiu închis. Luăm pe $\Gamma(Y, O_Y)$ topologia cît a acesteia şi $\Gamma(U, O_X) \simeq \Gamma(Y, O_Y)$ devine un spaţiu Fréchet şi o algebră topologică.

Găsim astfel o bază de deschişi $(U_i)_{i \in I}$ pentru X astfel încît pentru orice i, $\Gamma(U_i, O_X)$ este o $\mathbf{C}$-algebră topologică Fréchet. Dacă U este un deschis arbitrar, atunci pe $\Gamma(U, O_X)$ considerăm cea mai mică topologie pentru care aplicaţiile $\Gamma(U, O_X) \to \Gamma(U_i, O_X)$ $(U_i \subset U)$ sînt continui. În acest fel, O_X devine un fascicul topologic, iar dacă X are bază numărabilă, atunci O_X este fascicul Fréchet (în sensul că fiecare $\Gamma(U, O_X)$ este spaţiu Fréchet şi restricţiile sînt continue). Fasciculul topologic O_X nu depinde de alegerile făcute. Dacă $(X, O_X) \to (Y, O_Y)$ este un morfism de spaţii complexe, atunci aplicaţia $\Gamma(Y, O_Y) \to \Gamma(X, O_X)$ corespunzătoare este continuă.

Fie acum (X, O_X) un spaţiu complex şi $\mathcal{F} \in \mathbf{Coh}(X)$. $\mathcal{F}$ devine un fascicul topologic în felul următor : dacă $(U_i)_{i \in I}$ este baza de deschişi folosită mai sus, atunci conform teoremelor A şi B avem : $\Gamma(U_i, \mathcal{F}) = \Gamma(U_i, O_X^{p_i})/_{\Gamma(U_i, \mathcal{R}_i)}$, unde $\mathcal{R}_i$ este un subfascicul al lui $O_X^{p_i}|_{U_i}$. $\Gamma(U_i, \mathcal{R}_i)$ este un subspaţiu închis al lui $\Gamma(U_i, O_X^{p_i})$ şi înzestrăm $\Gamma(U_i, \mathcal{F})$ cu topologia cît ; el devine un spaţiu Fréchet şi un $\Gamma(U_i, O_X)$-modul topologic. Ca în cazul lui O_X, $\mathcal{F}$ se poate înzestra cu o structură de fascicul topologic, iar dacă X are bază numărabilă, $\mathcal{F}$ este fascicul Fréchet. (Se arată că topologia obţinută este independentă de diversele alegeri). Dacă $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ este un morfism oarecare de fascicule analitice coerente pe X, atunci aplicaţia $\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{G})$ este continuă.

Aceste consideraţii topologice se pot găsi de exemplu în [5].

§ 1. DEFINIŢIA UNUI SPAŢIU STEIN

DEFINIŢIA 1.1. Un spaţiu analitic complex (X, O_X) separat şi cu bază numărabilă se zice *spaţiu Stein* dacă :

(1) este olomorf-separat : pentru orice $x \in X$, există n natural şi un morfism $X \to \mathbf{C}^n$ finit în x ;

(2) este olomorf-convex : pentru orice $K \subset X$ compact, închiderea olomorf-convexă a lui K,

$$\hat{K} = \{ x \in X \mid \text{pentru orice } f \in \Gamma(X, O_X), |f(x)| \leqslant \sup_{y \in K} |f(y)| \} \text{ este}$$

compactă.

Observaţia 1.2. Condiţia (2) este echivalentă cu următoarea condiţie :

(2′) *oricare ar fi un şir* (x_n) *de elemente din* X *fără punct de acumulare, există* $f \in \Gamma(X, O_X)$ *astfel încît mulţimea* $\{ |f(x_n)| \}$ *este nemărginită în* $\mathbf{R}$.

În adevăr, avem (2′) ⇒ (2) deoarece dacă pentru un compact $K \subset X$, $\hat{K}$ nu ar fi compact, atunci ar exista un şir (x_n) de puncte din $\hat{K}$ neavînd limită în $\hat{K}$ şi deci nici în X ($\hat{K}$ fiind închis) şi conform (2′)

ar exista $f \in \Gamma(X, O_X)$ pentru care mulţimea $\{|f(x_n)|\}$ este nemărginită; absurd, deoarece x_n fiind din $\hat{K}$, rezultă $|f(x_n)| \leqslant \sup_{y \in K} |f(y)| < \infty$. Pentru a arăta că (2) $\Rightarrow$ (2′), fie (x_n) un şir de puncte din X fără punct de acumulare. Considerăm o exhaustiune cu compacţi olomorf-convecşi $(K_n)_{n \in N}$ a lui X, a cărei existenţă este imediată folosind ipoteza (2) şi fie $B_n = \{f \in \Gamma(X, O_X)$ pentru care $\sup_r |f(x_r)| \leqslant n\}$. Dacă condiţia (2′) nu ar fi satisfăcută de şirul (x_n), atunci am avea $\Gamma(X, O_X) = \bigcup_n B_n$. Aplicînd teorema lui Baire, cel puţin una din mulţimile B_n, fie ea B_{n_0}, ar avea interior nevid, deci există $\varepsilon > 0$ astfel încît deschisul $\{f \in \Gamma(X, O_X) \mid \sup_{x \in K_{n_0}} |f(x)| < \varepsilon\}$ este inclus în B_{n_0}. Rezultă atunci imediat că există un număr natural N astfel încît de îndată ce $\sup_{x \in K n_0} |f(x)| < 1$, avem $\sup_n |f(x_n)| \leqslant N$. Cum şirul (x_n) este infinit, şi nu are punct de acumulare, există $x_n \notin K_{n_0} = \hat{K}_{n_0}$, adică există $f \in \Gamma(X, O_X)$ cu $\sup_{x \in K_{n_0}} |f(x)| < 1$ şi $|f(x_n)| > 1$. Considerarea funcţiei f^k pentru k suficient de mare conduce la o contradicţie evidentă.

Pentru spaţiile Stein sînt adevărate teoremele lui H. Cartan.

TEOREMA A. *Dacă* (X, O_X) *este un spaţiu Stein şi* $\mathcal{F}$ *un fascicul analitic coerent pe* X, *atunci pentru orice* $x \in X$, *fibra* $\mathcal{F}_x$ *este generată ca* $O_{X,x}$*-modul de* $\Gamma(X, \mathcal{F})$.

TEOREMA B. *Dacă* (X, O_X) *este un spaţiu Stein şi* $\mathcal{F}$ *un fascicul analitic coerent pe* X, *atunci* $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ *pentru orice* $q \geqslant 1$.

O demonstraţie a acestor teoreme se găseşte în [5], [7], [8].

1.3. Vom numi *spaţiu Stein în sens clasic* orice spaţiu analitic complex X separat şi cu bază numărabilă, verificînd în plus condiţiile:

(1) separarea olomorfă a punctelor: pentru orice $x, y \in X$, $x \neq y$ există $f \in \Gamma(X, O_X)$ astfel încît $f(x) \neq f(y)$;

(2) pentru orice $x \in X$, există secţiunile $f_1, \ldots, f_n \in \Gamma(X, O_X)$ astfel încît morfismul canonic $X \to \mathbf{C}^n$ definit de ele să fie o imersie în x.

(3) X este olomorf-convex.

Observaţia 1.4. Pentru un spaţiu analitic complex oarecare X, a defini o imersie $X \to \mathbf{C}^n$ într-un punct $x \in X$ revine la a da n secţiuni $f_1, \ldots, f_n \in \Gamma(X, O_X)$ cu proprietatea că germenii $f_{1,x}, \ldots, f_{n,x}$ generează $\underline{m}_x$. În adevăr, dacă această condiţie este îndeplinită, atunci morfismul $F: X \to \mathbf{C}^n$ definit de $f_1, \ldots, f_n$ induce — trecînd la fibre în x-morfismul surjectiv de $\mathbf{C}$-algebre $\mathbf{C}\{X_1, \ldots, X_n\} \to O_{X,x}$ care transformă X_i în $f_{i,x}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, deci F este imersie.

Amintim că pentru un spaţiu analitic X, orice submulţime discretă $A \subset X$ şi orice familie $\{r_x; \varphi_x\}_{x \in A}$ cu $r_x \in \mathbf{N}$, $\varphi_x \in O_{X,x}$ se numeşte *dată Mittag-Leffler pe X*. *Soluţie* a unei asemenea date este orice secţiune $f \in \Gamma(X, O_X)$ astfel încît pentru orice $x \in A$, $f_x - \varphi_x \in \underline{m}_x^{r_x}$. Cu aceste pregătiri dăm teorema de caracterizare a spaţiilor Stein:

TEOREMA 1.5. *Fie* X *un spaţiu analitic complex separat şi cu bază numărabilă. Sînt echivalente următoarele afirmaţii:*

(a) X *este spaţiu Stein;*

(b) *X verifică condițiile lui Serre, adică condițiile echivalente următoare :*

(b$_1$) *functorul Γ este exact pe fascicule coerente ;*

(b$_2$) *$H^q(X, \mathfrak{F}) = 0$, pentru orice $q \geqslant 1$ și orice $\mathfrak{F} \in \mathbf{Coh}(X)$;*

(b$_3$) *$H^q(X, \mathfrak{I}) = 0$, pentru orice $q \geqslant 1$ și orice $\mathfrak{I} \subset O_X$, ideal coerent ;*

(b$_4$) *$H^q(X, \mathfrak{I}) = 0$, pentru orice $q \geqslant 1$ și pentru orice ideal coerent $\mathfrak{I} \subset O_x$ pentru care suportul lui $O_X/_\mathfrak{I}$ este mulțime discretă. În condițiile (b_2), (b_3), (b_4) se poate presupune $q = 1$;*

(c) *Orice dată Mittag-Leffler pe X are soluție ;*

(d) *X este spațiu Stein în sens clasic.*

Demonstrație. Implicația (d) $\Rightarrow$ (a) este evidentă, deoarece orice imersie este morfism finit. Apoi, (a)$\Rightarrow$ (b$_2$) conform teoremei B, iar implicațiile (b$_2$) $\Rightarrow$ (b$_3$) $\Rightarrow$ (b$_4$) și (b$_2$) $\Rightarrow$ (b$_1$) sînt triviale. Arătăm că (b$_4$) $\Rightarrow$ (c) și din demonstrație va rezulta totodată și că (b$_1$) $\Rightarrow$ (c). Fie $A \subset X$ o mulțime discretă și $\{r_x, \varphi_x\}_{x\in A}$ o dată Mittag-Leffler pe X. Pentru orice $x \in A$ există o vecinătate V a lui x și un ideal coerent $\mathfrak{I}^x$ definit pe ea astfel încît pe fibre $(\mathfrak{I}^x)_x = \underline{m}_x^{r_x}$ și $(\mathfrak{I}^x)_y = O_{X,y}$ pentru orice $y \in V$, $y \neq x$ (problema este de natură locală, deci X se poate presupune mulțime analitică dintr-un $\mathbf{C}^n$ dată de un ideal coerent $\mathfrak{I}$ și atunci $\mathfrak{I}^x$ este idealul generat de monoame de grad r_x formate cu funcțiile de coordonate $X_i - x_i$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$). Se poate presupune că urma lui V pe A este redusă la punctul x. Racordînd familia de fascicule $\{\mathfrak{I}^x\}_{x\in A}$, se obține un fascicul analitic coerent $\mathfrak{I} \subset O_X$, astfel încît $A = \operatorname{Supp} O_X/_\mathfrak{I}$.

Avem șirul exact $O \to \mathfrak{I} \to O_X \to O_X/_\mathfrak{I} \to 0$ și cum am presupus că $H^1(X), \mathfrak{I}) = 0$ (sau că Γ este functor exact pe fascicule coerente) rezultă surjecția $\Gamma(X, O_X) \to \Gamma(X, O_X/_\mathfrak{I})$. Cum secțiunile lui $O_X/$ peste X sînt sisteme arbitrare $\varphi_x \in O_{X,x}$, cu $x \in A$ modulo relația de echivalență

$$(\varphi_x)_{x\in A} \sim (\psi_x)_{x\in A} \rightleftarrows \varphi_x - \psi_x \in \underline{m}_x^{r_x}$$

rezultă imediat că data Mittag-Leffler inițială are soluție. (c) $\Rightarrow$ (d). Arătăm mai întîi secțiunile din $\Gamma(X, O_X)$ separă punctele lui X. Fie $x, y \in X$, $x \neq y$ și $A = \{x, y\}$. Considerăm data Mittag-Leffler $r_x = r_y = 1$, $\varphi_x = 0$, $\varphi_y = 1$; conform ipotezei (c), există $f \in \Gamma(X, O_X)$ astfel încît $f_x - 0 \in \underline{m}_x$ și $f_y - 1 \in m_y$, deci $f(x) = 0, f(y) = 1$. Arătăm acum că X este olomorf convex, verificînd condiția (2′), (observația 1.2). Fie (x_n) un șir de puncte din X fără punct de acumulare. Considerăm data Mittag-Leffler $A = \{x_n\}_{n\geqslant 1}$, $r_{x_n} = 1$ pentru orice n și $\varphi_{x_n} = n$. Conform ipotezei, există $f \in \Gamma(X, O_X)$ astfel încît $f_{x_n} - n \in \underline{m}_{x_n}$, deci $f(x_n) = n$, adică mulțimea $\{|f(x_n)|\}$ este nemărginită.

În fine, verificăm condiția (2) de la definiția spațiului Stein în sens clasic. Fie $A = \{x\}$, $r_x = 2$ și $\varphi_{1,x}, \ldots, \varphi_{n,x} \in O_{X,x}$ generînd $\underline{m}_x$. Conform ipotezei, există $f_1, \ldots, f_n \in \Gamma(X, O_X)$ astfel încît $f_{i,x} - \varphi_{i,x} \in \underline{m}_x^2$; evident, $\underline{m}_x = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{i,x} O_{X,x} + \underline{m}_x^2$ și lema lui Nakayama arată că idealul $\underline{m}_x$ este generat de $f_{i,x}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ și conform observației 1.4, morfismul $X \to \mathbf{C}^n$ definit de $f_1, \ldots, f_n$ este imersie în punctul x.

Observația 1.6. Dacă x este un punct simplu în X, atunci se pot considera $\varphi_{1,x}, \ldots, \varphi_{n,x} \in O_{X,x}$ astfel încît morfismul $\mathbf{C}\{X_1, \ldots, X_n\} \to O_{X,x}$ $(X_i \rightsquigarrow \varphi_{i,x})$ este izomorfism și morfismul $\mathbf{C}\{X_1, \ldots, X_n\} \to O_{X,x}$ $(X_i \rightsquigarrow f_{i,x})$ este de asemenea izomorfism. Așadar, pentru varietăți Stein orice punct admite un sistem de coordonate locale definite global (deoarece $f_1, \ldots, f_n$ definesc un izomorfism al unei vecinătăți a lui x pe un deschis din $\mathbf{C}^n$).

TEOREMA 1.7. *Fie (X, O_X) un spațiu analitic complex. Atunci (X, O_X) este spațiu Stein dacă și numai dacă $(X, O_X)_{\mathrm{red}}$ este spațiu Stein.*

Demonstrație. Dacă (X, O_X) este spațiu Stein, atunci orice subspațiu analitic închis al său este de asemenea Stein (cum rezultă din teorema 1.4 (b) sau direct din definiții), deci $(X, O_X)_{\mathrm{red}}$ este spațiu Stein. Reciproc, presupunem că $(X, O_X)_{\mathrm{red}}$ este spațiu Stein și că am demonstrat surjectivitatea morfismului canonic

$$\Gamma(X, O_X) \to \Gamma(X, O_{X_{\mathrm{red}}})$$

și fie K un compact în X; cum închiderile olomorf-convexe ale lui K în (X, O_X) și în $(X, O_X)_{\mathrm{red}}$ coincid, rezultă că (X, O_X) este olomorf convex.

Rămîne să arătăm că (X, O_X) este olomorf separat. Fie $x \in X$ și $F : (X, O_X)_{\mathrm{red}} \to \mathbf{C}^n$ finit în x, definit de secțiunile $f_1, \ldots, f_n \in \Gamma(X, O_{X_{\mathrm{red}}})$. Fie $g_1, \ldots, g_n \in \Gamma(X, O_X)$ avînd imaginile $f_1, \ldots, f_n$ prin morfismul canonic $\Gamma(X, O_X) \to \Gamma(X, O_{X_{\mathrm{red}}})$ și corespunzător lor, morfismul $G : (X, O_X) \to \mathbf{C}^n$. Este comutativă diagrama următoare :

$$\begin{tikzcd}
(X, O_X)_{\mathrm{red}} \arrow[r] \arrow[dr, "F"'] & (X, O_X) \arrow[d, "G"] \\
& \mathbf{C}^n
\end{tikzcd}$$

Fie $\mathcal{N}$ nilradicalul lui O_X (care este ideal coerent după teorema lui H. Cartan). Avem :

$$O_{X_{\mathrm{red}}} = O_X/\mathcal{N}\ , \text{ deci } O_{X_{\mathrm{red}}} = O_{X,x}/\mathcal{N}_x .$$

Diagrama de mai sus induce diagrama comutativă :

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{C}\{X_1, \ldots, X_n\} \arrow[dl, "G_x"'] \arrow[dr, "F_x"] & \\
O_{X,x} \arrow[rr] & & O_{X,x}/\mathcal{N}_x
\end{tikzcd}$$

Prin ipoteză morfismul de inele F_x este finit și rămîne să demonstrăm că morfismul G_x este finit. Pentru aceasta, demonstrăm prin inducție după p că morfismul compus :

$$\mathbf{C}\{X_1, \ldots, X_n\} \xrightarrow{G_x} O_{X,x} \to O_{X,x}/\mathcal{N}_x^p$$

este finit (și apoi, pentru p suficient de mare, $\mathcal{N}_x^p = 0$, deci G_x rezultă finit). Pentru $p = 1$, morfismul compus este chiar F_x, iar pasul general de inducție rezultă din șirul exact :

$$0 \to \mathcal{N}_x^p/\mathcal{N}_x^{p+1} \to O_{X,x}/\mathcal{N}_x^{p+1} \to O_{X,x}/\mathcal{N}_x^p \to 0$$

în care $\mathcal{N}_x^\nu/\mathcal{N}_x^{\nu+1}$ este $O_{X,x}/\mathcal{N}_x$-modul finit (deci şi $\mathbf{C}\{X_1, \ldots, X_n\}$-modul finit).

Pentru a încheia demonstraţia rămîne să probăm surjectivitatea aplicaţiei :

$$\Gamma(X, O_X) \to \Gamma((X, O_X)_{\text{red}}).$$

$(X, O_X)_{\text{red}}$ fiind spaţiu Stein, există o exhaustiune cu deschişi relativ-compacţi $(U_i)_{i\geqslant 0}$, $\overline{U}_i \subset U_{i+1}$, $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$. Cum $\mathcal{N}$ are fibrele nilpotente şi este coerent, iar fiecare U_i este relativ compact, există un şir (n_i) de numere naturale, pe care îl putem presupune crescător astfel încît $\mathcal{N}^{n_i}|_{U_i} = 0$. Din şirul exact :

$$0 \to \mathcal{N}^k/\mathcal{N}^{k+1} \to O_X/\mathcal{N}^{k+1} \to O_X/\mathcal{N}^k \to 0$$

şi din faptul că $\mathcal{N}^k/\mathcal{N}^{k+1}$ este un $O_X/\mathcal{N} = O_{X_{\text{red}}}$ -modul coerent, iar spaţiul $(X, O_X)_{\text{red}}$ este Stein, rezultă şirul exact $\Gamma(X, O_X/\mathcal{N}^{k+1}) \to \Gamma(O_X/\mathcal{N}^k) \to 0$, deci pentru orice $m \geqslant n$ avem surjecţia $\Gamma(X, O_X/\mathcal{N}^m) \to \Gamma(X, O_X/\mathcal{N}^n)$. Considerăm diagrama comutativă :

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & \Gamma(X, O_X/\mathcal{N}^{n_1}) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X, O_X/\mathcal{N}^{n_0}) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X, O_X/\mathcal{N}) \\
\ldots \arrow[r] & \Gamma(U_1, O_X/\mathcal{N}^{n_1}) \arrow[r] & \Gamma(U_0, O_X/\mathcal{N}^{n_0}) & \\
\ldots \arrow[r] & \Gamma(U_1, O_X) \arrow[r] \arrow[u, "\text{izo}"'] & \Gamma(U_0, O_X) \arrow[u, "\text{izo}"'] &
\end{tikzcd}$$

în care toate morfismele sînt cele canonice.

Morfismele primei linii sînt surjective iar morfismele $\Gamma(U_i, O_X) \to \Gamma(U_i, O_X/\mathcal{N}^{n_i})$ sînt izomorfisme ($\mathcal{N}^{n_i} = 0$ pe U_i). Fie $s' \in \Gamma(X, O_X/\mathcal{N})$ şi $s_0' \in \Gamma(X, O_X/\mathcal{N}^{n_0})$ o preimagine a sa. Există $s_0 \in \Gamma(U_0, O_X)$ care se identifică prin izomorfismul $\Gamma(U_0, O_X) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U_0, O_X/\mathcal{N}^{n_0})$ cu $s_0'|_{U_0}$ şi fie $s_1' \in \Gamma(X, O_X/\mathcal{N}^{n_1})$ o preimagine a lui s_0'. Există $s_1 \in \Gamma(U_1, O_X)$ care se identifică prin izomorfismul $\Gamma(U_1, O_X) \to \Gamma(U_1, O_X/\mathcal{N}^{n_1})$ cu $s_1'|_{U_1}$. Din diagrama anterioară, rezultă că $s_1|_{U_0} = s_0$ şi repetînd raţionamentul, se găsesc secţiunile $s_i \in \Gamma(U_i, O_X)$ astfel încît $s_{i+1}|_{U_i} = s_i$, iar imaginea lui s_i prin $\Gamma(U_i, O_X) \to \Gamma(U_i, O_X/\mathcal{N})$ este $s'|_{U_i}$. Am definit astfel o secţiune $s \in \Gamma(X, O_X)$ a cărei imagine prin morfismul $\Gamma(X, O_X) \to \Gamma(X, O_X/\mathcal{N})$ este s'. Teorema este demonstrată.

1.8. Fie (X, O_X) spaţiu analitic complex şi $Y \subset X$ o submulţime analitică a sa. Y se zice submulţime analitică Stein dacă spaţiul complex $(Y, O_X/\mathfrak{I}(Y)/_Y)$ este Stein. Conform teoremei 1.7, Y este Stein dacă şi numai dacă orice subspaţiu analitic al lui (X, O_X) avînd Y ca spaţiu topologic subiacent este Stein. Evident, o submulţime analitică închisă a lui X conţinută într-o submulţime analitică Stein este de asemenea Stein.

COROLARUL 1.9. *Fie X un spaţiu analitic complex şi $\mathcal{F}$ un fascicul analitic coerent pe X, nul în afara unei mulţimi analitice Stein. Atunci $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ pentru orice $q \geqslant 1$.*

Demonstraţie. Fie $Y = \operatorname{Supp} \mathcal{F} = \operatorname{Supp} O_X/\operatorname{Ann} \mathcal{F}$; conform ipotezei, Y este o submulţime analitică Stein. Cum $\mathcal{F}$ este trivial în afara lui Y, avem $H^q(X, \mathcal{F}) = H^q(Y, \mathcal{F}|_Y)$ şi cum $\mathcal{F}$ este $O_X/\operatorname{Ann} \mathcal{F}$-modul, iar $(Y, O_X/\operatorname{Ann} \mathcal{F}|_Y)$ este subspaţiu închis al lui (X, O_X) avînd ca spaţiu topologic subiacent submulţimea analitică Stein Y, deci este Stein, corolarul rezultă aplicînd teorema B.

1.10. În încheierea acestui paragraf prezentăm relativizarea noţiunii de spaţiu Stein, propusă de M. Jurchescu: Un morfism separat de spaţii analitice complexe cu bază numărabilă $f: X \to Y$ se zice *morfism Stein* dacă:

(1) pentru orice $x \in X$ există $N(x)$ natural şi un morfism $X \to \mathbf{C}^{N(x)}$ care împreună cu f defineşte un morfism $X \to Y \times \mathbf{C}^{N(x)}$ finit în x;

(2) pentru orice cvasicompact $K \subset X$ şi orice cvasicompact $L \subset Y$ mulţimea $\hat{K} \cap f^{-1}(L)$ este cvasicompactă.

În analogie cu observaţia 1.2 se poate arăta echivalenţa condiţiei (2) cu următoarea:

(2′) oricare ar fi şirul (x_n) de puncte din X fără punct de acumulare şi astfel încît mulţimea $\{|f(x_n)|\}$ este relativ compactă în Y, există $\varphi \in \Gamma(X, O_X)$ pentru care mulţimea $\{|\varphi(x_n)|\}$ este nemărginită. Se verifică următoarele proprietăţi:

— Un spaţiu analitic complex X este Stein dacă şi numai dacă morfismul $X \to (\cdot, \mathbf{C})$ este Stein.

— Considerăm morfismele de spaţii analitice $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$. Dacă f, g sînt morfisme Stein, atunci $g \circ f$ este Stein, iar dacă $g \circ f$ este morfism Stein şi g este separat, atunci f este morfism Stein.

— În diagrama carteziană de spaţii analitice

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "v"] \\ X \arrow[r, "u"'] & S \end{tikzcd}$$

, dacă u este morfism Stein, atunci q este morfism Stein.

— Dacă $X \to Y$ este morfism Stein şi Y este spaţiu Stein, atunci X este spaţiu Stein.

— Orice morfism finit, în particular orice imersie închisă, de spaţii analitice este morfism Stein. (Rezultă atunci că orice subspaţiu analitic închis al unui spaţiu Stein este spaţiu Stein).

§ 2. EXEMPLE DE SPAŢII STEIN

Prezentăm în acest paragraf cîteva exemple de spaţii Stein urmînd ca pe parcursul expunerii să mărim numărul lor.

2.1. Orice mulţime deschisă din planul complex $\mathbf{C}^1$ este Stein. Avem de verificat numai olomorf convexitatea. Fie $U \subset \mathbf{C}$ deschis şi (x_n) un şir de puncte din U fără punct de acumulare în U. Dacă (x_n) nu are punct de acumulare nici în $\mathbf{C}$, atunci mulţimea $\{|x_n|\}$ este nemărginită şi funcţia identică verifică condiţia (2′), observaţia 1.2. Dacă (x_n) are punct de acumulare $a \in \mathbf{C} \setminus U$, atunci funcţia $z \rightsquigarrow \frac{1}{z-a}$ (olomorfă pe U) este nemărginită pe mulţimea (x_n).

2.2. Fie diagrama carteziană de spaţii analitice cu X, Y Stein şi S separat:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

. Atunci $Z \simeq X \times_S Y$ este spaţiu Stein. În adevăr, S fiind separat şi spaţiu Stein, morfismul $X \to S$ este Stein, şi aplicînd 1.10, morfismul $Z \to Y$ este Stein şi cum Y este Stein, rezultă Z spaţiu Stein. (Putem raţiona şi direct, arătînd mai întîi că $X \times Y$ este spaţiu Stein, apoi observînd că Z este un subspaţiu analitic închis al lui $X \times Y$).

În particular, orice produs finit de spaţii Stein este spaţiu Stein. Rezultă de asemenea că intersecţia unui număr finit de submulţimi analitice Stein dintr-un spaţiu analitic separat este o submulţime Stein. Este suficient să considerăm cazul a două astfel de mulţimi Y_1, $Y_2 \subset X$. Or, din diagrama carteziană de spaţii analitice

$$\begin{tikzcd} Y_1 \cap Y_2 \arrow[r] \arrow[d] & Y_1 \times Y_2 \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\Delta"] & X \times X \end{tikzcd}$$

, rezultă că morfismul $Y_1 \cap Y_2 \to Y_1 \times Y_2$ este imersie închisă deoarece imersia diagonală Δ este închisă cu $Y_1 \times Y_2$ spaţiu Stein.

Apoi, orice policilindru deschis din $\mathbf{C}^n$ este Stein, deci $\mathbf{C}^n$ însuşi şi orice submulţime analitică închisă a sa este spaţiu Stein. Nu orice deschis din $\mathbf{C}^n$ — este spaţiu Stein aşa cum arată următorul:

Exemplul 2.3 [8]. Considerăm deschisul U din $\mathbf{C}^n$ $U = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n \mid |z_1 \ldots z_n - 1| < 1,\ |z_j| < 2,\ j = 2, \ldots, n\}$. Pentru orice număr natural r notăm Ω^r fasciculul de forme de tip $(r, 0)$ cu coeficienţi funcţii olomorfe pe U(Ω^0-fasciculul structural O_U). Este imediat că Ω^r este un O_U-modul liber de rang $\binom{n}{r}$ cu generatori de forma $dz_{\lambda(1)} \wedge \cdots \wedge dz_{\lambda(r)}$ cu $1 \leqslant \lambda(1) < \lambda(2) < \ldots < \lambda(r) \leqslant n$. Cum $d(\Omega^r) \subset \subset \Omega^{r+1}$ $\left(\text{d este operatorul de diferenţiere exterioară } df = \Sigma \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i + + \Sigma \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i\right)$ se obţine un şir de O_U-module $\Omega^{r-1} \to \Omega^r \to \Omega^{r+1}$ şi conform unui raţionament analog celui din lema lui Poincaré se arată că acest şir este exact. Dacă U ar fi deschis Stein, atunci ar rezulta că orice formă $f \in \Gamma(U, \Omega^r)$ cu proprietatea $df = 0$, este de forma $f = dg$ cu $g \in \Gamma(U, \Omega^{r-1})$. Conform formulei lui Stokes, ar rezulta atunci că $\int_\gamma f = 0$ pentru orice cociclu γ cuprins în U de dimensiune r.

Dar să alegem $f = (z_1 \ldots z_r)^{-1} dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_r$ cu $1 \leqslant r < n$. Evident, f este o formă olomorfă pe U şi $df = 0$. Considerînd însă cociclul $\gamma: z_j = e^{i\theta_j}\ j = 1, \ldots, r,\ z_{r+1} = e^{-i(\theta_1 + \ldots + \theta_r)}, z_{r+2} = \ldots = z_n = 1 (0 \leqslant \theta_j < < 2\pi)$, avem $\int_\gamma f = \int i^r d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_r = (2\pi i)^r \neq 0$. Astfel, U nu este deschis Stein.

În § 4 vom da o caracterizare a deschişilor Stein din $\mathbf{C}^n$.

2.4. Fie X un spaţiu Stein şi $f \in \Gamma(X, O_X)$. Deschisul $X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ este spaţiu Stein, aşa cum rezultă din diagrama carteziană canonică:

$$\begin{tikzcd} X_f \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{C} \setminus \{0\} \arrow[d] \\ X \arrow[r] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

, din faptul că $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ este spaţiu Stein (exemplul 2.1) şi din consideraţiile de la exemplul 2.2. Dacă $X = \mathbf{C}^{n^2}$, z_{ij} funcţiile de coordonate şi $f = \det \|z_{ij}\|$, atunci X_f este tocmai grupul liniar general n-dimensional Gl $(n, \mathbf{C})$. Aşadar, Gl $(n, \mathbf{C})$ este un spaţiu Stein. Mai general, dacă X este spaţiu Stein şi $f_1, \ldots, f_n$ sînt secţiuni globale pe X, atunci deschisul $X_{f_1, \ldots, f_n} = \{x \in X \mid f_i(x) \neq 0$ pentru $i = 1, \ldots, n\}$ este Stein. În adevăr, $X_{f_1, \ldots, f_n} = X_f$ cu $f = f_1 \ldots f_n$.

2.5. *Dacă X este o varietate Stein de dimensiune n şi Y o subvarietate de dimensiune $n - 1$, atunci $X \setminus Y$ este un deschis Stein.*

Este suficient să verificăm olomorf-convexitatea lui $X\setminus Y$. Definim un subfascicul $\mathcal{F}$ al fasciculului $\mathcal{M}$ de germeni de secţiuni meromorfe pe X, punînd $\mathcal{F}_x = O_{X,x}$ dacă $x \in X\setminus Y$ şi $\mathcal{F}_x = \{m_x \in \mathcal{M}_x$ pentru care $m_x g_x \in O_{X,x}\}$ dacă $x \in Y$, iar g_x este un generator în x al idealului care defineşte Y. Fie (x_n) un şir de puncte din $X\setminus Y$ fără punct de acumulare în $X\setminus Y$. Dacă (x_n) nu are punct de acumulare nici în X, cum X este spaţiu Stein, există $f \in \Gamma(X, O_X)$ astfel încît mulţimea $\{|f(x_n)|\}$ este nemărginită şi atunci $f|_{X\setminus Y} \in \Gamma(X\setminus Y, O_X)$ este secţiunea căutată. Dacă (x_n) are un punct de acumulare x, atunci conform teoremei A aplicată lui $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ este de tip finit, deci coerent), există $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ şi $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in O_{X,x}$ astfel încît $\dfrac{1}{g_x} = \sum_{i=1}^{n} s_{i,x} \cdot \varphi_i$, deci există $\varphi \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ cu $\varphi_x \cdot g_x \in O_{X,x}$ şi $\varphi_x g_x \neq 0$. Dar φ este o funcţie meromorfă şi conform definiţiei lui $\mathcal{F}$ este olomorfă pe $X\setminus Y$. Cum $\varphi(x)\cdot g(x) \neq 0$ şi $g(x) = 0$, rezultă că mulţimea $\{|\varphi(x_n)|\}$ este nemărginită şi $\varphi|_{X\setminus Y} \in \Gamma(X\setminus Y, O_X)$ este secţiunea dorită.

2.6. Fie X un spaţiu Stein, $f_1, \ldots, f_n \in \Gamma(X, O_X)$ şi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ numere reale pozitive. Atunci mulţimea $X' = \{x \in X \mid |f_i(x)| < \lambda_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ este un deschis Stein al lui X. În adevăr, considerăm diagrama carteziană

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "F"] \\ P \arrow[r] & \mathbf{C}^n \end{tikzcd}$$

, unde F este morfismul de componente $f_1, \ldots, f_n$, iar P policilindrul deschis din $\mathbf{C}^n$, $|z_i| < \lambda_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Cum P este spaţiu Stein, rezultă conform 2.2 că X' este spaţiu Stein.

În condiţiile de mai sus, dacă D_i sînt deschişi din $\mathbf{C}$, $i = 1, \ldots, n$, atunci cu aceeaşi demonstraţie, rezultă că mulţimea $\{x \in X \mid f_i(x) \in D_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ este un deschis Stein.

2.7. Un exemplu clasic de varietăţi Stein îl constituie suprafeţele Riemann deschise (necompacte).

§ 3. PROBLEMELE COUSIN ŞI PROBLEMA POINCARÉ

3.1. Fie (X, O_X) un spaţiu analitic complex: pentru orice deschis $U \subset X$, notăm $S_U = \{s \in \Gamma(U, O_X) \mid$ pentru orice $x \in U$, germenul s_x este un nondivizor al lui zero în $O_{X,x}\}$. Asocierea $U \rightsquigarrow \Gamma(U, O_X)_{S_U}$ este un prefascicul (S_U este un sistem multiplicativ închis în inelul $\Gamma(U, O_X)$). Fasciculul asociat se notează $\mathcal{M}_X$ şi se numeşte fasciculul germenilor de secţiuni meromorfe pe X, iar secţiunile sale globale se numesc secţiuni meromorfe. Este uşor de văzut că fibra $\mathcal{M}_{X,x}$ într-un punct $x \in X$ este inelul total de fracţii al inelului $O_{X,x}$. În adevăr, totul revine la a arăta că o secţiune olomorfă $s \in \Gamma(U, O_X)$ care în $x \in U$ este nondivizor al lui zero, rămîne nondivizor al lui zero în punctele unei vecinătăţi $V \subset U$ a lui x. Or, înmulţirea cu s defineşte un morfism $O_U \to O_U$ injectiv în x, deci pe o vecinătate a lui x, din cauza coerenţei fasciculului O_X. Dacă X este varietate conexă, se obţine definiţia clasică. Notăm $\mathcal{M}_X^*$ subfasciculul de grupuri multiplicative format de germenii de secţiuni meromorfe inversabile ($f \in \Gamma(U, \mathcal{M}_X^*) \Leftrightarrow f$ este element inversabil în inelul $\Gamma(U, \mathcal{M}_X)$). Este imediat de văzut că fasciculul de grupuri multiplicative O_X^* al germenilor de secţiuni olomorfe inversabile se identifică canonic cu un subfascicul de grupuri multiplicative al lui $\mathcal{M}_X^*$. Se numeşte fasciculul de divizori pe X (notat Div_X) fasciculul — cît de grupuri abeliene $\mathcal{M}_X^*/O_X^*$; secţiunile globale ale acestui fascicul se numesc divizori pe şi formează un grup abelian (cu notaţie aditivă) Div (X). Pentru orice $f \in \Gamma(X, \mathcal{M}_X^*)$ se numeşte divizorul lui f şi se notează (f) imaginea lui f prin homomorfismul canonic $\Gamma(X, \mathcal{M}_X^*) \to \Gamma(X, \mathrm{Div}_X) = \mathrm{Div}\ (X)$. Un divizor de această formă se zice principal. Avem deci $(fg) = (f) + (g)$; $(f^{-1}) = -(f)$; $(f) = 0 \Leftrightarrow f \in \Gamma(X, O_X^*)$; $(f) = (g) \Leftrightarrow fg^{-1} \in \Gamma(X, O_X^*)$.

Suportul unui divizor D este mulţimea închisă $\mathrm{Supp}\ D = \{x \in X \mid D_x \neq 0\}$. Noţiunea de divizor este compatibilă cu restricţiile, în sensul că pentru orice deschis $U \subset X$, $\mathrm{Div}_X|_U = \mathrm{Div}_U$.

Considerăm cazul particular X-suprafaţă Riemann conexă. Fie D un divizor pe X şi $x \in X$. Fie $t \in O_{X,x}$ astfel încît $\underline{m}_x = t\, O_{X,x}$. Este imediat că $D_x = (t^n \varphi)$, unde $n \in Z$, $\varphi \in O_{X,x}^*$ şi scrierea este unică. Numărul $\nu_x(D) = n$ se zice ordinul lui D în punctul x. Dacă $n > 0$, x se zice zero al lui D de ordin n, iar dacă $n < 0$, pol de ordin $-n$ al lui D. Este uşor de văzut că $\{x \in X \mid \nu_x(D) \neq 0\} = \mathrm{Supp}\ D$ şi că este o mulţime discretă (finită dacă X este compactă). Asociem divizorului D combinaţia formală $\sum_{x \in X} \nu_x(D) \cdot x$ şi se obţine astfel un izomorfism între grupul (Div X) şi grupul combinaţiilor formale cu coeficienţii întregi de tipul $\sum_{x \in X} n_x \cdot x$, cu proprietatea că $\{x \mid n_x \neq 0\}$ este discretă.

PROBLEMA COUSIN ADITIVĂ

3.2. Dacă $m \in \mathcal{M}_x$, atunci imaginea sa în $\mathcal{M}_x/O_{X,x}$ se numeşte parte principală. Secţiunile lui $\mathcal{M}_X/O_X$ se numesc sisteme de părţi principale sau date Cousin aditive. Din teoria fasciculelor rezultă că darea unui sistem de părţi principale revine — modulo o relaţie de echivalenţă convenabilă — la darea unei acoperiri deschise $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ şi a unei familii $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de secţiuni meromorfe $f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{M})$ astfel încît $f_\alpha - f_\beta$ este olomorfă pe $U_\alpha \cap U_\beta$.

Dacă X este o suprafaţă Riemann, fie $S = (f_\alpha) \in \Gamma(X, \mathcal{M}_X/O_X)$ un sistem de părţi principale. Un punct $x \in X$ se zice pol al lui s dacă x

este pol pentru funcția meromorfă $f_\alpha (x \in U_\alpha)$. Dacă $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ și x este pol pentru f_α, rezultă că este pol și pentru f_β și că f_α, f_β au aceeași parte polară P_x în x. Mulțimea polurilor lui S este discretă și astfel, fiecărei secțiuni S am asociat perechea $(A, (P_x)_{x \in A})$. Este imediat că această corespondență definește o bijecție între $\Gamma(X, \mathcal{M}/O)$ și perechile $(A, (P_x)_{x \in A})$ cu A discretă și P_x o parte polară în x.

Problema Cousin aditivă constă în stabilirea unor condiții suficiente în care aplicația $\Gamma(X, \mathcal{M}_X) \to \Gamma(X, \mathcal{M}_X/O_X)$ este surjectivă, adică pentru orice dată Cousin $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ să existe o secțiune meromorfă f pe X, astfel încît $f - f_\alpha$ este olomorfă pe U_α; o astfel de secțiune f se numește soluție a problemei Cousin $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Dacă X este o suprafață Riemann și $(A, (P_x)_{x \in A})$ o dată Cousin, o soluție a acesteia este o funcție meromorfă f, olomorfă pe $X \setminus A$ și a cărei parte polară în $x \in A$ coincide cu P_x.

TEOREMA 3.3. *Pe un spațiu Stein X problema Cousin aditivă este solubilă.*

Demonstrație. Considerăm șirul exact de O_X-module : $0 \to O_X \to \mathcal{M}_X \to \mathcal{M}_X/O_X \to 0$; cum O_X este coerent, conform teoremei $B / H^1(X, O_X) = 0$ și avem șirul exact :

$$0 \to \Gamma(X, O_X) \to \Gamma(X, \mathcal{M}_X) \to \Gamma(X, \mathcal{M}_X/O_X) \to 0.$$

Observația 3.4. Dacă X este un subspațiu analitic complex pentru care problema Cousin aditivă are soluție, nu rezultă că este spațiu Stein. În adevăr, spațiul proiectiv r-dimensional complex P^r are proprietatea $H^1(P^r, O_{P^r}) = 0$, dar el este compact și nu poate fi spațiu Stein (deoarece din teorema lui Liouville rezultă că funcțiile olomorfe pe tot P^r sînt constante).

PROBLEMA COUSIN MULTIPLICATIVĂ

3.5. Fie (X, O_X) un spațiu analitic și D un divizor pe X. Problema Cousin multiplicativă constă în a stabili condiții în care D este divizor principal, adică de forma (f) cu f secțiune meromorfă.

Vom numi dată Cousin multiplicativă o pereche formată dintr-o acoperire deschisă a lui $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ și un sistem de secțiuni meromorfe $m_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{M}_X^*)$, $\alpha \in I$ astfel încît

$$\frac{m_\alpha}{m_\beta} \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, O_X^*) \text{ pentru orice } \alpha, \beta \in I.$$

Este imediat că datele Cousin multiplicative modulo o relație de echivalență, ușor de descris, se identifică cu divizorii pe X.

Problema Cousin multiplicativă revine la a da condiții în care o dată Cousin are soluție, adică condiții în care există $f \in \Gamma(X, \mathcal{M}_X^*)$ astfel ca $\frac{f}{m_\alpha} \in \Gamma(U_\alpha, O_X^*)$ oricare ar fi $\alpha \in I$.

Considerînd șirul exact $0 \to O_X^* \to \mathcal{M}_X^* \to \mathrm{Div}_X \to 0$ se obține șirul exact :

$$0 \to \Gamma(X, O_X^*) \to \Gamma(X, \mathcal{M}_X^*) \to \Gamma(X, \mathrm{Div}_X) = \mathrm{Div}\,(X) \to H^1(X, O_X^*).$$

Deci D este de forma (f), dacă şi numai dacă imaginea lui D în $H^1(X, O_X^*)$ este nulă.

3.6. Amintim că pentru un spaţiu inelat (X, O_X), grupul (relativ la $\otimes$) al modulelor inversabile peste X (modulo relaţia de echivalenţă dată de izomorfism) este canonic izomorf cu $H^1(X, O_X^*)$. Indicăm izomorfismele inverse respective: fie $\xi \in H^1(X, O_X^*)$. Există un reprezentant al lui ξ, adică o acoperire $X = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$ şi o familie $\xi_{\alpha\beta} \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, O_X^*)$ astfel încît $\xi_{\alpha\beta} \cdot \xi_{\beta\alpha} = 1$ pe $U_\alpha \cap U_\beta$ şi $\xi_{\alpha\beta} \cdot \xi_{\beta\gamma} \cdot \xi_{\gamma\alpha} = 1$ pe $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ (oricare ar fi α, β, γ). Secţiunile $\xi_{\alpha\beta}$ definesc izomorfisme $(O_X|_{U_\alpha})|_{U_\alpha \cap U_\beta} \to O_X|_{U_\beta})|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ şi este imediat că se obţine un sistem de racordare, deci se poate defini un fascicul inversabil $\mathfrak{L}_\xi$. Se arată uşor că asocierea depinde numai de clasa de omologie ξ. Reciproc, fie $\mathfrak{L}$ un fascicul inversabil, există deci o acoperire deschisă $X = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$ şi izomorfisme $\xi_\alpha : O_X|_{U_\alpha} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{L}|_{U_\alpha}$. Este imediat că familia de elemente $(\xi_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta}$ determinată de izomorfismele $O_X|_{U_\alpha \cap U_\beta} \xrightarrow{\xi_\beta^{-1}\xi_\alpha} O_X|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ formează un cociclu şi asociem lui $\mathfrak{L}$ clasa de omologie dată de el.

Astfel, fiecare divizor D defineşte un fascicul inversabil $\mathfrak{L}_D$ şi în plus, D este principal dacă şi numai dacă $\alpha\, \mathfrak{L}_D \simeq O_X$. Ţinînd cont de corespondenţa biunivocă între fasciculele inversabile şi fibraţii vectoriali cu drepte, ultima afirmaţie revine la a spune că un divizor D este principal dacă şi numai dacă fibratul vectorial cu drepte asociat este trivial.

PROPOZIŢIA 3.7. *Fie X o varietate analitică verificînd teorema A. Morfismul canonic $\Gamma(X, \mathrm{Div}_X) \to H^1(X, O_X^*)$ este surjectiv.*

Demonstraţie. Fie $\xi = (\xi_{\alpha\beta}) \in H^1(X, O_X^*)$ şi $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_\xi$ fasciculul inversabil dat de ξ (conform 3.6): secţiunile din $\Gamma(X, \mathfrak{L})$ sînt familii (f_α) cu $f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, O_X)$ astfel încît $f_\alpha \cdot \xi_{\alpha\beta} = f_\beta$. Cum $\mathfrak{L} \neq 0$, există conform teoremei A o secţiune globală nenulă $f = (f_\alpha)$ a lui $\mathfrak{L}$ şi putem presupune U_α conecşi. Putem de asemenea presupune X conex şi fie $I = \{\alpha \mid f_\alpha = 0\}$, $J = \{\beta \mid f_\beta \neq 0\}$. Notînd $U = \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$, $V = \bigcup\limits_{\beta \in J} U_\beta$ avem $V \neq \emptyset$ şi $X = U \cup V$. Datorită relaţiilor $f_\alpha \cdot \xi_{\alpha\beta} = f_\beta$ şi folosind principiul identităţii rezultă $U \cap V = \emptyset$. Rezultă atunci că $V = X$, deci fiecare f_α este nenulă şi se verifică imediat că imaginea divizorului definit de familia (f_α) în $H^1(X, O_X^*)$ este ξ.

COROLARUL 3.8. *Fie X o varietate analitică verificînd teorema A. Problema Cousin multiplicativă este rezolvabilă pentru orice divizor pe X dacă şi numai dacă $H^1(X, O_X^*) = 0$ (adică, conform 3.6, dacă şi numai dacă fibraţii vectoriali cu drepte pe X sînt triviali).*

Dăm acum condiţii topologice pentru rezolvarea problemei Cousin multiplicativă. Fie X un spaţiu complex (nu neapărat redus) şi $\theta : O_X \to O_X^*$ morfismul $f \rightsquigarrow e^{2\pi i f}$. Evident, θ este surjectiv şi nucleul său este Z, fasciculul constant de fibră $\mathbf{Z}$. Avem atunci şirul exact de fascicule de grupuri abeliene: $0 \to Z \to O_X \to O_X^* \to O$, al cărui şir exact de coomologie este: $\ldots \to H^1(X, O_X) \to H^1(X, O_X^*) \to H^2(X, Z) \to H^2(X, O_X) \ldots$ Rezultă atunci imediat următoarea:

PROPOZIŢIA 3.9. *Dacă X este spaţiu Stein, atunci are loc un izomorfism canonic $H^1(X, O_X^*) \xrightarrow{\sim} H^2(X, Z)$.*

TEOREMA 3.10. *Fie X o varietate Stein. Problema Cousin multiplicativă are soluţie pentru orice divizor pe X dacă şi numai dacă $H^2(X, Z) = 0$.*

Demonstraţie. Folosim propoziţia 3.9 şi corolarul 3.8.

Observaţia 3.11. 1) Din teorema 3.10 rezultă că problema Cousin multiplicativă este totdeauna rezolvabilă pe o suprafaţă Riemann deschisă. A da un divizor pe această suprafaţă revine la a da (conform 3.1) o mulţime discretă $A = (x)_{i \in I}$ şi o mulţime de numere $n_i \in \mathbf{Z}$ (în care caz această dată Cousin multiplicativă se mai numeşte dată Weierstrass). Conform teoremei 3.10 există o funcţie meromorfă F pe X olomorfă nenulă pe $X \setminus A$ şi avînd în x_i pol sau zero de ordin n_i. În acest mod se obţine teorema clasică a lui Weierstrass.

2) Dacă X este un spaţiu Stein, atunci condiţia $H^2(X, Z) = 0$ implică rezolvarea problemei Cousin multiplicativă pe X (aşa cum rezultă din şirul de coomologie asociat şirului exact $0 \to O^* \to \mathcal{M}^* \to \mathcal{M}^*/O^* \to 0$ şi din propoziţia 3.9). Condiţia $H^2(X, Z) = 0$ este îndeplinită de spaţii complexe de dimensiune 1 [1].

COROLARUL 3.12. *Problema Cousin multiplicativă este rezolvabilă pe orice varietate complexă izomorfă cu un produs finit de deschişi din* $\mathbf{C}$, *toţi simplu conecşi exceptînd cel mult unul.*

Demonstraţie. Fie $G_1, \ldots, G_n$ deschişii din enunţ şi presupunem $G_2, \ldots, G_n$ simplu conecşi; $X = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ este evident o varietate Stein şi aplicînd formulele lui Künneth relativ la omologia produsului (ţinînd cont de trivialitatea omologiei fiecărui G_j, $2 \leqslant j \leqslant n$ — teorema Riemann arătînd că fiecare dintre G_j $2 \leqslant j \leqslant n$ este izomorf cu discul unitate), rezultă $H^2(X, Z) \simeq H^2(G_1, Z)$.

Cum pentru orice deschis G din planul complex $H^2(G, Z) = 0$, corolarul rezultă din propoziţia 3.9.

3.13. Există deschişi Stein în $\mathbf{C}^n$, chiar simplu conecşi pe care problema Cousin multiplicativă nu este rezolvabilă.

Fie $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid |x^2 + y^2 + z^2 - 1| < 1\}$. Este imediat că D este deschis Stein, căci este imaginea inversă a polidiscului unitate din $\mathbf{C}$ printr-o funcţie olomorfă definită pe $\mathbf{C}^3$. Transformarea

$$(x,y,z) \rightsquigarrow \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, x^2+y^2+z^2-1 \right)$$

defineşte, în mod clar, un izomorfism analitic al lui D pe produsul dintre cuadrica complexă $D' = \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$ şi discul unitate din $\mathbf{C}$. Deci $H^2(D, Z) \simeq H^2(D', Z)$ (din formulele lui Künneth). Cum D' se contractă la mulţimea punctelor ei reale (adică S_2), rezultă $H^2(D', Z) \simeq H^2(S_2, Z) \neq 0$. Conform 3.10 rezultă că problema Cousin multiplicativă nu e rezolvabilă pe D. Rămîne să dovedim că D' este simplu conex. Este suficient să arătăm că D' este simplu conex; deci complementara lui D' este o mulţime deschisă. Or, acest fapt rezultă din următoarea :

LEMĂ 3.14. *Dacă X este o varietate complexă şi f o funcţie olomorfă nenulă pe X, atunci mulţimea $X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ este conexă.*

Demonstraţie. Presupunem lema stabilită pentru cazul în care X este un deschis conex dintr-un spaţiu $\mathbf{C}^n$. Presupunem că X_f nu ar fi conex, deci $X_f = U \cup V$, U și V deschiși disjuncți. Cum X este conex și $X = \overline{X}_f = \overline{U} \cup \overline{V}$, rezultă $\overline{U} \cap \overline{V} \neq \emptyset$ și fie $x \in \overline{U} \cap \overline{V}$. Considerăm o vecinătate W a lui x izomorfă cu un deschis convex dintr-un $\mathbf{C}^n$. Conform presupunerii, mulțimea $W_{f|W} = W \cap X_f$ este conexă, absurd.

Fie deci $X \subset \mathbf{C}^n$ deschis conex și f o funcție olomorfă nenulă pe X. Arătăm că X_f este conexă prin arce; fie a, $b \in X_f$ și fie $D = \{z \in \mathbf{C} \mid a + (b - a) z \in X\}$. D este o mulțime deschisă convexă din $\mathbf{C}$. Considerăm funcția olomorfă

$$\varphi : D \to \mathbf{C} \qquad z \rightsquigarrow f(a + (b - a)z).$$

Evident, $1 \in D_\varphi$ și $0 \in D_\varphi$. Cum φ are zerourile izolate, există un drum continuu $\theta : [0, 1] \to D_\varphi$ astfel încît $\theta(0) = 0$ și $\theta(1) = 1$. Este imediat de văzut că drumul $\theta' : [0, 1] \to X$ $t \rightsquigarrow a + (b - a)\, \theta(t)$ unește a și b și are imaginea în X_f.

Observația 3.15. Cum orice divizor este local principal, demonstrația de mai sus arată totodată că într-o varietate complexă conexă, complementara suportului unui divizor este conexă. Ca o consecință a lemei de mai sus, rezultă că grupul liniar $\mathrm{Gl}(n, \mathbf{C})$ este conex.

PROBLEMA POINCARÉ

Teorema 3.16. *Fie X o varietate care verifică teorema A și $m \in \Gamma(X, \mathcal{M}_X)$ o secțiune meromorfă. Atunci există f, $g \in \Gamma(X, O_X)$, $g \not\equiv 0$, pe orice componentă conexă, astfel ca $m = \dfrac{f}{g}$.*

Demonstrația. Fie $\mathfrak{J} = \mathrm{Ann}\, O_X + m O_X / O_X$; deoarece $\mathfrak{J}$ este O_X modul de tip finit și este sub O_X-modul al lui $\mathcal{M}_X$, rezultă coerent. Este imediat că $\mathfrak{J}_x = \{f_x \in O_{X,x};\ f_x \cdot m_x \in O_{X,x}\}$. Deoarece $\mathfrak{J} \neq 0$, există, conform teoremei A, $g \in \Gamma(X, \mathfrak{J})$, $g \neq 0$. Putem presupune X conex. Din faptul că $g_x \cdot m_x \in O_{X,x}$, pentru orice x, rezultă $gm = f \in \Gamma(X, O_X)$ și deci $m = \dfrac{f}{g}$.

Observația 3.17. Se pot găsi funcțiile olomorfe f și g cu proprietatea suplimentară că pentru orice $x \in X$, germenii f_x și g_x sînt primi între ei în inelul $O_{X,x}$, [8].

§ 4 ALTE APLICAȚII ALE TEOREMELOR A ȘI B

Teorema 4.1. *Fie (X, O_X) un spațiu complex cu bază numărabilă; el este spațiu Stein dacă și numai dacă pentru orice subspațiu închis al său Y (nu neapărat redus), morfismul canonic $\Gamma(X, O_X) \to \Gamma(Y, O_Y)$ este surjectiv.*

Demonstrație. Dacă X este Stein, notînd cu $\mathfrak{J}$ fasciculul ideal coerent care definește Y, avem șirul exact: $0 \to \mathfrak{J} \to O_X \to O_X/\mathfrak{J} \to 0$, din care, conform teoremei B, rezultă exactitatea șirului $\Gamma(X, O_X) \downarrow \to \Gamma(X, O_X/\mathfrak{J}) = \Gamma(Y, O_Y) \to 0$. Reciproc, fie $\mathfrak{J}$ un ideal coerent. Considerînd subspațiul închis definit de $\mathfrak{J}$, (Y, O_Y) (unde $Y = \mathrm{supp}\, O_X/\mathfrak{J}$, $O_Y =$

$= O_X/\mathfrak{J}\,|_Y)$, rezultă că $\Gamma(X, O_X) \to \Gamma(X, O_X/\mathfrak{J}) = \Gamma(Y, O_Y) \to 0$ este şir exact, deci $H^q(X, \mathfrak{J}) = 0$; prin urmare, X este spaţiu Stein Conform teoremei 1.5).

Observaţia 4.2. Dacă X este un spaţiu Stein redus, atunci rezultă că orice funcţie olomorfă definită pe o submulţime analitică închisă a lui X se poate prelungi la tot spaţiul.

TEOREMA 4.3. *Dacă un spaţiu analitic complex verifică teorema A (în particular, dacă este Stein), atunci orice submulţime analitică închisă se poate defini prin ecuaţii globale.*

Demonstraţie. Fie Y o submulţime analitică închisă în X şi $\mathfrak{J}$ un ideal care o defineşte (*nu* neapărat cel al lui Cartan). Este suficient să arătăm că Y este chiar mulţimea zerourilor comune ale lui $\Gamma(X, \mathcal{J})$. Cum orice secţiune din $\Gamma(X, \mathfrak{J})$ se anulează pe Y, rămîne să dovedim — pentru incluziunea contrară — că pentru orice $x \in X \setminus Y$ există $s \in \Gamma(X, \mathfrak{J})$ $s(x) \neq 0$. Dar $\mathfrak{J}_x = O_{X,x}$ şi deci $1_x = \sum \varphi_i \cdot s_{i,x}$ cu $s_i \in \Gamma(X, \mathfrak{J})$ şi $\varphi_i \in O_{X,x}$. Deci măcar una dintre secţiunile s_i este nenulă în x.

Observaţia 4.4. Enunţul de mai sus se exprimă şi astfel: secţiunile olomorfe, nule pe Y, nu au alt zero comun.

COROLARUL 4.5. *Dacă un spaţiu complex X verifică teorema A, atunci secţiunile din $\Gamma(X, O_X)$ separă punctele.*

Demonstraţie. Fie $x \neq y$ puncte oarecare din X. Considerăm mulţimea analitică $Y = \{y\}$; conform 4.4 secţiunile olomorfe pe X nule în y nu au alt zero comun, deci există $f \in \Gamma(X, O_X)$ astfel încît $f(y) = 0$, iar $f(x) \neq 0$.

4.6. Amintim că pentru un spaţiu complex X, o vecinătate U a unui punct $x \in X$ se zice tare realizabilă dacă există un morfism $X \xrightarrow{F} \mathbb{C}^N$ astfel încît $F|_U$ este o imersie închisă.

PROPOZIŢIA 4.7. *Dacă X este un spaţiu complex verificînd teorema A, atunci orice punct din X admite o vecinătate tare realizabilă; în particular, X este olomorf-separat.*

Demonstraţie. Fie $x \in X$ un punct oarecare şi $\mathfrak{J}$ idealul lui Cartan care defineşte $\{x\}$ ca subspaţiu analitic închis în X. Fie $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in O_{X,x}$ generatori ai idealului $\underline{m}_x$. Cum $\varphi_i(x) = 0$, rezultă $\varphi_i \in O_{X,x}$. Conform teoremei A, avem $\varphi_i = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}\, s^i_{j,x}$ cu $\varphi_{ij} \in O_{X,x}$ şi $s^i_j \in \Gamma(X, \mathfrak{J})$. Este imediat de văzut că familia de secţiuni globale $(s^i_j)_{i,j}$ are proprietatea că germenii în x generează $\underline{m}_x$, deci morfismul canonic $X \to \mathbb{C}^{mn}$ definit de (s^i_j) este imersie în x.

COROLARUL 4.8. *Un spaţiu complex cu bază numărabilă este Stein dacă şi numai dacă verifică teoremele A şi B pentru ideale Cartan.*

Demonstraţie. Teorema B pentru ideale Cartan implică olomorf-convexitatea spaţiului. În adevăr, fie $\{x_n\}$ un şir de puncte din X fără punct de acumulare şi $\mathfrak{J}$ idealul lui Cartan al mulţimii discrete $\{x_n\}$ (deci analitică închisă). Conform ipotezei, avem surjecţia $\Gamma(X, O_X) \to \Gamma(X, O_X/\mathfrak{J})$ şi considerăm secţiunea din $\Gamma(X, O_X/\mathfrak{J})$ care în punctul x_n ia valoarea n. Orice preimagine a ei este nemărginită în modul pe şirul $\{x_n\}$. Conform 4.7, teorema A implică olomorf-separarea spaţiului (în demonstraţia lui 4.7, se foloseşte teorema A numai pentru ideale Cartan). Întărim 4.3, demonstrînd următoarea:

TEOREMA 4.9. *Fie X un spaţiu analitic Stein redus, de dimensiune n şi $Y \subset X$ o mulţime analitică închisă. Atunci Y este definit de $n + 1$ ecuaţii globale.*

Demonstraţie. Putem presupune $Y \neq X$ şi alegem în fiecare componentă ireductibilă X_α a lui X, neconţinută în Y, cîte un punct $x_\alpha \in X_\alpha \setminus Y$. Mulţimea $\{x_\alpha\}$ este discretă în X (familia X_α fiind local finită în X), deci $Y \cup \{x_\alpha\}$ este mulţime analitică}. Funcţia $f = \begin{cases} 0 & \text{pe } Y \\ 1 & \text{pe } \{x_\alpha\} \end{cases}$ este analitică pe $Y \cup \{x_\alpha\}$ şi conform 4.1 se prelungeşte la o funcţie analitică f_1 pe X. Fie Y_1 mulţimea zerourilor lui f_1; avem $Y \subset Y_1$. Orice componentă ireductibilă a lui Y_1 neconţinută în Y are dimensiunea $\leqslant n - 1$. În adevăr, fie Y_1^β o asemenea componentă; fiind o mulţime ireductibilă şi în X, este conţinută într-o componentă X_α. Cum $X_\alpha \not\subset Y$, X_α este din familia componentelor considerate la început, deci există $x_\alpha \in X_\alpha$ astfel ca $f_1(x_\alpha) = 1$, deci $x_\alpha \notin Y_1$. Incluziunea $Y_1^\beta \subset X_\alpha$ este strictă, deci $\dim Y_1^\beta < \dim X_\alpha \leqslant \dim X = n$. În fiecare componentă ireductibilă Y_1^β a lui Y_1, neconţinută în Y alegem cîte un punct $y_\beta \in Y_1^\beta \setminus Y$ (Dacă toate Y_1^β sînt conţinute în Y, atunci $Y_1 = Y$ şi propoziţia este demonstrată). Mulţimea $\{y_\beta\}$ este discretă în Y_1, deci în X şi raţionînd ca mai sus, există o funcţie f_2 analitică pe X nulă pe Y şi egală cu 1 în punctele y_β şi notăm Y_2 mulţimea zerourilor comune ale lui f_1 şi f_2. Avem $Y \subset Y_2 \subset Y_1$ şi se arată că orice componentă ireductibilă a lui Y_2 neconţinută în Y are dimensiunea $\leqslant n - 2$. Repetînd raţionamentul există $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \Gamma(X, O_X)$ nule pe Y astfel încît dacă notăm Y_n mulţimea zerourilor comune ale lui $f_1, \ldots, f_n$, atunci $Y \subset Y_n$ şi orice componentă ireductibilă a lui Y_n neconţinută în Y are dimensiunea $\leqslant 0$, adică conţine cel mult un punct. Există o funcţie f_{n+1} analitică pe X, nulă pe Y şi egală cu 1 în aceste puncte. Este imediat că $Y_{n+1} = Y$ (altfel, există o componentă ireductibilă Y_{n+1}^α neconţinută în Y; ea este conţinută într-un Y_n^β care e redus la un punct, deci este egală cu aceasta; absurd, conform alegerii lui f_{n+1}).

PROPOZIŢIA 4.10. *Fie X un spaţiu complex cu bază numărabilă. Atunci X este spaţiu Stein, dacă şi numai dacă orice fascicul analitic coerent $\mathcal{F}$ pe X are proprietatea: dacă $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ generează fiecare $O_{X,x}$-modul $\mathcal{F}_x$, atunci generează şi $\Gamma(X, O_X)$-modulul $\Gamma(X, \mathcal{F})$.*

Demonstraţie. Fie X spaţiu Stein; dacă $\mathcal{F} \in \mathbf{Coh}\ (X)$ şi $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ generează fibrele $\mathcal{F}_x$ (pentru orice $x \in X$), atunci morfismul canonic $O_X^n \to \mathcal{F}$ determinat de aceste secţiuni este surjectiv. Din teorema B rezultă că morfismul canonic $\Gamma(X, O_X)^n \to \Gamma(X, \mathcal{F})$ este de asemenea, surjectiv şi astfel $s_1, \ldots, s_n$ generează $\Gamma(X, O_X)$-modulul $\Gamma(X, \mathcal{F})$.

Reciproc, să arătăm (aceasta este suficient conform 4.1) că pentru orice ideal coerent $\mathfrak{J} \subset O_X$, morfismul canonic $\Gamma(X, O_X \to \Gamma(X, O_X/\mathfrak{J})$ este surjectiv. Dar aceasta rezultă din ipoteza aplicată fasciculului $O_X/\mathfrak{J}$ şi secţiunii unitate.

Observaţia 4.11. Dacă $\mathcal{F} = O_X$, a spune că secţiunile $s_1, \ldots, s_n$ din $\Gamma(X, O_X)$ generează fibrele $O_{X,x}$, revine la a spune că $s_1, \ldots, s_n$ nu au un zero comun.

Prin urmare, fie $s_1, \ldots, s_n$ secţiuni olomorfe globale pe un spaţiu Stein (X, O_X). Dacă ele nu au un zero comun, atunci există $c_1, \ldots, c_n \in \Gamma(X, O_X)$ astfel ca $c_1 s_1 + \ldots + c_n s_n = 1$.

Dăm acum caracterizarea deschişilor Stein din $\mathbf{C}^n$.

DEFINIȚIA 4.12. Un deschis $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ se numește domeniu de olomorfie dacă pentru orice $a \in \mathrm{Fr}\,\Omega$, există o funcție olomorfă pe Ω ce nu se poate prelungi în jurul lui a: adică nu există o funcție olomorfă pe o vecinătate conexă a lui a, care să coincidă cu ea pe un deschis nevid (vecinătate și deschisul fiind fixate).

În [19] se arată că această definiție este echivalentă cu următoarea : există o funcție olomorfă pe Ω care nu se poate prelungi olomorf în jurul nici unui punct din $\mathrm{Fr}\,\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$.

TEOREMA 4.13. *Pentru un deschis* $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ *sînt echivalente afirmațiile* :

a) Ω *este deschis Stein* ;

a′) Ω *este olomorf convex* ;

b) Ω *este domeniu de olomorfie* ;

c) *dacă* $f_1, \ldots, f_n$ *sînt funcții olomorfe pe* Ω *care nu au un zero comun, atunci există* $g_1, \ldots, g_r$ *olomorfe pe* Ω *astfel încît* $1 = \sum_{i=1}^{r} f_i g_i$ *(echivalent, deci, orice ideal de tip finit din algebra funcțiilor olomorfe pe* Ω *are un zero)* ;

d) $H^q(\Omega, O_\Omega) = 0$ *pentru orice* $q = 1, \ldots, n-1$.

Demonstrație. Echivalența (a) ⇔ (a′) este imediată, iar echivalența (a′) ⇔ (b) este dovedită în [9]. Implicația (a) ⇒ (c) rezultă conform observației 4.11.

(c) ⇒ (*b*). Prin absurd, fie $a \in \mathrm{Fr}\,\Omega$ astfel încît orice funcție olomorfă pe Ω se poate prelungi în jurul lui a.

Funcțiile $z_i - a_i$ (a_i — coordonatele lui a ; z_i — proiecțiile canonice $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$) sînt olomorfe pe Ω. Cum ele nu au un zero comun, conform ipotezei există funcțiile $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ olomorfe pe Ω astfel încît $\sum \varphi_i(z_i - a_i) = 1$. Cum φ_i se poate prelungi convenabil în jurul lui a, se ajunge imediat la o contradicție.

Implicația (a) ⇒ (d) rezultă conform teoremei B. Încheiem demonstrația arătînd că (d) ⇒ (b). Demonstrăm prin inducție după n. Pentru $n = 1$, Ω este deschis Stein fără nici o ipoteză suplimentară. Presupunem că implicația este dovedită pentru dimensiuni $\leqslant n-1$. Fie H un hiperplan, deci $H = \{x \in \mathbf{C}^n \mid f(x) = 0\}$, unde $f = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i z_i$, $a_i \in \mathbf{C}$, $0 \leqslant i \leqslant n$.

Din șirul exact : $0 \to O_\Omega \xrightarrow{\bar{f}} O_\Omega \to O_{\Omega/(f)} \to 0$, în care $\bar{f}$ transformă φ în φf rezultă șirul exact

$$H^q(\Omega, O_\Omega) \to H^q(\Omega, O_\Omega/(f)) \to H^{q+1}(\Omega, O_\Omega).$$

Cum $H^q(\Omega, O_\Omega/(f)) = H^q(\Omega \cap H, O_{x\cap H})$, rezultă că $H^q(\Omega \cap H, O_{\Omega\cap H}) = 0$ pentru orice $q = 1, \ldots, n-2$ și conform ipotezei de inducție, rezultă $\Omega \cap H$ spațiu Stein. Cum $H^1(\Omega, O_\Omega) = 0$, implicația rezultă din următoarea :

LEMĂ 4.14. *Fie* $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ *un deschis pentru care este rezolvabilă prima problemă Cousin. Dacă* $\Omega \cap H$ *este Stein pentru orice hiperplan* H, *atunci* Ω *este Stein.*

Demonstrație. Arătăm că Ω este domeniu de olomorfie. Fie $a \in \mathrm{Fr}\,\Omega$ și H un hiperplan care trece prin a și astfel încît a este punct de acumulare pentru $\Omega \cap H$. Fie $H = \{x \in \mathbf{C}^n \mid f(x) = 0\}$, unde f este olomorfă în

$\mathbf{C}^n$ (de o formă amintită mai sus). Conform ipotezei, există o funcţie olomorfă g care nu se poate prelungi în jurul lui a. Considerăm problema Cousin aditivă pe Ω, cu datele

$$m_x = \begin{cases} \dfrac{g_x}{f_x} & \text{dacă } x \in H \\ 0 & \text{dacă } x \notin H \end{cases}$$

(se poate arăta imediat că există o acoperire $\Omega = \bigcup\limits_{\alpha} \Omega_\alpha$, secţiuni meromorfe m_α pe Ω_α astfel încît $m_\alpha - m_\beta$ să fie olomorfe pe $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$ şi dacă $x \in \Omega_\alpha$, atunci $m_x = m_{\alpha,x}$).

Conform ipotezei, exista F meromorfă pe Ω astfel ca $F_x - m_x$ este olomorfă, oricare ar fi $x \in \Omega$. Rezultă deci că F este olomorfă pe $\Omega \setminus H$. Considerăm $G = fF$; G este o funcţie olomorfă pe $X \setminus H$ şi în jurul fiecărui punct x din H avem

$$G = f\left(\frac{g}{f} + \text{olo}\right) = \text{olo} \text{ şi } G(x) = g(x) \text{ căci } f(x) = 0 \text{ pentru } x \in H.$$

Deci G este funcţie olomorfă pe Ω şi $G = g$ pe $\Omega \cap H$. Rezultă imediat că G nu se poate prelungi olomorf în jurul lui a. Lema este dovedită şi cu aceasta, demonstraţia teoremei este terminată.

Observaţia 4.15. Conform rezoluţiei lui Dolbeault, condiţia (d) este echivalentă cu faptul că pentru orice formă diferenţială de tipul $(0, r)$ definită pe Ω $(r \geqslant 1)$ şi astfel încît $\bar{d}\omega = 0$, există o formă ω_1 de tipu $(0, r-1)$ cu $\omega = \bar{d}\omega_1$.

§ 5. PROPRIETĂŢILE FASCICULELOR COERENTE PE SPAŢII STEIN

TEOREMA 5.1. *Fie X un spaţiu analitic complex. Orice familie filtrantă crescător $(\mathscr{F}_i)_{i \in I}$ de subfascicule coerente ale unui fascicul coerent $\mathscr{F}$ este staţionară pe orice compact.*

Demonstraţie. Problema fiind locală, X se poate presupune de dimensiune finită şi raţionăm prin inducţie după $n = \dim X$. Cazul $n = 0$ fiind trivial, presupunem $n \geqslant 1$ şi fie $x \in X$. Conform celor spuse în preliminarii există o vecinătate U a lui x, un deschis V din $\mathbf{C}^n$ şi un morfism finit $U \xrightarrow{f} V$; $f_*(\mathscr{F})$ este un fascicul coerent pe V, iar $f_*(\mathscr{F}_i)$ formează o mulţime filtrantă crescător de subfascicule coerente ale lui $f_*(\mathscr{F})$. Dacă aceasta staţionează, staţionează şi familia iniţială. Am redus problema la cazul unui deschis din $\mathbf{C}^n$ care se poate presupune conex. Cum $\mathscr{F}$ este local cît al unui O_X^p şi problema este locală, putem presupune $\mathscr{F} = O_X^p$, iar din şiruri exacte de forma $0 \to O_X \to O_X^p \to O_X^{p-1} \to 0$, putem presupune (raţionînd prin inducţie) că $\mathscr{F} = O_X$. În acest caz, $\mathscr{F}_i$ sînt ideale pe X. Fixăm un i astfel încît $\mathscr{F}_i \neq 0$ şi fie X_i subspaţiul analitic al lui X definit de idealul $\mathscr{F}_i$ (dacă toţi $\mathscr{F}_i = 0$, teorema este trivială); evident, $\dim X_i \leqslant n - 1$. Conform ipotezei de inducţie, familia de subfascicule coerente $(\mathscr{F}_{j/\mathscr{F}_i})_{j \geqslant i}$ ale lui $O_{X_i} = O_M/\mathscr{F}_i$ staţionează şi propoziţia este demonstrată.

Observaţia 5.2. 1) Cu notaţiile din propoziţie rezultă că fasciculul $\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$ este coerent.

2) Din corespondenţa biunivocă între mulţimile analitice închise şi idealele asociate, rezultă că orice familie filtrantă descrescător de mulţimi analitice este local staţionară; rezultă atunci că orice intersecţie de mulţimi analitice este mulţime analitică şi de aici ca orice mulţime de zerouri comune ale unei familii oarecare de secţiuni analitice este o mulţime analitică.

Teorema 5.3. *Fie X un spaţiu complex, $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}\, X$ şi $\mathcal{F}'$ un subfascicul al lui $\mathcal{F}$. Sînt echivalente afirmaţiile*:

(a) *$\mathcal{F}'$ este cœrent*;

(b) *pentru orice deschis Stein $U \subset X$, fibrele $\mathcal{F}'_x$, $x \in U$, sînt generate de secţiunile din $\Gamma(U, \mathcal{F})$*;

(c) *pentru orice deschis Stein $U \subset X$ şi orice $q \geqslant 1$, $H^q(U, F') = 0$.*

Demonstraţie. (a) $\Rightarrow$ (b) rezultă din teorema A.

(b) $\Rightarrow$ (a). Problema fiind locală, este suficient să arătăm că pentru orice deschis Stein U, $\mathcal{F}'|_U$ este coerent. Or, considerăm familia filtrantă crescător a subfasciculelor coerente generate de toate submulţimile finite ale lui $\Gamma(U, \mathcal{F}')$. Prin ipoteză, $\mathcal{F}'|_U$ este reuniunea acestor subfascicule şi conform observaţiei 5.2, $\mathcal{F}'|_U$ rezultă coerent.

Implicaţia (a) $\Rightarrow$ (c) rezultă din teorema B. Demonstraţia implicaţiei (c) $\Rightarrow$ (b) se găseşte în [10]. În cursul lucrării nu vom folosi această implicaţie.

Dăm acum o teoremă de structură a fasciculelor coerente pe un spaţiu Stein.

Pentru aceasta ne este utilă următoarea:

Lemă 5.4. *Fie X un spaţiu Stein şi $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}\, X$. Dacă M este un $\Gamma(X, O_X)$-submodul al lui $\Gamma(X, \mathcal{F})$ şi $\mathcal{M}$ este subfasciculul lui $\mathcal{F}$ generat de M, atunci M este dens în $\Gamma(X, \mathcal{M})$ pentru topologia uzuală.*

Demonstraţie. Amintim că secţiunile lui $\mathcal{M}$ peste deschişi din X sînt combinaţii liniare de elemente din M cu coeficienţi secţiuni din O_X. Fie $(U_n)_{n \geqslant 1}$ o exhaustiune a spaţiului X cu deschişi Stein relativ compacţi. Arătăm mai întîi că pentru orice secţiune $s \in \Gamma(X, \mathcal{M})$ şi pentru orice n, avem $s|_{U_n} \in \Gamma(U_n, O_x) . M$. În adevăr, pentru orice $x \in U_{n+1}$, s_x este o combinaţie finită de elemente din M cu coeficienţi în $O_{X.x}$ şi acest fapt rămîne adevărat într-o vecinătate a lui x. Obţinem în acest fel o acoperire deschisă a lui U_{n+1} şi extragem o subacoperire finită a lui U_n; fie $m_1 \ldots, m_r \in M$ toate elementele lui M angajate în toate combinaţiile menţionate pe deschişi subacoperirii. Restricţia la U_n a morfismului $O_X^r \to \mathcal{M}$ definit de $m_{n+1} \ldots, m_r$ este un epimorfism şi cum U_n este spaţiu Stein, rezultă epimorfismul $\Gamma(U_n, O_X)^r \to \Gamma(U_n, \mathcal{M}) \to 0$. Există deci

$$f_1, \ldots, f_r \in \Gamma(U_n, O_X) \text{ astfel încît } s\Big|_{U_n} = \sum_{i=1}^{r} f_i \cdot m_i\Big|_{U_n}, \text{ deci } s\Big|_{U_n} \in$$

$\in \Gamma(U_n, O_X) . M$.

Aplicaţia $\Gamma(X, O_X) \to \Gamma(U, O_X)$ fiind densă (exhaustiunea se poate alege convenabil), există $f_i' \in \Gamma(X, O_X)$ $1 \leqslant i \leqslant r$ şi o seminormă $\| \cdot \|_n$ definită de U_n astfel încît $\|f_i - f_i'\|_{n-1} < \dfrac{1}{nr(\|m_i\|_{n-1} + 1)}$.

Dacă punem $s_n = \sum_{i=1}^{r} f_i' m_i \in M$, atunci rezultă $\| s_n - s \|_{n-1} < \frac{1}{n}$, adică $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

Din demonstrația de mai sus rezultă faptul cunoscut : dacă M este de tip finit, atunci $M = \Gamma(X, \mathcal{M})$ deci M este un submodul închis al lui $\Gamma(X, \mathcal{F})$.

TEOREMA 5.5. *Fie* X *un spațiu Stein și* $\mathcal{F} \in \mathbf{Coh}\, X$. *Avem* $\mathcal{F} = \varinjlim_{i} \mathcal{F}_i$ *și pentru orice* i, $\mathcal{F}_i = \varinjlim_{\alpha} \mathcal{F}_{i,\alpha}$ *astfel încît :*

(i) *morfismul canonic* $\varinjlim_{i} \Gamma(X, \mathcal{F}_i) \to \Gamma(X, \mathcal{F})$ *este un izomorfism ;*

(ii) $\mathcal{F}_{i,\alpha}$ *sînt conuclee de morfisme de forma* $O_X^n \to O_X^m$, *iar morfismele canonice* $\varinjlim_{\alpha} \Gamma(X, \mathcal{F}_{i,\alpha}) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_i)$ *sînt izomorfisme ;*

(iii) *pentru orice deschis Stein relativ compact* U *din* X, *aplicațiile canonice*

$$\varinjlim_{i} \Gamma(U, \mathcal{F}_i) \to \Gamma(U, \mathcal{F}), \quad \varinjlim_{\alpha} \Gamma(U, \mathcal{F}_{i,\alpha}) \to \Gamma(U, \mathcal{F}_i)$$

sînt izomorfisme.

Demonstrație. (i) $\Gamma(X, O_X)$-modulul $\Gamma(X, \mathcal{F})$ este limita inductivă a tuturor submodulelor sale de tip finit F_i (aplicațiile sistemului inductiv fiind incluziuni). Fie $\mathcal{F}_i$ O_X-subfasciculul lui $\mathcal{F}$ generat de F_i ; aplicația $\varinjlim_{i} \mathcal{F}_i \to \mathcal{F}$ este evident injectivă și surjectivitatea ei rezultă imediat din teorema A. Cum F_i este de tip finit, conform lemei 5.4, $F_i = \Gamma(X, \mathcal{F}_i)$, deci

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \simeq \varinjlim_{i} F_i = \varinjlim_{i} \Gamma(X, \mathcal{F}_i).$$

(ii) Pentru orice i există un șir exact $0 \to \mathcal{H}_i \to O_X^{n_i} \to \mathrm{F}_i \to 0$ și cu argumentul de mai sus, $\mathcal{H}_i = \varinjlim_{\alpha} \mathcal{H}_{i\,\alpha}$, unde $\mathcal{H}_{i,\alpha}$ sînt toate subfasciculele lui $\mathcal{H}_i$ generate de un număr finit de secțiuni globale. Punînd $\mathcal{F}_{i,\alpha} = O_X^{n_i}/_{\mathcal{H}_{i,\alpha}}$, obținem un sistem inductiv de O_X-module și exactitatea „$\varinjlim$" dă $\mathcal{F}_i = O_X^{n_i}/_{\mathcal{H}_i} = O_X^{n_i}/\varinjlim_{\alpha} \mathcal{H}_{i,\alpha} = \varinjlim \mathcal{F}_{i,\alpha}$. Cum $\Gamma : \mathbf{Coh}\, X \to \mathbf{Ab}$ este functor exact, va rezulta $\Gamma(X, \mathcal{F}_i) = \Gamma(X, O_X)^{n_i}/\Gamma(X, \mathcal{H}_i)/\varinjlim_{\alpha} \Gamma(X, \mathcal{H}_{i,\alpha}) = \varinjlim_{\alpha} \Gamma(X, \mathcal{F}_{i,\alpha})$.

(iii) Utilizînd teorema A, rezultă că există un număr finit de secțiuni globale pe X generînd toate fibrele $\mathcal{F}_x (x \in U)$. Există atunci un indice i_0 astfel încît $\mathcal{F}_{i_0}|_U \to \mathcal{F}|_U$ este un izomorfism ; analog, pentru $\mathcal{H}_i$ există α astfel ca $\mathcal{H}_{i,\alpha}|_U \to \mathcal{H}_i|_U$ este izomorfism, deci $O_X^{n_i}/\mathcal{H}_{i,\alpha} = \mathcal{F}_{i,\alpha}|_U \to O_X^{n_i}/\mathcal{H}_i|_U = \mathcal{F}_i|_U$ este un izomorfism. Demonstrația este terminată. În fine, cum toate limitele inductive sînt filtrate, notăm că morfismele $\mathcal{F}_i \to \mathcal{F}$ sînt injective, iar $\mathcal{F}_{i,\alpha} \to \mathcal{F}_i$ surjective.

COROLAR 5.6. *Fie* X *un spațiu Stein*, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} \in$ **Coh** X. *Aplicația canonică* $\theta : \mathrm{Hom}_{O_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}_{\Gamma(X, O_x)}(\Gamma(X, \mathcal{F}), \Gamma(X, \mathcal{G}))$ *este bijectivă.*

Demonstrație. Avem $\mathrm{Hom}_{O_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathrm{Hom}_{O_x}(\varinjlim \mathcal{F}_i, \mathcal{G}) = \varprojlim \mathrm{Hom}_{O_x}(\mathcal{F}_i, \mathcal{G})$ și similar, $\mathrm{Hom}_{\Gamma(X.0X)}(\Gamma(X, \mathcal{F}), \Gamma(X, \mathcal{G})) = \mathrm{Hom}_{\Gamma(X, O_x)}(\varinjlim_i \Gamma(X, \mathcal{F}_i), \Gamma(X, \mathcal{G})) = \varprojlim_i \mathrm{Hom}_{\Gamma(X, O_X)}(\Gamma(X, \mathcal{F}_i), \Gamma(X, \mathcal{G}))$ și θ este limita proiectivă a aplicațiilor canonice corespunzătoare. Putem presupune $\mathcal{F} = \mathcal{F}_i$ și cu un argument similar, putem lua $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{i,\alpha}$. Astfel, avem un șir exact de forma : $O_X^m \to O_X^n \to \mathcal{F} \to 0$ și corolarul rezultă din diagrama comutativă și exactă în care ultimele două săgeți verticale sînt izomorfisme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(O_X^n, \mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(O_X^m, \mathcal{G}) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\Gamma(X, \mathcal{F}), \Gamma(X, \mathcal{G})) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\Gamma,(X, O_X)^n, \Gamma(X, \mathcal{G}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\Gamma(X, O_X)^m, \Gamma(X, \mathcal{G}))
\end{tikzcd}$$

(exactitatea liniei secunde rezultă din teorema B).

Pentru un spațiu analitic X și un $\Gamma(X, O_X)$-modul M, amintim o construcție din geometria algebrică ; anume, notăm $\widetilde{M}$ fasciculul asociat prefasciculului $U \rightsquigarrow M \otimes_{\Gamma(X.O_X)} \Gamma(U, O_X)$ (U deschis arbitrar în X). Acest functor „$\sim$" comută cu produsul tensorial și limitele inductive, și în plus, pentru orice $x \in X$, avem $(\widetilde{M})_x = M \otimes_{\Gamma(X, O_X)} O_{X,x}$. Pentru $\mathcal{F} \in$ **Mod** X avem aplicațiile naturale $M \to \Gamma(X, \widetilde{M})$, $\widetilde{\Gamma(X, \mathcal{F})} \to \mathcal{F}$

Evident, $\widetilde{\Gamma(X, O_X)} = O_X$. Cu aceste pregătiri dăm alte consecințe ale teoremei 5.5.

COROLARUL 5.7. *Fie* X *un spațiu Stein și* $\mathcal{F} \in$ **Coh** X.

(i) *Morfismul canonic* $\widetilde{\Gamma(X, \mathcal{F})} \to \mathcal{F}$ *este un izomorfism ; în particular, morfismele* $\Gamma(X, \mathcal{F}) \underset{\Gamma(X, Q_X)}{\otimes} O_{X,x} \to \mathcal{F}_X (x \in X)$ *sînt izomorfisme.*

(ii) *Dacă* U *este un deschis Stein relativ compact al lui* X, *atunci aplicația canonică* $\Gamma(X, \mathcal{F}) \underset{\Gamma(X, O_X)}{\otimes} \Gamma(U, O_X) \to \Gamma(U, \mathcal{F})$ *este un izomorfism.*

Demonstrație. (i) Păstrînd notațiile din teorema 5.5, avem $\widetilde{\Gamma(X, \mathcal{F})} = \varinjlim \widetilde{\Gamma(X, \mathcal{F}_i)} = \varinjlim \widetilde{\Gamma(X, \mathcal{F}_i)}$ și deci putem presupune că $\mathcal{F} = \mathcal{F}_i$. Repetînd acest argument, putem presupune $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{i,\alpha}$, deci că avem un șir exact de forma : $O_X^m \to O_X^n \to \mathcal{F} \to 0$. Corolarul rezultă atunci din diagrama comutativă cu linii exacte avînd primele două săgeți verticale izomorfisme :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\Gamma(X, O_X^m)} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\Gamma(X, O_X^n)} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\Gamma(X, \mathcal{F})} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
O_X^m \arrow[r] & O_X^n \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Am utilizat exactitatea șirului $\Gamma(X, O_X^m) \to \Gamma(X, O_X^n) \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to 0$ (teorema B) și exactitatea la dreapta a functorului „$\sim$".

(ii) Avem $\Gamma(X, \mathcal{F}) \underset{\Gamma(X, O_X)}{\otimes} \Gamma(U, O_X) = (\varinjlim_{i} \Gamma(X, \mathcal{F}_i)) \underset{\Gamma(X, O_X)}{\otimes} \Gamma(U, O_X) =$ $= \varinjlim_{i} (\Gamma(X, \mathcal{F}_i) \underset{\Gamma(X, O_X)}{\otimes} \Gamma(U, O_X))$ şi $\Gamma(U, \mathcal{F}) = \varinjlim_{i} \Gamma(U, \mathcal{F}_i)$.

Este suficient să verificăm afirmaţia pentru $\mathcal{F} = \mathcal{F}_i$ şi repetînd argumentul, chiar (conform 5.5) pentru $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{i,\alpha}$ adică putem să presupunem că $\mathcal{F}$ are o prezentare finită globală : $O_X^m \to O_X^n \to \mathcal{F} \to 0$ (exact). Dar în acest caz avem diagrama comutativă exactă în care primele două morfisme verticale sînt izomorfisme :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X, O_X^m) \underset{\Gamma(X, O_X)}{\otimes} \Gamma(U, O_X) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X, O_X^n) \underset{\Gamma(X, O_X)}{\otimes} \Gamma(U, O_X) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X, \mathcal{F}) \underset{\Gamma(X, O_X)}{\otimes} \Gamma(U, O_X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\Gamma(U, O_X^m) \arrow[r] & \Gamma(U, O_X^n) \arrow[r] & \Gamma(U, \mathcal{F}) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

PROPOZIŢIA 5.8. *Fie X un spaţiu Stein. Pentru orice $x \in X$ şi pentru orice deschis Stein relativ compact $U \subset X$, morfismele canonice $\Gamma(X, O_X) \to$ $\to O_{X,x}$ şi $\Gamma(X, O_X) \to \Gamma(U, O_X)$ sînt plate.*

Demonstraţie. Este suficient să arătăm că pentru orice ideal de tip finit $\underline{a}$ din $\Gamma(X, O_X)$, aplicaţiile canonice

$$a \underset{\Gamma(X, O_X)}{\otimes} O_{X,x} \to O_{X,x}, \quad \underline{a} \underset{\Gamma(X, O_X)}{\otimes} \Gamma(U, O_X) \to \Gamma(U, O_X)$$

sînt injective. Or, fie $\mathfrak{I}$ fasciculul de ideale generat de $\underline{a}$. Conform lemei 5.4, cum $\underline{a}$ este de tip finit, $\underline{a} = \Gamma(X, \mathfrak{I})$ şi conform corolarului 5.7, aplicaţiile canonice $\underline{a} \underset{\Gamma(X, O_X)}{\otimes} O_{X,x} \to \mathfrak{I}_x = \underline{a} O_{X,x} \subset O_{X,x}$ şi $\underline{a} \underset{\Gamma(X, O_X)}{\otimes} \Gamma(U, O_X) \to$ $\to \Gamma(U, \mathfrak{I}) \subset \Gamma(U, O_X)$ sînt izomorfisme.

COROLARUL 5.9. *Functorul „$\sim$" este exact şi fidel pe $\Gamma(X, O_X)$-modulele topologice separate.*

Demonstraţie. Exactitatea este evidentă şi $\widetilde{M} = 0$ (M este $\Gamma(X, O_X)$-modul separat). Presupunem că ar exista $m \neq 0$ în M. Aplicaţia $\Gamma(X, O_X) \to M$ ($a \rightsquigarrow am$) este continuă, deci nucleul ei $\underline{a}$ este închis. $\Gamma(X, O_X)$-submodulul monogen al lui M generat de m este izomorf cu $\Gamma(X, O_X)/\underline{a}$ şi cum $\widetilde{M} = 0$ iar „$\sim$" este exact, rezultă că $\widetilde{\Gamma(X, O_X)/\underline{a}} =$ $= \widetilde{\Gamma(X, O_X)}/\widetilde{\underline{a}} = 0$, adică $\widetilde{\underline{a}} = O_X$. Dar dacă $\mathfrak{I}$ este idealul generat de a (închis), conform lemei 5.4 avem $\underline{a} = \Gamma(X, \mathfrak{I})$ deci $\widetilde{\underline{a}} = \widetilde{\Gamma(X, \mathfrak{I})} = \mathfrak{I}$, deci $\mathfrak{I} = O_X$ şi $a = \Gamma(X, O_X)$, absurd. Aşadar, $M = 0$.

PROPOZIŢIA 5.10. *Fie X un spaţiu Stein şi M un $\Gamma(X, O_X)$.-modul separat. Următoarele condiţii sînt echivalente :*

(a) *M este un modul Stein (adică de forma $\Gamma(X, \mathcal{F})$ cu $\mathcal{F} \in$* **Coh** *X) ;*

(a′) *M este un submodul al unui modul Stein ;*

(b) *există o acoperire a lui X cu deschişi Stein relativ compacţi U_i, $i \in I$, astfel încît pentru orice $i \in I$, $M \underset{\Gamma(X, O_X)}{\otimes} \Gamma(U_i, O_X)$ este un $\Gamma(U_i, O_X)$-modul de prezentare finită şi orice aplicaţie injectivă $M \to N$ cu N modul Stein este continuă şi defineşte M ca un submodul închis al lui N ;*

(c) *$\widetilde{M}$ este un fascicul coerent pe X şi orice aplicaţie injectivă $M \to N$ cu N modul Stein este continuă şi defineşte M ca un submodul închis al lui N.*

Demonstrație. (a)$\Rightarrow$(a$'$) trivial; (a$'$)$\Rightarrow$(a) conform lemei 5.4. (a)$\Rightarrow$(b). Fie $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$ cu $\mathcal{F} \in \mathbf{Coh}\ X$. Pentru orice $x \in X$ există o vecinătate deschisă U pe care o putem presupune Stein relativ compactă și astfel încît pe U avem un șir exact de forma $O_U^m \to O_U^n \to \mathcal{F}|_U \to 0$. Utilizînd teorema B avem șirul exact $\Gamma(U, O_U)^m \to \Gamma(U, O_U)^n \to \Gamma(U, \mathcal{F}|_U) \to 0$, deci $\Gamma(U, \mathcal{F})$ este un $\Gamma(U, O_U)$-modul de prezentare finită. Conform corolarului 5.7 avem izomorfismul $M \underset{\Gamma(X,O_X)}{\otimes} \Gamma(U, O_U) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U, \mathcal{F})$. Fie $M \to N$ o aplicație injectivă cu $N = \Gamma(X, \mathcal{G})$, $\mathcal{G} \in \mathbf{Coh}\ X$. Conform corolarului există o aplicație $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ care este injectivă (utilizînd exactitatea lui „$\sim$" și raționînd pe fibre). Punem $\mathcal{H} = \mathrm{Coker}\,(\mathcal{F} \to \mathcal{G})$ și $P = \Gamma(X, \mathcal{H})$. Conform teoremei B avem șirul exact $0 \to M \to N \to P \to 0$ de $\Gamma(X, O_x)$-module Stein și aplicații continui. Aici P este un spațiu Frèchet, deci $\mathrm{Im}\,(M \to N)$ este mulțime închisă și (b) rezultă conform teoremei lui Banach. (b)$\Rightarrow$(c). Avem $\widetilde{M}|_{U_i} = \widetilde{M \otimes_{\Gamma(X,O_x)} \Gamma(U, O_X)}$, deci putem presupune M de prezentare finită, adică avem un șir exact de forma: $\Gamma(X, O_X)^m \to \Gamma(X, O_X)^n \to M \to 0$. Coerența lui $\widetilde{M}$ este atunci imediată din șirul exact $O_X^m \to O_X^n \to \widetilde{M} \to 0$.

(c) $\Rightarrow$ (a$'$) Fie N nucleul aplicației canonice $M \to \Gamma(X, \widetilde{M})$, $\widetilde{M}$ fiind coerent. Avem $\widetilde{\Gamma(X, \widetilde{M})} \simeq \widetilde{M}$, conform corolarului 5.7; deci $\widetilde{N} = 0$, deci $N = 0$ conform corolarului 5.9; dar $\Gamma(X, \widetilde{M})$ este un modul Stein și prin ipoteză M rezultă un subspațiu închis al lui.

§ 6. ALGEBRE STEIN

DEFINIȚIA 6.1. O $\mathbf{C}$-algebră topologică se zice Stein dacă este izomorfă (izomorfism de $\mathbf{C}$-algebre topologice) cu algebra secțiunilor globale ale unui spațiu Stein.

TEOREMA 6.2. *Un ideal maximal dintr-o algebră Stein este închis dacă și numai dacă este finit generat.*

Demonstrație. Fie $A = \Gamma(X, O_X)$ o algebră ca în enunț cu X spațiu Stein și $\underline{m}$ un ideal maximal din A. Dacă $\underline{m}$ este finit generat, atunci conform demonstrației lemei 5.4, $\underline{m}$ este închis. Presupunem acum că $\underline{m}$ este închis, deci există $x \in X$ astfel încît $\underline{m} = \{f \in A \mid f(x) = 0\}$. Altfel, $\underline{m}\, O_X = O_X$, deci cf. 5.4, $\underline{m} = \Gamma(X, \underline{m} O_X) = \Gamma(X, O_X)$, absurd. Idealul maximal $\underline{m}_x$ din $O_{X\,x}$ este finit generat ($O_{X,x}$ fiind inel noetherian), deci există $f_1, \ldots, f_K \in A$ pentru care $f_{1,x}, \ldots, f_{K,x}$ generează idealul $\underline{m}_x$ în $O_{X,x}$. Considerăm mulțimea analitică $X' = \{z \in X \mid f_1(z) = \ldots = f_K(z) = 0\}$; este imediat că $x \in X'$ și că x este izolat în această mulțime, deoarece într-o vecinătate a lui $x, f_1, \ldots, f_K$ nu au alt zero comun. Deci $X' = X_0 \cup \{x\}$, unde X_0 este o mulțime analitică închisă care nu conține x_0. Există atunci $f_0 \in \Gamma(X, O_X)$ astfel încît $f_0|_{X_0} = 1$, $f_0(x) = 0$ și se verifică imediat că mulțimea zerourilor comune ale lui $f_0, \ldots, f_K$ se reduce la x, adică idealul $(f_0, \ldots, f_K)\, O_X$ coincide cu $\underline{m}\, O_X$, deci conform lemei 5.4, $(f_0, \ldots, f_K)\ A = \Gamma(X, (f_0, \ldots, f_K)\, O_X) = \Gamma(X, \underline{m} O_X) = \underline{m}$.

COROLARUL 6.3. *Fie $\underline{m}$ un ideal maximal închis într-o algebră Stein. Atunci $\underline{m}^r$ este ideal închis* $(r \geqslant 1)$.

Demonstrație. Din teorema 6.2 rezultă că $\underline{m}$ este finit generat, deci și $\underline{m}^r$ este finit generat, deci închis.

Observația 6.4. Vom folosi acest corolar sub forma următoare: dacă x este punctul pentru care $\underline{m} = \{f \in A \mid f(x) = 0\}$, atunci un element $f \in A$ aparține lui $\underline{m}^r$ dacă și numai dacă $f_x \in \underline{m}_x^r$. Acest fapt rezultă din egalitatea $\underline{m}^r = \Gamma(X, \underline{m}^r O_X)$ și din faptul că $\underline{m}^r O_X$ este idealul de fibre O_y pentru $y \neq x$ și $\underline{m}_x^r$ în x.

Vom arăta acum că algebra secțiunilor unui spațiu Stein caracterizează spațiul; mai precis vom demonstra următoarea:

TEOREMA 6.5. *Asocierea* $\Gamma : (X, O_X) \sim\!\!\rightarrow \Gamma(X, O_X)$ *este functorială și definește o echivalență între categoria spațiilor Stein și duala categoriei algebrelor Stein.*

Demonstrație. Vom construi un functor Spec de la duala categoriei algebrelor Stein în categoria spațiilor Stein și vom arăta că functorii $\Gamma \circ \mathrm{Spec}$ și $\mathrm{Spec} \circ \Gamma$ sînt izomorfi cu functorii identici corespunzători.

Fie A o $\mathbf{C}$-algebră topologică și $S(A)$ mulțimea omomorfismelor continue de $\mathbf{C}$-algebre $A \rightarrow \mathbf{C}$. Este imediat că asocierea $x \sim\!\!\rightarrow m(x) = \mathrm{Ker}(x)$ $(x \in S(A))$ este o bijecție a lui $S(A)$ pe mulțimea idealelor maximale închise din A. Înzestrăm, ca de obicei, $S(A)$ cu topologia următoare: un sistem fundamental de vecinătăți pentru un homomorfism $x_0 \in S(A)$ este constituit de toate mulțimile de forma $V(x_0; f_1, \ldots, f_n; \varepsilon) = \{x \in S(A) \mid |x(f_i) - x_0(f_i)| < \varepsilon$ pentru $i = 1, \ldots, n\}$, unde $f_i \in A$, $\varepsilon > 0$. Convenim să scriem $f(x)$ în loc de $x(f)$. Pe spațiul topologic $S(A)$ vom construi un fascicul de $\mathbf{C}$-algebre $\mathfrak{S}(A)$. Mai întîi, considerăm pentru orice $x \in S(A)$ mulțimea $\mathfrak{S}^*(A)_x = \mathbf{C}\{T_f\}_{f \in \underline{m}(x)}$ — inelul seriilor convergente în nedeterminatele T_f indexate după $f \in \underline{m}(x)$, unde fiecare serie depinde numai de un număr finit de nedeterminate. Definim pe $S(A)$ fasciculul $\mathfrak{S}^*(A)$ de $\mathbf{C}$-alegbre care asociază oricărui deschis $U \subset S(A)$, $\Gamma(U, \mathfrak{S}^*(A)) = \{\alpha = (\alpha_x)_{x \in U} \mid \alpha_x \in \mathfrak{S}^*(A)_x$ astfel încît pentru orice $x_0 \in U$, există o vecinătate $V_{x_0} = V(x_0, f_1, \ldots, f_n, \varepsilon)$ și o familie $c_{i_1, \ldots i_n} \in \mathbf{C}$ pentru care

$$\alpha_x = \sum c_{i_1, \ldots i_n} [T_{f_1 - f_1(x)} + f_1(x)]^{i_1} \ldots [T_{f_n - f_n(x)} + f_n(x)]^{i_n}\}.$$

Se verifică ușor că se obține un fascicul de $\mathbf{C}$-algebre ale cărui fibre sînt inelele $\mathfrak{S}^*(A)_x$. Fie apoi $\rho(A)_x$ idealul lui $\mathfrak{S}^*(A)_x$ format din seriile $\alpha = \sum c_{i_1, \ldots i_k} T_{f_1}^{i_1} \ldots T_{f_k}^{i_k}$ pentru care $\sum\limits_{i_1 + \ldots + i_k < r} c_{i_1, \ldots i_k} f_1^{i_1} \ldots f_k^{i_k} \in \underline{m}(x)^r$ pentru orice $r \in \mathbf{N}$. Este imediat că se obține un subfascicul $\rho(A)$ de ideale al lui $\mathfrak{S}^*(A)$ și notăm

$$\mathfrak{S}(A) = \mathfrak{S}^*(A)/\rho(A).$$

În acest mod, am asociat fiecărei $\mathbf{C}$-algebre topologice A un spațiu inelat $(S(A), \mathfrak{S}(A))$, pe care îl vom nota Spec A (spectrul analitic al lui A). Dacă $\varphi : A \rightarrow B$ este un morfism continuu de $\mathbf{C}$-algebre topologice, atunci se obține în mod natural un morfism $\mathrm{Spec}\, \varphi : \mathrm{Spec}\, B \rightarrow \mathrm{Spec}\, A$ și se verifică ușor că asocierea $A \sim\!\!\rightarrow \mathrm{Spec}\, A$ este functorială. Este de asemenea imediat că aplicația $f \sim\!\!\rightarrow (T_{f - f(x)} + f(x))$ este o aplicație de $\mathbf{C}$-algebre

$$A \rightarrow \Gamma(\mathrm{Spec}\, A) = \Gamma(S(A), \mathfrak{S}(A)).$$

Dacă X este un spațiu complex, atunci definim un morfism natural de spații inelate $X \rightarrow \mathrm{Spec}\, A$, unde $A = \Gamma(X, O_X)$. Oricărui $x \in X$ îi asociem morfismul $\overline{x} \in S(A) : f \rightsquigarrow f(x)$; asocierea $x \rightsquigarrow \overline{x}$ este o aplicaţie continuă $X \to S\,(A)$ şi o prelungim la un morfism de spaţii inelate definind morfismele de $\mathbf{C}$-algebre

$$\mathfrak{S}(A)_{\overline{x}} = \mathfrak{S}^*(A)_{\overline{x}}/\rho(A)_{\overline{x}} \to O_{X,\,x} \text{ (pentru orice } x \in X)$$

care transformă cl $\sum c_{i_1,\dots i_n} T_{f_1}^{i_1} \dots T_{f_n}^{i_n}$ în $\sum c_{i_1,\dots i_n} f_{1,\,x}^{i_1} \dots f_{n,\,x}^{i_n} \cdot (f_{i,\,x} \in \underline{m}_x)$.

Aplicaţia este bine definită căci dacă $\sum c_{i_1,\dots i_n} T_{f_1}^{i_1} \dots T_{f_n}^{i_n} \in \rho\,(A)_{\overline{x}}$, atunci rezultă uşor că $\sum c_{i_1,\dots i_n} f_{1,\,x}^{i_1} \dots f_{n,\,x}^{i_n} \in \bigcap\limits_{r=0}^{\infty} \underline{m}_x^r = 0$, conform teoremei lui Krull. Revenim la demonstraţia teoremei, arătînd că pentru orice spaţiu Stein X şi orice algebră Stein A, morfismele naturale $X \to \operatorname{Spec} \Gamma\,(X, O_X)$, $A \to \Gamma\,(S\,(A), \mathfrak{S}\,(A))$ sînt izomorfisme. Este suficient să demonstrăm că primul morfism este izomorfism căci orice algebră Stein A este de forma $\Gamma\,(X, O_X)$ (cu X-spaţiu Stein), iar morfismul $A = \Gamma\,(X, O_X) \to \Gamma\,(S\,(A), \mathfrak{S}(A))$ este un invers la stînga pentru izomorfismul $\Gamma\,(\operatorname{Spec} A) \to \Gamma\,(X, O_X) = A$, dedus din izomorfismul $X \to \operatorname{Spec} \Gamma\,(X, O_X)$. Fie deci X un spaţiu Stein. Aplicaţia $X \to S\,(A)$ este injectivă deoarece secţiunile olomorfe pe X separă punctele. Fie $\underline{m} \in S\,(A)$ un ideal maximal închis al lui $A = \Gamma\,(X, O_X)$; deci conform teoremei 6.2 şi lemei 5.4 avem $\underline{m} = \Gamma\,(X, \underline{m}O_X)$. Dacă $\underline{m}$ nu ar avea nici un zero, ar rezulta că $\underline{m}\,O_X = O_X$ şi deci $\underline{m} = \Gamma\,(X, \underline{m}O_X) = \Gamma\,(X, O_X) = A$, absurd. Aşadar, aplicaţia $X \to S\,(A)$ este bijectivă. Dovedim acum că este o aplicaţie deschisă. Fie $x_0 \in X$ şi U o vecinătate deschisă arbitrară a lui x_0. Notăm cu X_0 reuniunea componentelor ireductibile ale lui X care conţin x_0 şi X_1 reuniunea celorlalte componente ireductibile din X. X_0 şi X_1 sînt submulţimi analitice închise ale lui X şi în plus, X_0 are dimensiunea finită (deoarece numai un număr finit de componente conţin x_0). Fie dim $X_0 = n$. Există atunci $2m + 1$ secţiuni olomorfe $f_1, \dots, f_{2m+1}$ pe X_0 astfel încît morfismul canonic $X_0 \to \mathbf{C}^{2m+1}$ definit de ele să fie o imersie închisă. Putem presupune că $f_1, \dots, f_{2m+1}$ sînt restricţiile a $2m + 1$ secţiuni olomorfe peste X (notate la fel). Este uşor de văzut că există $\varepsilon > 0$ astfel încît

$$x_0 \in \bigcap_{i=1}^{2m\div 1} \{x \in X \mid |f_i(x)| < \varepsilon\} \cap X_0 \subset U \cap X_0.$$

Cum X este Stein, există $f_{2m+2} \in \Gamma\,(X, O_X)$ astfel încît $f_{2m+2}|_{X_1} = \varepsilon$ şi $f_{2m+2}(x_0) = 0$. Se verifică atunci că $x_0 \in \bigcap\limits_{i=1}^{2m\div 2} \{x \in X \,|\, f_i\,(x)| < \varepsilon\} \subset U$ deci $X \to S\,(A)$ este şi deschisă, deci este un homeomorfism. Pentru a termina demonstraţia rămîne să dovedim că pentru orice $x \in X$ morfismul canonic

$$(1)\ \mathfrak{S}(A)_{\overline{x}} = \mathfrak{S}^*(A)_{\overline{x}}/\rho(A)_{\overline{x}} \to O_{X,\,x}$$

este izomorfism. Notăm cu $\underline{m}_x$ idealul maximal al inelului local $O_{X,\,x}$ şi cu $\underline{m}\,(x)$ idealul maximal al lui A corespunzător (nucleul lui $\overline{x}$). Pentru fiecare $f \in A$ avem $f \in \underline{m}^r(x)$ dacă şi numai dacă $f_x \in \underline{m}_x^r$. Fie cl $\sum c_{i,\dots,\,i_n} T_{f_1}^{i_1} \dots \dots T_{f_n}^{i_n} \in \mathfrak{S}(A)_{\overline{x}}$ avînd imaginea nulă în $O_{X,\,x}$, deci $\sum c_{i_1,\dots,\,i_n} f_{1\,x}^{i_1} \dots f_{n,\,x}^{i_n} = 0$.

Cum $\sum\limits_{i_1+\ldots+i_n\geqslant r} c_{i_1,\ldots,i_n} f_{1,x}^{i_1}\ldots f_{n,x}^{i_n}\in \underline{m}_x^r$, rezultă că $\sum\limits_{i_1+\ldots+i_n<r} c_{i_1,\ldots,i_n} f_{1,x}^{i_1}\ldots f_{n,x}^{i_n}\in$ $\in \underline{m}_x^r$ și deci $\sum\limits_{i_1+\ldots+i_n<r} c_{i_1,\ldots,i_n} f_1^{i_1}\ldots f_n^{i_n}\in \underline{m}(x)^r$, deci $\sum c_{i_1,\ldots,i_n} T_{f_1}^{i_1}\ldots T_{f_n}^{i_n}\in$ $\in \rho(A)_{\overline{x}}$. Aplicația (1) este injectivă. Apoi, conform definiției spațiului Stein, există $f_1,\ldots,f_n\in\Gamma(X, O_X)=A$ astfel încît morfismul $X\to \mathbf{C}^n$-definit de aceste secțiuni să fie imersie în x. În plus, se poate presupune că lui x îi corespunde originea din $\mathbf{C}^n$-(adică $f_i(x)=0$ pentru orice $i=1,\ldots,n$). Morfismul $\mathbf{C}\{X_1,\ldots,X_n\}\to$ $\to O_{X,x}(X_i \rightsquigarrow f_{i,x})$ este surjectiv, deci morfismul $\mathfrak{S}(A)_{\bar{x}}\to O_{X,x}$ este și surjectiv. Teorema 6.5 este complet demonstrată.

Observații 6.6. 1) Dacă X și Y sînt spații analitice, atunci oricărui morfism $Y\to X$ îi corespunde un morfism de $\mathbf{C}$-algebre topologice $\Gamma(X,O_X)\to\Gamma(Y, O_Y)$. În felul acesta, obținem o aplicație naturală :

$$\theta : \mathrm{Hom}\,(Y, X)\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\text{-top}}\,(\Gamma(X, O_X), \Gamma(Y, O_Y)).$$

Este ușor de văzut (fapt general de teoria categoriilor) că afirmația din enunțul teoremei 6.5 este echivalentă cu faptul că aplicația θ este bijectivă dacă X, Y sînt spații Stein.

2) Aplicația θ de mai sus este bijectivă, presupunînd că numai Y este spațiu Stein. În adevăr, fie $Y=\bigcup\limits_{\alpha} D_\alpha$ acoperire cu deschiși Stein; afirmația rezultă din diagrama comutativă și exactă canonică :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}\,(Y, X) \arrow[r] \arrow[d, "\theta"'] & \prod\limits_{\alpha}\mathrm{Hom}\,(D_\alpha, X) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \prod\limits_{\alpha,\beta}\mathrm{Hom}\,(D_\alpha\cap D_\beta, X) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}\,(\Gamma(X, O_x), \Gamma(Y, O_y)) \arrow[r] & \prod\limits_{\alpha}\mathrm{Hom}\,(\Gamma,(X, O_x), \Gamma(D_\alpha, O_Y)) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod\limits_{\alpha,\beta}\mathrm{Hom}\,(\Gamma(X, O_x), \Gamma(D_\alpha,\cap D_\beta,O_y)).
\end{tikzcd}$$

Am presupus că Y este separat, deci $D_\alpha\cap D_\beta$ sînt deschiși Stein. Dacă Y nu ar fi separat, atunci pentru orice α, β considerăm o acoperire cu deschiși Stein a lui $D_\alpha\cap D_\beta$ etc.

3) Dăm acum o nouă demonstrație pentru teorema 6.5, în ipoteza suplimentară că $\sup\limits_{x\in X}\dim \underline{m}_x/\underline{m}_x^2<\infty$ și ținînd cont de observațiile de mai sus. Se știe că în această ipoteză, X se identifică cu un subspațiu analitic închis, dintr-un $\mathbf{C}^n$ și fie $\mathfrak{I}\subset O_{\mathbf{C}^n}$ idealul care îl definește. Așadar, $X=\mathrm{Supp}\, O_{\mathbf{C}^n}/\mathfrak{I}$ și $O_X=O_{\mathbf{C}^n}/\mathfrak{I}\,|_X$.

Fie $i: X\to\mathbf{C}^n$ morfismul canonic de scufundare. Probăm mai întîi injectivitatea lui θ. Fie f, $g\in\mathrm{Hom}\,(Y, X)$ astfel încît $\theta(f)=\theta(g)$. Cum i este monomorfism, este suficient să arătăm că $if=ig$, deci putem presupune $X=\mathbf{C}^n$ În acest caz, aplicațiile f, g sînt complet determinate de $(pr_i\circ f)$, $(pr_i\circ g)$ $1\leqslant i\leqslant n$, unde $pr_i:\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}$ sînt proiecțiile canonice. Dar aceste compuneri coincid cu imaginile în $\Gamma(Y, O_Y)$ ale funcțiilor de coordonate $z_1,\ldots,z_n\in\Gamma(\mathbf{C}^n, O_{\mathbf{C}^n})$ prin aplicația θ. Pentru a proba surjectivitatea lui θ fie $\alpha : \Gamma(X, O_X) \to \Gamma(Y, O_Y)$ un morfism continuu de $\mathbf{C}$-algebre. Utilizînd teorema B pentru spaţiul $\mathbf{C}^n$ avem şirul exact :

$$0 \to \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathfrak{J}) \to \Gamma(\mathbf{C}^n, O_{\mathbf{C}^n}) \to \Gamma(X, O_X) \to 0.$$

Pe de altă parte, aplicaţia compusă $\beta : \Gamma(\mathbf{C}^n, O_{\mathbf{C}^n}) \to \Gamma(X, O_X)\alpha \overset{\alpha}{\to} \Gamma(Y, O_Y)$ defineşte n elemente $\beta(z_1), \ldots, \beta(z_n)$ din $\Gamma(Y, O_Y)$, prin urmare un morfism $\varphi : Y \to \mathbf{C}^n$. Morfismul corespunzător $\Gamma(\mathbf{C}^n, O_{\mathbf{C}^n}) \to \Gamma(Y, O_Y)$ coincide cu β, deoarece ambele morfisme coincid pe funcţiile de coordonate $z_1, \ldots, z_n$ şi prin continuitate, ele coincid pe orice funcţie întreagă. Pentru a termina, arătăm că φ se factorizează prin X; este suficient să verificăm relaţia $\varphi^*(\mathfrak{J}) \,.\, O_Y = 0$, sau echivalent, că pentru orice $y \in Y$, $\mathfrak{J}_{\varphi(y)} \cdot O_{Y,y} = 0$ [3]. Or, conform teoremei A, idealul $\mathfrak{J}_{\varphi(y)}$ este generat ca $O_{\mathbf{C}^n, \varphi(y)}$-modul de $\Gamma(\mathbf{C}^n, \mathfrak{J})$ şi din definiţia lui β şi din comutativitatea diagramei :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(\mathbf{C}^n, O_{\mathbf{C}^n}) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(Y, O_Y) \arrow[d] \\
O_{\mathbf{C}^n, \varphi(y)} \arrow[r] & O_{Y,y}
\end{tikzcd}$$

rezultă că $\Gamma(\mathbf{C}^n, \mathfrak{J})$ are imaginea în $O_{Y,y}$ nulă.

TEOREMA 6.7. *Fie* $\alpha : A \to B$ *un homomorfism* (*algebric*) *de algebre Stein.* α *este continuu dacă şi numai dacă pentru orice ideal maximal finit generat* $\underline{m}$ *din* B, $\alpha^{-1}(\underline{m})$ *este ideal finit generat în* A.

Demonstraţie. Dacă α este continuu şi $\underline{m}$ este ideal maximal finit generat, $\underline{m}$ rezultă închis, deci $\alpha^{-1}(\underline{m})$ este închis şi deci finit generat conform teoremei 6.2. Reciproc, pentru a proba că α este continuu, este suficient să construim un morfism de spaţii inelate Spec $B \to$ Spec A care să inducă prin Γ pe α. Or, construim imediat o aplicaţie $S(B) \to S(A)$ asociind fiecărui $\underline{m} \in S(B)$ (ideal maximal închis, deci finit generat), $\alpha^{-1}(\underline{m})$ care este ideal maximal şi conform ipotezei finit generat, deci închis. Se arată uşor că aplicaţia construită este continuă şi că se poate întregi la un morfism de spaţii inelate.

COROLARUL 6.8. *Orice izomorfism algebric între două algebre Stein este şi izomorfism topologic.*

Primită la redacţie la 15 septembrie 1968

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România
Calea Griviţei nr. 21
Bucureşti 12

PROPERTIES OF STEIN SPACES

ABSTRACT

This paper presents some known properties of Stein spaces, direct or less direct consequences of theorems A and B, which were the object of some expositions made in a seminar on analytic spaces, led by M. Jurchescu.

In § 1.2 one gives the definition of a Stein space, some examples and the characterization theorem of Stein spaces (theorem 1.5).

In § 3 one treats the Cousin and Poincaré problems giving sufficient (and sometimes necessary) conditions for their solvability. The paragraphs 5, 6 contain properties of analytic subsets of a Stein space, the characterization of open Stein sets in C^n and the proof that the global sections of the structural sheaf or of a coherent sheaf on a Stein space determine the properties of the space and the sheaf.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Andreotti. R. Narasimhan, *A topological property of Runge pairs*. Annals of Math. **76**, 499–509 (1962).
2. H. Cartan, *Variétés analytiques complexes et cohomologie* Coll. de Bruxelles, 1953.
3. H. Cartan, *Séminaire*, E.N.S., 1960/61.
4. O. Forster, *Uniqueness of topology in Stein algebras*. Functions Algebras, 1966.
5. J. Frenkel, *Seminaire d'analyse* 1964/65. Fascicule 1 — Theoremes A et B — Strasbourg, 1965.
6. H. Grauert, *Ein theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulbräume Komplexer Strukturen*. Publ. Math. IHES., Paris, 1960.
7. R. Gunning, H. Rossi, *Analytic Functions of Several Complex Variables*. Englewood Cliffs, 1965.
8. L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables* D. Van Nostrand Company, 1966.
9. Cabiria Andreian-Cazacu, A. Deleanu, M. Jurchescu, *Probleme moderne de teoria funcţiilor* (Teoria locală a funcţiilor analitice de mai multe variabile). Editura Academiei, 1966.
10. P. Lelong, *Seminaire*, 1957–1958 (Exp. No. 11 — Norguet).
11. R. Narasimhan, *Imbedding of holomorphically complete complex spaces*. Amer. Journ. Math., **82** (1960).
12. R. Remmert, K. Stein, *Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen*. Math. Ann., **126**, 263–306 (1953).
13. J. P. Serre, Coll de Bruxelles, 1953.
14. J. P. Serre, *Faisceaux analytiques coherents*. Ann. of Maths. 61–1955, p. 197–278.
15. J. P. Serre, Ann. Inst. Fourier, 1966.

ASUPRA UNEI METODE DE STABILIRE A EXISTENȚEI SOLUȚIILOR ECUAȚIILOR FUNCȚIONALE NELINIARE

DE

ȘTEFAN CRUCEANU

În [1] F. E. Browder și Bui An Ton prezintă o nouă tehnică pentru stabilirea existenței soluțiilor ecuațiilor funcționale neliniare cu operatori monotoni (concretizată prin așa-numita super-regularizare eliptică pentru problemele la limită variaționale la sisteme tare eliptice). În esență metoda lor constă în construirea unei familii de ecuații perturbate, depinzînd de un parametru real, soluțiile cărora servesc la formarea unui șir ce converge slab către soluția ecuației inițiale. Vom obține în cele ce urmează un rezultat de aceeași natură, folosind însă argumente caracteristice „metodelor proiecție" de tip Galerkin.

Fie X un spațiu Banach reflexiv, X^* dualul său. Dualitatea între cele două spații o vom nota ca de obicei $(,)$.

Operatorul neliniar $T : X \to X^*$ se numește :

— *monoton* dacă $(Tu - Tv,\ u - v) \geqslant 0\ \forall\ u, v \in X$;

— *demicontinuu* dacă este continuu din X tare în X^* slab ;

— *coerciv* dacă există o funcție $C(r) : R_+ \to R_+$ cu $\lim\limits_{r \to \infty} C(r) = +\infty$ astfel încît $(Tv, v) \geqslant C(\|v\|)\, \|v\|,\ \forall\ v \in X$.

Fie H un spațiu Hilbert separabil în care considerăm șirul crescător de subspații finit dimensionale :

$$H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_n \subset \ldots$$

astfel încît $\overline{\bigcup\limits_n H_n} = H$. Fiecărui subspațiu finit dimensional îi corespunde proiectorul respectiv P_n (P_n este un operator liniar mărginit, simetric, idempotent, cu $P_n(H) = H_n$). Șirul de perechi $\Gamma_n = (\{H_n\}, \{P_n\})$ îl vom numi *sistem de proiecție* [2].

Este evident că în orice spațiu Hilbert separabil există astfel de sisteme.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 6, P. 909–913, BUCUREȘTI, 1969

LEMĂ. *Fie X un spaţiu Banach real reflexiv, X^* dualul său, $T : X \to X^*$ un operator monoton, demicontinuu, iar H un spaţiu Hilbert real, separabil. Presupunem că există un operator liniar complet continuu K care aplică H în X; adjunctul lui K îl vom nota K^*.*

În acest caz oricare ar fi operatorul A liniar continuu strict pozitiv definit în H şi sistemul de proiecţie $\Gamma_n = (\{H_n\}, \{P_n\})$, pentru fiecare $\lambda > 0$, ecuaţia:

$$\lambda P_n Au + P_n K^* T Ku = f$$

admite în H_n o soluţie unică $u_{n,\lambda}$ $\forall f \in H_n$.

Demonstraţie. Notăm cu B_n restricţia operatorului $\lambda P_n A + P_n K^* TK$ la subspaţiul H_n. Evident, $B_n : H_n \to H_n$. În plus B_n este continuu. Într-adevăr, fie $\{x_k\}$ un şir din H_n cu $x_k \to x_0$ cînd $k \to \infty$. Din continuitatea operatorului K rezultă că $K x_k \to Kx_0$ în X, iar din demicontinuitatea lui T, $TKx_k \to TKx_0$ slab în X. Operatorul complet continuu K^* transformă şirurile slab convergente în tare convergente, deci $K^* TKx_k \to K^* TKx_0$ şi bineînţeles $P_n K^* TKx_k$ converge către $P_n K^* TKx_0$.

Pentru u şi $v \in H_n$:

$$(B_n u - B_n v,\ u - v) = (\lambda P_n Au - \lambda P_n Av,\ u - v) + (P_n K^* TKu - P_n K^* TKv,\ u - v) = \lambda (A (u - v),\ u - v) + (TKu - TKv, Ku - Kv).$$

Dar conform ipotezelor făcute, $(A (u - v),\ u - v) \geqslant \gamma \|u - v\|_H^2$ cu $\gamma > 0$ (A este strict pozitiv definit) şi $(TKu - TKv,\ Ku - Kv) \geqslant 0$ (T este monoton).

În felul acesta:

$$(B_n u - B_n v,\ u - v) \geqslant \lambda\gamma \|u - v\|_H^2$$

de unde

$$\|B_n u - B_n v\|_H \geqslant \lambda\gamma \|u - v\|_H. \tag{1}$$

Ultima inegalitate asigură biunivocitatea operatorului B_n. Acesta fiind biunivoc şi continuu, conform teoremei lui Brouwer de invarianţă a domeniului, $B_n (H_n)$ este o mulţime deschisă în H_n.

Arătăm că $B_n (H_n)$ este o mulţime închisă. Fie $y_m \in B_n(H_n)$ cu $y_m \to y_0$ cînd $m \to \infty$, şi $x_m \in H_n$ aşa încît $B_n x_m = y_m$. Din inegalitatea (1):

$$\|B_n x_l - B_n x_p\|_H \geqslant \lambda\gamma \|x_l - x_p\|_H$$

şi deci

$$\lim_{l,p\to\infty} \|x_l - x_p\|_H = 0.$$

Spaţiul finit dimensional H_n fiind complet, rezultă existenţa elementului $x_0 \in H_n$ aşa încît $x_m \to x_0$, iar din continuitatea lui B_n, $y_0 = B_n x_0$ sau $y_0 \in B_n(H_n)$.

Mulţimea $B_n(H_n)$ fiind simultan închisă şi deschisă, în mod obligatoriu $B_n(H_n) = H_n$, ceea ce demonstrează lema.

Observaţie. În ipotezele lemei, ecuaţia $\lambda Ax + K^*TKx = y$, $\lambda > 0$, admite în H soluţie unică oricare ar fi $y \in H$. (Un rezultat asemănător s-a obţinut în [1] folosindu-se principiul de punct fix al lui Schauder). Soluţia x_0 este limita şirului $\{u_{n,\lambda}\}$, cu $B_n u_{n,\lambda} = P_n y$.

Într-adevăr, este uşor de verificat următoarea condiţie suficientă de rezolvabilitate prin aproximare, datorată lui W.V.Petryshyn (condiţia (C) din [5]) : dacă pentru un anumit şir $\{x_n\}$, $x_n \in H_n$, $x_n \to z$ slab, iar $B_n x_n \to g$, atunci $\lambda Az + K^*TKz = g$.

Principalul fapt relatat în prezenta lucrare este următorul :

TEOREMĂ. *Fie X un spaţiu Banach reflexiv, $T : X \to X^*$ un operator monoton, demicontinuu şi coerciv, H un spaţiu Hilbert separabil, K un operator liniar complet continuu din H în X aşa încît $\overline{K(H)} = X$. În H se consideră operatorul liniar şi continuu A, strict pozitiv definit $(Ax, x) \geqslant \gamma \|x\|^2$ $\gamma > 0$ $\forall x \in H$) şi un sistem de proiecţie arbitrar $\Gamma_n = (\{H_n\}, \{P_n\})$.*

În acest caz :

i) *Dacă $u_n \in H_n$ este soluţia ecuaţiei :*

$$\varepsilon_n P_n Au_n + P_n K^*TKu_n = P_n K^* z_0 \; (z_0 \in X^*, \; \varepsilon_n > 0 \qquad n = 1, 2, \ldots,) \tag{2}$$

cu $\varepsilon_n \to 0$ şi $Ku_n \to v_0$ slab în X cînd $n \to \infty$, atunci

$$Tv_0 = z_0.$$

ii) *T este surjectiv.*

Demonstraţie. i) Fie şirul $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$ cînd $n \to +\infty$ şi $u_n \in H_n$ soluţia ecuaţiei (2) (existenţa şi unicitatea acesteia este asigurată de lema demonstrată anterior) astfel încît $K u_n \to v_0$ în X slab.

A arăta că $Tv_0 = z_0$ este echivalent cu a arăta că [[4], [3])

$$(Tv - z_0, \; v - v_0) \geqslant 0 \quad \forall v \in X. \tag{3}$$

Deoarece T este demicontinuu, este suficient ca relaţia (3) să fie îndeplinită doar pentru v aparţinînd unei mulţimi dense în X. Din ipotezele teoremei $\bigcup\limits_n H_n = H$ şi $K(H) = X$. Din continuitatea lui K va rezulta că $K(H) = \overline{K(\bigcup\limits_n H_n)}$.

Rămîne de demonstrat (3) doar pentru $v \in K(\bigcup\limits_n H_n)$. Fie $h \in \bigcup\limits_n H_n$ cu $Kh = v$. Va exista un indice N_h astfel ca $h \in H_n$(sau $P_n h = h$) pentru toţi $n > N_h$. Ţinînd seama de aceasta obţinem :

$$(Tv - z_0, \; v - v_0) = (TKh - z_0, \; Kh - v_0) = \lim_{n\to\infty}(TKh - z_0, \; Kh - Ku_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(K^*TKh - K^*z_0, \; h - u_n) = \lim_{n\to\infty}(P_n K^*TKh - P_n K^*z_0, \; h - u_n).$$

Dar din (2)

$$P_n K^* z_0 = \varepsilon_n P_n Au_n + P_n K^*TKu_n$$

astfel încît:

$$(Tv - z_0, v - v_0) = \lim_{n\to\infty} (P_nK^*TKh - P_nK^*TKu_n - \varepsilon_nP_nAu_n, h - u_n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} [(P_nK^*TKh - P_nK^*TKu_n, h - u_n) + \varepsilon_n(P_nAu_n, u_n) - \varepsilon_n(P_nAu_n, h)] =$$
$$= \lim_{n\to\infty} [(TKh - TKu_n, Kh - Ku_n) + \varepsilon_n(Au_n, u_n) - \varepsilon_n(Au_n, h)].$$

Datorită monotoniei lui T:

$$(TKh - TKu_n, Kh - Ku_n) \geqslant 0$$

şi deoarece

$$\varepsilon_n(Au_n, u_n) > 0$$

deducem

$$(Tv - z_0, v - v_0) \geqslant \overline{\lim_{u\to\infty}} \{- \varepsilon_n(Au_n, h)\}.$$

Evaluăm limita din partea dreaptă a inegalităţii. Egalitatea $\varepsilon_nP_nAu_n + P_nK^*TKu_n = P_nK^*z_0$ se înmulţeşte scalar cu u_n:

$$\varepsilon_n(P_nAu_n, u_n) + (P_nK^*TKu_n, u_n) = (P_nK^*z_0, u_n)$$

sau

$$\varepsilon_n(Au_n, u_n) + (TKu_n, Ku_n) = (z_0, Ku_n) \leqslant \|z_0\|_{X^*} \cdot \|Ku_n\|_X \leqslant C_1$$

şiru slab convergent, Ku_n fiind mărginit).

Pe de altă parte:

$$(TKu_n, Ku_n) = (TKu_n - T_o, Ku_n - 0) + (T_o, Ku_n) \geqslant$$
$$\geqslant \|T_o\|_{X^*}\|Ku_n\|_X \geqslant - C_2$$

astfel că:

$$\varepsilon_n\gamma\|u_n\|_H^2 \leqslant \varepsilon_n(Au_n, u_n) \leqslant - (TKu_n, Ku_n) + C_1 \leqslant C_1 + C_2 = C_3.$$

Rezultă:

$$|\varepsilon_n(Au_n, h)| = |\varepsilon_n(u_n, A^*h)| \leqslant \varepsilon_n\|u_n\|_H \|A^*h\|_H \leqslant \sqrt{\varepsilon_n} \sqrt{\frac{c_3}{\gamma}} \|A^*h\|_H \to 0$$

cînd $n \to +\infty$

În felul acesta:

$$(Tv - z_0, v - v_0) \geqslant 0 \qquad \forall v \in K (\bigcup_n H_n)$$

şi deci $Tv_0 = z_0$.

ii) Şirul Ku_n este mărginit. Pentru a arăta aceasta se înmulţeşte scalar (2) cu u_n. Se obţine:

$$\varepsilon_n(Au_n, u_n) + (TKu_n, Ku_n) = (z_0, Ku_n)$$

iar de aici:

$$(TKu_n, Ku_n) \leqslant (z_0, Ku_n).$$

Folosind proprietatea de coercivitate a operatorului T rezultă:

$$c(\|Ku_n\|_X)\,\|Ku_n\|_X \leqslant (TKu_n, Ku_n) \leqslant (z_0, Ku_n) \leqslant \|z_0\|_{X^*}\|Ku_n\|_X$$

sau

$$c(\|Ku_n\|_X) \leqslant \|z_0\|_{X^*} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Funcţia $c(r)$ fiind crescătoare, deducem mărginirea şirului Ku_n. Spaţiul reflexiv X fiind cu sferă slab compactă, şirul Ku_n va conţine un subşir slab convergent, limita căruia, în virtutea rezultatului de la punctul i), este soluţie a ecuaţiei

$$Tv = z_0.$$

Evident, în cazul în care T este biunivoc, întregul şir Ku_n va tinde către soluţia unică a ecuaţiei. Metoda expusă dă astfel şi o demonstraţie (în condiţii mai restrictive) a cunoscutei teoreme de surjecţie pentru operatori monotoni.

Primită la redacţie la 27 august 1968

Centrul de calcul economic şi cibernetică economică
Bucureşti
Str. M. Eminescu nr. 5—7

ON A METHOD FOR ESTABLISHING THE EXISTENCE OF NONLINEAR FUNCTIONAL EQUATIONS

(ABSTRACT)

A new presentation of a method for solving nonlinear functional equations involving monotonous operators is given, using arguments characteristic of the projection methods of Galerkin type.

The solution is shows as weak limit of a sequence formed by means of a solution of certain perturbed equations on a corresponding family of finite dimensional spaces.

BIBLIOGRAFIE

1. F. E. Browder & Bui An Ton, *Nonlinear functional equations in Banach Space and elliptic super — regularization*. Math. Zeitschr., **105**, 177—195 (1968).
2. F. E. Browder, *Approximation — solvability of nonliniar functional equations in normed linear spaces*. Arch. for rat. Mech. Anal., **26**, *1*, 33—43 (1967).
3. — *Problems non-lineaires*. Les presses de l'Universite' de Montreal, 1966.
4. P. КАЧУРОВСКИЙ, *Нелинейные монотонные операторы в Банаховых пространствах*. Усп. мат. наук, **XXIII**, *2*, 121—168 (1968).
5. W. V. Petryshyn, *Remarks on the approximation — solvability of nonlinear functional equations*. Arch. for rat. Mech. Anal., **26**, *1*, 45—50 (1967).

ASUPRA GRUPURILOR DE MIȘCĂRI ALE UNOR ECUAȚII ALE FIZICII MATEMATICE (II)

DE

ANDREI DOBRESCU

Se consideră problema determinării grupului de mişcări al ecuaţiei undelor în $n-1$ variabile spaţiale. Se obţine un sistem de ecuaţii care determină funcţia generatoare φ. În cazul $n=3$, cînd φ depinde de 11 parametri şi o soluţie arbitrară a ecuaţiei undelor, presupunînd această soluţie identic nulă, se determină structura grupului de mişcări G_{11}.

1. Utilizînd rezultate stabilite anterior [1], am considerat [2] problema determinării grupului de mişcări al ecuaţiei lui Laplace[1]

$$p_{ii}=0, \left(p_{ij}=\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\, \partial x_j};\ i, j=1, \ldots, n\right).$$

Ne propunem acum aceeaşi problemă pentru ecuaţia undelor

$$c^2 p_{\alpha\alpha}-p_{nn}=0, \ (\alpha=1, 2, \ldots, n-1) \tag{1}$$

funcţia z depinzînd de variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, iar $c \neq 0$ fiind o constantă reală[2].

Am indicat prin x_α $(\alpha=1, \ldots, n-1)$, coordonatele spaţiale şi prin x_n variabila temporală t.

---

[1] În cazul $n=3$, [2], pp. 120–122, funcţia ψ, liniară în variabilele x_1, x_2, x_3, a fost considerată (în mod nejustificat) şi simetrică în raport cu aceste variabile. Luînd însă

$$\psi=a x_1 x_2 x_3+b_1 x_2 x_3+b_2 x_3 x_1+b_3 x_1 x_2+c_1 x_1+c_2 x_2+c_3 x_3+d,$$

cum este corect, se obţine, pe aceeaşi cale ca în text,

$$a=b_1=b_2=b_3=0,$$

şi schimbînd unele notaţii,

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= a_1(x_1^2-x_2^2-x_3^2)+2x_1(a_2x_2+a_3x_3)+ax_1+b_3x_2-b_2x_3+c_1,\\
\varphi_2 &= a_2(x_2^2-x_3^2-x_1^2)+2x_2(a_3x_3+a_1x_1)+ax_2+b_1x_3-b_3x_1+c_2,\\
\varphi_3 &= a_3(x_3^2-x_1^2-x_2^2)+2x_3(a_1x_1+a_2x_2)+ax_3+b_2x_1-b_1x_2+c_3,
\end{aligned}$$

încît *funcţia generatoare*

$$\varphi=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)z+bz+\varphi_1p_1+\varphi_2p_2+\varphi_3p_3+\chi(x_1, x_2, x_3)$$

depinde de 11 (*nu 9*) *parametri* şi o funcţie armonică χ de x_1, x_2, x_3.

[2] Problema determinării grupului de mişcări al unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea a fost considerată pentru prima oară de G. Vrănceanu [3].

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 6, P. 915–929, BUCUREȘTI, 1969

Vom obţine un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea pentru determinarea funcţiei generatoare φ, şi vom determina această funcţie în cazurile $n = 2$ şi $n = 3$. În cazul $n = 3$, φ depinde — cum vom vedea — de 11 parametri şi o soluţie arbitrară $\chi(x_1, x_2, x_3)$ a ecuaţiei undelor în trei variabile. Presupunînd $\chi \equiv 0$, vom obţine structura grupului G_{11}.

2. Ca şi în cazul ecuaţiei Laplace, considerăm ca variabile independente ale sistemului constituit din (1) şi ecuaţiile

$$(1') \qquad \mathrm{d}z - p_i\,\mathrm{d}x_i = 0,$$

$$\mathrm{d}p_i - p_{ij}\,\mathrm{d}x_j = 0, \left(p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i},\ p_{i,j} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)$$

$$(i, j = 1, \ldots, n)$$

pe $x_i, z, p_i, p_{\alpha i}$ $(i = 1, \ldots, n;\ \alpha = 1, \ldots, n-1)$.

Transformările infinitezimale ale grupului fiind

$$x'_i = x_i + \xi_i,\ z' = z + \zeta,\ p'_i = p_i + \pi_i,\ p'_{\alpha i} = p_{\alpha i} + \pi_{\alpha i},$$

dacă se introduc operatorii

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial}{\partial z} + p_{ij}\frac{\partial}{\partial p_j},$$

precum şi funcţia

$$\varphi = \xi - p_i\,\xi_i,$$

ξ_i, ζ, π_i, $\pi_{\alpha i}$ se exprimă [1] — în raport cu φ — prin relaţiile

$$\xi_i = -\frac{\partial\varphi}{\partial p_i},\ \zeta = \varphi - p_i\frac{\partial\varphi}{\partial p_i},\ \pi_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial\varphi}{\partial z},\ \pi_{\alpha i} = D_{\alpha i}\,\varphi,$$

unde

$$D_{ij}\,\varphi = D_i D_j\,\varphi + \xi_l D_i p_{jl} - \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_l}\xi_l - \frac{\partial p_{ij}}{\partial z}\zeta - \frac{\partial p_{ij}}{\partial p_l}\pi_l,$$

$$(D_i D_j = D_i(D_j);\ i, j, l = 1, \ldots, n).$$

Ecuaţia

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & D_{11}\,\varphi \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & D_{22}\,\varphi \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & D_{33}\,\varphi \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & D_{n-1,n-1}\,\varphi \\
c^2 & c^2 & c^2 & \cdots & c^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & D_{nn}\,\varphi \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & D_{12}\,\varphi \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & D_{13}\,\varphi \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & D_{n-1,n}\,\varphi
\end{vmatrix} = 0,$$

a cărei soluţie — independentă de $p_{\alpha i}$ [1] — este funcţia generatoare φ, se scrie

$$c^2 D_{\alpha\alpha}\varphi - D_{nn}\varphi = 0,$$

adică, dezvoltînd,

$$\begin{aligned} & c^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha^2} + 2p_\alpha\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\,\partial z} + p_\alpha^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \right.\\ & \left. + 2p_{\alpha i}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\,\partial p_i} + 2p_\alpha p_{\alpha i}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial p_i} + p_{\alpha i}p_{\alpha j}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_i\,\partial p_j}\right) -\\ & -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2} + 2p_n\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\,\partial z} + p_n^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \right.\\ & \left. + 2p_{ni}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\,\partial p_i} + 2p_n p_{ni}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial p_n} + p_{ni}p_{nj}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_i\,\partial p_j}\right) = 0, \end{aligned}$$

unde p_{nn} trebuie înlocuit, în virtutea ecuaţiei (1), prin $c^2 p_{\alpha\alpha}$.

Făcînd această înlocuire şi ţinînd seamă că φ este independentă de $p_{\alpha i}$, obţinem sistemul

$$\begin{aligned} & c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2} + 2c^2 p_\alpha\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\,\partial z} - 2p_n\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\,\partial z} + \\ & + c^2 p_\alpha^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - p_n^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0,\\ & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\,\partial p_\alpha} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\,\partial p_n} + p_\alpha\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial p_\alpha} - p_n\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial p_n} = 0,\ (\alpha \text{ fix})\\ (2)\quad & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\,\partial p_\beta} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\beta\,\partial p_\alpha} + p_\alpha\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial p_\beta} + p_\beta\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial p_\alpha} = 0,\ (\alpha \neq \beta)\\ & c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\,\partial p_n} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\,\partial p_\alpha} + c^2 p_\alpha\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial p_n} - p_n\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial p_\alpha} = 0,\\ & \frac{\partial^2\varphi}{\partial p_i\,\partial p_j} = 0,\ (i,j = 1,\ldots,n;\ \alpha,\beta = 1,\ldots,n-1). \end{aligned}$$

Din ultima ecuaţie (2) rezultă că φ *este liniară în raport cu* p_i:

$$\varphi = \varphi_i(x_1,\ldots,x_n,z)\,p_i + \varphi_0(x_1,\ldots,x_n,z).$$

Cum apoi penultima ecuaţie (2) se scrie, în această situaţie,

$$c^2\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_n} + c^2 p_\alpha\frac{\partial\varphi_n}{\partial z} - p_n\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial z} = 0,$$

deducem $\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = 0$, deci *funcţiile* φ *nu depind de* z. În consecinţă (2) devine

$$
(2') \quad
\begin{aligned}
&c^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha^2} - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_n^2} = 0, \\
&c^2 \frac{\partial^2 \varphi_\beta}{\partial x_\alpha^2} - \frac{\partial^2 \varphi_\beta}{\partial x_n^2} + 2c^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\beta \, \partial z} = 0, \\
&c^2 \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_\alpha^2} - \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_n^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_n \, \partial z} = 0, \\
&\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} = 0, \\
&\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}, \ (\alpha \text{ fix}) \\
&\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\alpha} = 0, \ (\alpha \neq \beta) \\
&c^2 \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_n} = 0.
\end{aligned}
$$

În virtutea celei de-a patra ecuaţii (2′), φ_0 *este liniară în* z:

$$\varphi_0 = \psi(x_1, \ldots, x_n)\, z + \chi(x_1, \ldots, x_x).$$

Determinarea funcţiei generatoare φ revine astfel la determinarea funcţiei χ satisfăcînd ecuaţia undelor (1):

$$c^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_\alpha^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_n^2} = 0$$

şi funcţiilor ψ şi φ_h care satisfac sistemul

$$
(3) \quad
\begin{aligned}
&c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\alpha^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_n^2} = 0, \\
&c^2 \frac{\partial^2 \varphi_\beta}{\partial x_\alpha^2} - \frac{\partial^2 \varphi_\beta}{\partial x_n^2} + 2c^2 \frac{\partial \psi}{\partial x_\beta} = 0, \\
&c^2 \frac{c^2 \varphi_n}{\partial x_\alpha^2} - \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_n^2} - 2 \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = 0, \\
&\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}, \ (\alpha \text{ fix}) \\
&\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\alpha} = 0, \ (\alpha \neq \beta) \\
&c^2 \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_n} = 0.
\end{aligned}
$$

Vom arăta în primul rînd, în cazul $n > 2$, că ψ *este liniară în raport cu fiecare din variabilele* x_i.

Din a patra ecuaţie (3) şi din a cincea — unde $\beta = 1$ — obţinem, prin derivare în raport cu x_1 şi x_α respectiv,

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_2} = \ldots = \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_1 \partial x_n}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_\alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_1 \partial x_\alpha} = 0, \ (\alpha \text{ fix} > 1)$$

iar din acestea :

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_\alpha^2} = - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2}, \ (\alpha \text{ fix} > 1).$$

De asemenea, din a şasea ecuaţie (3) deducem

$$c^2 \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_1 \partial x_n} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_n^2},$$

încît, ţinînd seamă de (4), rezultă

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_n^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2},$$

iar a doua ecuaţie (3), unde $\beta = 1$, se scrie

$$(n-2) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial x_1}.$$

Acelaşi raţionament fiind valabil pentru 2, 3, ..., $n - 1$, avem

$$(n-2) \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha^2} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha}, \ (\alpha = 1, \ldots, n-1). \tag{5}$$

Mai departe, din a patra şi a şasea ecuaţie (3) obţinem

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha \partial x_n} &= \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_n^2}, \\ c^2 \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_\alpha^2} &= \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha \partial x_n}, \end{aligned}\right\} (\alpha \text{ fix})$$

deci

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_n^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_\alpha^2}, \ (\alpha \text{ fix})$$

încît a treia ecuaţie (3) devine

$$(n-2) \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_n^2} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial x_n}. \tag{6}$$

Din (5) şi (6) deducem

$$(n-2)\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} = 2\psi + \lambda_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \tag{7}$$

λ_i fiind o funcţie care depinde de $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$, nu însă şi de x_i.

Ţinînd seamă de a patra ecuaţie (3), deducem

$$\lambda_1(x_2, \dots, x_n) = \lambda_2(x_1, x_3, \dots, x_n) = \dots = \lambda_n(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

ceea ce înseamnă că toate funcţiile λ_i sînt egale cu aceeaşi constantă, iar din (7) obţinem

$$(n-2)\,\varphi_i = 2\int \psi\, \mathrm{d}x_i + Cx_i + \mu_i, \quad (C = \text{const.}) \tag{8}$$

funcţia μ_i depinzînd de $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$, nu însă şi de x_i.

În consecinţă, a cincea ecuaţie (3) se scrie

$$2\int \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha}\, \mathrm{d}x_\beta + 2\int \frac{\partial \psi}{\partial x_\beta}\, \mathrm{d}x_\alpha + \frac{\partial \mu_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \mu_\beta}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (\alpha \neq \beta)$$

de unde, derivînd în raport cu x_α,

$$2\int \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\alpha^2}\, \mathrm{d}x_\beta + 2\frac{\partial \psi}{\partial x_\beta} + \frac{\partial^2 \mu_\beta}{\partial x_\alpha^2} = 0, \quad (\alpha \text{ fix} \neq \beta),$$

iar de aici, dacă derivăm în raport cu x_β,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\alpha^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\beta^2} = 0, \quad (\alpha \neq \beta \text{ ficşi}). \tag{9}$$

Din (8) deducem apoi

$$(n-2)\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_n} = 2\int \frac{\partial \psi}{\partial x_n}\, \mathrm{d}x_\alpha + \frac{\partial \mu_\alpha}{\partial x_n},$$

$$(n-2)\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_\alpha} = 2\int \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha}\, \mathrm{d}x_n + \frac{\partial \mu_n}{\partial x_\alpha}$$

iar din acestea, ţinînd seamă de a şasea relaţie (3),

$$2c^2\int \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha}\, \mathrm{d}x_n - 2\int \frac{\partial \psi}{\partial x_n}\, \mathrm{d}x_\alpha + c^2\frac{\partial \mu_n}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \mu_\alpha}{\partial x_n} = 0.$$

Derivînd în raport cu x_n şi apoi — relaţia obţinută — în raport cu x_α, deducem

$$c^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\alpha^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_n^2}, \quad (\alpha \text{ fix}), \tag{10}$$

iar de aici, sumînd în raport cu α,

$$c^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\alpha^2} = (n-1)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_n^2}. \tag{10'}$$

Comparînd pe (10′) cu prima (3), rezultă

$$(n-2)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_n^2}=0,$$

de unde, dacă $n>2$,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_n^2}=0,$$

iar din (10)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\alpha^2}=0,\ (\alpha \text{ fix}),$$

astfel încît, în adevăr, ψ este liniară în raport cu fiecare din variabilele x_i.

În definitiv, *determinarea funcţiei generatoare* φ *revine la integrarea sistemului*

$$\begin{aligned}
&c^2\frac{\partial^2\varphi_\beta}{\partial x_\alpha^2}-\frac{\partial^2\varphi_\beta}{\partial x_n^2}+2c^2\frac{\partial\psi}{\partial x_\beta}=0,\\
&c^2\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x_\alpha^2}-\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x_n^2}-2\frac{\partial\psi}{\partial x_n}=0,\\
&\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n},\ (\alpha \text{ fix}),\\
&\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_\alpha}=0,\ (\alpha\neq\beta),\\
&c^2\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_n}=0,\ (\alpha,\beta=1,\ \ldots,\ n-1)
\end{aligned}\tag{11}$$

ψ *fiind un polinom de gradul* n *în* $x_1,\ \ldots,\ x_n$, *de forma*

$$\begin{aligned}
\psi=&\,ax_1x_2\ldots x_n+b_1x_2x_3\ldots x_n+b_2x_1x_3\ldots x_n+\ldots+b_n\,x_1x_2\ldots x_{n-1}+\\
&+b_{12}x_3x_4\ldots x_n+b_{13}x_2x_4x_5\ldots x_n+\ldots+b_{n-1,n}\,x_1x_2\ldots x_{n-2}+\ldots\\
&\ldots+c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n+d.
\end{aligned}$$

şi determinarea unei soluţii $\chi\,(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ *a ecuaţiei undelor (1), în condiţii date.*

3. Ne propunem acum să determinăm funcţia generatoare în cazurile $n=2$ şi $n=3$.

Dacă $n=2$, din (5) şi (6) rezultă

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}=\frac{\partial\psi}{\partial x_2}=0,$$

deci $\psi=$ const. şi sistemul (3) devine

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2},$$

$$c^2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}.$$

Se poate observa că φ_1 şi φ_2 sînt soluţii ale ecuaţiei (1) $(n = 2)$ (ecuaţia coardei vibrante)[3].

Deducem că funcţia φ are expresia

$$\varphi = Cz + p_1\varphi_1 + p_2\varphi_2 + \chi(x_1, x_2),$$

χ fiind soluţie a ecuaţiei (1) $(n = 2)$.

Să presupunem acum $n = 3$.

În acest caz avem

$$\psi = ax_1x_2x_3 + b_1x_2x_3 + b_2x_3x_1 + b_3x_1x_2 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + d$$

şi punînd $2d + C = b$, (8) se scriu

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= ax_1^2x_2x_3 + 2b_1x_1x_2x_3 + b_2x_1^2x_3 + b_3x_1^2x_2 + \\ &\quad + c_1x_1^2 + 2c_2x_1x_2 + 2c_3x_1x_3 + bx_1 + \mu_1(x_2, x_3),\\ \varphi_2 &= ax_1x_2^2x_3 + b_1x_2^2x_3 + 2b_2x_1x_2x_3 + b_3x_1x_2^2 + \\ &\quad + 2c_1x_1x_2 + c_2x_2^2 + 2c_3x_2x_3 + bx_2 + \mu_2(x_1, x_3),\\ \varphi_3 &= ax_1x_2x_3^2 + b_1x_2x_3^2 + b_2x_1x_3^2 + 2b_3x_1x_2x_3 + \\ &\quad + 2c_1x_1x_3 + 2c_2x_2x_3 + c_3x_3^2 + bx_3 + \mu_3(x_1, x_2).\end{aligned}$$

De asemenea, ultimele două ecuaţii (11) devin

$$\begin{aligned}&ax_1^2x_3 + ax_2^2x_3 + 2b_1x_1x_3 + 2b_2x_2x_3 + b_3x_1^2 + b_3x_2^2 + \\ &\qquad + 2c_1x_2 + 2c_2x_1 + \frac{\partial\mu_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\mu_2}{\partial x_1} = 0,\\ &c^2(ax_2x_3^2 + b_2x_3^2 + 2b_3x_2x_3 + 2c_1x_3) - (ax_1^2x_2 + 2b_1x_1x_2 + \\ &\qquad + b_2x_1^2 + 2c_3x_1) + c^2\frac{\partial\mu_3}{\partial x_1} - \frac{\partial\mu_1}{\partial x_3} = 0,\\ &c^2(ax_1x_3^2 + b_1x_3^2 + 2b_3x_1x_3 + 2c_2x_3) - (ax_1x_2^2 + 2b_2x_1x_2 + \\ &\qquad + b_1x_2^2 + 2c_3x_2) + c^2\frac{\partial\mu_3}{\partial x_2} - \frac{\partial\mu_2}{\partial x_3} = 0.\end{aligned}\tag{12}$$

Dacă acum derivăm a treia relaţie (12) în raport cu x_2 şi apoi integrăm, şi analog în raport cu x_3, şi ţinem seamă de a treia relaţie (12) însăşi, obţinem

$$\begin{aligned}&c^2\frac{\partial\mu_3}{\partial x_2} - (ax_1x_2^2 + b_1x_2^2 + 2b_2x_1x_2 + 2c_3x_2) = \nu_1(x_1),\\ &-\frac{\partial\mu_2}{\partial x_3} + c^2(ax_1x_3^2 + b_1x_3^2 + 2b_3x_1x_3 + 2c_2x_3) = -\nu_1(x_1),\end{aligned}\tag{13}$$

---

[3] Deci φ_1 şi φ_2 sînt *conjugate* în raport cu ecuaţia coardei vibrante.

iar din celelalte două relaţii (12), pe aceeaşi cale,

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial\mu_1}{\partial x_3} + c^2(a x_2 x_3^2 + b_2 x_3^2 + 2b_3 x_2 x_3 + 2c_1 x_3) = \nu_2(x_2),\\
&c^2\frac{\partial\mu_3}{\partial x_1} - (a x_1^2 x_2 + b_2 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + 2c_3 x_1) = -\nu_2(x_2),\\
&\frac{\partial\mu_2}{\partial x_1} + a x_1^2 x_3 + b_3 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_3 + 2c_2 x_1 = -\nu_3(x_3),\\
&\frac{\partial\mu_1}{\partial x_2} + a x_2^2 x_3 + b_3 x_2^2 + 2b_2 x_2 x_3 + 2c_1 x_2 = \nu_3(x_3),
\end{aligned}
\tag{13'}
$$

$\nu_1(x_1)$, $\nu_2(x_2)$, $\nu_3(x_3)$ depinzînd de x_1, x_2, x_3 respectiv.

Din prima şi a patra relaţie (13′) deducem

$$
-\frac{d\nu_2}{dx_2} + a x_2^2 + 2b_2 x_2 = \frac{d\nu_3}{dx_3} - c^2(a x_3^2 + 2b_3 x_3),
$$

astfel încît rezultă

$$
\nu_2 = \frac{a}{3} x_2^3 + b_2 x_2^2 - e x_2 + f,
$$

$$
\nu_3 = c^2\left(\frac{a}{3} x_3^3 + b_3 x_3^2\right) + e x_3 + g,
$$

$$
(e,\ f,\ g \text{ const.}).
$$

În mod analog, din (13) şi celelalte relaţii (13′) se obţin relatiile

$$
\nu_3 = -c^2\left(\frac{a}{3} x_3^3 + b_3 x_3^2\right) - h x_3 + k,
$$

$$
\nu_1 = -\frac{a}{3} x_1^3 - b_1 x_1^2 + h x_1 + l,
$$

$$
\nu_1 = \frac{a}{3} x_1^3 + b_1 x_1^2 - r x_1 + s,
$$

$$
\nu_2 = -\frac{a}{3} x_2^3 - b_2 x_2^2 + r x_2 + t,
$$

$$
(h,\ k,\ l,\ r,\ s,\ t = \text{const.}).
$$

Ţinînd seamă de expresiile obţinute pentru ν_1, ν_2, ν_3, rezultă

$$
a = b_1 = b_2 = b_3 = e = h = r = 0,
$$

$$
s = l,\ t = f,\ g = k,
$$

încît ν_1, ν_2, ν_3 sînt constante.

În consecință, (13) și (13′) devin

$$\frac{\partial\mu_2}{\partial x_3} - 2c^2e_2x_3 = \nu_1, \qquad e^2\frac{\partial\mu_3}{\partial x_2} - 2c_3x_2 = \nu_1,$$

$$c^2\frac{\partial\mu_3}{\partial x_1} - 2c_3x_1 = -\nu_2. \qquad \frac{\partial\mu_1}{\partial x_3} - 2c^2c_1x_3 = -\nu_2,$$

$$\frac{\partial\mu_1}{\partial x_2} + 2c_1x_2 = \nu_3, \qquad \frac{\partial\mu_2}{\partial x_3} + 2c_2x_1 = -\nu_3.$$

Deducem

$$\mu_1 - c^2c_1x_3^2 = -\nu_2x_3 + \rho(x_2),$$

$$\mu_1 + c_1x_2^2 = \nu_3x_2 + \sigma(x_3),$$

$\rho(x_2)$ și $\sigma(x_3)$ depinzînd de x_2 și x_3 respectiv, iar de aici

$$\mu_1 = -c_1(x_2^2 - c^2x_3^2) + \nu_3x_2 - \nu_2x_3 + \alpha_1,$$

și în mod analog

$$\mu_2 = -c_2(x_1^2 - c^2x_3^2) + \nu_1x_3 - \nu_3x_1 + \alpha_2,$$

$$-c^2\mu_3 = -c_3(x_1^2 + x_2^2) + \nu_2x_1 - \nu_1x_2 + \alpha_3,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ fiind constante.

În definitiv, schimbînd notațiile parametrilor (în afara lui b), obținem

$$\psi = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a,$$

$$\varphi_1 = a_1(x_1^2 - x_2^2 + c^2x_3^2) + 2x_1(a_2x_2 + a_3x_3) + bx_1 + b_3x_2 - b_2x_3 - c_1,$$

$$\varphi_2 = a_2(x_2^2 - x_1^2 + c^2x_3^2) + 2x_2(a_3x_3 + a_1x_1) + bx_2 + b_1x_3 - b_3x_1 - c_2,$$

$$\varphi_3 = a_3\left[x_3^2 + \frac{1}{c^2}(x_1^2 + x_2^2)\right] + 2x_3(a_1x_1 + a_2x_2) + bx_3 - \frac{1}{c^2}(b_2x_1 - b_1x_3) - c_3,$$

ceea ce ne permite să deducem expresia finală a funcției φ, dată de formula

$$\varphi = \varphi_1p_1 + \varphi_2p_2 + \varphi_3p_3 + \psi z + \chi(x_1, x_2, x_3),$$

χ fiind o soluție a ecuației (1) ($n = 3$).

4. Funcția generatoare φ fiind determinată, deducem că funcțiile ξ_i, ζ, π_i, $\pi_{\alpha i}$ ($i = 1, 2, 3$; $\alpha = 1, 2$) sînt date de formulele

$$\xi_1 = a_1(-x_1^2 + x_2^2 - c^2x_3^2) - 2a_2x_1x_2 - 2a_3x_1x_3 - bx_1 + b_2x_3 - b_3x_2 + c_1,$$

$$\xi_2 = -2a_1x_1x_2 + a_2(x_1^2 - x_2^2 - c^2x_3^2) - 2a_3x_2x_3 - bx_2 - b_1x_3 + b_3x_1 + c_2,$$

$$\xi_3 = -2a_1x_1x_3 - 2a_2x_2x_3 - a_3\left[\frac{1}{c^2}(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2\right] - bx_3 - \frac{b_1}{c^2}x_2 + \frac{b_2}{c^2}x_1 + c_3,$$

$$\zeta = az + a_1x_1z + a_2x_2z + a_3x_3z + \chi,$$

$$\pi_1 = ap_1 + a_1(3x_1p_1 + 2x_2p_2 + 2x_3p_3 + z) + a_2(3x_2p_1 - 2x_1p_2) +$$
$$+ a_3\left(\frac{2}{c^2}x_1p_3 + 3x_3p_1\right) + bp_1 - \frac{b_2}{c^2}p_3 - b_3p_2 + \frac{\partial\chi}{\partial x_1},$$

$$\pi_2 = ap_2 + a_1(3x_1p_2 - 2x_2p_1) + a_2(2x_1p_1 + 3x_2p_2 + 2x_3p_3 + z) +$$
$$+ a_3\left(\frac{2}{c^2}x_2p_3 + 3x_3p_2\right) + bp_2 + \frac{b_1}{c^2}p_3 + b_3p_1 + \frac{\partial\chi}{\partial x_2},$$

$$\pi_3 = ap_3 + a_1(2c^2x_3p_1 + 3x_1p_3) + a_2(2c^2x_3p_2 + 3x_2p_3) +$$
$$+ a_3(2x_1p_1 + 2x_2p_2 + 3x_3p_3 + z) + bp_3 + b_1p_2 - b_2p_1 + \frac{\partial\chi}{\partial x_3},$$

$$\pi_{11} = ap_{11} + a_1(4p_1 + 5p_{11}x_1 + 4p_{12}x_2 + 4p_{13}x_3) + a_2(-2p_2 + 5p_{11}x_2 - 4p_{12}x_1) +$$
$$+ a_3\left(\frac{2}{c^2}p_3 + \frac{4}{c^2}p_{13}x_1 + 5p_{11}x_3\right) + 2bp_{11} - \frac{2}{c^2}b_2p_{13} -$$
$$- 2b_3p_{12} + \frac{\partial^2\chi}{\partial x_1^2},$$

$$\pi_{22} = ap_{22} + a_1(-2p_1 + 5p_{22}x_1 - 4p_{12}x_2) + a_2(4p_2 + 4p_{12}x_1 + 5p_{22}x_2 + 4p_{23}x_3) +$$
$$+ a_3\left(\frac{2}{c^2}p_3 + \frac{4}{c^2}p_{23}x_2 + 5p_{22}x_3\right) + 2bp_{22} + \frac{2}{c^2}b_1p_{23} + 2b_3p_{12} + \frac{\partial^2\chi}{\partial x_2^2},$$

$$\pi_{12} = ap_{12} + a_1[3p_2 + 5p_{12}x_1 + 2(p_{22} - p_{11})x_2 + 2p_{23}x_3] +$$
$$+ a_2[3p_1 + 2(p_{11} - p_{22})x_1 + 5p_{12}x_2 + 2p_{13}x_3] +$$
$$+ a_3\left(\frac{2}{c^2}p_{23}x_1 + \frac{2}{c^2}p_{13}x_2 + 5p_{12}x_3\right) + 2bp_{12} + \frac{b_1}{c^2}p_{13} -$$
$$- \frac{b_2}{c_2}p_{23} + b_3(p_{11} - p_{22}) + \frac{\partial^2\chi}{\partial x_1\partial x_2},$$

$$\pi_{13} = ap_{13} + a_1[3p_3 + 5p_{13}x_1 + 2p_{23}x_2 + 2c^2(2p_{11} + p_{22})x_3] +$$
$$+ a_2(-2p_{23}x_1 + 5p_{13}x_2 + 2c^2p_{12}x_3) +$$
$$+ a_3[3p_1 + 2(2p_{11} + p_{22})x_1 + 2p_{12}x_2 + 5p_{13}x_3] +$$
$$+ 2bp_{13}x_3 + b_1p_{12} - b_2(2p_{11} + p_{22}) - b_3p_{23} + \frac{\partial^2\chi}{\partial x_1\partial x_3},$$

$$\pi_{23} = ap_{23} + a_1(5p_{23}x_1 - 2p_{13}x_2 + 2c^2p_{12}x_3) +$$
$$+ a_2[3p_3 + 2p_{13}x_1 + 5p_{23}x_2 + 2c^2(p_{11} + 2p_{22})x_3] +$$
$$+ a_3[3p_2 + 2p_{12}x_1 + 2(p_{11} + 2p_{22})x_2 + 5p_{23}x_3] +$$
$$+ 2bp_{23} + b_1(p_{11} + 2p_{22}) - b_2p_{12} + b_3p_{13} + \frac{\partial^2\chi}{\partial x_2\partial x_3}.$$

Să presupunem acum $\chi \equiv 0$. În acest caz, deducem că operatorii transformărilor infinitezimale ale grupului de mişcări al ecuaţiei (1) ($n = 3$), care este un grup cu 11 parametri, sînt daţi de formulele

$$X = z \frac{\partial}{\partial z} + p_i \frac{\partial}{\partial p_i} + p_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial p_{\alpha i}}, \quad (i = 1,\ 2,\ 3\,;\ \alpha = 1,\ 2,;\ \alpha \leqslant i)$$

$$X_1 = (-\, x_1^2 + x_2^2 - c^2 x_3^2) \frac{\partial}{\partial x_1} - 2x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - 2x_1 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_1 z \frac{\partial}{\partial z} +$$

$$+ (3x_1 p_1 + 2x_2 p_2 + 2x_3 p_3 + z) \frac{\partial}{\partial p_1} + (3x_1 p_2 - 2x_2 p_1) \frac{\partial}{\partial p_2} +$$

$$+ (3x_1 p_3 + 2c^2 x_3 p_1) \frac{\partial}{\partial p_3} + (4p_1 + 5p_{11} x_1 + 4p_{12} x_2 + 4p_{13} x_3) \frac{\partial}{\partial p_{11}} +$$

$$+ (-\, 2p_1 + 5p_{22} x_1 - 4p_{12} x_2) \frac{\partial}{\partial p_{22}} + [3p_2 + 5p_{12} x_1 + 2\,(p_{22} - p_{11})\, x_2 +$$

$$+ 2p_{23} x_3] \frac{\partial}{\partial p_{12}} + [3p_3 + 5p_{13} x_1 + 2p_{23} x_2 + 2c^2 (2p_{11} + p_{22})\, x_3] \frac{\partial}{\partial p_{13}} +$$

$$+ (5p_{23} x_1 - 2p_{13} x_2 + 2c^2 p_{12} x_3) \frac{\partial}{\partial p_{23}},$$

$$X_2 = -\, 2x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1^2 - x_2^2 - c^2 x_3^2) \frac{\partial}{\partial x_2} - 2x_2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_2 z \frac{\partial}{\partial z} +$$

$$+ (3x_2 p_1 - 2x_1 p_2) \frac{\partial}{\partial p_1} + (2x_1 p_1 + 3x_2 p_2 + 2x_3 p_3 + z) \frac{\partial}{\partial p_2} +$$

$$+ (3x_2 p_3 + 2c^2 x_3 p_2) \frac{\partial}{\partial p_3} + (-\, 2p_2 - 4p_{12} x_1 + 5p_{11} x_2) \frac{\partial}{\partial p_{11}} +$$

$$+ (4p_2 + 4p_{12} x_1 + 5p_{22} x_2 + 4p_{23} x_3) \frac{\partial}{\partial p_{22}} + [3p_1 + 2\,(p_{11} - p_{22})\, x_1 +$$

$$+ 5p_{12} x_2 + 2p_{13} x_3] \frac{\partial}{\partial p_{12}} + (-2p_{23} x_1 + 5p_{13} x_2 + 2c^2 p_{12} x_3) \frac{\partial}{\partial p_{13}} +$$

$$+ [3p_3 + 2p_{13} x_1 + 5p_{23} x_2 + 2c^2\,(p_{11} + 2p_{22})\, x_3] \frac{\partial}{\partial p_{23}},$$

$$X_3 = -\, 2x_1 x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - 2x_2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - \left[\frac{1}{c^2} (x_1^2 + x_2^2) + x_3^2\right] \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 z \frac{\partial}{\partial z} +$$

$$+ \left(\frac{2}{c^2} x_1 p_3 + 3x_3 p_1\right) \frac{\partial}{\partial p_1} + \left(\frac{2}{c^2} x_2 p_3 + 3x_3 p_2\right) \frac{\partial}{\partial p_2} + (2x_1 p_1 + 2x_2 p_2 +$$

$$+ 3x_3 p_3 + z) \frac{\partial}{\partial p_3} + \left(\frac{2}{c^2} p_3 + \frac{4}{c^2} p_{13} x_1 + 5p_{13} x_3\right) \frac{\partial}{\partial p_{11}} + \left(\frac{2}{c^2} p_3 +\right.$$

$$+ \frac{4}{c^2} p_{23}x_2 + 5p_{22}\, x_3\Big) \frac{\partial}{\partial p_{22}} + \Big(\frac{2}{c^2} p_{23}x_1 + \frac{2}{c^2} p_{13}x_2 + 5p_{12}x_3\Big) \frac{\partial}{\partial p_{12}} +$$

$$+ [3p_1 + 2(2p_{11} + p_{22})\, x_1 + 2p_{12}x_2 + 5p_{13}x_3] \frac{\partial}{\partial p_{13}} +$$

$$+ [3p_2 + 2p_{12}x_1 + 2\,(p_{11} + 2p_{22})\, x_2 + 5p_{23}x_3 \frac{\partial}{\partial p_{23}},$$

$$Y = - x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial p_i} + 2p_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial p_{\alpha i}},\ (\alpha \leqslant i)$$

$$Y_1 = - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{1}{c^2} x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{1}{c^2} p_3 \frac{\partial}{\partial p_2} + p_2 \frac{\partial}{\partial p_3} +$$

$$+ \frac{2}{c^2} p_{23} \frac{\partial}{\partial p_{22}} + \frac{1}{c^2} p_{13} \frac{\partial}{\partial p_{12}} + p_{12} \frac{\partial}{\partial p_{13}} + (p_{11} + 2p_{22}) \frac{\partial}{\partial p_{23}},$$

$$Y_2 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{c^2} x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{1}{c^2} p_3 \frac{\partial}{\partial p_1} - p_1 \frac{\partial}{\partial p_3} -$$

$$- \frac{2}{c^2} p_{13} \frac{\partial}{\partial p_{11}} - \frac{1}{c^2} p_{23} \frac{\partial}{\partial p_{12}} - (2p_{11} + p_{22}) \frac{\partial}{\partial p_{13}} - p_{12} \frac{\partial}{\partial p_{23}},$$

$$Y_3 = - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - p_2 \frac{\partial}{\partial p_1} + p_1 \frac{\partial}{\partial p_2} -$$

$$- 2p_{12} \frac{\partial}{\partial p_{11}} + 2p_{12} \frac{\partial}{\partial p_{22}} + (p_{11} - p_{22}) \frac{\partial}{\partial p_{12}} - p_{23} \frac{\partial}{\partial p_{13}} + p_{13} \frac{\partial}{\partial p_{23}},$$

$$Z_i = \frac{\partial}{\partial x_i},\ (i = 1,\ 2,\ 3).$$

În consecinţă, se găseşte că ecuaţiile de structură ale grupului G_{11} de mişcări al ecuaţiei (1) $(n = 3)$ sînt

$$(XX_i) = 0,\ (XY) = 0,\ (XY_i) = 0,\ (XZ_i) = 0,$$

$$(X_iX_j) = 0,\ (X_iY) = X_i,$$

$$(X_1Y_1) = 0,\ (X_1Y_2) = - X_3,\ (X_1Y_3) = X_2,$$

$$(X_2Y_1) = X_3,\ (X_2Y_2) = 0,\ (X_2Y_3) = - X_1,$$

$$(X_3Y_1) = \frac{1}{c^2} X_2,\ (X_3Y_2) = - \frac{1}{c^2} X_1,\ (X_3Y_3) = 0,$$

$$(X_1Z_1) = - X - 2Y,\ (X_1Z_2) = 2Y_3,\ (X_1Z_3) = 2c^2Y_2,$$

$$(X_2Z_1) - 2Y_3,\ (X_2Z_2) = - X - 2Y,\ (X_2Z_3) = - 2c^2Y_1,$$

$$(X_3Z_1) = 2Y_2,\ (X_3Z_2) = - 2Y_1,\ (X_3Z_3) = - X - 2Y,$$

$$(YY_i) = 0,\ (YZ_i) = 0,$$

$$(Y_1Y_2) = \frac{1}{c^2}Y_3,\ (Y_1Y_3) = Y_2,\ (Y_2Y_3) = -Y_1,$$

$$(Y_1Z_1) = 0,\ (Y_1Z_2) = \frac{1}{c^2}Z_3,\ (Y_1Z_3) = Z_2,$$

$$(Y_2Z_1) = -\frac{1}{c^2}Z_3,\ (Y_2Z_2) = 0,\ (Y_2Z_3) = -Z_1,$$

$$(Y_3Z_1) = -Z_2,\ (Y_3Z_2) = Z_1,\ (Y_3Z_3) = 0,$$

$$(Z_iZ_j) = 0,\ (i, j = 1, 2, 3).$$

Observații. Grupul G_{11} obținut este neintegrabil, fără a fi perfect, deoarece primul său grup derivat este un grup cu 10 parametri, perfect. Observăm de asemenea că X este o transformare excepțională (distinsă), fiind permutabilă cu toate celelalte transformări infinitezimale ale grupului.

Dacă $\chi \not\equiv 0$, se impune considerarea cazului cînd χ este un polinom de grad dat, coeficienții independenți ai acestui polinom fiind alți parametri ai grupului de mișcări, în afara celor 11 corespunzători cazului $\chi \equiv 0$.

Putem de asemenea observa că, pentru ecuația Laplace $p_{ii} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ [2], în cazul cînd funcția χ (care este o funcție armonică de x_1, x_2, x_3) — de care depinde funcția generatoare φ — este identic nulă, operatorii transformărilor infinitezimale și ecuațiile de structură ale grupului de mișcări G_{11} se deduc din rezultatele obținute mai sus pentru ecuația (1) $(n = 3)$, punînd -1 în loc de c^2.

Primită la redacție la 21 iunie 1968

Institutul de Construcții București

SUR LES GROUPES DE MOUVEMENTS DE CERTAINES EQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE (II)

RÉSUMÉ

En utilisant certains résultats obtenus dans un autre travail [1], l'A. se propose le problème de la détermination du groupe de mouvements de l'équation des ondes $c^2p_{\alpha\alpha} - p_{nn} = 0$, $\left(p_{ij} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j};\ i = 1, \ldots, n;\ \alpha = 1, \ldots, n-1\right)$.

Il obtient un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre, dont la solution — indépendante de $p_{\alpha i}$ — est *la fonction génératrice* φ du grupe. Effectivement, il détermine φ dans les cas $n = 2$ et $n = 3$; dans le deuxième cas, où φ dépend de onze paramètres et d'une solution arbitraire χ de l'équation des ondes $c^2(p_{11} + p_{22}) - p_{33} = 0$, en supposant $\chi \equiv 0$ l'A. détermine la structure du groupe de mouvements G_{11}.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Dobrescu, *Asupra grupurilor de mişcări ale ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul al doilea, în n variabile*, Studii şi Cercetări Matematice, **XIV**, 4 (1963).
2. A. Dobrescu, *Asupra grupurilor de mişcări ale unor ecuaţii ale fizicii matematice*, Analele Universităţii Bucureşti, **XV**, *1* (1966).
3. G. Vrănceanu, *Leçons de géométrie différentielle*, vol. II, Edit. Academiei, Bucureşti, 1957, pp. 291—294.

DESPRE CEA MAI BUNĂ APROXIMARE ÎN SPAȚII VECTORIALE NORMATE PRIN ELEMENTE DIN CONURI CONVEXE

DE

G. GODINI

Se dau unele generalizări ale unor rezultate din [2], [3] despre cea mai bună aproximare în spații vectoriale normate prin elemente din subspații liniare G, în cazul cînd F este un con convex.

Primul pas natural în trecerea de la cea mai bună aproximare în spații vectoriale normate E prin elemente din subspații vectoriale la cea mai bună aproximare prin elemente din mulțimi neliniare $G \subset E$ este acela cînd se ia drept G un con convex. Se pune în mod natural problema extinderii rezultatelor despre cea mai bună aproximare prin elemente din subspații vectoriale G la cazul în care G este un con convex. După cum s-a arătat în [7] Anexa I, o serie de rezultate rămîn valabile cu aceeași demonstrație pentru cazul cînd G este o mulțime convexă din E. Rămîn însă o serie de rezultate care nu au fost încă extinse. În cele ce urmează vom da unele generalizări ale unor rezultate din [2], [3] pentru cazul cînd G este un con convex.

Fie E un spațiu vectorial normat și G un con convex al lui E cu vîrful în origină. Folosind terminologia și notațiile din [1] vom nota prin $\mathfrak{L}_G(x)$ mulțimea tuturor elementelor de cea mai bună aproximație ale lui x prin elementele lui G, adică mulțimea

$$\{g_0 \in G \mid \|x - g_0\| = \inf_{g \in G} \|x - g\|\}.$$

În [4] G. S. Rubinstein a dat următoarea extensiune a teoremei 1.1 [1] de caracterizare a elementelor de cea mai bună aproximație, prin elemente dintr-un con convex.

TEOREMA A [4]. *Fie* E *un spațiu vectorial normat,* G *un con convex cu vîrful în origină,* $x \in E \setminus \overline{G}$ *și* $g_0 \in G$.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 6, P. 931–936, BUCUREȘTI, 1969

Avem $g_0 \in \mathfrak{P}_G(x)$ *dacă și numai dacă există un* $f \in E^*$ *satisfăcînd*

$$\|f\| = 1 \tag{1}$$

$$\operatorname{Re} f(g) \leqslant 0 \qquad (g \in G) \tag{2}$$

$$\operatorname{Re} f(g_0) = 0 \tag{3}$$

$$\operatorname{Re} f(x - g_0) = \|x - g_0\| \tag{4}$$

Vom obține acum, din teorema A, o serie de rezultate care vor fi utile mai tîrziu pentru a da o altă caracterizare a elementelor de cea mai bună aproximare prin elementele unui con convex.

Pentru un con convex G cu vîrful în origină al unui spațiu vectorial normat E vom nota prin G° mulțimea :

$$G^\circ = \{f \in E^* \mid \operatorname{Re} f(g) \leqslant 0 \text{ pentru toate } g \in G\}. \tag{5}$$

Dacă $x \in E \setminus \overline{G}$ și $g_0 \in G$, vom nota prin $G^\circ(x, g_0)$ mulțimea

$$G^\circ(x, g_0) = \{f \in E^* \mid \operatorname{Re} f(G) \leqslant 0, \operatorname{Re} f(g_0) = 0 \text{ și } \operatorname{Re} f(x) > 0\}. \tag{6}$$

Dacă Γ este un con convex cu vîrful în origină al spațiului adjunct E^*, vom nota prin Γ_0 mulțimea :

$$\Gamma_0 = \{x \in E \mid \operatorname{Re} \gamma(x) \leqslant 0 \text{ pentru toate } \gamma \in \Gamma\} \tag{7}$$

și prin $\|x\|_\Gamma$ numerele

$$\|x\|_\Gamma = \sup_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \|\gamma\| \leqslant 1}} (\operatorname{Re} \gamma(x)). \tag{8}$$

Să observăm că G° și $G^\circ(x, g_0)$ sînt conuri convexe cu vîrful în origină din E^* și Γ_0 este un con convex cu vîrful în origină în E. De asemenea avem evident $0 \leqslant \|x\|_\Gamma \leqslant \|x\|$. Dacă G și Γ sînt subspații liniare ale lui E respectiv E^*, atunci G° este mulțimea :

$$G^\perp = \{f \in E^* \mid f(g) = 0 \text{ pentru toate } g \in G\}$$

și Γ_0 este mulțimea

$$\Gamma_\perp = \{x \in E \mid \gamma(x) = 0 \text{ pentru toate } \gamma \in \Gamma\}.$$

De asemenea în acest caz avem

$$\|x\|_\Gamma = \sup_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \|\gamma\| \leqslant 1}} |\gamma(x)|$$

TEOREMA 1. *Fie* E *un spațiu vectorial normat*, G *un con convex al lui* E *cu vîrful în origină*, $x \in E \setminus \overline{G}$ *și* $g_0 \in G$. *Avem* $g_0 \in \mathfrak{P}_G(x)$ *dacă și numai dacă*

$$\|x - g_0\| = \|x\|_{G^0} = \|x - g_0\|_{G^0(x,\, g^0)}. \tag{9}$$

Demonstrație. Vom demonstra numai prima egalitate, cealaltă demonstrîndu-se asemănător. Să presupunem că $g_0 \in \mathfrak{P}_G(x)$. Atunci există, în virtutea teoremei A, un $f \in E^*$ cu proprietățile (1) – (4) și deci $f \in G^{\circ}$. Avem

$$\|x - g_0\| = \operatorname{Re} f(x - g_0) = \operatorname{Re} f(x) \leqslant \sup_{\substack{f' \in G^0 \\ \|f'\| \leqslant 1}} \operatorname{Re} f'(x) = \|x\|_{G^0}.$$

Pentru cealaltă inegalitate să observăm că avem

$$\|x - g_0\| \geqslant \|x - g_0\|_{G^0} = \sup_{\substack{f \in G^0 \\ \|f\| \leqslant 1}} \operatorname{Re} f(x - g_0) \geqslant \sup_{\substack{f \in G^0 \\ \|f\| \leqslant 1}} \operatorname{Re} f(x) = \|x\|_{G^0}$$

deci prima parte din (9).

Reciproc, să presupunem că $\|x - g_0\| = \|x\|_{G^0}$, și fie $g \in G$ arbitrar. Avem atunci

$$\|x - g_0\| = \|x\|_{G^0} = \sup_{\substack{f \in G^0 \\ \|f\| \leqslant 1}} \operatorname{Re} f(x) \leqslant \sup_{\substack{f \in G^0 \\ \|f\| \leqslant 1}} \operatorname{Re} f(x - g_0) \leqslant \|x - g\|$$

deci $g_0 \in \mathfrak{P}_G(x)$.

Observație. Pentru ca $g_0 \in \mathfrak{P}_G(x)$, este suficient ca

$$\|x - g_0\| \leqslant \|x\|_{G^0}. \tag{9'}$$

În ceea ce privește problema caracterizării simultane a unei mulțimi de elemente de cea mai bună aproximație avem următorul rezultat care este o consecință imediată a teoremei A.

COROLARUL 1. *Fie E un spațiu vectorial normat, G un con convex al lui E cu vîrful în origină,* $x \in E \setminus \overline{G}$ *și* $M \subset G$. *Avem* $M \subset \mathfrak{P}_G(x)$ *dacă și numai dacă există un* $f \in E^*$ *satisfăcînd (1), (2) și*

$$\operatorname{Re} f(g_0) = 0 \quad \textit{pentru } g_0 \in M \tag{3'}$$

$$\operatorname{Re} f(x - g_0) = \|x - g_0\| \quad \textit{pentru } g_0 \in M. \tag{4'}$$

O consecință imediată a teoremei A este și următorul rezultat :

COROLARUL 2. *Fie E un spațiu vectorial normat, G un con convex din E cu vîrful în origină,* $x \in E \setminus \overline{G}$ *și* $g_0 \in G$ *astfel încît* $x - g_0$ *să fie normal*[1]). *Avem* $g_0 \in \mathfrak{P}_G(x)$ *dacă și numai dacă*

$$\operatorname{Re} f_{x-g_0}(g_0) = 0$$

$$\operatorname{Re} f_{x-g_0}(g) \leqslant 0, \quad (g \in G).$$

Vom introduce acum o definiție care este o generalizare a proprietății $(\mathfrak{E}_*)$ introdusă în [2] care ne va permite să dăm o caracterizare a conurilor convexe proximinale[2]).

---

[1]) Elementul $x' \in E$ se numește element normal (sau punct de netezime) al sferei $S(0, \|x'\|)$ dacă există un singur $f \in E^*$ cu proprietățile $\|f\| = 1$, $f(x') = \|x'\|$ și în acest caz notăm cu $f_{x'}$ funcționala respectivă.

[2]) adică a conurilor convexe care au proprietatea ca pentru orice $x \in E$, $\mathfrak{P}_G(x)$ este nevidă.

DEFINIŢIE. Fie Γ un con convex din E cu vîrful în origină. Spunem că Γ are proprietatea $(\mathcal{S}_*)$ (respectivă $\mathfrak{A}_*$) dacă pentru orice $x \in E$ există un (cel mult un) $y \in E$ astfel încît

$$\text{Re}\,\gamma(y) \geqslant \text{Re}\,\gamma(x) \text{ pentru } y \in \Gamma \tag{10}$$

$$\|y\| \leqslant \|x\|_\Gamma . \tag{11}$$

TEOREMA 2. *Fie E un spaţiu vectorial normat şi G un con convex cu vîrful în origină din E. Atunci G este proximinal dacă şi numai dacă G este închis şi G° are proprietatea $(\mathcal{S}_*)$.*

Demonstraţie. Să presupunem întîi că G este proximinal. Atunci G este închis şi pentru a arăta că G° are proprietatea $(\mathcal{S}_*)$, să alegem un $x \in E$ arbitrar. Prin ipoteză există $g_0 \in \mathfrak{P}_G(x)$. Prin teorema 1 avem $\|x\|_{G^0} = \|x - g_0\|$. Să notăm cu $y = x - g_0$. Atunci pentru $f \in G^\circ$ avem :

$$\text{Re}\,f(y) = \text{Re}\,f(x) - \text{Re}\,f(g_0) \geqslant \text{Re}\,f(x)$$

şi

$$\|y\| = \|x\|_{G^0}$$

adică G° are proprietatea $(\mathcal{S}_*)$.

Reciproc, să presupunem că G este închis şi G° are proprietatea $(\mathcal{S}_*)$. Fie $x \in \setminus G$ arbitrar. Există atunci $y \in E$ cu proprietăţile (10), (11). Fie $g_0 = x - y$. Atunci $g_0 \in (G^0)_0 = \overline{G} = G$ şi cum $\|x - g_0\| = \|y\| \leqslant \|x\|_{G_0}$, observaţia care urmează teoremei 1 ne spune că $g_0 \in \mathfrak{P}_G(x)$, adică G este proximinal.

COROLARUL 3. *Dacă G este un con convex din E cu vîrful în origină şi pentru orice $\Phi \in E^{**}$ există un $y \in E$ astfel încît*

$$\text{Re}\,f(y) \geqslant \text{Re}\,\Phi(f) \quad \textit{pentru } f \in G^\circ \tag{12}$$

$$\|y\| < \sup_{\substack{f \in G^0 \\ \|f\| \leqslant 1}} \text{Re}\,\Phi(f), \tag{13}$$

atunci G este proximinal.

Demonstraţie. Fie $x \in E$ arbitrar şi fie $\Phi = Q\,x \in E^{**}$, unde Q este aplicaţia canonică de scufundare a lui E în E^{**}. Prin ipoteză există $y \in E$ cu proprietăţile (12), (13) deci

$$\text{Re}\,f(y) \geqslant \text{Re}\,\Phi(f) = \text{Re}\,f(x) \text{ pentru } f \in G^\circ$$

şi

$$\|y\| \leqslant \sup_{\substack{f \in G^0 \\ \|f\| \leqslant 1}} \text{Re}\,\Phi(f) = \sup_{\substack{f \in G^0 \\ \|f\| \leqslant 1}} \text{Re}\,f(x) = \|x\|_{G^0}$$

adică G° are proprietatea $(\mathcal{S}_*)$. Aplicînd teorema 2 rezultă G proximinal.

TEOREMA 3. *Fie* E *un spaţiu vectorial normat şi* G *un con convex închis al lui* E, *cu vîrful în origină. Atunci* G *este semicebîşevian*[3]) *dacă şi numai dacă* G° *are proprietatea* $(\mathcal{U}_*)$.

Demonstraţie. Să presupunem că G este semicebîşevian şi că există $x \in E$ şi $y_i \in E$ $(i = 1, 2)$, $y_1 \neq y_2$ cu proprietăţile (10), (11). Notînd $g_i = x - y_i$ avem $g_1 \neq g_2$ şi (10) ne arată că $g_i \in (G^0)_0 = \overline{G} = G$ iar din (11) aplicînd teorema 1, obţinem $g_i \in \mathfrak{P}_G(x)$, adică G nu este semicebîşevian.

Reciproc, dacă G nu ar fi semicebîşevian, ar exista $x \in E$ şi $g_i \in \mathfrak{P}_G(x)$, $g_1 \neq g_2$. Să notăm cu $y_i = x - g_i$; atunci $y_1 \neq y_2$ şi pentru $f \in G^\circ$ avem $\operatorname{Re} f(y_i) = \operatorname{Re} f(x) - \operatorname{Re} f(g_i) \geqslant \operatorname{Re} f(x)$, adică (x, y_i) satisfac (10) şi aplicînd din nou teorema 1, avem (11). Deci G° nu are proprietatea $(\mathcal{U}_*)$. Să observăm că pentru partea de suficienţă nu avem nevoie ca G să fie închis. Prin urmare dacă G° are proprietatea $(\mathcal{U}_*)$, atunci G este semicebîşevian.

COROLARUL 4. *Dacă* G *este un con convex din* E *cu vîrful în origină şi pentru orice* $\Phi \in E^{**}$ *există cel mult un* $y \in E$ *cu proprietăţile* (*12*) *şi* (*13*), *atunci* G *este semicebîşevian.*

Demonstraţia este asemănătoare cu cea a corolarului 2.

COROLARUL 5. *Dacă* G *este un con convex închis cu vîrful în origină, atunci* G *este cebîşevian*[4]), *dacă şi numai dacă pentru orice* $x \in E$ *există exact un element* $y \in E$ *cu proprietăţile* (*10*), (*11*).

Demonstraţia este o consecinţă imediată a teoremelor 2 şi 3.

DEFINIŢIE. *Vom spune că un con convex* G *cu vîrful în origine are proprietatea* (U) *dacă pentru orice* $f \in E^*$ *nu există* $f_1, f_2 \in E^*, f_1 \neq f_2$ cu proprietăţile

$$\operatorname{Re} f_i(g) \geqslant \operatorname{Re} f(g) \text{ pentru } g \in G \tag{14}$$

$$\|f_i\| \leqslant \sup_{\substack{g \in G \\ \|g\| \leqslant 1}} \operatorname{Re} f(g). \tag{15}$$

Observaţie. Dacă G este un subspaţiu liniar al spaţiului liniar normat E, atunci definiţia de mai sus coincide cu cea a lui R. R. Phelps [6] care spune că un subspaţiu vectorial G are proprietatea (U) dacă orice funcţională $\varphi \in G^*$ are o singură prelungire cu aceeaşi normă la întreg spaţiul E.

COROLARUL 6. *Fie* E *un spaţiu vectorial normat şi* G *un con convex din* E, *cu vîrful în origină.*

a) *Dacă* G° *are proprietatea* (U), *atunci* G *este semicebîşevian.*

b) *Dacă* G *este proximinal şi* G° *are proprietatea* (U), *atunci* G *este cebişevian.*

---

[3]) adică pentru orice $x \in E$, mulţimea $\mathfrak{P}_G(x)$ conţine cel mult un element.

[4]) adică pentru orice $x \in E$, $\mathfrak{P}_G(x)$ este formată din exact un element.

Demonstrație. a) Vom arăta că dacă G° are proprietatea (U), atunci G° are proprietatea $(\mathcal{U}_*)$ și din observația făcută la sfîrșitul demonstrației teoremei 3 rezultă G semicebîșevian. Să presupunem deci că G° nu are proprietatea $(\mathcal{U}_*)$, deci există $x \in E$, $y_i \in E$, $y_1 \neq y_2$ cu proprietățile (10), (11). Atunci pentru funcționala liniară continuă $Qx \in E^{**}$ există Qy_i, $Qy_1 \neq Qy_2$ cu proprietățile (14), (15) cu G° în loc de G. Deci G° nu are proprietatea (U), ceea ce contrazice ipoteza.

b) Este o consecință imediată a lui a).

Dacă G este un con convex din E cu vîrful în x_0, atunci ținînd seama că pentru $x \in E$, $g_0 \in G$ avem $g_0 \in \mathfrak{P}_G(x)$ dacă și numai dacă $g_0 - x_0 \in \mathfrak{P}_{G-x_0}(x - x_0)$ și cum $G - x_0$ este un con convex cu vîrful în origină, îi putem deci aplica rezultatele de mai sus. Astfel teorema A devine :

TEOREMA A′. *Dacă G este un con convex cu vîrful în x_0 din spațiul vectorial normat E, $x \in E$, $g_0 \in G$, atunci avem $g_0 \in \mathfrak{P}_G(x)$ dacă și numai dacă există $f \in E^*$ cu proprietățile (1), (4) și*

$$\operatorname{Re} f(g) \leqslant \operatorname{Re} f(x_0) \quad \textit{pentru } g \in G \tag{2'}$$

$$\operatorname{Re} f(g_0) = \operatorname{Re} f(x_0) \tag{3'}$$

Asemănător se pot extinde și celelalte rezultate.

Primită la redacție la 9 decembrie 1968

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România, Calea
Griviței nr. 21, București 12.

BEST APPROXIMATION IN NORMED LINEAR SPACES BY ELEMENTS OF CONVEX CONES

ABSTRACT

This paper is concerned with some problems of best approximation in normed linear spaces by elements of a convex cone which are generalizations of some results of [2], [3] on best approximation by elements of linear subspaces. There are given among others results, theorems which state when a convex cone is a proximinal, semičebyšev and čebyšev one.

BIBLIOGRAFIE

1. I. SINGER, *Cea mai bună aproximare în spații vectoriale normate prin elemente din subspații vectoriale.* Editura Academiei, București, 1967.
2. — *Some remarks on best approximation in normed linear spaces* I, Rev. math. pures et appl., *6*, 357–362 (1961).
3. — *On best approximation of continuous functions II*, Rev. math. pures et appl., *6*, 507–511 (1961).
4. Г. Ш. РУБИНШТЕЙН, *Об одной экстремальной задаче в линейном нормированном пространстве*, Сибирск. матем. ж., *6*, 711–714 (1965).
5. I. SINGER, *Caractérisation des éléments de meilleure approximation dans un espace de Banach quelconque.* Acta Sci. Math., *17*, 181–189 (1956).
6. R. R. PHELPS, *Uniqueness of Hahn-Banach extensions and unique best approximation.* Trans. Amer. Math. Soc., **95**, 238–255 (1960).

OPERATORI NORMALOIZI (II)

DE

IOANA ISTRĂŢESCU şi VASILE ISTRĂŢESCU

Se expun rezultate privind generalizările operatorilor normaloizi cît şi proprietăţile lor legate de problema lui Wintner şi teoria dilatării.

1. O GENERALIZARE A NOŢIUNII DE OPERATOR NORMALOID

Pentru definirea clasei de operatori care să generalizeze clasa operatorilor normaloizi vom avea nevoie de un rezultat foarte important datorit lui C. Berger.

Fie T un operator mărginit pe spaţiul Hilbert H (notaţiile vor fi ca şi în prima parte a acestei lucrări) şi

$$\| T \|_1 = \sup_{\lambda \in W(T)} |\lambda|.$$

Are loc următoarea

TEOREMA 1. *Avem*

$$\| T^n \|_1 \leqslant \| T \|_1^n .$$

Pentru a demonstra această teoremă să considerăm S_1 = mulţimea operatorilor T astfel ca

$$\mathrm{Re}\left(I + \sum_1^\infty z^n T^n\right) \geqslant 0, \quad |z| < 1, \quad \sigma(T) \in \{z, \ |z| \leqslant 1\} = \mathfrak{D}.$$

Este uşor de văzut că aceste condiţii sînt echivalente cu

1. $\sigma(T) \subset \{z, \ |z| \leqslant 1\}$
2. $\| T \|_1 \leqslant 1$.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 6, P. 937-946, BUCUREŞTI, 1969

Să considerăm un polinom $f(z)$, $f(0) = 0$ şi să observăm că aplicînd teorema lui Herglotz, avem reprezentarea

$$\|x\|^2 + \sum_1^\infty z^n < T^n x, x > = \int \frac{1 + z e^{i\theta}}{1 - z e^{i\theta}} d\mu_x(\theta)$$

cu μ_x o măsură pozitivă pe $[0, 2\pi]$.

Vom avea astfel că

$$< T^n x, x > = 2 \int e^{in\theta} d\mu_x(\theta) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

şi deci

$$< f(T) x, x > = 2 \int f(e^{i\theta}) d\mu_x(\theta).$$

Dacă $\|f\|_D \leq 1$, deducem că $\|f^n(T)\|$ este mărginit şi pentru $|z| < 1$, $f(T)$ satisface relaţiile din definiţiile clasei S_1. Deci pentru $f(z) = z^n$ avem că $T^n \in S_1$ şi teorema lui Berger este demonstrată.

Dacă T este un operator pe un spaţiu Hilbert, să punem

$$\|T\|_p = \sup_{\|x\| = \|y\| = 1} | < T^p x, y > |^{\frac{1}{p}},$$

unde p este un întreg ≥ 1.

Se verifică imediat următoarele proprietăţi pentru $\| \ \|_p$.

1. $\|T\| p = 0$ dacă şi numai dacă $T^p = 0$
2. $\|\lambda T\|_p = |\lambda| \, \|T\|_p$
3. $\|T^n\|_p \leq \|T\| p^n$
4. $\gamma_T = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} \{|\lambda|\} \leq \|T\|_p \leq \|T\|$

Se vede că $\| \ \|_p$ are proprietăţi similare cu ale unei seminorme. Vom defini acum noţiunea de operator p-normaloid.

DEFINIŢIA 1. [3]. Un operator T este p-normaloid (pe scurt N_p-operator) dacă

$$\|T\|_p = r_T.$$

Este clar că pentru $p = 1$, obţinem clasa operatorilor normaloizi. Am văzut că un operator este normaloid dacă şi numai dacă $\|T\|^n = \|T^n\|$. Următoarea teoremă reprezintă extensia acestui fapt la N_p-operatori.

TEOREMA 2. *T este N_p-operatori dacă şi numai dacă*

$$\|T^n\|_p = \|T\|_p^n.$$

Demonstraţie. Cum avem, oricare ar fi T şi p,

$$\gamma_{T^p} = \gamma_{T^p} \leq \|T^p\| \leq \|T\|^p$$

dacă $\|T^n\|_p = \|T\|_p^n$, rezultă

$$\gamma_T \geq \lim \|T^n\|_p^{\frac{1}{n}} = \|T\|_p .$$

Afirmaţia reciprocă este evidentă.

Din această teoremă rezultă imediat că dacă T este un N_p-operator, atunci orice putere a sa este de asemenea un N_p-operator.

Problema care apare natural este a relației dintre diferite clase N_p. Următoarele teoreme dau răspunsuri la aceste probleme.

TEOREMA 3. *Clasele* N_p *sînt distincte și* $N_p < N_q$ *dacă și numai dacă* p *se divide cu* q.

Demonstrație. Să considerăm operatorul

$$T = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cu

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrice cu $n \times n$ elemente, care este în N_p cu $p \geqslant n$ și nu este în N_p cu $p < n$.

Dacă p se divide pe q, atunci cum

$$\gamma_T \leqslant \| T \|_q = \| T^q \|^{\frac{1}{q}} = \| T^{pl} \|^{\frac{1}{pl}} \leqslant \| T^p \|^{\frac{1}{p}} = \gamma_T$$

și deci $T \in N_q$.

Pentru a completa demonstrația teoremei, să considerăm matricea cu $n \times n$ elemente

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se verifică imediat că

$$\| M_l^i \| = 2, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

$$\| M_l^j \| = 4, \quad n + 1 \leqslant j \leqslant 2n.$$

Fie

$$T = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

care este în N_p, $p = sn$ și $T \overline{\in} N_p$ dacă p este de forma indicată. Teorema este demonstrată.

TEOREMA 4. *Dacă T şi S sînt N_p-operatori, atunci produsul tensorial $T \otimes S$ este de asemenea N_p-operator.*

Demonstraţie. Pentru a demonstra teorema se foloseşte teorema lui Arlen Brown şi Carl Pearcy despre spectrul produsului tensorial ca în cazul operatorilor normaloizi şi de aceea o omitem.

Rezultatul obţinut în teorema 2 pune în mod natural problema extinderii noţiunii de mulţime spectrală în legătură cu operatoprii p-normaloizi. Acest lucru îl vom face însă în [13].

2. O PROBLEMĂ A UNUI WINTNER ŞI OPERATORII NORMALOIZI

Fie A şi B doi operatori ; comutatorul C este prin definiţie operatorul

$$C = AB - BA.$$

Problema lui Wintner legată de comutatorul C poate fi formulată astfel : în ce condiţii numărul zero aparţine închiderii rangului numeric pentru C? Se demonstrează destul de uşor că în cazul spaţiilor finit-dimensionale, problema are totdeauna un răspuns pozitiv şi că în cazul spaţiilor infinit dimensional, răspunsul este în general negativ.

Totuşi, dacă unul din termeni este un operator hiponormal, atunci C. R. Putnam a demonstrat că răspunsul este pozitiv.

Teorema care urmează dă un răspuns mai general la problema lui Wintner.

TEOREMA 5. *Dacă $C = AB - BA$ şi A este normaloid, atunci* $0 \in \mathrm{cl}\, W(C)$.

Demonstraţie. Deoarece A este normaloid, există $\lambda \in \sigma(A)$ şi $x_n \in H$, $\|x_n\| = 1$ astfel ca

1. $Ax_n - \lambda x_n \to 0$
2. $\|A\| = |\lambda|$.

Din 2 rezultă că are loc de asemenea relaţia

$$A^* x_n - \bar{\lambda} x_n \to 0$$

Dar

$$< Cx_n, x_n > = < ABx_n, x_n > - < BAx_n, x_n > =$$
$$= < Bx_n, A^*x_n > - < BAx_n, x_n >$$

şi din relaţiile de mai sus deducem că $\{< Cx_n, x_n >\}$ tinde către zero şi teorema este demonstrată.

Pentru formularea rezultatului următor vom avea nevoie de o noţiune introdusă în [7].

DEFINIŢIA 2. Dacă F este o mulţime mărginită şi închisă în planul complex, atunci un punct $z \in F$ se zice punct semibară dacă există un cerc care trece prin z şi astfel că nici un punct din F nu se află în interiorul cercului.

DEFINIŢIA 3. Operatorul T satisface condiţia G_1 dacă pentru orice $z \in \rho(T) = C\, \sigma(T)$ avem

$$\|(T - z)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\mathrm{d}(z, \sigma(T))}, \qquad d = \text{dist.}$$

Are loc următoarea

TEOREMA 6. *Dacă A satisface condiţia G_1 şi $\sigma(A)$ conţine cel puţin un punct semibară, atunci $0 \in \mathrm{cl}\, W(C)$ cu $C = AB - BA$.*

Demonstraţie. Fie ξ punctul din $\sigma(A)$ care este punct semibară. În acest caz există $\xi_0 \in \rho(A)$ astfel ca

$$\mathrm{d}(\xi_0, \sigma(A)) = \frac{1}{|\xi - \xi_0|}$$

şi deci cum A satisface proprietatea G_1, rezultă că

$$(*) \qquad (A - \xi_0)^{-1}\| = \frac{1}{|\xi - \xi_0|}.$$

De aici rezultă că există un şir $\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$ astfel ca

$$(A - \xi_0)^{-1} x_n - \frac{1}{\xi - \xi_0} x_n \to 0$$

şi din (*) rezultă că are loc şi

$$(A^* - \xi_0)^{-1} x_n - \frac{1}{\xi - \xi_0} x_n \to 0.$$

Obţinem astfel că

$$(A - \xi_0) x_n \to 0$$

$$(A^* - \bar{\xi}_0) x_n \to 0$$

Exact ca în teorema 5, obţinem că $0 \in \mathrm{cl}\, W(C)$ şi teorema este demonstrată.

În [4] a fost considerată o clasă de operatori care generalizează clasa operatorilor hiponormali.

Utilizînd rezultatele obţinute în [4], se poate arăta că pentru clasa considerată — operatorii hiponormali de ordin m — este adevărată următoarea :

TEOREMA 7. *Dacă A este un operator hiponormal de ordin m, atunci $0 \in \mathrm{cl}\, W(C)$ cu $C = AB - BA$.*

TEOREMA 8. *Dacă A este un N_p-operator şi*

$$1 + \frac{\lambda}{\mu} + \ldots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{p-1} \neq 0.$$

atunci $0 \in \mathrm{cl}\, W(C)$ cu $C = AB - BA$.

Demonstraţie. Deoarece A este un N_p-operator, există un număr $\lambda \in \sigma(A)$ astfel ca

1. $(A^p - \lambda^p) x_n \to 0$
2. $|\lambda|^p = \|A^p\|$

şi în acest caz are loc şi relaţia

$$(A^* - \bar{\lambda}^p) x_n \to 0.$$

Condiţia pusă asupra spectrului ne dă

$$(A - \lambda) x_n \to 0$$
$$(A^* - \bar{\lambda}) x_n \to 0$$

şi exact ca în teoremele precedente, $0 \in \mathrm{cl}\, W(C)$. Teorema este demonstrată.

REMARCĂ. *Pentru $p = 1$, teorema 8 este exact teorema 5.*

3. VALORI PROPRII ŞI RANG NUMERIC PENTRU O CLASĂ DE OPERATORI NORMALOIZI

Dacă T este un operator pe un spaţiu Hilbert, şi rangul numeric $W(T)$ este o mulţime închisă, atunci, fiind şi convexă după o teoremă a lui Hausdorff-Toeplitz, posedă puncte extreme. Problema naturală care apare este studiul acestor puncte extreme. În cazul cînd operatorul este hiponormal, acest lucru a fost făcut în [7].

Pentru o mulţime compactă în planul complex, a fost introdusă o noţiune importantă în studiul unor clase de operatori şi anume noţiunea de punct bară.

DEFINIŢIA 4. Pentru o mulţime închisă şi mărginită F din planul complex, $z \in F$ este punct bară dacă există un cerc Γ_0 care trece prin Z şi astfel încît nici un punct din F nu se află în exteriorul acestui cerc.

Se arată că pentru cazul cînd avem o mulţime închisă mărginită şi convexă este adevărată o teoremă de tip Krein-Milman pentru puncte bară.

Cu ajutorul noţiunii de punct bară formulăm următoarea

TEOREMA 9. *Fie T un operator astfel ca:*

1° *$T - \lambda$ este normaloid oricare ar fi λ;*

2° *$W(T)$ este închis.*

În acest caz orice punct bară pentru $W(T)$ este valoare proprie.

Demonstraţie. Orice operator care satisface condiţia 1° are proprietatea că $W(T) = \mathrm{con}\,(\sigma(T)) = \sum(T)$, înfăşurătoarea convexă a spectrului. Cum pentru orice ξ, $\sum(T - \xi) = \sum(T) - \xi$ dacă este un punct bară pentru $W(T)$ el este punct bară pentru $\sum(T)$ şi deci există ξ_0 astfel ca

$$|\xi - \xi_0| = \sup\{|\eta - \xi_0|, \quad \eta \in \sum(T)\}$$

şi cum T satisface 1°, rezultă că

$$\|T - \xi_0\| = |\xi - \xi_0|.$$

Dar $\xi \in W(T)$ şi deci există $x \in H$, $\|x\| = 1$, astfel ca

$$< Tx, x > = \xi.$$

De aici, cum

$$< (T - \xi_0) x, x > = \xi - \xi_0,$$

rezultă că

$$(T - \xi_0) x = (\xi - \xi_0) x$$

adică

$$Tx = \xi x$$

şi teorema este demonstrată.

COROLAR. *Dacă T satisface condiţiile din teorema 9 şi spaţiul H este separabil, mulţimea punctelor bară este cel mult numărabilă.*

Demonstraţie. Deoarece pentru mulţimea punctelor bară are loc o teoremă de tip Krein-Milman, va fi suficient să arătăm că ξ fiind un punct bară şi

$$Tx = \xi x,$$

atunci are loc şi relaţia

$$T^*x = \bar{\xi} x$$

Fie ξ_0 ca în demonstraţia teoremei 9. Din

$$\| T - \xi_0 \| = | \xi - \xi_0 |$$

$$(T - \xi_0) x = (\xi - \xi_0) x$$

rezultă imediat că

$$(T^* - \bar{\xi}_0) x = (\bar{\xi} - \bar{\xi}_0) x$$

şi corolarul este demonstrat.

Vom arăta acum că în anumite condiţii operatorii care satisfac condiţia 1° din teorema 9 sînt autoadjuncţi.

TEOREMA 10. *Dacă operatorul T satisface condiţiile*

1° $T - \lambda$ *este normaloid*

2° $0 \bar{\in} \mathrm{cl}\, W(A)$, $AT = T^*A$,

atunci T este autoadjunct.

Demonstraţie. Se ştie că orice operator este autoadjunct cînd rangul numeric este real. Cum T satisface condiţia 1, va fi suficient să arătăm că în spectru nu există puncte cu partea imaginară nenulă. Mai mult, va fi suficient să considerăm punctele bară a înfăşurătorii convexe a spectrului. Fie deci ξ_0 un punct bară al mulţimii Cl $W(T) = \sum(T)$ (înfăşurătoarea convexă a spectrului).

Deci există ξ_0. Astfel ca

$$\| T - \xi_0 \| = | \xi - \xi_0 |.$$

Există x_n, $\| x_n \| = 1$, astfel ca

$$(T - \xi_0) x_n - (\xi - \xi_0) x_n \to 0$$

şi încă

$$(T^* - \bar{\xi}_0) x_n - (\xi - \bar{\xi}_0) x_n \to 0,$$

adică

$$(T - \xi) x_n \to 0,$$

$$(T^* - \bar{\xi}) x_n \to 0.$$

Dacă Im $\xi \neq 0$, avem, deoarece A este invertibil,

$$\| (T^* - \bar{\xi}) x_n \| = \| T^* A A^{-1} x_n - \bar{\xi} x_n \| = \| (A T A^{-1} - \bar{\xi} A A^{-1}) x \| =$$
$$= \| (A (T - \bar{\xi}) A^{-1} x_n \| \to 0$$

şi deci

**) $$(T - \bar{\xi}) A^{-1} x_n \to 0.$$

Avem însă din (*), (**) că

$$< x_n, A^{-1} x_n > \to 0.$$

4. DILATĂRI ŞI OPERATORI NORMALOIZI

Generalizînd problema dilatărilor unitare în [15] a fost considerată o clasă de operatori C_ρ cu proprietăţi interesante.

Problema naturală care apare este aceea a apartenenţei operatorilor normaloizi la această clasă.

Definiţie 5. Un operator T este în clasa C_ρ ($\rho > 0$) dacă

1°. $\sigma(T) \subset \{z, \| z \| \leqslant 1\}$

2°. $\| x \|^2 - 2\left(1 - \dfrac{1}{\rho}\right) \mathrm{Re} < zTx, x > + \left(1 - \dfrac{2}{\rho}\right) \| zTx \|^2 \geqslant 0$

oricare ar fi $x \in H$ şi $|z| \leqslant 1$.

Relaţia 2 este echivalentă cu

2°. $\| x \|^2 - \| zTx \|^2 + (\rho - 1) \| (1 - zT) x \|^2 \geqslant 0$

şi are loc

Teorema 10. *Dacă T este normaloid, atunci condiţia necesară şi suficientă ca $T \in C_\rho$ este ca*

$$\| T \| \leqslant \begin{cases} \dfrac{\rho}{2 - \rho} & 0 \leqslant \rho \leqslant 1 \\ 1 & \rho > 1. \end{cases}$$

Demonstrație. Pentru $\rho = 0$, afirmația este trivială așa încît să presupunem că $0 < \rho < 2$. În acest caz 2′ este echivalentă cu

$$\frac{\rho}{\rho - 2}\|x\|^2 - 2\,\frac{\rho - 1}{\rho - 2}\,\mathrm{Re} < zTx,\ x > + \|zTx\|^2 \leqslant 0$$

sau

$$\left\|\frac{\rho - 1}{\rho - 2}(I - zT)\,x\right\|^2 + \frac{\rho}{\rho - 2}\|x\|^2 \leqslant \left(\frac{\rho - 1}{\rho - 2}\right)^2 \|x\|^2$$

sau încă

$$(*) \qquad \left\|\frac{1 - \rho}{2 - \rho}(I - zT)\,x\right\| \leqslant \frac{1}{2 - \rho}\|x\|$$

ceea ce ne dă că

$$\sup_{|z| \leqslant 1}\left\|\frac{1 - \rho}{2 - \rho} I + zT\right\| \leqslant \frac{1}{2 - \rho}$$

este echivalentă cu 2.

Dacă T este normaloid, există $\lambda \in (T)$, $\|T\| = |\lambda|$ și $x_n \in H$ astfel ca $Tx_n - \lambda\, x_n \to 0$. Deci, dacă x_n are proprietatea că

$$\|Tx_n - \lambda\, x_n\| = \|(\|T\| I \to \xi T) - x_n\| < \varepsilon,$$

atunci

$$\left\|\left(\frac{1 - \rho}{2 - \rho} I + \xi T\right) x_n\right\| > \left\|\left(\frac{1 - \rho}{2 - \rho} I + \|T\| I\right)\right\| - \left\|(\|T\|\, I - \xi\, T)\, x_n\right\| >$$

$$> \frac{1 - \rho}{2 - \rho} + \|T\| - \varepsilon$$

și cum ε este arbitrar,

$$\sup_{|z| \leqslant 1}\left\|\frac{1 - \rho}{2 - \rho} I + z\,T\right\| \geqslant \frac{1 - \rho}{2 - \rho} + \|T\|$$

care implică egalitatea din cauza relației

$$\sup_{|z| \leqslant 1}\left\|\frac{1 - \rho}{2 - \rho} I + zT\right\| \leqslant \frac{1 - \rho}{2 - \rho} + \|T\|$$

(căci $\rho > 1$ nu este posibil). De aici rezultă imediat

$$\|T\| \leqslant \frac{\rho}{2 - \rho}.$$

Dacă $\rho \leqslant 1$, această relație este echivalentă cu relația din 2° pentru că este echivalentă cu (*).

Teorema este demonstrată.

Notă și comentarii. Teorema 1 aparține lui C. Berger, demonstrația dată este după [11].

Generalizarea noțiunii de operator normaloid a fost dată de T. Furuta și Z. Takeda [3], împreună cu teoremele 2 și 3. Teorema 4 a fost dată în [6]. Teoremele privind problema lui Wintner sînt date după [5] și [6]. De asemenea teoremele de la punctul 3 sînt date după [5], [6], [7]. Teorema privind dilatările aparține în esență lui Durzt care a dat-o pentru operatori normali. Faptul că demonstrația este adevărată pentru clasa operatorilor normaloizi a fost observat de mai mulți autori. Furuta, Berger, Stampfli.

Bibliografia care urmează întregește pe cea dată în prima parte a acestei lucrări.

Primită la redacție la 14 iunie 1968

Institutul de matematică al Academiei Republicii Socialiste România,
Calea Griviței nr. 21, București 12

NORMALOID OPERATORS (II)

(ABSTRACT)

Part II of this paper is dedicated to generalization of normaloid operators, their role in the problem of Winther about the numerical range of a commutator operator and the condition between normaloid operators and dilation theory. The character of the paper is essentially, as also the first part, expository. Some of the results presented are taken from the author's articles.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Brown, C. Pearcy, *Spectra of tensor products of operators.* Proc. A.M.S., **17**, 162—166 (1966).
2. E. Durtz, *On unitary ρ-dilations.* Acta Sci. Math., **27**, 247—250 (1966).
3. T. Furuta, Z. Takeda, *A characterization of Spectraloid operators and its Generalization.* Proc. Jap. Acad., **XLIII**, *7*, 599—605 (1967).
4. V. Istrățescu, *Operatori hiponormali* I, II, St. cerc. mat., **19**, *3* (1967).
5. V. Istrățescu, I. Istrățescu, *On normaloid operators* (I, II) (va apare în Math. Z. și Proc. Japan Acad.).
6. V. Istrățescu, I. Istrățescu, *On bare and semibare points for some classes of operators* (to appear).
7. G. H. Orland, *On a class of operators.* Proc. A.M.S., **15**, 75—79 (1964).
8. I. H. Sheth, *On hyponormal operators.* Proc. A.M.S., **17**, 998—1000 (1966).
9. I. H. Sheth, *On normaloid operators*
10. C. Berger — J. Stampfli, *Mapping theorems for the numerical range*
11. J. Williams, *Schwarz norms for operators.* Pacif. J. Math., **24**, *1*, 181—188 (1968).
12. J. Williams, *Operators similar to their adjoints*
13. V. Istrățescu, *On spectral sets*
14. G. Durszt, *On unitary ρ-dilations.* Acta Sci. Math., **27**, 247—250 (1966).
15. B. Sz.-Nagy and C. Foiaș, *On certain classes of power-bounded operators in Hilbert space.* Acta Sci. Math., **27**, 17—25 (1966).

OBSERVAȚIE ASUPRA UNUI CRITERIU DE COMUTATIVITATE ÎN ALGEBRE BANACH

DE

GH. MOCANU

Se fac unele observații privind diverse criterii de comutativitate pentru algebre Banach.

În [1] se demonstrează că *orice algebră Banach complexă cu element unitate în care*

$$\text{(i)} \quad \| x^2 \| = \| x \|^2, \quad (\forall)\, x \in A$$

este comutativă.

În cele ce urmează ne propunem să *precizăm cîteva condiții echivalente cu (i)* și să demonstrăm că *orice algebră Banach complexă cu element unitate în care e îndeplinită una din condițiile*

(i′) $x \to \| x \|_\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} \| x^n \|^{1/n}$ este o normă;

(i″) există $K > 0$ astfel ca pentru orice $x \in A$, $\| x \|^2 \leqslant K \| x^2 \|$; *este comutativă.* Vom arăta apoi că condiția (i″) este echivalentă cu condiția

(i‴) $x \to \| x \|_\sigma$ este o normă echivalentă cu $x \to \| x \|$. Deci într-o algebră Banach complexă în care este îndeplinită condiția (i″), există o normă echivalentă care îndeplinește condiția (i).

Fie A o algebră Banach complexă cu element unitate, înzestrată cu norma $x \to \| x \|$.

PROPOZIȚIA 1. *Următoarele condiții sînt echivalente* :

(i) $\| x^2 \| = \| x \|^2$, *oricare ar fi* $x \in A$;

(ii) $\| x^n \| = \| x \|^n$, *oricare ar fi* $x \in A$ *și oricare ar fi* $n \in N$;

(iii) $\| x \| = \lim\limits_{n\to\infty} \| x^n \|^{1/n}$, *oricare ar fi* $x \in A$;

(iv) *există* $n \in N$, $n > 2$ *astfel ca* $\| x^n \| = \| x \|^n$ *oricare ar fi* $x \in A$.

Demonstrație. Vom demonstra că (i) → (ii) → (iii) → (i) și că(iv) → (iii).

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 6, P. 947–952, BUCUREȘTI, 1969

Evident că (i) implică

$$\| x^{2^k} \| = \| x \|^{2^k}, (\forall)\ x \in A \text{ şi } k \in N.$$

Fie $n \in N$. Există k şi $m \in N$ astfel ca $n = 2^k - m$. Deci

$$\| x^{n+m} \| = \| x \|^{n+m} = \| x \|^n \| x \|^m$$

şi cum

$$\| x^{n+m} \| \leqslant \| x^n \| \ \| x^m \| \leqslant \| x^n \| \ \| x^m \|$$

rezultă

$$\| x^n \| \geqslant \| x \|^n, (\forall)\ x \in A \text{ şi } (\forall)\ n \in N$$

şi deci

$$\| x^n \| = \| x \|^n, (\forall)\ x \in A \text{ şi } (\forall)\ n \in N.$$

Implicaţia (ii) → (iii) este evidentă. De asemenea se constată imediat că (iii) → (i). Într-adevăr, avem

$$\| x^2 \| = \lim_{n\to\infty} \| x^{2n} \|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (\| x^{2n} \|^{1/2n})^2 = (\lim_{n\to\infty} \| x^{2n} \|^{1/2n})^2 = \| x \|^2.$$

Să arătăm acum că (iv) → (iii). Din (iv) rezultă

$$\| x^{n^2} \| = \| (x^n)^n \| = \| x^n \|^n = \| x \|^{n^2}, (\forall)\ x \in A$$

şi prin inducţie deducem că

$$\| x^{n^k} \| = \| x \|^{n^k}, (\forall)\ x \in A, (\forall)\ k \in N$$

şi de aici rezultă (iii).

Cum (iii) → (ii) → (iv), rezultă că (iv) este echivalentă cu (iii) şi cu aceasta propoziţia este complet demonstrată.

COROLAR. *Orice două norme echivalente pe o agebră Banach complexă A, care satisfac condiţia (i) coincid.*

Demonstraţie. Fie $x \to \| x \|_1$ şi $x \to \| x \|$ două numere echivalente pe A, care satisfac condiţia (i). Fiind echivalente, există $\lambda > 0$ şi $\mu > 0$ astfel ca

$$\lambda \| x \| \leqslant \| x \|_1 \leqslant \mu \| x \|, (\forall)\ x \in A$$

în particular

$$\lambda \| x^n \| \leqslant \| x^n \|_1 \leqslant \mu \| x^n \|, (\forall)\ x \in A \text{ şi } (\forall)\ n \in N$$

sau

$$\lambda^{1/n} \| x^n \|^{1/n} \leqslant \| x^n \|_1^{1/n} \leqslant \mu^{1/n} \| x^n \|^{1/n}$$

oricare ar fi $x \in A$ şi $n \in N$.

Făcînd pe n să tindă la infinit în ultima inegalitate, obţinem

$$\| x \| \leqslant \| x \|_1 \leqslant \| x \|, (\forall)\ x \in A$$

adică

$$\| x \|_1 = \| x \|, (\forall)\ x \in A.$$

TEOREMĂ. *Orice algebră Banach complexă A, cu element unitate în care*

$$x \to \| x \|_{\sigma} = \lim_{n \to \infty} \| x^{n} \|^{1/n}$$

este o normă, este comutativă.

Demonstraţie. Fie $\lambda \in C$, $a \in A$ şi $b \in A$. Evident, operatorul

$$T_{(\lambda, a)} : A \to A$$

definit prin

$$x \to e^{\lambda a} x \, e^{-\lambda a}$$

este un operator liniar şi multiplicativ. De asemenea $T_{(\lambda, a)}$ este un operator continuu, fapt ce rezultă din teorema grafului închis, observînd că graful său este $A \times A$.

Din continuitatea lui $T_{(\lambda, a)}$ rezultă

$$\| T_{(\lambda, a)} x \| \leqslant M_{(\lambda, a)} \| x \|, \ (\forall) \ x \in A$$

în particular

$$\| (T_{(\lambda, a)} b)^{n} \| = \| T_{(\lambda, a)} b^{n} \| \leqslant M_{(\lambda, a)} \| b^{n} \| \tag{1}$$

oricare ar fi $n \in N$, sau

$$\| (T_{(\lambda, a)} b)^{n} \|^{1/n} \leqslant M_{(\lambda, a)}^{1/n} \| b^{n} \|^{1/n}$$

şi făcînd pe n să tindă la infinit, obţinem

$$\| T_{(\lambda, a)} b \|_{\sigma} \leqslant \| b \|_{\sigma}$$

adică funcţia $f : C \to A$ definită prin

$$\lambda \to e^{\lambda a} b e^{-\lambda a}$$

este mărginită. Ţinînd cont de faptul că $x \to \| x \|_{\sigma}$ este o normă şi că $\| x \|_{\sigma} \leqslant \| x \|$, se constată imediat că funcţia f este o funcţie olomorfă pe C cu valori în spaţiul normat A, înzestrat cu norma x, $x \to \| x \|_{\sigma}$.

Din teorema lui Liouville rezultă deci că f este constantă şi deci

$$f'(0) = ab - ba = 0.$$

COROLARUL 1. *Orice algebră Banach complexă A, cu element unitate, în care este îndeplinită condiţia*

(i″) *există $K > 0$ astfel ca pentru orice $x \in A$, $\| x \|^{2} \leqslant K \| x^{2} \|$ este comutativă.*

Demonstraţie. Din relaţia (1) pentru $n = 2^{k}$ obţinem

$$\| (T_{(\lambda, a)} b)^{2^{k}} \| \leqslant M_{(\lambda, a)} \| b^{2^{k}} \|$$

sau

$$\| (T_{(\lambda, a)} b)^{2^{k}} \| \leqslant M_{(\lambda, a)} \| b \|^{2^{k}}$$

sau

$$(2)\qquad \|(T_{(\lambda,a)}b)^{2^k}\|^{1/2^k} \leqslant M_{(\lambda,a)}^{1/2^k}\|b\|.$$

Din (i′) rezultă

$$(3)\qquad \|x\| \leqslant K^{1/2+\ldots+1/2^k}\|x^{2^k}\|^{1/2^k},$$

pentru orice $x \in A$ şi orice $k \in N$.

Din (2) şi (3) obţinem

$$\|T_{(\lambda,a)}b\| \leqslant K^{1/2+\ldots 1/2^k}\|(T_{(\lambda,a)}b)^{2^k}\|^{1/2^k} \leqslant K^{1/2+\ldots+1/2^k} M_{(\lambda,a)}^{1/2^k}\|b\|$$

de unde făcînd pe k să tindă la infinit, obţinem

$$\|T_{(\lambda,a)}b\| \leqslant K\|b\|$$

sau

$$\|e^{\lambda a}b\,e^{-\lambda a}\| \leqslant K\|b\|$$

şi repetînd mai departe raţionamentul din demonstraţia teoremei, afirmaţia va fi complet demonstrată.

COROLARUL 2. *Orice algebră Banach complexă A, cu element unitate, în care*

$$\text{(i)}\quad \|x^2\| = \|x\|^2,\ (\forall)\ x \in A$$

este comutativă.

Demonstraţie. Dacă este îndeplinită condiţia (i), atunci

$$\|x\|_\sigma = \|x\|.$$

COROLARUL 3. *O C^*-algebră A, cu element unitate este comutativă dacă şi numai dacă oricare ar fi $x \in A$*

$$xx^* = x^*x.$$

Demonstraţie. Avem

$$\|x^2\| = \|(x^2)^* x^2\|^{1/2} = \|x^{*2} x^2\|^{1/2} = \|x^*(x^* x)\,x\|^{1/2} =$$

$$= \|x^*(xx^*)\,x\|^{1/2} = \|(x^*x)^2\|^{1/2} = \|x^*x\| = \|x\|^2.$$

PROPOZIŢIA 2. *Dacă A este o algebră Banach complexă cu element unitate, atunci următoarele condiţii : sînt echivalente.*

(i″) *există $K > 0$ astfel ca pentru orice $x \in A$, $\|x\|^2 \leqslant K\|x^2\|$;*

(i‴) *$x \to \|x\|_\sigma$ este o normă echivalentă cu $x \to \|x\|$.*

Demonstraţie. Într-adevăr, din (i″) rezultă

$$\|x\| \leqslant K^{1/2+\ldots+1/2^k}\|x^{2^k}\|^{1/2^k}$$

de unde

$$\|x\| \leqslant K\|x\|_\sigma$$

şi cum

$$\| x \|_\sigma \leqslant \| x \|$$

rezultă

$$\frac{1}{K} \| x \| \leqslant \| x \|_\sigma \leqslant \| x \|$$

iar din corolarul 1 rezultă că algebra A este comutativă şi deci oricare ar fi x şi $y \in A$ avem

$$\| x + y \|_\sigma \leqslant \| x \|_\sigma + \| y \|_\sigma \text{ (vezi [2])}$$

Cum, evident,

$$\| \alpha x \|_\sigma = K \| x \|, \; (\forall) \; \alpha \in C,$$

din cele stabilite rezultă că (i″) → (i‴).

Să arătăm acum că (i‴) → (i″). Or, dacă este îndeplinită condiţia (i‴), înseamnă că există $\lambda > 0$ şi $\mu > 0$ astfel ca

$$\lambda \| x \| \leqslant \| x \|_\sigma \leqslant \mu \| x \|,$$

de unde rezultă

$$\| x \| \leqslant \frac{1}{\lambda} \| x \|_\sigma,$$

sau

$$\| x \|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda^2} \| x \|_\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} \| x^2 \|_\sigma \leqslant \frac{1}{\lambda^2} \| x^2 \|,$$

şi deci $K = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

COROLAR. *Dacă este îndeplinită condiţia* (*i*″), *atunci există o normă echivalentă pe* A *care să satisfacă condiţia* (*i*).

Primită la redacţie la 18 iulie 1968

Universitatea Bucureşti
Facultatea de matematică-mecanică,
Str. Academiei nr. 14.

REMARQUE SUR UN CRITÈRE DE COMMUTATIVITÉ DANS LES ALGÈBRES DE BANACH

RÉSUMÉ

On sait qu'une algèbre de Banach A est commutative si la norme satisfait à la condition suivante :

$$x \in A \Longrightarrow \| x^2 \| = \| x \|^2.$$

Dans ce travail l'A. établit qu'une algèbre de Banach A est commutative s'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$x \in A \Rightarrow \| x^2 \| \leqslant K \| x^2 \|.$$

Quelques considérations concernant les critères de commutativité pour une algèbre de Banach sont également présentées.

BIBLIOGRAFIE

1. Claude De Page, *Sur quelques conditions entrainant la comutativité dans les algébres de Banach.* C. R. Acad. Sci., Paris, Seria A—B, **265**, *8* (1967).
2. Riesz F., Nagy B., *Leçons d'Analyse fonctionnelle.* Acad. Kiadó, Budapesta, 1952.

DISPERSIA PRODUSULUI UNUI NUMĂR OARECARE DE VARIABILE ALEATOARE INDEPENDENTE

DE

I. SĂCUIU

În Nota de față se stabilește formula dispersiei $D^2(\xi_1^{p_1}\xi_2^{p_2}\dots\xi_k^{p_k})$, unde $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ sînt variabile aleatoare independente definite pe un cîmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ dat, iar $p_1, p_2, \dots, p_k$ $k = 2, 3, \dots$ numere naturale. Se dau în încheiere cîteva aplicații din statistica matematică ale acestei formule.

1. Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un cîmp de probabilitate și $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ variabile aleatoare independente definite pe acest cîmp de probabilitate, despre care presupunem că există $D^2(\xi_j^{p_j})$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Să notăm prin $E(\xi_j) = x_j$, $1 \leqslant j \leqslant k$, și să punem

$$\xi_j = x_j(1 + \delta\xi_j), \qquad 1 \leqslant j \leqslant k$$

ceea ce este echivalent cu

$$\xi_j^{p_j} = x_j^{p_j}\left(1 + \sum_{l=1}^{p_j} C_{p_j}^{l}(\delta\xi_j)^l\right), \quad 1 \leqslant j \leqslant k. \tag{1}$$

În lucrarea [2] s-a studiat cazul $k = 2$ și a dedus formula

$$D^2(\xi_1^{p_1}\ \xi_2^{p_2}) = D^2(\xi_1^{p_1})E^2(\xi_2^{p_2}) + D^2(\xi_2^{p_2})E^2(\xi_1^{p_1}) + D^2(\xi_1^{p_1})D^2(\xi_2^{p_2}). \tag{2}$$

căreia i-a găsit unele aplicații în statistica matematică.

Urmînd o cale analoagă cu cea din [2] vom da acum o generalizare a acestei formule, iar relația pe care o vom stabili va permite în același timp și lărgirea cîmpului de aplicații din statistica matematică.

Vom stabili mai întîi pe cale directă relația pentru cazul în care $k = 3$ și rezultatul obținut ne va permite să generalizăm formula pentru k oarecare, urmînd ca demonstrația în cazul general să o facem prin inducție.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 6, P. 953–963, BUCUREȘTI, 1969

Pentru cazul $k = 3$ putem scrie imediat:

$$(3)\qquad \xi_1^{p_1}\,\xi_2^{p_2}\,\xi_3^{p_3} - x_1^{p_1}\,x_2^{p_2}\,x_3^{p_3} = x_1^{p_1}\,x_2^{p_2}\,x_3^{p_3}[\varphi_{p_1} + \varphi_{p_2} + \varphi_{p_3} + \varphi_{p_1}\,\varphi_{p_2} +$$

$$+ \varphi_{p_1}\,\varphi_{p_3} + \varphi_{p_2}\,\varphi_{p_3} + \varphi_{p_1}\,\varphi_{p_2}\,\varphi_{p_3}],$$

unde am notat $\varphi_{p_j} = \sum\limits_{l=1}^{p_j} C_{p_j}^{l}(\delta\xi_j)^l, \qquad 1 \leqslant j \leqslant 3$

Luînd dispersia și într-un membru și în celălalt și ținînd cont că din independența variabilelor ξ_1, ξ_2, ξ_3 rezultă independența variabilelor φ_{p_1}, φ_{p_2}, φ_{p_3}, avem:

$$(4)\qquad D^2(\xi_1^{p_1}\,\xi_2^{p_2}\,\xi_3^{p_3}) = x_1^{2p_1}\,x_2^{2p_2}\,x_3^{2p_3}\{D^2(\varphi_{p_1}) + D^2(\varphi_{p_2}) + (D^2\,\varphi_{p_3}) +$$

$$+ D^2(\varphi_{p_1}\varphi_{p_2}) + D^2(\varphi_{p_1}\,\varphi_{p_3}) + D^2(\varphi_{p_2}\,\varphi_{p_3}) + D^2(\varphi_{p_1}\,\varphi_{p_2}\,\varphi_{p_3}) +$$

$$+ 2\,D^2(\varphi_{p_1})\,E(\varphi_{p_2}) + 2\,D^2(\varphi_{p_1})\,E(\varphi_{p_3}) + 2\,D^2(\varphi_{p_2})\,E(\varphi_{p_1}) +$$

$$+ 2\,D^2(\varphi_{p_2})\,E(\varphi_{p_3}) + 2\,D^2(\varphi_{p_3})\,E(\varphi_{p_1}) + 2\,D^2(\varphi_{p_3})\,E(\varphi_{p_2}) +$$

$$+ 4\,D^2(\varphi_{p_1})\,E(\varphi_{p_2})\,E(\varphi_{p_3}) + 4\,D^2(\varphi_{p_2})\,E(\varphi_{p_1})\,E(\varphi_{p_3}) +$$

$$+ 4\,D^2(\varphi_{p_3})\,E(\varphi_{p_1})\,E(\varphi_{p_2}) + 2\,D^2(\varphi_{p_1}\,\varphi_{p_2})\,E(\varphi_{p_3}) +$$

$$+ 2\,D^2(\varphi_{p_1}\varphi_{p_3})\,E(\varphi_{p_2}) + 2\,D^2(\varphi_{p_2}\,\varphi_{p_3})\,E(\varphi_{p_1}).$$

Dar, folosind notațiile din [2]:

$$(5)\qquad D^2(\varphi_{p_j}) = \frac{D^2(\xi_j^{p_j})}{x_j^{2p_j}}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant 3$$

$$E(\varphi_{p_j}) = \frac{E(\xi_j^{p_j})}{x_j^{p_j}} - 1 = \frac{U_{p_j}^{(j)}}{2}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant 3$$

putem scrie relația (4) sub forma

$$(6)\qquad D^2(\xi_1^{p_1}\,\xi_2^{p_2}\,\xi_3^{p_3}) = x_1^{2p_1}\,x_2^{2p_2}\,x_2^{2p_3}\left\{\frac{D^2(\xi_1^{p_1})}{x_1^{2p_1}}(1 + U_{p_2}^{(2)} + U_{p_3}^{(3)} + U_{p_3}^{(2)}\,U_{p_3}^{(3)}) +\right.$$

$$+ \frac{D^2(\xi_2^{p_2})}{x_2^{2p_2}}(U_{p_1}^{(1)} + 1 + U_{p_3}^{(3)} + U_{p_1}^{(1)}\,U_{p_3}^{(3)}) + \frac{D^2(\xi_3^{p_3})}{x_3^{2p_3}}(U_{p_1}^{(1)} + U_{p_2}^{(2)} + 1 +$$

$$\left.+ U_{p_1}^{(1)}\,U_{p_2}^{(2)}) + A_{p_1 p_2}^{(1,2)}(1 + U_{p_3}^{(3)}) + A_{p_2 p_3}^{(2,3)}(1 + U_{p_1}^{(1)}) + A_{p_3 p_1}^{(3,1)}(1 + U_{p_2}^{(2)}) + A_{p_1 p_2 p_3}^{(1,2,3)}\right\},$$

unde am pus

$$A_{p_1 p_2}^{(1,2)} = D^2(\varphi_{p_1}\,\varphi_{p_2});\; A_{p_2 p_3}^{(2\,3)} = D^2(\varphi_{p_2}\,\varphi_{p_3});\; A_{p_3 p_1}^{(3,1)} = D^2(\varphi_{p_3}\,\varphi_{p_1})$$

$$A_{p_1 p_2 p_3}^{(1,2,3)} = D^2(\varphi_{p_1}\,\varphi_{p_2}\,\varphi_{p_3}).$$

Pentru $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ se obține imediat $u_1^{(1)} = u_1^{(2)} = u_1^{(3)} = 0$ și

$$A_{11}^{(1,2)} = \frac{D^2(\xi_1)\,D^2(\xi_2)}{x_1^2\,x_2^2}; \quad A_{11}^{(2,3)} = \frac{D^2(\xi_2)\,D^2(\xi_3)}{x_2^2\,x_3^2}; \quad A_{11}^{(3,1)} = \frac{D^2(\xi_3)\,D^2(\xi_1)}{x_3^2\,x_1^2};$$

$$A_{111}^{(1,2,3)} = \frac{D^2(\xi_1)\,D^2(\xi_2)\,D^2(\xi_3)}{x_1^2\,x_2^2\,x_3^2}.$$

În urma acestor rezultate formula (6) o putem scrie pentru $k = 2$, $p_1 = p_2 = 1$, sub forma

$$D^2(\xi_1\xi_2) = x_1^2\,x_2^2\left[\frac{D^2(\xi_1)}{x_1^2} + \frac{D^2(\xi_2)}{x_2^2} + \frac{D^2(\xi_1)\,D^2(\xi_2)}{x_1^2\,x_2^2}\right] \tag{6'}$$

iar pentru $k = 3$, $p_1 = p_2 = p_3 = 1$, sub forma

$$D^2(\xi_1\,\xi_2\,\xi_3) = \tag{6''}$$

$$= x_1^2\,x_2^2\,x_3^2\left[\sum_{i=1}^{3}\frac{D^2(\xi_i)}{x_i^2} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3}\frac{D^2(\xi_i)\,D^2(\xi_j)}{x_i^2\,x_j^2} + \frac{D^2(\xi_1)\,D^2(\xi_2)\,D^2(\xi_3)}{x_1^2\,x_2^2\,x_3^2}\right].$$

Cu ajutorul formulelor (6') și (6'') se pot calcula expresiile $A_{p_1p_2}^{(1,2)}$, $A_{p_2p_3}^{(2,3)}$, $A_{p_3p_1}^{(3,1)}$ și $A_{p_1p_2p_2}^{(1,2,3)}$.

În urma unor calcule simple se obțin expresiile :

$$A_{p_1p_2}^{(1,2)} = \frac{D^2(\xi_1^{p_1})}{x_1^{2p_1}}\,\frac{(u_{p_2}^{(2)})^2}{2^2} + \frac{D^2(\xi_2^{p_2})}{x_2^{2p_2}}\,\frac{(u_{p_1}^{(1)})^2}{2^2} + \frac{D^2(\xi_1^{p_1})\,D^2(\xi_2^{p_2})}{x_1^{2p_1}\,x_2^{2p_2}}$$

$$A_{p_2p_3}^{(2,3)} = \frac{D^2(\xi_2^{p_2})}{x_2^{2p_2}}\,\frac{(U_{p_3}^{(3)})^2}{2^2} + \frac{D^2(\xi_3^{p_3})}{x_3^{2p_3}}\,\frac{(U_{p_2}^{(2)})^2}{2^2} + \frac{D^2(\xi_2^{p_2})\,D^2(\xi_3^{p_3})}{x_2^{2p_2}\,x_3^{2p_3}}$$

$$A_{p_3p_1}^{(3,1)} = \frac{D^2(\xi_3^{p_3})}{x_3^{2p_3}}\,\frac{(U_{p_1}^{(1)})^2}{2^2} + \frac{D^2(\xi_1^{p_1})}{x_1^{2p_1}}\,\frac{(U_{p_3}^{(3)})^2}{2^2} + \frac{D^2(\xi_3^{p_3})\,D^2(\xi_1^{p_1})}{x_3^{2p_3}\,x_1^{2p_1}}$$

$$A_{p_1p_2p_3}^{(1,2,3)} = \frac{D^2(\xi_1^{p_1})}{x_1^{2p_1}}\,\frac{(U_{p_2}^{(2)})^2(U_{p_3}^{(3)})^2}{2^4} + \frac{D^2(\xi_{(2)}^{p_2})}{x_2^{2p_2}}\,\frac{(U_{p_1}^{(1)})^2(U_{p_3}^{(3)})^2}{2^4} +$$

$$+ \frac{D^2(\xi_3^{p_3})}{x_3^{2p_3}}\,\frac{(U_{p_1}^{(1)})^2(U_{p_2}^{(2)})^2}{2^4} + \frac{D^2(\xi_1^{p_1})\,D^2(\xi_2^{p_2})}{x_1^{2p_1}\,x_2^{2p_2}}\,\frac{(U_{p_3}^{(3)})^2}{2^2} +$$

$$+ \frac{D^2(\xi_2^{p_2})\,D^2(\xi_3^{p_3})}{x_2^{2p_2}\,x_3^{2p_3}}\,\frac{(U_{p_1}^{(1)})^2}{2^2} + \frac{D^2(\xi_3^{p_3})\,D^2(\xi_1^{p_1})}{x_3^{2p_3}\,x_1^{2p_1}}\,\frac{(U_{p_2}^{(2)})^2}{2^2} +$$

$$+ \frac{D^2(\xi_1^{p_1})\,D^2(\xi_2^{p_2})\,D^2(\xi_3^{p_3})}{x_1^{2p_1}\,x_2^{2p_2}\,x_3^{2p_3}}.$$

Cu ajutorul acestor expresii putem scrie acum formula (6) astfel:

$$(7)\qquad D^2(\xi_1^{p_1}\xi_2^{p_2}\xi_3^{p_3}) = x_1^{2p_1}x_2^{2p_2}x_3^{2p_3}\left\{\frac{D^2(\xi_1^{p_1})}{x_1^{2p_1}}\left(1+\frac{U_{p_2}^{(2)}}{2}\right)^2\left(1+\frac{U_{p_3}^{(3)}}{2}\right)^2+\right.$$

$$+\frac{D^2(\xi_2^{p_2})}{x_2^{2p_2}}\left(1+\frac{U_{p_1}^{(1)}}{2}\right)^2\left(1+\frac{U_{p_3}^{(3)}}{2}\right)^2+\frac{D^2(\xi_3^{p_3})}{x_3^{2p_3}}\left(1+\frac{U_{p_1}^{(1)}}{2}\right)^2\left(1+\frac{U_{p_3}^{(3)}}{2}\right)^2+$$

$$+\frac{D^2(\xi_1^{p_1})D^2(\xi_2^{p_2})}{x_1^{2p_1}x_2^{2p_2}}\left(1+\frac{U_{p_3}^{(3)}}{2}\right)^2+\frac{D^2(\xi_2^{p_2})D^2(\xi_3^{p_3})}{x_2^{2p_2}x_3^{2p_3}}\left(1+\frac{U_{p_1}^{(1)}}{2}\right)^2+$$

$$+\frac{D^2(\xi_3^{p_3})D^2(\xi_1^{p_1})}{x_3^{2p_3}x_1^{2p_1}}\left(1+\frac{U_{p_2}^{(2)}}{2}\right)^2+\frac{D^2(\xi_1^{p_1})D^2(\xi_2^{p_2})D^2(\xi_3^{p_3})}{x_1^{2p_1}x_2^{2p_2}x_3^{2p_3}}$$

sau, dacă ţinem cont de notaţiile pe care le-am făcut, putem să mai scriem

$$(7')\qquad D^2(\xi_1^{p_1}\xi_2^{p_2}\xi_3^{p_3}) = D^2(\xi_1^{p_1})(E(\xi_2^{p_2})E(\xi_3^{p_3}))^2+D^2(\xi_2^{p_2})(E(\xi_1^{p_1})E(\xi_3^{p_3}))^2+$$

$$+D^2(\xi_3^{p_3})(E(\xi_1^{p_1})E(\xi_2^{p_2}))^2+D^2(\xi_1^{p_1})D^2(\xi_2^{p_2})(E(\xi_3^{p_3}))^2+$$

$$+D^2(\xi_1^{p_1})D^2(\xi_3^{p_3})(E(\xi_2^{p_2}))^2+D^2(\xi_2^{p_2})D^2(\xi_3^{p_3})(E(\xi_1^{p_1}))^2+$$

$$+D^2(\xi_1^{p_1})D^2(\xi_2^{p_2})D^2(\xi_3^{p_3}).$$

Să dăm acum formula pentru un k oarecare

$$(8)\qquad D^2\left(\prod_{i=1}^{k}\xi_i^{p_i}\right)=\sum_{i=1}^{k}(E(\xi_1^{p_1}))^2(E(\xi_2^{p_2}))^2\ldots(E(\xi_{i-1}^{p_{i-1}}))^2D^2(\xi_i^{p_i})\times$$

$$\times(E(\xi_{i+1}^{p_{i+1}}))^2\ldots(E(\xi_k^{p_k}))^2+\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k}(E(\xi_1^{p_1}))^2(E(\xi_2^{p_2}))^2\ldots$$

$$\ldots(E(\xi_{i-1}^{p_{i-1}}))^2D^2(\xi_i^{p_i})(E(\xi_{i+1}^{p_{i+1}}))^2\ldots(E(\xi_{j-1}^{p_{j-1}}))^2D^2(\xi_j^{p_j})(E(\xi_{j+1}^{p_{j+1}}))^2\ldots$$

$$\ldots(E(\xi_k^{p_k}))^2+\sum_{\substack{i_1,\,i_2,\,i_3=1\\ i_1<i_2<i_3}}^{k}(E(\xi_1^{p_1}))^2\ldots(E(\xi_{i_1-1}^{p_{i_1-1}}))^2D^2(\xi_{i_1}^{p_{i_1}})\times$$

$$\times(E(\xi_{i_1+1}^{p_{i_1+1}}))^2\ldots(E(\xi_{i_2-1}^{p_{i_2-1}}))^2D^2(\xi_{i_2}^{p_{i_2}})(E(\xi_{i_2+1}^{p_{i_2+1}}))^2\ldots$$

$$\ldots(E(\xi_{i_3-1}^{p_{i_3-1}}))^2D^2(\xi_{i_3}^{p_{i_3}})(E(\xi_{i_3+1}^{p_{i_3+1}}))^2\ldots(E(\xi_k^{p_k}))^2+\ldots+$$

$$+\prod_{i=1}^{k}D^2(\xi_i^{p_i}).$$

Formula (8) se poate demonstra imediat prin recurență. Să o presupunem deci adevărată petru un k dat și să arătăm că rămîne valabilă pentru $k+1$.

Pentru $k = 2,3$ relația este adevărată, demonstrația pentru aceste cazuri am făcut-o direct.

Atunci putem scrie :

$$D^2\left(\prod_{i=1}^{k+1} \xi_i^{p_i}\right) = D^2\left(\prod_{i=1}^{k} \xi_i^{p_i}\, \xi_{k+1}^{p_{k+1}}\right) = D^2\left(\prod_{i=1}^{k} \xi_i^{p_i}\right)\left(E\left(\xi_{k+2}^{p_{k+1}}\right)\right)^2 +$$

$$+\left(E\left(\prod_{i=1}^{k} \xi_i^{p_i}\right)\right)^2 D^2\left(\xi_{k+1}^{p_{k+1}}\right) + D^2\left(\prod_{i=1}^{k} \xi_i^{p_i}\right) D^2\left(\xi_{k+1}^{p_{k+1}}\right).$$

Ținînd cont de formula (8), precum și de faptul că variabilele aleatoare $\xi_1^{p_1}, \xi_2^{p_2}, \ldots, \xi_k^{p_k}$ sînt independente, obținem o formulă analoagă lui (8) în care se schimbă k prin $k+1$ și deci am reușit să deducem formula dispersiei unui produs oarecare de variabile aleatoare independente, fiecare din ele ridicată la o anumită putere.

2. Să dăm acum cîteva cazuri particulare ale dispersiei unui produs oarecare de variabile aleatoare independente.

Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ variabile aleatoare independente și simetrice[1]). Vom presupune în plus că variabilele aleatoare $(\xi_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ admit momente de orice ordin care intră în considerațiile ce vor fi făcute.

Fie $p_i = 2m_i + 1$, $1 \leqslant i \leqslant k$, unde m_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, sînt numere naturale.

Folosind faptul că pentru orice variabilă aleatoare ξ simetrică (ce admite momente de orice ordin necesar în considerații) putem scrie

$$E\left(\xi^{2r+1}\right) = 0,$$

rezultă din formula (8) obținută la punctul 1, că

$$D^2\left(\xi_1^{2m_1+1}\, \xi_2^{2m_2+1} \ldots \xi_k^{2m_k+1}\right) = \prod_{i=1}^{k} D^2\left(\xi_i^{2m_i+1}\right). \tag{9}$$

În cazul cînd numai unele puteri p_i sînt impare, vor dispare din sume termenii respectivi.

Menținînd condițiile amintite la acest punct, cu singura deosebire că vom lua $p_1 = p_2 = \ldots = p_k = 2$, formula (8) se poate scrie sub forma

---

[1]) Prin definiție spunem că variabila aleatoare ξ este simetrică dacă ea are o funcție de repartiție simetrică. Spunem că $F(x)$ este o funcție de repartiție simetrică, dacă $F(-x) = 1 - F(x)$.

$$D^2(\xi_1^2\xi_2^2\ldots\xi_k^2) = \sum_{i=1}^{k}[D^2(\xi_1)D^2(\xi_2)\ldots D^2(\xi_{i-1})]^2 \times \tag{10}$$

$$\times D^2(\xi_i^2)[D^2(\xi_{i+1})\ldots D^2(\xi_k)]^2 +$$

$$+\sum_{\substack{i_1,i_2=1\\ i_1<i_2}}^{k}[D^2(\xi_1)\ldots D^2(\xi_{i_1-1})]^2 D^2(\xi_{i_1}^2)[D^2(\xi_{i_1+1})\ldots D^2(\xi_{i_2-1})]^2 \times$$

$$\times D^2(\xi_{i_2})[D^2(\xi_{i_2+1})\ldots D^2(\xi_k)]^2 + \ldots + \prod_{i=1}^{k} D^2(\xi_i^2)$$

dat fiind că

$$D^2(\xi_i) = E(\xi_i^2) - E^2(\xi_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant k,$$

ceea ce conduce la faptul că, în acest caz, dispersia produsului se poate exprima numai cu ajutorul unor sume de produse de dispersii.

Să considerăm o variabilă aleatoare $\xi \in N(m, \sigma)$ şi dintr-o populaţie caracterizată de această variabilă aleatoare să efectuăm selecţia $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de volum n.

Ştiind că funcţiile de selecţie

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{şi} \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

sînt variabile aleatoare independente, obţinem

$$D^2(\overline{X}s^2) = D^2(\overline{X})E^2(s^2) + D^2(s^2)E^2(\overline{X}) + D^2(\overline{X})D^2(s^2) = \tag{11}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}\sigma^4 + \frac{2\sigma^2}{n-1}m^2 + \frac{\sigma^2}{n}\frac{2\sigma^2}{n-1}$$

care dovedeşte că $\overline{X}s^2$ este o estimaţie absolut corectă a produsului $m\sigma^2$.

Fie variabilele aleatoare independente $\xi_j \in N(m_j, \sigma_j)$, $1 \leqslant j \leqslant k$, şi pe baza selecţiilor $X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{jn_j}$ efectuate respectiv din populaţiile caracterizate de variabilele aleatoare ξ_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, să calculăm mediile aritmetice :

$$\overline{X}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{l=1}^{n_j} X_{jl}.$$

Atunci

$$D^2\left(\prod_{j=1}^{n} \overline{X}_j\right) = \sum_{j=1}^{k} m_1^2 \ldots m_{j-1}^2 \frac{\sigma_j^2}{n_j} m_{j+1}^2 \ldots m_k^2 + \tag{12}$$

$$+ \sum_{\substack{j_1, j_2 = 1 \\ j_1 < j_2}}^{\kappa} m_1^2 \ldots m_{j_1-1}^2 \frac{\sigma_{j_1}^2}{n_{j_1}} m_{j_1+1}^2 \ldots m_{j_2-1}^2 \frac{\sigma_{j_2}^2}{n_{j_2}} m_{j_2+1}^2 \ldots m_k^2 + \ldots + \prod_{j=1}^{k} \frac{\sigma_j^2}{n_j}.$$

Dacă $\xi_j \in N(m, \sigma)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, și sînt independente, atunci

$$D^2\left(\prod_{j=1}^{k} \xi_j\right) = C_k^1 m^{2(k-1)} \sigma^2 + C_k^2 m^{2(k-2)} \sigma^4 + \ldots + C_k^k \sigma^{2k}. \tag{13}$$

3. Ca aplicație să presupunem că vrem să estimăm aria unui dreptunghi care are adevărata lungime x și adevărata lățime y. Pentru aceasta se efectuează un număr oarecare de măsurători, să spunem n și se obțin perechile de valori $(X_i, Y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Cu aceste n perechi de valori putem obține o arie medie în două moduri.

O dată efectuînd ariile

$$A_i = X_i Y_i,$$

apoi făcînd media lor aritmetică

$$\overline{A}_{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} A_i,$$

adică

$$\overline{A}_{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i. \tag{14}$$

Un alt mod de a obține o arie medie ar fi următorul:

Aflăm mai întîi lungimea și lățimea medie

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i; \quad \overline{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

cu ajutorul cărora calculăm

$$\overline{A}_{(2)} = \overline{X}\overline{Y}. \tag{15}$$

Evident, $\overline{A}_{(1)}$ și $\overline{A}_{(2)}$ sînt variabile aleatoare și ne punem problema alegerii între cele două variabile pe aceea care dă o mai bună estimație. ²)

Să calculăm mai întîi valoarea medie, apoi dispersia atît pentru variabila aleatoare $\overline{A}_{(1)}$ cît și pentru $\overline{A}_{(2)}$.

---

²) Ulterior vom preciza în ce sens vom considera o estimație ca fiind mai bună.

Avem

$$E(\overline{A}_{(1)}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\, Y_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\, E(Y_i)$$

(întrucît perechile (X_i, Y_i) sînt variabile aleatoare independente şi dat fiind că este vorba de măsurători, avem $E(X_i) = x$, $E(Y_i) = y$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Aşadar

$$E(\overline{A}_{(1)}) = xy.$$

Analog

$$E(\overline{A}_{(2)}) = E(\overline{X}\,\overline{Y}) = E(\overline{X})\, E(\overline{Y}) = xy. \tag{16}$$

din aceleaşi considerente de mai înainte.

Prin urmare

$$E(\overline{A}_{(1)}) = E(\overline{A}_{(2)}) = xy. \tag{17}$$

Vom calcula acum pentru fiecare din variabilele aleatoare considerate dispersia

$$D^2(\overline{A}_{(1)}) = D^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D^2(X_i Y_i) \tag{18}$$

întrucît $Z_i = X_i Y_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sînt independente.

Mai departe putem scrie

$$D^2(\overline{A}_{(1)}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} [D^2(X_i)\, E^2(Y_i) + E^2(X_i)\, D^2(Y_i) + D^2(X_i)\, D^2(Y_i)]. \tag{19}$$

Însă cum $D^2(X_i) = \sigma_X^2$; $D^2(Y_i) = \sigma_Y^2$, $1 \leqslant i \leqslant n$, obţinem

$$D^2(\overline{A}_{(1)}) = \frac{1}{n}(\sigma_X^2 y^2 + x^2 \sigma_Y^2 + \sigma_X^2 \sigma_Y^2). \tag{20}$$

În mod analog

$$D^2(\overline{A}_{(2)}) = D^2(\overline{X})\, E^2(\overline{Y}) + E^2(\overline{X})\, D^2(\overline{Y}) + D^2(\overline{X})\, D^2(\overline{Y}) = \tag{21}$$

$$= \frac{\sigma_X^2}{n} y^2 + x^2 \frac{\sigma_Y^2}{n} + \frac{\sigma_X^2}{n}\, \frac{\sigma_Y^2}{n}.$$

De aici obţinem

$$D^2(\overline{A}_{(1)}) - D^2(\overline{A}_{(2)}) = \frac{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) > 0 \tag{22}$$

(în ipoteza că $\sigma_X^2 \sigma_Y^2 > 0$ şi $n \neq 1$).

Adică

$$D^2(\overline{A}_{(1)}) > D^2(\overline{A}_{(2)}). \tag{22'}$$

Deci din punct de vedere al preciziei se recomandă să estimăm aria medie cu ajutorl relației

$$\overline{A}_{(2)} = \overline{X}\,\overline{Y}.$$

Faptul că am considerat un dreptunghi nu restrînge cu nimic domeniul aplicațiilor practice, întrucît orice polinom convex se poate descompune într-un anumit număr de triunghiuri, a cărei arie este dată de suma ariilor triunghiurilor obținute, iar aria unui triunghi este produsul a două dimensiuni liniare împărțit la constanta 2.

Să presupunem acum că vrem să estimăm volumul unui corp paralelipipedic ale cărei adevărate dimensiuni sînt x, y, z respectiv lungimea, lățimea, înălțimea.

Efectuînd ca și în cazul dreptunghiului o serie de n măsurători, se obțin tripletele de valori $(X_i, Y_i, Z_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Cu aceste valori putem estima în mai multe moduri volumul și anume

$$\overline{V}_{(1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i Z_i \tag{23}$$

$$\overline{V}_{(2)} = \overline{A}_{(1)}\overline{Z} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) \tag{24}$$

(bineînțeles că putem face și celelalte două combinații

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Z_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right), \quad \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i Z_i\right)$$

care sînt într-un anumit sens echivalente cu acesta), și

$$\overline{V}_{(3)} = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\right). \tag{25}$$

Vom calcula acum valoarea medie și dispersia variabilelor aleatoare $\overline{V}_{(1)}$, $\overline{V}_{(2)}$, $\overline{V}_{(3)}$ și vom pune în evidență relațiile ce există între ele.

Din considerații analoage cu cele făcute în cazul dreptunghiului se obține imediat

$$E(\overline{V}_{(1)}) = E(\overline{V}_{(2)}) = E(\overline{V}_{(3)}) = xyz \tag{26}$$

adică în toate cele trei cazuri obținem aceeași valoare medie.

Pentru dispersii obținem

$$\begin{aligned} D^2(\overline{V}_{(1)}) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D^2(X_i Y_i Z_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} [D^2(X_i)\,E^2(Y_i)\,E^2(Z_i) + \\ &+ E^2(X_i)\,D^2(Y_i)\,E^2(Z_i) + E^2(X_i)\,E^2(Y_i)\,D^2(Z_i) + D^2(X_i)\,D^2(Y_i)\,E^2(Z_i) + \\ &+ D^2(X_i)\,E^2(Y_i)\,D^2(Z_i) + E^2(X_i)\,D^2(Y_i)\,D^2(Z_i) + D^2(X_i)\,D^2(Y_i)\,D^2(Z_i)] = \\ &= \frac{1}{n}\,[\sigma_X^2 y^2 z^2 + \sigma_Y^2 x^2 z^2 + \sigma_Z^2 x^2 y^2 + \sigma_X^2\sigma_Y^2 z^2 + \sigma_X^2\sigma_Z^2 y^2 + \sigma_Y^2\sigma_Z^2 x^2 + \sigma_X^2\sigma_Y^2\sigma_Z^2] \end{aligned} \tag{27}$$

$$D^2(\overline{V}_{(2)}) = D^2(\overline{A}_{(1)}\overline{Z}) = D^2(\overline{A}_{(1)})\,E^2(\overline{Z}) + E^2(\overline{A}_{(1)})\,D^2(\overline{Z}) + D^2(\overline{A}_{(1)})\,D^2(\overline{Z}). \tag{28}$$

Făcînd înlocuirile necesare obţinem relaţia

$$(29)\qquad D^2(\overline{V}_{(2)}) = \frac{1}{n}(x^2y^2\sigma_Z^2 + x^2z^2\sigma_Y^2 + y^2z^2\sigma_X^2) + \frac{1}{n} z^2\,\sigma_X^2\sigma_Y^2 + $$

$$+ \frac{1}{n^2}(x^2\sigma_Y^2\sigma_Z^2 + y^2\sigma_X^2\sigma_Z^2) + \frac{1}{n^2}\sigma_X^2\sigma_Y^2\sigma_Z^2$$

şi în fine

$$D^2(\overline{V}_{(3)}) = D^2(\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}),$$

care în urma efectuării calculelor şi înlocuirilor necesare conduce la :

$$(30)\qquad D^2(\overline{V}_{(3)}) = \frac{1}{n}(\sigma_X^2y^2z^2 + \sigma_Y^2x^2z^2 + \sigma_Z^2x^2y^2) + \frac{1}{n^2}(\sigma_X^2\sigma_Y^2z^2 + $$

$$+ \sigma_X^2\sigma_Z^2y^2 + \sigma_Y^2\sigma_Z^2x^2) + \frac{1}{n^3}\sigma_X^2\sigma_Y^2\sigma_Z^2.$$

Pentru a vedea care estimaţie se impune din punct de vedere al preciziei efectuăm diferenţele :

$$D^2(\overline{V}_{(1)}) - D^2(\overline{V}_{(2)}) \quad \text{şi} \quad D^2(\overline{V}_{(2)}) - D^2(\overline{V}_{(3)}).$$

Din relaţiile obţinute mai sus se obţine imediat :

$$(31 \qquad {}_{(1)}) - D^2(\overline{V}_{(2)}) = \frac{1}{n}(x^2\sigma_Y^2\sigma_Z^2 + y^2\sigma_X^2\sigma_Z^2 + \sigma_X^2\sigma_Y^2\sigma_Z^2)\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

şi

$$(32)\qquad D^2(\overline{V}_{(2)}) - D^2(\overline{V}_{(3)}) = \frac{1}{n} z^2\sigma_X^2\sigma_Y^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2}\sigma_X^2\sigma_Y^2\sigma_Z^2\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

De aici rezultă că

$$(33)\qquad D^2(\overline{V}_{(1)}) > D^2(\overline{V}_{(2)} > D^2(\overline{V}_{(3)})$$

ceea ce înseamnă că din punct de vedere al preciziei se recomandă să se folosească estimaţia $\overline{V}_{(3)}$.

Din punct de vedere teoretic, consideraţiile se pot extinde luînd „corpuri'' în spaţii euclidiene cu mai multe dimensiuni, rezultatele obţinute rămînînd, cu modificările de rigoare, valabile.

Primită la redacţie la 12 septembrie 1968

Centrul de statistică matematică al Academiei
Republicii Socialiste România
Calea Griviţei nr. 21, Bucureşti 12

(ABSTRACT)

A formula for the variance of arbitrary number of random variables is given in the first point.

Then several particulary formulas and an application are given.

BIBLIOGRAFIE

1. Ciucu G., *Elemente de teoria probabilităţilor şi statistică matematică*. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1963.
2. Creangă-Sâmboan A., *Asupra dispersiei produsului de variabile aleatoare independente*. St. cerc. mat., **18**, *9* (1966).
3. Goodman A. L., *On the exact variance of products*. Journal of the American Statistical Association, **55**, *292*, (1960).
4. Iosifescu M., Mihoc Gh., Theodorescu R., *Teoria probabilităţilor şi statistica matematică*. Editura tehnică, Bucureşti, 1966.
5. Onicescu O., Mihoc Gh., *Lecţii de statistică matematică*. Editura tehnică, Bucureşti, 1958

FUNCTORII DERIVAŢI AI UNUI FUNCTOR ADITIV

DE

MIHAELA ŞABAC

Lucrarea are ca scop calculul functorilor derivaţi ai unui functor aditiv $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ de la o categorie aditivă cu limite inductive finite şi nuclee universale, $\mathcal{C}$, într-o categorie cu limite inductive oarecare, $\mathcal{C}'$.

Fie $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor covariant, aditiv şi exact la stînga definit de la o categorie aditivă $\mathcal{C}$ în care există limite inductive finite, iar nucleele sînt presupuse universale, cu valori într-o categorie aditivă $\mathcal{C}'$ în care există limite inductive oarecare.

F este exact la stînga în sensul că, dat fiind şirul $0 \to X \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \to 0$ în $\mathcal{C}$ cu $\alpha = \mathrm{Ker}\beta$ şi $\beta = \mathrm{Coker}\alpha$, vom avea $F(\alpha) = \mathrm{Ker}\, F(\beta)$ în $\mathcal{C}'$.

În această notă ne propunem calcularea functorilor derivaţi ai functorului F. Un exemplu de astfel de functor este functorul de completare T definit pe categoria grupurilor abeliene topologice.

Pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, se consideră categoria $\mathcal{C}_X$ ale cărei obiecte sînt şiruri exacte

$$0 \to X \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \to 0$$

cu M, $N \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, $\alpha = \mathrm{Ker}\, \beta$ şi $\beta = \mathrm{Coker}\alpha$, iar morfismele sînt perechi $u = (f, g)$ astfel încît diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha'"] & M' \arrow[r, "\beta'"] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă.

Definiţie. Vom spune că obiectele $a : 0 \to X \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \to 0$ şi $a' : 0 \to X \xrightarrow{\alpha'} M' \xrightarrow{\beta'} N' \to 0$ sînt în relaţia $a' \leqslant a$ dacă există un morfism $u : a \to a'$.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 6, P. 965-972, BUCUREŞTI, 1969

PROPOZIŢIA 1. *Cu preordinea definită mai sus, $\mathcal{C}_X$ este filtrantă la dreapta.*

Într-adevăr, fie : $a_1 : 0 \to X \xrightarrow{\alpha_1} M_1 \xrightarrow{\beta_1} N_1 \to 0$

$$a_2 : 0 \to X \xrightarrow{\alpha_2} M_2 \xrightarrow{\beta_2} N_2 \to 0$$

şi fie $a : 0 \to X \xrightarrow{i_1\alpha_1 + i_2\alpha_2} M_1 + M_2 \xrightarrow{\sigma} R \to 0$, unde i_1 şi i_2 sînt injecţiile canonice în suma directă ale obiectelor M_1 şi M_2 respectiv, iar $(R, \sigma) = \operatorname{Coker}(i_1\alpha_1 + i_2\alpha_2)$. Atunci

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "i_1\alpha_1+i_2\alpha_2"] \arrow[d, equal] & M_1 \oplus M_2 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "r_1"'] & R \arrow[r] \arrow[d, dashed, "q_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha_1"] & M_1 \arrow[r, "\beta_1"] & N_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$p_1(i_1\alpha_1 + i_2\alpha_2) = \alpha_1$$

$$\beta_1 p_1 (i_1\alpha_1 + i_2\alpha_2) = 0\,;$$

prin urmare există şi este unic un morfism $q_1 : R \to N_1$ care face pătratul din dreapta comutativ (existenţa lui q_1 rezultă din proprietatea de universalitate a conucleului).

Deci $a_1 \leqslant a$. Analog rezultă şi $a_2 \leqslant a$.

Dată diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha'"] & M' \arrow[r, "\beta'"] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

cu liniile exacte, vom obţine diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
F(M) \arrow[r, "F(\beta)"] \arrow[d, "F(f)"'] & F(N) \arrow[r] \arrow[d, "F(g)"'] & \operatorname{Coker} F(\beta) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{a}_{a'}"'] & 0 \\
F(M') \arrow[r, "F(\beta')"] & F(N') \arrow[r] & \operatorname{Coker} F(\beta') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Atunci $(\operatorname{Coker} F(\beta), \varphi^{a}_{a'})$ vor forma un sistem inductiv în categoria $\mathcal{C}'$.

Vom defini acum un functor $S^1F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ punînd $S^1F(X) = \varinjlim\limits_{\mathcal{C}_X} \operatorname{Coker} F(\beta)$ pentru orice $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$.

Dacă $X_1 \xrightarrow{h} X_2$ este un morfism în $\mathcal{C}$, vom defini imaginea lui h prin S^1F astfel :

Fiecărui obiect $a : 0 \to X_1 \to M_1 \to N_1 \to 0$ din $\mathcal{C}_{X_1}$ îi vom asocia un obiect din $\mathcal{C}_{X_2}$ pe care-l vom nota $h^*(a)$.

$h^*(a)$ se obține din diagrama comutativă:

(1)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & N_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "i"] & M_1 \amalg_{X_1} X_2 \arrow[r, "q"] & N_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

în care q este determinat de condiția $q \circ i = 0$.

$h^*(a)$ este $0 \to X_2 \to M_1 \amalg_{X_1} X_2\, N_1 \overset{q}{\to} N_1 \to 0$.

S-a definit o aplicație $h^* : \mathcal{C}_{X_1} \to \mathcal{C}_{X_2}$ care păstrează ordinea:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & X_2 \arrow[rr] & & M_1 \amalg_{X_1} X_2 \arrow[rr] \arrow[ddd, dashed] & & N_1 \arrow[rr] & & 0 \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[rr] \arrow[ur, "h"] \arrow[d, equal] & & M_1 \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[d] & & N_1 \arrow[rr] \arrow[ur, equal] \arrow[d] & & 0 & \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[rr] \arrow[dr, "h"'] & & M_1' \arrow[rr] \arrow[dr] & & N_1' \arrow[rr] \arrow[dr, equal] & & 0 & \\
 & 0 \arrow[r] & X_2 \arrow[rr] & & M_1' \amalg_{X_1} X_2 \arrow[rr] & & N_1' \arrow[rr] & & 0
\end{tikzcd}$$

cu alte cuvinte, $a, a' \in \mathcal{C}_{X_1}$, $a' \leqslant a$, implică $h^*(a') \leqslant h^*(a)$.

Din diagrama comutativă (1) obținem următoarea diagramă comutativă

$$\begin{tikzcd}
F(M_1) \arrow[r, "F(\beta_1)"] \arrow[d] & F(N_1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \operatorname{Coker} F(\beta_1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
F(M_1 \amalg_{X_1} X_2) \arrow[r, "F(q)"] & F(N_1) \arrow[r] & \operatorname{Coker} F(q) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

din care rezultă (cînd a parcurge $\mathcal{C}_{X_1}$), un unic morfism

$$S^1 F(h) : S^1 F(X_1) \to S^1 F(X_2).$$

PROPOZIȚIA 2. *Functorul* $S^1 F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *este aditiv.*

Pentru a demonstra propoziția va fi suficient să arătăm că

$$S^1 F(X \oplus X') = S^1 F(X) \oplus S^1 F(X').$$

Pentru aceasta reamintim următorul rezultat.

LEMA 1. *Fie* I *un sistem inductiv și* $J \subseteq I$. *Dacă pentru orice* $h : i \to j$ *în* I, *există* $i', j' \in J$, $g : i' \to j'$ *și* $\alpha : i \to i'$, $\beta : j \to j'$ *astfel încît următoarea diagramă să fie comutativă*

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\alpha"'] & j \arrow[d, "\beta"] \\
i' \arrow[r, "g"'] & j'
\end{tikzcd}$$

(*cu alte cuvinte* J *este cofinal cu* I), *atunci* $\varinjlim_I = \varinjlim_J$.

Vom defini în $\mathcal{C}_{X\oplus X'}$ un subsistem inductiv, cofinal cu $\mathcal{C}_{X\oplus X'}$. Pentru orice $a\in\mathcal{C}_X$ şi $a'\in\mathcal{C}_{X'}$,

$$a : 0\to X\to M\to N\to 0$$

$$a' : 0\to X'\to M'\to N'\to 0$$

se consideră şirul exact

$$0\to X\oplus X'\to M\oplus M'\to N\oplus N'\to 0$$

pe care-l vom nota $a\ast a'$ şi care aparţine lui $\mathcal{C}_{X\oplus X'}$. Sistemul şirurilor $a\ast a'$ împreună cu morfismele sumă, cu $a\in\mathcal{C}_X$ şi $a'\in\mathcal{C}_{X'}$ formează un subsistem în $\mathcal{C}_{X\oplus X'}$ pe care îl notăm $\mathcal{C}_x\ast\mathcal{C}_{X'}$.

LEMA 2. *$\mathcal{C}_x\ast\mathcal{C}_{X'}$ este cofinal cu $\mathcal{C}_{X\oplus X'}$*

Demonstraţie. Fie

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X\oplus X' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & R \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"'] & T \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X\oplus X' \arrow[r, "\alpha_1"] & R_1 \arrow[r, "\beta_1"] & T_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

un morfism în $\mathcal{C}_{X\oplus X'}$.

Se consideră morfismul $X'\xrightarrow{i_{X'}}X\oplus X'\xrightarrow{\alpha}R$.

$i_{X'}$ este un monomorfism strict deoarece $p_{X'}\circ i_{X'}=1_{X'}$, $1_{X'}$ este monomorfism strict, deci $i_{X'}$ este un monomorfism strict [3]; α este şi el un monomorfism strict fiind un nucleu.

Prin urmare $\alpha\circ i_{X'}$ este un monomorfism strict.

Fie $(M,q)=\operatorname{Coker}(\alpha\circ i_{X'})$.

Vom avea

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "i_{X'}"] & X\oplus X' \arrow[r, "\alpha"] & R \arrow[r, "q"] & M \\
 & & X \arrow[u, "i_X"] \arrow[urr, "q\circ\alpha\circ i_X"'] & & \\
 & & Y \arrow[u, "u"] \arrow[uul, dashed, "v"] & &
\end{tikzcd}$$

unde q este un epimorfism.

Se arată că morfismul $q\circ\alpha\circ i_x$ este un monomorfism. Într-adevăr, fie $Y\overset{u}{\to}X$ astfel încît $q\circ\alpha\circ i_x\circ u=0$.

Dar $(X',\ \alpha\circ i_{X'})$ este un nucleu pentru q, deci există şi este unic $v : Y\to X'$ astfel încît $\alpha\circ i_{x'}\circ v=\alpha\circ i_x\circ u$; α fiind monomorfism, rezultă

$$i_{X'}\circ v=i_x\circ u$$

$$p_x\circ i_{X'}\circ v=p_x\circ i_x\circ u$$

$$0=u$$

deci $q\circ\alpha\circ i_x$ este un monomorfism.

Se obține următorul șir exact:

$$a : 0 \to X \xrightarrow{q \circ \alpha \circ i_X} M \xrightarrow{\mu} N \to 0,$$

unde $N = \operatorname{Coker}(q \circ \alpha \circ i_x)$. Notăm acest șir exact cu a; el aparține lui $\mathcal{C}_x$.

Construim acum un nou șir exact a', în felul următor:

$$X \xrightarrow{i_X} X \oplus X' \xrightarrow{\alpha} R$$

$(M', q') = \operatorname{Coker}(\alpha \circ i_x)$ și cu totul analog se obține:

$$a' : 0 \to X' \xrightarrow{q' \circ \alpha \circ i_{X'}} M' \xrightarrow{\mu'} N' \to 0, \; a' \in \mathcal{C}_{X'}$$

Șirul $a_1 : 0 \to X \to M_1 \to N_1 \to 0$ se obține punînd $M_1 = \operatorname{Coker}(\alpha_1 \circ i_X{}')$

$$X' \xrightarrow{i_{X'}} X \oplus X' \xrightarrow{\alpha_1} R_1$$

iar șirul $a_1' : 0 \to X' \to M_1' \to N_1' \to 0$ punînd $M_1' = \operatorname{Coker}(\alpha_1 \circ i_x)$

$$X \xrightarrow{i_X} X \oplus X' \xrightarrow{\alpha_1} R_1.$$

Vom avea diagramele comutative:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \oplus X' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & R \arrow[r] \arrow[d, "f"] & M \arrow[d, dashed, "\gamma"] \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r] & X \oplus X' \arrow[r, "\alpha_1"] & R_1 \arrow[r] & M_1
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \oplus X' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & R \arrow[r] \arrow[d, "f"] & M' \arrow[d, dashed, "\gamma'"] \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & X \oplus X' \arrow[r, "\alpha_1"] & R \arrow[r] & M_1'
\end{tikzcd}$$

În $\mathcal{C}_x \ast \mathcal{C}_{X'}$ se consideră obiectele $a \ast a'$ și $a_1 \ast a_1'$ și morfismul $(\gamma \oplus \gamma', \delta \oplus \delta')$, de la $a \ast a'$ în $a_1 \ast a_1'$ ($\delta : N \to N_1$ și $\delta' : N' \to N_1'$ sînt morfismele induse între conuclee.)

În sfîrșit, avem diagrama

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "f"] \arrow[d] & R_1 \arrow[d] \\
M \oplus M' \arrow[r, "\gamma \oplus \gamma'"] & M_1 \oplus M_1'
\end{tikzcd}$$

în care morfismele verticale se definesc în mod evident și a cărei comutativitate este imediată, ceea ce termină demonstrația lemei 2. Pentru a demonstra propoziția 2, vom considera (cu notațiile din lema 2),

$$0 \to F(X) \to F(M) \xrightarrow{F(\mu)} F(N) \to \operatorname{Coker} F(\mu) \to 0$$

$$0 \to F(X') \to F(M') \xrightarrow{F(\mu')} F(N') \to \operatorname{Coker} F(\mu') \to 0$$

şi

$$0 \to F(X \oplus X') \to F(M \oplus M') \to F(N \oplus N') \to \operatorname{Coker} F(\mu) \oplus \operatorname{Coker} F(\mu')$$

$$0 \to F(X \oplus X') \to F(M \oplus M') \to F(N \oplus N') \to \operatorname{Coker} F(\mu \oplus \mu') \to 0$$

Din lema celor cinci vom avea

$$\operatorname{Coker} F(\mu) \oplus \operatorname{Coker} F(\mu') \approx \operatorname{Coker} F(\mu \oplus \mu')$$

Atunci, în virtutea lemei 1, putem scrie :

$$\varinjlim_{\mathcal{C}_{X \oplus X'}} \operatorname{Coker} F(\cdot) = \varinjlim_{\mathcal{C}_X * \mathcal{C}_{X'}} \operatorname{Coker} F(\mu \oplus \mu') =$$

$$= \varinjlim_{\mathcal{C}_X * \mathcal{C}_{X'}} [\operatorname{Coker} F(\mu) \oplus \operatorname{Coker} F(\mu')] =$$

$$= \varinjlim_{\mathcal{C}_X} \operatorname{Coker} F(\mu) \oplus \varinjlim_{\mathcal{C}_{X'}} \operatorname{Coker} F(\mu'),$$

adică

$$S^1 F(X \oplus X') = S^1 F(X) \oplus S^1 F(X').$$

Vom defini $S^n F = S^1 (S^{n-1} F)$ pentru $n > 1$ şi vom arăta că $(S^n F)_{n \geqslant 0}$ este un ∂-functor universal în sensul [3].

Vom începe prin a defini morfismul bord :

Fie $a : 0 \to X' \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} X'' \to 0$ un şir exact în $\mathcal{C}$; vom avea $F(X) \xrightarrow{F(\beta)} F(X'') \xrightarrow{pa} \operatorname{Coker} F(\beta)$ şi cum şirul exact $a \in \mathcal{C}_{X'}$, fie i_a : $\operatorname{Coker} F(\beta) \to S^1 F(X')$ morfismul canonic în limita inductivă. Atunci $i_a \circ p_a : F(X'') \to S^1 F(X')$ este morfismul bord pentru dimensiunea zero. Pentru $n \geqslant 1$ se procedează la fel.

Dacă avem următoarea diagramă comutativă cu linii exacte :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & X'' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Y \arrow[r, "\gamma"] & Y'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

rezultă diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(\beta)"] \arrow[d] & F(X'') \arrow[r] \arrow[d, "F(g)"] & \operatorname{Coker} F(\beta) \arrow[d] \\
F(Y) \arrow[r, "F(\gamma)"] & F(Y'') \arrow[r] & \operatorname{Coker} F(\gamma)
\end{tikzcd}$$

care induce diagrama

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Coker} F(\beta) \arrow[r] \arrow[d] & S^1 F(X') \arrow[d, "S^1 F(f)"] \\
\operatorname{Coker} F(\gamma) \arrow[r] & S^1 F(Y')
\end{tikzcd}$$

comutativă.

Din ultimele două diagrame rezultă imediat comutativitatea diagramei :

$$\begin{tikzcd}
F(X'') \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "F(g)"'] & S^1 F(X') \arrow[d, "S^1 F(f)"] \\
F(Y'') \arrow[r, "\partial"] & S^1 F(Y')
\end{tikzcd}$$

Analog pentru $n \geqslant 1$.

Şirul următor, dedus din $a \in \mathcal{C}_{X'}$, este un complex :

$$0 \to F(X') \xrightarrow{F(\alpha)} F(X) \xrightarrow{F(\beta)} F(X'') \xrightarrow{\partial} S^1 F(X') \xrightarrow{S^1F(\alpha)} S^1 F(X) \to \dots$$

$$F(\beta) \circ F(\alpha) = F(\beta \circ \alpha) = F(0) = 0$$

$$\partial \circ F(\beta) = i_a \circ p_a \circ F(\beta) = 0 \text{ deoarece } p_a \circ F(\beta) = 0.$$

DEFINIŢIE, [3]. Spunem că un ∂-functor U este universal dacă, pentru orice ∂-functor T, aplicaţia

$$\mathrm{Hom}\,(U, T) \to \mathrm{Hom}\,(U^{\circ}, T^{\circ})$$

indusă de proiecţia pe componente, este bijectivă.

PROPOZIŢIA 3. $(S^n F)_{n \geqslant 0}$ ($S \circ F = F$ prin alegere) este un ∂-functor universal.

A rămas de demonstrat proprietatea de universalitate a lui $(S^n F)_{n \geqslant 0}$.

Fie $\varphi : F \to T^{\circ}$ un morfism functorial.

Dat şirul exact $a : 0 \to X' \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} X'' \to 0$, vom avea pentru ∂-functorul T ($T = (T^n)_{n \geqslant 0}$) următorul complex :

$$0 \to T^{\circ}(X') \to T^{\circ}(X) \to T^{\circ}(X'') \xrightarrow{\partial_T} T^1(X') \to \dots$$

iar pentru functorul F şirul exact

$$F(X) \xrightarrow{F(\beta)} F(X'') \xrightarrow{p_a} \mathrm{Coker}\, F(\beta) \to 0$$

şi atunci se consideră :

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(\beta)"] \arrow[d, "\varphi(X)"'] & F(X'') \arrow[r, "p_a"] \arrow[d, "\varphi(X'')"] & \mathrm{Coker}\, F(\beta) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\theta_a"] & 0 \\
T^{\circ}(X) \arrow[r, "T^{\circ}(\beta)"] & T^{\circ}(X'') \arrow[r, "\partial_T"] & T^1(X') \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

$\partial_T \circ \varphi(X'') \circ F(\beta) = \partial_T \circ T^{\circ}(\beta) \circ \varphi(X) = 0$ deoarece $\partial_T \circ T^{\circ}(\beta) = 0$. Atunci, din proprietatea de universalitate a conucleului rezultă existenţa unui morfism $\theta_a : \mathrm{Coker}\, F(\beta) \to T^1(X')$. Dacă şirul a parcurge $\mathcal{C}_{X'}$, există şi este unic un morfism $S^1 F(X') \to T^1(X')$ pe care-l notăm $\varphi^1(X')$.

Am definit morfismul functorial $\varphi^1 : S^1 F \to T^1$ pentru obiectul $X' \in \mathcal{C}$. La fel se procedează pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ şi pentru $n > 1$.

Primită la redacţie la 1 iulie 1968

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Calea Griviţei nr. 21, Bucureşti 12

(RÉSUMÉ)

On se propose le calcul des foncteurs dérivés d'un foncteur additif $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, où $\mathcal{C}$ est une catégorie dans laquelle existent des limites inductives finies, et C′ une catégorie à limites inductives quelconques.

BIBLIOGRAFIE

1. Buchsbaum D. A., *Sattelites and universal functors.* Annals of Mathematics, **71**, *2*, March. 1960.
2. Bucur I., *Algebră omologică,* Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1965.
3. Jurchescu M., *Categorii* (în volumul *Topologie, Categorii. Supraf. riemanniene.* de C. Andreian Cazacu, A. Deleanu şi M. Jurchescu), Ed. Academiei, Bucureşti, 1966.

ORSZÁGOS M SZAKIKÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date din text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa Comitetului de redacţie, Calea Griviţei nr. 21, Bucureşti 12

1969 JUL 18

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRA ANDREIAN-CAZACU, A. DELEANU, M. JURCHESCU, **Topologie, Categorii, Suprafeţe riemanniene**, 1967, 394 p., 21,50 lei.

I. COLOJOARĂ, **Elemente de teorie spectrală**, 1968, 311 p., 19,50 lei.

I. CUCULESCU, **Procese Markov şi funcţii excesive**, 1968, 356 p., 19 lei.

L. DRAGOŞ, **Magnetodinamica fluidelor**, 1969, 476 p., 27 lei.

ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, **Introducere în hidrodinamica corpurilor poroase**, 1969, 212 p., 8 lei.

AL. GHIKA, **Analiza funcţională**, 1967, 594 p., 31 lei.

ALEXANDRU GHIKA, **Opera matematică**, 1968, 955 p., 50 lei.

SILVIU GUIAŞU, **Aplicaţii ale teoriei informaţiei. Sisteme dinamice. Sisteme cibernetice**, 1968, 350 p., 17 lei.

A. HALANAY, D. WEXLER, **Teoria calitativă a sistemelor cu impulsuri**, 1968, 313 p., 13 lei.

M. IOSIFESCU şi P. TĂUTU, **Procese stohastice şi aplicaţii în biologie şi medicină**, 1968, 345 p., 22 lei.

RADU ROŞCA, **Geometria diferenţială a congruenţelor în spaţiul eliptic**, 1969, 208 p., 9,75 lei.

IVAN SINGER, **Cea mai bună aproximare în spaţii vectoriale normate prin elemente din subspaţii vectoriale**, 1967, 386 p., 23 lei.

MARIUS I. STOKA, **Geometrie integrală**, 1967, 240 p., 9,75 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 6, P. 829–972, BUCUREŞTI, 1969

I. P. I. — c. 3322

43831

Lei 20.

F 762

04-001/1

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

7

TOMUL 21

1969

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMANIA

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție.

La revue „STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE", paraît 10 fois par an. Le prix d'un abonnement annuel este de $ 10 — ; £ 4.3.0; F.F.49. — ; D.M.40—.
Toute commande de l'étranger sera adressée à CARTIMEX, Boite postale 134—135, Roumaine, ou à ses représentants à l'étranger. En Roumanie, vous pourrez vous abonner par les bureaux de poste ou chez votre facteur.
În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență se trimit la Comitetul de redacție al revistei pe adresa: Calea Griviței nr. 21, București 12.

F 762

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR DOKUMENTÁCIÓS 1883

OM. 21, Nr. 7
1969

STUDII ȘI CERCETĂRI
MATEMATICE

SUMAR

Pag.

M. BALÁZS, F. BÎRSAN, Asupra unor metode iterative cu diferențe divizate de ordinul doi și rapiditatea de convergență de ordinul trei pentru rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare 975
M. BALÁZS, G. GOLDNER, Diferențe divizate în spații Banach și unele aplicații ale lor 985
O. BERECHET, Asupra ecuației bicalorice 997
ANCA CREANGĂ-SÂMBOAN, Asupra invarianței unui model statistic. 1005
ȘTEFAN CRUCEANU, Construcția soluțiilor unei ecuații integrale de tip Hammerstein. 1009
CSABA FABIAN, Generarea coeficienților Simpson pentru cazul integralelor multiple 1015
A. GAIDICI, F. FORNWALD, Asupra metodelor convergente de ordinul 3 aplicate la rezolvarea ecuațiilor funcționale neliniare 1019
ADELINA GEORGESCU, Criterii de stabilitate liniară a mișcării plan paralele a unui fluid nenewtonian 1027
G. GODINI, Despre o extensiune a teoremei lui Milman. 1037
D. HOMENTCOVSCHI, Asupra relațiilor de salt din electrodinamică. 1041
C. IVAN, I. VĂDUVA, As upra repartiției coeficientului de variabilitate. 1047
N. MARCOV, Asupra mișcării fluidelor vîscoase, electroconductoare în jurul unei plăci plane 1063
ȘT. MITITELU, Extinderea unei probleme de maxim la rețele oarecare de transport 1073
F. M. PASCAL, Evaluarea erorii în rezolvarea aproximativă a unor probleme la limită pentru ecuația de tip parabolic 1083
OCTAVIAN POPESCU, Asupra unei inegalități de tip Kolmogorov 1099
STEPHAN — YLAN SOLOMON, Lingvistica algebrică și teoria modelelor.. 1107
NICOLAE I. TIȚĂ, ω—Baze în spații Hilbert 1135
RECENZIE 1141

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 7, P. 973–1142, BUCUREȘTI, 1969

SZÁGOS MŰSZAKI DOKUMENTÁCIÓS 1883

ASUPRA UNOR METODE ITERATIVE CU DIFERENŢE DIVIZATE DE ORDINUL DOI ŞI RAPIDITATEA DE CONVERGENŢĂ DE ORDINUL TREI PENTRU REZOLVAREA ECUAŢIILOR OPERAŢIONALE NELINIARE

DE

M. BALÁZS şi F. BÎRSAN
(Cluj)

Se stabilesc două teoreme de existenţă şi de unicitate a soluţiei ecuaţiei (1)

Fie ecuaţia

$$P(x) = x - \Phi(x) = 0, \tag{1}$$

unde $P(x)$ este un operator neliniar şi continuu care transformă spaţiul Banach X în el însuşi şi care are diferenţe divizate pînă la ordinul trei.

S. Ulm în lucrarea sa [1] dă o clasă a metodelor de iteraţie, pentru rezolvarea ecuaţiei (1) cu ajutorul diferenţelor divizate şi cu rapiditatea de convergenţă de ordinul al treilea. M. Balázs şi G. Goldner în [2] şi [3] studiază alte metode iterative cu ajutorul diferenţelor divizate, analoge metodei parabolelor tangente, respectiv hiperbolelor tangente pentru rezolvarea aceleeaşi ecuaţii.

În această lucrare stabilim două teoreme de existenţă şi de unicitate a soluţiei ecuaţiei (1), folosind metodele de iteraţie date în [2] şi [3], obţinînd acelaşi ordin de convergenţă ca şi în [1]. Avantajul folosirii acestor metode constă în următoarele : formulele date în [2] şi [3] sînt mai simple conţinînd un număr mai mic de termeni, decît cea din [1] şi cu ajutorul acestor metode demonstrăm existenţa şi unicitatea soluţiei precum şi convergenţa procedeelor. (În [1] autorul presupune existenţa soluţiei ecuaţiei într-o sferă precizată şi demonstrează doar convergenţa procedeului.)

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 7, P. 975–984, BUCUREŞTI, 1969

În cele ce urmează, pentru diferențele divizate ale operatorului P, vom folosi următoarele notații $P(x', x'')$, $P(x', x'', x''')$, $P(x', x'', x''', x^{IV})$.

Fie mai departe

$$u_n = \Phi(x_n),\ v_n = \Phi[\Phi(x_n)] \text{ și}$$

$$\Gamma_n = [P(x_n, u_n)]^{-1},\ \tilde{\Gamma}_n = [P(u_n, v_n)]^{-1},\ \tilde{\tilde{\Gamma}}_n = [P(x_n, v_n)]^{-1}$$

inversele operatorilor $P(x_n, u_n)$, $P(u_n, v_n)$, $P(x_n, v_n)$.

TEOREMA 1. *Dacă există un element* $x_0 \in X$ *pentru care sînt îndeplinite condițiile* :

1° $\| P(x_0) \| \leqslant \eta_0$;

2° *pentru orice* x', x'', x''', x^{IV} *din sfera* $S(\mathrm{x}_0, R)$:

$$\| x - x_0 \| \leqslant R \ \textit{ au loc delimitările}$$

a) $\| [P(x', x'')]^{-1} \| \leqslant B$,

b) $\| \Phi(x', x'') \| \leqslant K, (K \geqslant 1)$,

c) $\| P(x', x''\ x''') \| \leqslant M$,

d) $\| P(x', x'', x''', x^{IV}) \| \leqslant N$;

3° $E_0 h_0 < 1$, *unde*

$$E_0^2 = \frac{1}{1 - h_0(1 + h_0)} \left[(2 + K) + \left(1 + \frac{N}{BM^2} \right) K (1 + h_0)^3 \right],$$

$$h_0 = B^2 MK \eta_0,$$

$$1 - h_0(1 + h_0) > 0,$$

atunci în sfera $S(x_0, R)$, *unde* $R = (1 + K)\eta_0 + K^2 \Sigma$ *și* $\Sigma = (1 + h_0) \cdot B\eta_0 \sum_{n=0}^{\infty} (E_0 h_0)^{3^n - 1}$, *ecuația* (1) *are o singură soluție* x^* *către care converge șirul* (x_n) *definit prin algoritmul* :

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n P(x_n) - \Gamma_n P(x_n, u_n, v_n) \tilde{\Gamma}_n P(u_n) \tilde{\tilde{\Gamma}}_n (P(x_n), \tag{2}$$

iar rapiditatea de convergență se caracterizează prin inegalitatea

$$\| x^* - x_n \| \leqslant (E_0 h_0)^{3^n - 1} \Sigma \tag{3}$$

Demonstrație. Observații. 1. Pe baza condiției 1° și 2° se obține

$$\|P(u_0)\| = \|u_0 - \Phi(u_0)\| = \|\Phi(x_0) - \Phi(u_0)\| =$$

$$= \|\Phi(x_0, u_0)\| \cdot \|x_0 - u_0\| \leqslant K\eta_0$$

și

$$\|P(v_0)\| = \|v_0 - \Phi(v_0)\| = \|\Phi(u_0) - \Phi(v_0)\| = \|\Phi(u_0, v_0)\| \cdot \|u_0 - v_0\| \leqslant K^2\eta_0.$$

2. Din condiția 3° rezultă că $h_0 < 1$.

Avînd în vedere că punctele u_0 și v_0 se găsesc în sfera $S(x_0, R)$, pe baza formulei (2) se poate construi un x_1 pentru care urmează să arătăm că sînt satisfăcute condițiile 1° — 3°.

Din formula (2), pentru $n = 0$, pe baza condițiilor teoremei rezultă

$$\|x_1 - x_0\| \leqslant B\eta_0(1 + h_0). \tag{4}$$

Să considerăm operatorul auxiliar

$$\begin{aligned} F_0(x) = x - \Gamma_0 P(x) - \Gamma_0 P(x_0, u_0, v_0)\, \tilde{\Gamma}_0 P(x)\, \tilde{\tilde{\Gamma}}_0 P(x_0) - \\ - \Gamma_0 P(x_0, u_0, v_0)\, \tilde{\Gamma}_0 P(u_0)\, \tilde{\tilde{\Gamma}}_0 P(x) + \Gamma_0 P(x_0, u_0, v_0)\, \tilde{\Gamma}_0 P(x)\, \tilde{\tilde{\Gamma}}_0 P(x) \end{aligned} \tag{5}$$

care se bucură de proprietățile

$$F_0(x_0) = F_0(u_0) = F_0(v_0) = x_1,$$

$$F_0(x_0, u_0) = 0,$$

$$F_0(x_0, u_0, v_0) = 0.$$

Să scriem formula lui Newton pentru operatorul $F_0(x)$:

$$F_0(x) = F_0(x_0) + F_0(x_0, u_0, v_0, x)(x - v_0)(x - u_0)(x - x_0), \tag{6}$$

unde

$$F_0(x_0, u_0, v_0, x)(x - v_0)(x - u_0)(x - x_0) =$$

$$= - \Gamma_0 P(x_0, u_0, v_0, x)(x - v_0)(x - u_0)(x - x_0) -$$

$$- \Gamma_0 P(x_0, u_0, v_0)\, \tilde{\Gamma}_0 P(u_0)\, \tilde{\tilde{\Gamma}}_0 P(x_0, u_0, v_0, x)(x - v_0)(x - u_0(x - x_0) +$$

$$+\,\Gamma_0 P(x_0, u_0, v_0)\ \tilde{\Gamma}_0 P(u_0, v_0, x)(x - v_0)(x - u_0)\ \tilde{\tilde{\tilde{\Gamma}}}_0 P(x, x_0)(x - x_0) +$$

$$+\,\Gamma_0 P(x_0, u_0, v_0)\ \tilde{\Gamma}_0 P(u_0, v_0)(x - v_0)\ \tilde{\tilde{\tilde{\Gamma}}}_0 P(x_0, v_0, x)(x - u_0)(x - x_0) +$$

$$+\,\Gamma_0 P(x_0, u_0, v_0)\ \tilde{\Gamma}_0\ P(u_0)\ \tilde{\tilde{\tilde{\Gamma}}}_0 P(x_0, u_0, v_0\, x)(x - v_0)(x - u_0)(x - x_0)$$

Din formula (6), ținînd cont de condițiile teoremei și de operatorul (5) pentru $x = x_1$, se obține

$$\| P(x_1) \| [1 - MB \| x_1 - u_0 \|] \leqslant (N + BM^2) \| x_1 - v_0 \| \cdot \| x_1 - u_0 \| \cdot \| x_1 - x_0 \| +$$

$$+ \| P(x_0, u_0, v_0)\ \tilde{\Gamma}_0 P(u_0)\ \tilde{\tilde{\tilde{\Gamma}}}_0 P(x_0) + P(x_0, u_0, v_0)(x_1 - u_0)\ \tilde{\tilde{\tilde{\Gamma}}}_0 P(x_0) \|.$$

Folosind proprietatea $F_0(x_0) = F_0(u_0) = F_0(v_0) = x_1$ și condițiile teoremei, avem

$$(7) \qquad \begin{aligned} &\| x_1 - u_0 \| \leqslant BK \eta_0 (1 + h_0) \\ &\| x_1 - v_0 \| \leqslant BK^2 \eta_0 (1 + h_0). \end{aligned}$$

Relațiile (4) și (7) ne permit să evaluăm $\| P(x_1) \|$ în felul următor

$$(8) \quad \| P(x_1) \| \leqslant \frac{1}{1 - h_0(1 + h_0)} \left[(2 + K) + \left(1 + \frac{N}{BM^2} \right) K (1 + h_0)^3 \right] h_0^2 \eta_0.$$

De aici $\| P(x_1) \| \leqslant (E_0 h_0)^2 \eta_0 = \eta_1 < \eta_0$ și condiția 1° a teoremei este satisfăcută pentru x_1.

Condiția 2° este în mod evident satisfăcută.

Să verificăm condiția 3°. Avem

$$h_1 = B^2 MK \eta_1 < B^2 MK \eta_0 = h_0,$$

de unde rezultă că și $E_1 < E_0$ și astfel avem $h_1 E_1 < h_0 E_0$.

Deci toate condițiile teoremei sînt verificate pentru x_1.

Prin inducție completă se demonstrează că pe baza formulei (2), aproximația x_n poate fi construită pentru orice n și că au loc următoarele relații:

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\| P(x_n) \| \leqslant \eta_n, && \| x_{n+1} - x_n \| \leqslant B \eta_n (1 + h_n), \\ &\| P(u_n) \| \leqslant K \eta_n, && \| x_{n+1} - u_n \| \leqslant BK \eta_n (1 + h_n), \\ &\| P(v_n) \| \leqslant K^2 \eta_n, && \| x_{n+1} - v_n \| \leqslant BK^2 \eta_n (1 + h_n), \end{aligned}$$

$$10)\quad \| P(x_{n+1}) \| \leqslant \frac{1}{1 - h_n(1+h_n)} \left[(2 + K) + \left(1 + \frac{N}{BM^2}\right) K (1 + h_n)^3 \right] h_n^2 \, \eta_n$$

$$11)\qquad \eta_{n+1} \leqslant E_n h_n)^2 \, \eta_n .$$

Deoarece

$$h_n = B^2 MK \, \eta_n \leqslant \frac{1}{E_0} (E_0 \, h_{n-1})^3 \text{ pentru orice } n \geqslant 1,$$

avem

$$(12)\qquad h_n \leqslant \frac{1}{E_0} (E_0 \, h_0)^{3^n}$$

iar

$$(13)\qquad \eta_{n+1} \leqslant (E_0 \, h_0)^{3^n - 1} \, \eta_0 .$$

Pe baza relației (13) din (9) se obține

$$(14)\qquad \| x_{n+1} - x_n \| \leqslant (1 + h_0) \, B\eta_0 (E_0 \, h_0)^{3^n - 1}.$$

Folosind această ultimă inegalitate obținută, avem

$$(15)\quad \begin{aligned} &\| x_{n+p} - x_n \| \leqslant \| x_{n+p} - x_{n+p-1} \| + \| x_{n+p-1} - x_{n+p-2} \| + \ldots + \| x_{n+1} - \\ &- x_n \| \leqslant (1 + h_0) \, B\eta_0 (E_0 \, h_0)^{3^n - 1} \left[1 + (E_0 \, h_0)^{2 \cdot 3^n} + \ldots + (E_0 h_0)^{3^n (3^{p-1} - 1)}\right]. \end{aligned}$$

X fiind complet, rezultă că există $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^*$.

Dacă în relația (15) facem pe $p \to \infty$, obținem inegalitatea (3). Toate punctele $x_0, u_0, v_0, \ldots, x_n, u_n, v_n, \ldots$ aparțin sferei $S(x_0, R)$. În adevăr,

$$(16)\quad \begin{aligned} &\| x_0 - x_n \| \leqslant \| x_0 - x_1 \| + \| x_1 - x_2 \| + \ldots + \| x_{n-1} - x_n \| \leqslant \\ &\leqslant (1 + h_0) \, B (\eta_0 + \eta_1 + \ldots + \eta_n + \ldots) \leqslant (1 + h_0) \, B\eta_0 [1 + \\ &+ (E_0 \, h_0)^2 + \ldots + (E_0 \, h_0)^{3^n - 1} + \ldots] = \Sigma. \end{aligned}$$

Deoarece

$$\| u_{n-1} - u_n \| = \| \Phi(x_{n-1}) - \Phi(x_n) \| \leqslant K \| x_{n-1} - x_n \|,$$

avem în mod analog

$$\|x_0 - u_n\| = \|x_0 - u_0\| + \|u_0 - u_1\| + \ldots + \|u_{n-1} - u_n\| \leqslant$$

$$\leqslant \eta_0 + (1 + h_0) BK (\eta_0 + \eta_1 + \ldots + \eta_{n-1} + \ldots) \leqslant \eta_0 + K \Sigma.$$

În sfîrşit, deoarece

$$\|v_{n-1} - v_n\| = \| \Phi(u_{n-1}) - \Phi(u_n) \| \leqslant K^2 \|x_{n-1} - x_n\|,$$

avem

$$\|x_0 - v_n\| \leqslant \|x_0 - u_0\| + \|u_0 - v_0\| + \|v_0 - v_1\| + \ldots + \|v_{n-1} - v_n\| + \ldots$$

$$\leqslant \eta_0 + K\eta_0 + K^2 \Sigma = (1 + K) \eta_0 + K^2 \Sigma = R.$$

Fapul că x^* este soluţia ecuaţiei (1) rezultă din $\| P(x_n) \| \leqslant (h_0 E_0)^{3^n-1} \eta_0$. În adevăr, operatorul $P(x)$ fiind continuu, dacă $n \to \infty$, avem $P(x^*) = 0$. Deci x^* este soluţia ecuaţiei $P(x) = 0$. Din (16) rezultă că $x^* \in S(x_0, R)$.

Pentru a demonstra unicitatea soluţiei, presupunem că ar mai exista o soluţie $x^{**} \neq x^*$ în sfera $S(x_0, R)$. Pe baza condiţiei 2°a) avem

$$\| x^{**} - x_n \| = \| \Gamma(x^{**}, x_n) P(x^{**}, x_n)(x^{**} - x_n) \| \leqslant B(\| P(x^{**}) \| + \|P(x_n)\|)$$

de unde, deoarece $P(x^{**}) = O$, rezultă că

$$\| x^{**} - x_n \| \leqslant B \| P(x_n) \| \leqslant B(h_0 E_0)^{3^n-1} \eta_0, \text{ deci } \lim_{n\to\infty} x_n = x^{**}.$$

Cum avem şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$, din unicitatea limitei, rezultă că $x^{**} = x^*$, deci soluţia este unică.

Observaţii. 1°. Dacă $K < 1$ şi condiţiile teoremei 1 sînt satisfăcute pentru $K = 1$, atunci luînd în această teoremă peste tot $K = 1$, obţinem o teoremă de existenţă şi de unicitate a soluţiei ecuaţiei (1) pentru cazul $K < 1$.

2°. O altă teoremă de existenţă şi de unicitate a soluţiei ecuaţiei (1) în cazul $K < 1$ se obţine dacă în teorema 1 folosim următoarele date :

$$R = (1 + K) \eta_0 + \Sigma, \; h_0 = B^2 M \eta_0, \; E_0^2 = \frac{K}{1 - K h_0(1 + h_0)} \left[(2 + K)^2 + \right.$$

$$\left. + K^2 \left(1 + \frac{N}{BM^2}\right)(1 + h_0)^3 \right]$$

(păstrînd celelalte date, notaţii precum şi toate condiţiile). Teorema astfel obţinută se poate aplica, eventual, şi în cazul cînd teorema despre care s-a amintit în observaţia 1° nu este aplicabilă.

TEOREMA 2. *Dacă, pentru un element* $x_0 \in X$, *sînt satisfăcute condiţiile* 1° *şi* 2° *ale teoremei* 1 *iar în locul condiţiei* 3° *de la aceeaşi teoremă avem*

3° $G_0 h_0 < 1$, *unde*

$$G_0^2 = \frac{K(1 + BM\eta_0)[1 + BM\eta_0(1 + K)]}{(1 - h_0)^2(1 - 2h_0)}\left(1 + \frac{N}{BM^2}\right),$$

$$h_0 = B^2 MK\eta_0 < \frac{1}{2},$$

atunci ecuaţia (1) are o singură soluţie x^* *în sfera* $\widetilde{S}(x_0, \widetilde{R})$, *unde* $\widetilde{R} = (1 + K)\eta_0 + K^2\widetilde{\Sigma}$ *către care converge şirul* (x_n) *definit prin algoritmul*

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n[I - P(x_n, u_n, v_n)\,\widetilde{\Gamma}_n\,P(u_n)\,\Gamma_n]^{-1}P(x_n), \tag{17}$$

iar rapiditatea de convergenţă este caracterizată de inegalitatea

$$\|x^* - x_n\| \leqslant (G_0 h_0)^{3^n - 1}\,\widetilde{\Sigma}, \quad \textit{unde} \tag{18}$$

$$\widetilde{\Sigma} = [1 + (G_0 h_0)^2 + \ldots + (G_0 h_0)^{3^n - 1} + \ldots]\,2B\eta_0.$$

Demonstraţia. Raţionamentul este analog cu cel din teorema 1. Să folosim notaţia $R_0 = P(x_0, u_0, v_0)\,\widetilde{\Gamma}_0 P(u_0)\,\Gamma_0$. Pe baza condiţiilor teoremei avem

$$\|R_0\| = \|P(x_0, u_0, v_0)\,\widetilde{\Gamma}_0 P(u_0)\,\Gamma_0\| \leqslant B^2 MK\eta_0 = h_0 < 1$$

de unde rezultă că există operatorul $(I - R_0)^{-1}$ şi

$$\|(I - R_0)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - h_0}.$$

De aici, luînd în considerare că u_0, $v_0 \in \widetilde{S}$, rezultă că pe baza formulei (17) se poate construi elementul x_1, apoi se demonstrează că trecînd de la x_0 la x_1 condiţiile teoremei rămîn valabile.

Din relaţia (17), în baza condiţiilor teoremei şi a rezultatului de mai sus, făcînd pe $n = 0$, obţinem

$$\|x_1 - x_0\| \leqslant \frac{B\eta_0}{1 - h_0} < 2B\eta_0 \tag{19}$$

Considerăm operatorul auxiliar

$$H_0(x) = x - \Gamma_0 [I - P(x_0, u_0, v_0)\, \widetilde{\Gamma}_0 P(u_0)\, \Gamma_0]^{-1} P(x) + \tag{20}$$

$$+ \Gamma_0 [I - P(x_0, u_0, v_0) \widetilde{\Gamma}_0 P(u_0)\ \Gamma_0]^{-1} P(x_0, u_0, v_0)\ \widetilde{\Gamma}_0 P(x)(x - x_0)$$

care se bucură de aceleaşi proprietăţi ca şi operatorul (5). Avem mai departe

$$H_0(x_0, u_0, v_0, x)\ (x - v_0)(x - u_0)(x - x_0) =$$

$$= - \Gamma_0 [I - P(x_0, u_0, v_0) \widetilde{\Gamma}_0 P(u_0)\ \Gamma_0]^{-1} P(x_0, u_0, v_0, x)(x - v_0) \cdot$$

$$\cdot (x - u_0)(x - x_0) + \Gamma_0 [I - P(x_0, u_0, v_0)\ \widetilde{\Gamma}_0 P(u_0)\ \Gamma_0]^{-1} P(x_0, u_0, v_0)$$

$$\widetilde{\Gamma}_0 P(u_0, v_0, x)(x - v_0)(x - u_0)\ (x - x_0).$$

Pe baza formulei lui Newton aplicată operatorului $H_0(x)$ şi a condiţiilor teoremei, se obţine

$$\| P(x_1) \| [1 - MB \| x_1 - x_0 \|] \leqslant (N + BM^2) \| x_1 -$$

$$- v_0 \| \cdot \| x_1 - u_0 \| \cdot \| x_1 - x_0 \| \cdot$$

Din (20) şi din relaţiile $H_0(x_0) = H_0(u_0) = H_0(v_0) = x_1$ rezultă

$$\| x_1 - u_0 \| \leqslant \frac{BK \eta_0}{1 - h_0} (1 + BM \eta_0)$$

şi

$$\| x_1 - v_0 \| \leqslant \frac{BK^2 \eta_0}{1 - h_0} [1 + BM\eta_0(1 + K],$$

de unde avem

$$\| P(x_1)\| \leqslant \frac{K(1 + BM \eta_0) [1 + BM\eta_0(1 + K)]}{(1 - h_0)^2(1 - 2h_0)} \left(1 + \frac{N}{BM^2}\right) h_0{}^2\ \eta_0 \tag{21}$$

sau

$$\| P(x_1) \| \leqslant (G_0 h_0)^2\ \eta_0 = \eta_1 < \eta_0 ;$$

ceea ce demonstrează valabilitatea condiţiei 1° pentru x_1.

Condiţia 2° este evidentă iar condiţia 3° se demonstrează analog cu cea din teorema 1.

Prin inducţie completă se poate demonstra că pe baza formulei (17) se poate construi x_n pentru orice n şi că au loc relaţiile

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \frac{B\eta_n}{1-h_n} \leqslant 2B\eta_n,$$

$$\|x_{n+1} - u_n\| \leqslant \frac{BK\eta_n}{1-h_n}(1+BM\eta_n) < 2BK\eta_n(1+BM\eta_n),$$

(22)

$$\|x_{n+1} - v_n\| \leqslant \frac{BK^2\eta_n}{1-h_n}[(1+BM\eta_n(1+K)] <$$

$$< 2BK^2\eta_n[1+BM\eta_n(1+K)].$$

$$\|P(x_{n+1})\| \leqslant \frac{K(1+BM\eta_n)[1+BM\eta_n(1+K)]}{(1-h_n)^2(1-2h_n)}\left(1+\frac{N}{BM^2}\right)h_n^2\ \eta_n \tag{23}$$

$$\eta_{n+1} \leqslant (G_n h_n)^2 \eta_n, \tag{24}$$

unde

$$h_n = B^2 MK\eta_n.$$

Analog cu relaţiile (13) vom obţine

$$h_n \leqslant \frac{1}{G_0}(G_0 h_0)^{3^n} \tag{25}$$

şi

$$\eta_{n+1} \leqslant (G_0 h_0)^{3^{n+1}-1}\eta_0. \tag{26}$$

Folosind această ultimă relaţie în prima inegalitate din (22) avem

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant 2B\eta_0(G_0 h_0)^{3^n-1}. \tag{27}$$

Cu ajutorul inegalităţi (27) avem

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant 2B\eta_0[(G_0 h_0)^{3^n-1} + (G_0 h_0)^{3^{n+1}-1} + \ldots + (G_0 h_0)3^{n+p-1}-1]. \tag{28}$$

Din aceleaşi motive ca şi în teorema 1, ecuaţia (1) are o soluţie x^*. Dacă în (28) facem ca $p \to \infty$, obţinem inegalitatea (18) care caracterizează rapiditatea convergenţei şirului (17). Şi în acest caz în mod evident avem $x^* \in \widetilde{S}$.

Faptul că punctele $x_0, u_0, v_0, \dots, x_n, u_n, v_n, \dots$ aparţin sferei $\widetilde{S}(x_0, \widetilde{R})$ precum şi că x^* este singura soluţie a ecuaţiei $P(x) = 0$ se arată la fel ca şi teorema 1.

Observaţii. 1°. Dacă $K<1$ şi condiţiile teoremei 2 sînt satisfăcute pentru $K = 1$, atunci luînd în această teoremă peste tot $K = 1$, avem o teoremă de existenţă şi de unicitate a soluţiei ecuaţiei (1) pentru cazul $K<1$.

2°. Obţinem o altă teoremă în cazul $K < 1$ dacă în teorema 2 folosim următoarele date $\widetilde{R} = (1 + K)\,\eta_0 + \widetilde{\Sigma}$, $h_0 = B^2M\eta_0$ şi

$$G_0^2 = \frac{K(1 + BM\eta_0)\,[1 + BM\eta_0(1 + K)]}{(1 - Kh_0)^2\,[1 - (1 + K)h_0]}\left(1 + \frac{N}{BM^2}\right).$$

3°. Teoremele 1 şi 2 rămîn valabile dacă în locul condiţiei

$$\| P(x', x'', x''', x^{\mathrm{IV}}) \| \leqslant N,$$

considerăm condiţia

$$\| P(x', x'', x''') - P(x'', x''', x^{\mathrm{IV}}) \| \leqslant N \|x' - x^{\mathrm{IV}}\|.$$

Primită la redacţie la 16 mai 1968

Universitatea ,,Babeş-Bolyai'' Cluj

ON CERTAIN ITERATIVE METHODS WITH DIFFERENCE QUOTIENTS OF SECOND ORDER, WITH THE RAPIDITY OF CONVERGENCE OF THIRD ORDER, FOR SOLVING NONLINEAR OPERATIONAL EQUATIONS

(ABSTRACT)

In this paper there are exposed some existence and uniqueness theorems for the solution of the nonlinear operational equation $P(x) = x - \Phi(x) = 0$ with the iterative methods of [2] and [3], with the rapidity of convergence of the third order. New conditions for the existence of the solution and for the convergence of the methods are established, when $u_n = \Phi(x_n)$, $v_n = \Phi(u_n)$, for every $n \geqslant 0$.

BIBLIOGRAFIE

1. S. I. Ulm, *O classe iteraţionnih metodov so scorostiu shodimosti tretiego poriadca.* Izv. Akad. Nauk (E.C.C.P., **XIV**, Seria fiz. mat. i tehn. nauk, *4*, 534—539 (1965).
2. M. Balázs, G. Goldner, *On an iterative method with difference quotients of the second order.*
3. M. Balázs, G. Goldner, *On an analogical iterative method with the method of the tangent hyperbolas.*

DIFERENȚE DIVIZATE ÎN SPAȚII BANACH ȘI UNELE APLICAȚII ALE LOR

DE

M. BALÁZS și G. GOLDNER

(Cluj)

Lucrarea de față își propune sintetizarea rezultatelor cunoscute privind noțiunea de diferențe divizate ale operatorilor neliniari în spații Banach. Vor fi de asemenea expuse rezultatele autorilor privind precizarea proprietăților diferențelor divizate , precum și aplicarea acestora în stabilirea unor metode iterative pentru rezolvarea ecuațiilor operaționale.

Necesitățile practicii au impus găsirea unor metode pentru rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare în spațiile Banach. În acest sens se oferea ca o cale destul de naturală extinderea metodelor cunoscute din analiza clasică pentru rezolvarea ecuațiilor algebrice și transcendente. Lucrarea lui L. V. Kantorovici [6], care, utilizînd o adaptare ingenioasă a derivatei Fréchet, generalizează metoda lui Newton, constituie începutul unei direcții de cercetare în matematica modernă. Deosebit de puternice, metodele iterative care utilizează derivata Fréchet sau Gâteaux [7], [8], prezintă unele dificultăți privind aplicarea lor în practică : derivata Fréchet nu există pentru orice operator, iar în cazul existenței sale, calcularea ei efectivă este deseori greoaie. Din această cauză atenția s-a îndreptat spre extinderea unei alte metode clasice, metoda coardei. Acest lucru a pretins utilizarea noțiunii de diferență divizată în spații Banach. Particularizînd definiția dată de J. Schröder [12] diferenței divizate, J. W. Schmidt [9] și A.S. Sergheev [13] au construit procedee iterative analoge metodei coardei. Preocupat de găsirea unor procedee iterative cu diferențe divizate de ordin superior, S. Ulm [15], [16] a folosit noi particularizări ale definiției lui Schröder și a precizat unele proprietăți și interpretări — ilustrate de exemple — ale noțiunii de diferență divizată.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 7, P. 985–996, BUCUREȘTI, 1969

§ 1. DEFINIŢII ŞI UNELE PROPRIETĂŢI ALE DIFERENŢELOR DIVIZATE DE ORDINUL ÎNTÎI

1. Fie P un operator definit pe submulţimea D din spaţiul Banach cu valori în spaţiul Banach Y şi $\mathcal{L}(X, Y)$ spaţiul Banach al operatorilo liniari şi mărginiţi, definiţi pe X cu valori în Y.

Deşi nu apare în această formă în lucrarea sa [12], următoarea definiţie a diferenţelor divizate i se poate atribui lui J. Schröder :

Definiţia 1.1. $P_{u,v} \in \mathcal{L}(X, Y)$1) *se numeşte diferenţă divizată a operatorului P în punctele u şi v dacă :*

$$(\alpha)\ P_{u,v}(u - v) = P(u) - P(v),\ \textit{pentru orice}\ u \in D,\ v \in D,\ (u \neq v).$$

Pentru a stabili convergenţa unei metode iterative, J. Schmidt [9], [10], [11] completează definiţia 1.1 obţinînd

Definiţia 1.2. $P_{u,v} \in \mathcal{L}(X, Y)$ *se numeşte diferenţă divizată a operatorului P în punctele u şi v dacă :*

$$(\alpha)\ P_{u,v}(u - v) = P(u) - P(v)\ \textit{pentru orice}\ u \in D\ \textit{şi}\ v \in D,\ (u \neq v);$$

(β) $\|P_{u,v} - P_{v,w}\| \leqslant a\|u - w\| + b\|u - v\| + b\|v - w\|$ *pentru orice* $u, v, w \in D$;

(γ) *în cazul existenţei derivatei Fréchet P'*

$$\|P'(u) - P_{u,v}\| \leqslant (a + b)\|u - v\|\ \textit{oricare ar fi}\ u, v \in D.$$

Condiţiile (β) şi (γ) ale acestei definiţii nu par indispensabile, dacă facem abstracţie de scopul urmărit de respectivul autor. În lucrările respective nu sînt definite diferenţele divizate de ordin superior, cu care ne vom ocupa ulterior şi în cazul cărora condiţiile (β) şi (γ) vor implica probabil restricţii care complică noţiunea.

Pentru a generaliza metoda coardei, A.S. Sergheev [13], [14] utilizează următoarea definiţie a diferenţei divizate.

Definiţia 1.3. $P_{u,v} \in \mathcal{L}(X, Y)$ *se numeşte diferenţă divizată a operatorului* P *în punctele u şi v dacă*:

$$(\alpha)\ P_{u,v}(u - v) = P(u) - P(v)\ \textit{pentru orice}\ u, v \in D\,(u \neq v)$$

$$(\beta)\ P_{u,v} = P_{v,u}\ (\textit{condiţia de simetrie})$$

(γ) *Oricare ar fi $f \in Y^*$, să aibă loc relaţia*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{f[P_{u+t(v-u),\,u}(t(x - u))]\} = f[P'(u + t(v - u))(x - u)],$$

unde t este un parametru real, u, v elemente oarecare din D, iar $x \in X$.

---

1) Faptul că J. Schröder nu precizează că $P_{u,v}$ este mărginit, a ridicat unele obiecţii privind utilizarea practică a noţiunii [15], dar tocmai necesităţile practice pretind să considerăm că $P_{u,v} \in \mathcal{L}(X, Y)$.

În lucrarea [13], A. S. Sergheev, definește diferența divizată numai cu axiomele (α) și (β), adăugînd axioma (γ) în lucrarea [14] pentru îmbunătățirea evaluărilor.

Se cunosc exemple [11], [15], cînd diferența divizată nu satisface condiția (β) a acestei definiții.

O definiție ușor manevrabilă în anumite cazuri a fost dată de A. Belostoțki [4]:

DEFINIȚIA 1.4. *Se numește diferența divizată a operatorului P în punctele u și v* ($u \neq v$) *operatorul* $P_{u,v}$ *definit prin formula*

$$P_{u,v} = \int_0^1 P'[v + t(u - v)]\,dt \in \mathfrak{L}(X, Y),$$

unde $P'(x)$ *este derivata în sens Fréchet a operatorului P în punctul x, iar integrala este considerată în sens Riemann.*

Această definiție prezintă dezavantajul că presupune existența derivatei Fréchet și pretinde calcularea acesteia.

Analizînd definițiile 1.2, 1.3 și 1.4, precum și definiția atribuită lui Schröder (vezi nota de subsol anterioară), S. Ulm [15] propune următoarea definiție pentru noțiunea de diferență divizată:

DEFINIȚIA 1.5. *Operatorul* $P_{u,v} \in \mathfrak{L}(X, Y)$ *se numește diferența divizată a operatorului P în punctele u și v dacă*

(α) $P_{u,v}(u - v) = P(u) - P(v)$ *pentru orice* $u, v \in D$, $(u \neq v)$;

(β) *dacă există derivata Fréchet* $P'(x)$, *atunci*

$$P_{x,x} = P'(x).$$

Autorii prezentei lucrări nu consideră necesară condiția (β), deși ea pare naturală. Nici propunătorul definiției nu o utilizează nicăieri. De asemenea din lucrările citate ale lui S. Ulm nu reiese semnificația precisă a notației $P_{x,x}$ Noi credem că e vorba de convergența în normă a operatorului $P_{u,v}$ către $P'(x)$.

Din motivele arătate mai sus, acceptăm definiția lui J. Schröder precizată de autorii acestei lucrări (vezi nota de subsol) pe care o considerăm suficientă atît din punct de vedere teoretic, cît și prin utilizarea practică.

Vom menționa unele legături existente între diferitele definiții de mai sus. Astfel, accentuăm că definiția 1.1 este cea mai generală, celelalte diferind de ea doar prin condițiile suplimentare adăugate pentru rezolvarea anumitor probleme. În ceea ce privește celelalte definiții se constată ușor că definiția 1.5 este mai generală decît definițiile 1.2 și 1.4, iar definiția 1.3 (considerată numai cu condițiile (α) și (β)) este mai generală decît definiția 1.4.

Se știe că diferența divizată nu este în general unică [15]. Ea se construiește totdeauna după o lege acceptată pentru întreg domeniul D în funcție de problema pusă. Prin urmare dacă $P_{u,v}$ este diferența divizată construită pentru perechea $(u, v) \in D \times D$ prin legea dată în întreg D, atunci operatorul $P_{v,u}$ obţinut prin schimbarea rolului lui u şi v este diferenţă divizată pentru perechea (u, v):

$$P_{v,u}(u - v) = - P_{v,u}(v - u) = P(u) - P(v).$$

De aici rezultă că dacă într-un domeniu D s-a construit o diferenţă divizată care să verifice condiţiile definiţiei 1.1, atunci totdeauna există o diferenţă divizată cu proprietatea (β) din definiţia 1.3 şi anume

$$Q_{u,v} = \frac{1}{2}(P_{u,v} + P_{v,u}). \tag{1.1}$$

2. În cele ce urmează vom arăta cîteva proprietăţi ale diferenţelor divizate, necesare pentru stabilirea unor metode iterative.

Propoziţia 1.1. *Dacă* $P_{u,v}$ şi $Q_{u,v}$ *sînt diferenţe divizate pentru operatorul* P, *respectiv* Q, *atunci operatorul* $R_{u,v} = P_{u,v} \pm Q_{u,v}$ *este diferenţă divizată a operatorului* $R = P \pm Q$.

Demonstraţia propoziţiei este imediată.

Propoziţia 1.2. *Dacă* $P_{u,v}$ *şi* $Q_{s,t}$ *sînt diferenţe divizate ale operatorilor* $P\ (X \xrightarrow{P} Y)$, *respectiv* $Q\ (Y \xrightarrow{Q} Z)$, *atunci operatorul* $R_{u,v} = Q_{s,t}\, P_{u,v}$, *unde* $s = P(u), t = P(v)$, *iar argumentul operatorului* Q *este* $y = P(x)$, *este diferenţă divizată a operatorului* $R = Q\,P$.

Demonstraţie. Se vede imediat că $R_{u,v} \in \mathcal{L}\ (X, Z)$. Mai trebuie să arătăm că $R_{u,v}$ verifică condiţia (α) a definiţiei 1.1.

Într-adevăr,

$$R_{u,v}(u - v) = Q_{s,t}\, P_{u,v}(u - v) = Q_{s,t}\,(P(u) - P(v)) =$$

$$= QP(u) - Q\,P(v).$$

Propoziţia 1.3. *Dacă* $L \in \mathcal{L}(X, Y)$, *atunci* $L_{u,v} \equiv L$ *este diferenţă divizată pentru operatorul* L.

Într-adevăr,

$$L_{u,v}(u - v) = L(u - v) = L(u) - L(v).$$

Propoziţia 1.4. *Dacă* $P_{u,v}$ *este diferenţă divizată pentru operatorul* $P\ (X \xrightarrow{P} Y)$ *şi* $L \in \mathcal{L}(Y, Z)$, *atunci operatorul* $R_{u,v} = L\,P_{u,v}$ *este diferenţă divizată pentru operatorul* $R = L\,P$.

Această propoziţie rezultă imediat din propoziţiile 1.3 şi 1.4.

Fie $B \in \mathcal{L}(Y,\ \mathcal{L}\ (Y, Z))$ şi fie operatorii $P(X \xrightarrow{P} Y)$ şi $Q(X \xrightarrow{Q} Y)$.

Propoziţia 1.5. *Dacă* $P_{u,v}$ *şi* $Q_{u,v}$ *sînt diferenţe divizate ale lui* P *şi* Q, *atunci operatorul*

$$R_{u,v} = B\,[P_{u,v},\ Q(u)] + B\,[P(v),\ Q_{u,v}]$$

este diferenţă divizată a operatorului $R = B(P, Q)$.

Demonstraţie. Evident că $R_{u,v} \in \mathfrak{L}\,(X, Z)$. Verificăm condiţia (α):

$$R_{u,v}(u-v) = B[P_{u,v}(\;-v),\ Q(u)] + B\,[P(v),\ Q_{u,v}(u-v)] =$$

$$= B\,[P(u),\ Q(u)] - B\,[P(v),\ Q(u)] + B\,[P(v),\ Q(u) -$$

$$- B\,[P(v),\ Q(v)] = B\,[P(u),\ Q(u)] - B\,[P(v),\ Q(v)].$$

Propoziţia 1.5 poate fi generalizată. Pentru aceasta considerăm un operator oarecare $A(Y \times Y \overset{A}{\to} Z)$ şi operatoii P si Q ca în propoziţia precedentă. Vom numi diferenţă divizată parţială a lui A în raport cu P, diferenţa divizată a operatorului A în cazul cînd Q este fixat în x_0 şi 0 vom nota cu $A_{P(u),\,P(v)/Q(x_0)}$. Analog se defineşte $A_{Q(u),\,Q(v)/P(x_0)}$.

PROPOZIŢIA 1.6. *Dacă se cunosc* $A_{P(u),\,P(v)/Q(u)}$, $A_{Q(u),\,Q(v)/P(v)}$ *şi dacă* $P_{u,v}$ *şi* $Q_{u,v}$ *sînt diferenţe divizate ale lui* P *respectiv* Q, *atunci operatorul* $R_{u,v} = A_{P(u),\,P(v)/Q(u)}\, P_{u,v} + A_{Q(u),\,Q(v)/P(v)}\, Q_{u,v}$ *este diferenţă divizată a operatorului* $R = A\,(P, Q)$.

Demonstraţie. Se poate verifica uşor că $R_{u,v} \in \mathfrak{L}\,(X, Z)$. Mai departe

$$R_{u,v}(u-v) = A_{P(u),\,P(v)/Q(u)}\, P_{u,v}(u-v) + A_{Q(u),\,Q(v)\,P(v)}\, Q_{u,v}(u-v) =$$

$$= A_{P(u),\,P(v)/Q(u)}\,[P(u) - P(v)] + A_{Q(u),\,Q(v)\,P(v)}\,[Q(u) - Q(v)] =$$

$$= A[P(u),\ Q(u)] - A[P(v),\ Q(u)] + A[P(v),\ Q(u)] -$$

$$- A[P(v),\ Q(v)] = A[P(u),\ Q(u)] - A[P(v),\ Q(v)].$$

Menţionăm că toate aceste proprietăţi sînt adevărate şi în cazul diferenţei divizate definite prin condiţiile (α) şi (β) ale definiţiei 1.3 (simetrice):

§ 2. DIFERENŢE DIVIZATE DE ORDIN SUPERIOR

1. În lucrările în care intervine diferenţa divizată de ordinul doi [13], [15], aceasta este considerată ca element din $\mathfrak{L}\,(X,\ \mathfrak{L}\,(X,\ Y))$ care satisface una din condiţiile

$$P_{u,v,w}(u-w) = P_{u,v} - P_{v,w}$$

$$P_{u,v,w}(u-v) = P_{u,w} - P_{v,w}$$

$$P_{u,v,w}(v-w) = P_{u,v} - P_{u,w},$$

precum şi cîte o condiţie corespunzătoare condiţiilor (β) din definiţiile 1.3 respectiv 1.5.

Considerăm că în multe cazuri construirea diferenţelor divizate d ordin superior în mod succesiv pare mai naturală şi mai avantajoasă. Noi vom urma această cale.

Se consideră definită diferenţa divizată de ordinul întîi $P_{x',x''}$ a operatorului P în domeniul D. Fie u, v, w trei puncte diferite fixate arbitrar din domeniul D şi să considerăm diferenţele divizate $P_{x,u}$; $P_{x,v}$; $P_{x,w}$, unde x — este un punct variabil din D.

În acest fel obţinem trei operatori definiţi pe D cu valori în $\mathfrak{L}(X, Y)$ pentru care vom construi într-un acelaşi mod diferenţele divizate, conform definiţiei 1.1. Notăm cu $P_{v,w;u}$ respectiv $P_{w,v;u}$ diferenţele divizate ale lui $P_{x,u}$ în punctele (v, w) respectiv (w, v) din $D \times D$ şi în mod analog considerăm $P_{u,w;v}$, $P_{u,v;w}$ şi $P_{v,u;w}$.

Putem lua ca diferenţă divizată de ordinul doi a operatorului P în punctele $u, v, w \in D$, unul dintre operatorii $P_{v,w;u}$; $P_{w,v;u}$; $P_{u,w;v}$; $P_{w,u;v}$; $P_{u,v;w}$; $P_{v,u;w}$. Avem astfel pînă acum posibilitatea să considerăm ca diferenţă divizată unul dintre cei şase operatori, dar aceştia nu pot în general să joace simultan rol de diferenţă divizată de ordinul doi. Deoarece din definiţia 1.1 rezultă relaţiile :

$$P_{v,w;u}(v - w) = P_{v,u} - P_{w,u}; \tag{2.1}$$

$$P_{w,v;u}(w - v) = P_{w,u} - P_{v,u}; \tag{2.2}$$

$$P_{u,w;v}(u - w) = P_{u,v} - P_{w,v}; \tag{2.3}$$

$$P_{w,u;v}(w - u) = P_{w,v} - P_{u,v}; \tag{2.4}$$

$$P_{u,v,w}(u - v) = P_{u,w} - P_{v,w}; \tag{2.5}$$

$$P_{v,u;w}(v - u) = P_{v,w} - P_{u,w}, \tag{2.6}$$

adevărate pentru orice $u, v, w \in D$, acceptînd de exemplu $P_{u,v,w} = P_{v,w;u}$ ca diferenţă divizată de ordinul doi, obţinem :

$$P_{u,v,w}(v - w) = P_{v,u} - P_{w,u}, \tag{2.1'}$$

dar nu putem preciza nimic analog pentru $P_{u,v,w}(u - w)$ şi $P_{u,v,w}(u - v)$. Dacă

$$(\delta)\quad P_{v,w;u} = P_{u,w;v} = P_{u,v;w}$$

atunci împreună cu relaţia (2.1′) sînt verificate în mod evident şi relaţiile

$$P_{u,v,w}(u - w) = P_{u,v} - P_{w,v} \tag{2.3'}$$

şi

$$P_{u,v,w}(u - v) = P_{u,w} - P_{v,w}. \tag{2,5'}$$

Dacă au loc relațiile (δ) și în obținerea diferenței divizate de ordinul doi am pornit de la o diferență divizată simetrică de ordinul întîi (adică $P_{x',x''} = P_{x'',x'}$ pentru orice $(x', x'') \in D \times D$), atunci în membrul drept al oricărei dintre relațiile (2.1′), (2.3′) (2.5′) ordinea punctelor u, v, w se poate schimba în mod convenabil.

Plecînd de la $P_{u,x}$; $P_{v,x}$; $P_{w,x}$, în mod analog se obțin operatorii $P_{u;v,w}$; $P_{u;w,v}$; $P_{v;u,w}$; $P_{v;w,u}$; $P_{w;u,v}$; și $P_{w;v,u}$. Cele de mai sus pot fi transpuse și pentru acest caz. Ținînd cont de acest lucru precum și de considerațiile anterioare, putem accepta ca diferență divizată unul din cei 12 operatori obținuți, care se va nota $P_{u,v,w}$.

Se constată ușor că dacă diferența divizată de ordinul întîi și diferența divizată a acesteia sînt simetrice și au loc relațiile (δ), atunci cei 12 operatori coincid și vom spune că diferența divizată de ordinul doi este *simetrică*.

2. În acest subparagraf vom accepta ca diferență divizată de ordinul doi $P_{u,v,w}$ în punctele u, v, w operatorul $P_{u;v,w}$ (ar fi fost posibilă alegerea oricărui alt operator dintre cei definiți mai sus). Deci avem:

$$P_{u,v,w}(v - w) = P_{u,v} - P_{u,w}. \tag{2.7}$$

În mod analog ajungem la diferența divizată de ordinul trei $P_{u,v,w,z}$ în punctele u, v, w, z. Dacă luăm ca diferență divizată de ordinul trei, dierența divizată a operatorului $P_{u,v,z}$ în punctele w și z, atunci avem:

$$P_{u,v,w,z}(w - z) = P_{u,v,w} - P_{u,v,z}. \tag{2.8}$$

În același fel se pot defini diferențele divizate de orice ordin.

Dintre proprietățile diferențelor divizate de ordinul doi și trei ne vom opri la cele care intervin esențial în cele ce urmează.

Din (2.7) și propoziția 1.3 rezultă

PROPOZIȚIA 2.1 *Dacă* $L \in \mathfrak{L}(X, Y)$, $L_{u,v,w} = 0$, *oricare ar fi* u, v, w *din* D

PROPOZIȚIA 2.2. *Dacă* $P_{u,v,w}$ și $Q_{u,v,w}$ *sînt diferențele divizate de ordinul doi ale lui* $P(X) \xrightarrow{P} Y)$ *și* $Q(X \xrightarrow{Q} Y)$, *atunci operatorul* $R_{u,v,w} = B[P_{u,v,w}, Q(u)] + B[P_{v,w}, Q_{u,v}] + B[P(w), Q_{u,v,w}]$ *este diferența divizată de ordinul doi a operatorului* $R = B(P, Q)$, *unde* $B \in \mathfrak{L}(Y, \mathfrak{L}(Y, Z))$.

Aceasta rezultă din modul de definiție a diferenței divizate de ordinul doi și din propoziția 1.5.

În același fel rezultă

PROPOZIȚIA 2.3. *Dacă* $P_{u,v,w,z}$ *și* $Q_{u,v,w,z}$ *sînt diferențele divizate de ordinul trei ale operatorului* P *și* Q, *atunci avem*

$$R_{u,v,w,z} = B[P_{u,v,w,z}, Q(u)] + B[P_{v,w,z}, Q_{u,v}] +$$
$$+ B[P_{w,z}, Q_{u,v,w}] + B[P(z), Q_{u,v,w,z}].$$

În aplicaţii o deosebită importanţă prezintă

PROPOZIŢIA 2.4. *Are loc următoarea formulă de interpolare a lui Newton*

$$P(z) = P(u) + P_{u,v}(z - v) + P_{u,v,w}(z - v)(z - u) +$$

$$+ P_{u,v,w,z}(z - w)(z - v)(z - u).$$

Această propoziţie rezultă din definiţia 1.1. şi relaţiile (2.7) şi (2.8) Ea se poate generaliza şi pentru cazul diferenţelor divizate de ordinul n

Observaţie. Dacă nu se poate construi diferenţa divizată de ordinu trei, în locul formulei din *propoziţia 2.4* se utilizează formula :

$$P(z) = P(u) + P_{u,v}(z - u) + P_{u,v,w}(z - v)(z - u) +$$

$$+ (P_{u,v,z} - P_{u,v,w})(z - v)(z - u).$$

Vom spune că diferenţa divizată de ordinul n a operatorului P în punctele $x_1, \ldots, x_{n+1}$ este simetrică dacă :

a) $P_{x_{k_1}, \ldots, x_{k_\nu}}$ este simetric oricare ar fi $\nu = 2, \ldots, n$ şi pentru orice combinare aleasă $(k_1, \ldots, k_\nu)$ a indiciilor $(1, \ldots, n + 1)$.

b) $(P_{x_{k_1}, \ldots, x_{k_{i-1}}, x, x_{k_{i+1}}, \ldots, x_{k_n}})_{x_{k_i}, x_{k_{n+1}}}$ este acelaşi operator pentru orice i şi orice combinare $(k_1, \ldots, k_{n+1})$ a indicilor $(1, \ldots, n + 1)$ şi are loc

$$(P_{x_{k_1}, \ x_{k_{i-1}}, \ x, x_{k_{i-1}}, \ldots, x_{k_n}})_{x_{k_i}, \ x_{k_{n+1}}} =$$

$$= (P_{x_{k_1}, \ldots, x_{k_{i-1}}, \ x, x_{k_{i+1}}, \ldots, x_{k_n}})_{x_{k_{n+1}}, x_{k_i}}$$

§ 3. UNELE METODE ITERATIVE PENTRU REZOLVAREA ECUAŢIILOR OPERAŢIONALE

1. Fie ecuaţia

$$P(x) = 0, \tag{3.1}$$

unde $P(X \xrightarrow{P} Y)$ este un operator continuu definit pe spaţiul Banach X cu valori în spaţiul Banach Y.

Să notăm cu $P_{x', x'', \ldots, x^{(l)}}$ $(l = 2, \ldots, n + 1)$ diferenţa divizată de ordinul $(l - 1)$ a operatorului P în punctele $x', x'', \ldots, x^{(e)}$

În cele ce urmează vom presupune că $P_{x', x''}$ este simetric (ceea ce este posibil conform relaţiei (1.1)).

Fie dată mai departe o metodă de iteraţie pentru rezolvarea ecuaţiei (3.1), care are forma

$$x_{n+1} = F^{[n]}(x_n), \tag{3.2}$$

unde operatorul $F^{[n]}(x_n)$ are diferențele divizate $F^{[n]}{}_{x', x'', \dots, x^{(e)}}$, $(l = 2, \dots, n+1)$ și $F^{[n]}(x^*) = x^*$ oricare ar fi n și x^* soluție a ecuației (3.1).

Aplicarea formulei (3.2) necesită fixarea unui număr de puncte ca aproximații inițiale, următoarele fiind calculate pe baza formulei.

DEFINIȚIA 3.1. *Vom spune că metoda de iterație* (3.2) *este convergentă de ordinul k, către x^*, dacă*

$$1^\circ \ \lim_{n \to \infty} \| x^* - x_n \| = 0$$

$$2^\circ \ F^{[n]}_{x_n, x_{n-1}} = 0\,; F^{[n]}_{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}} = 0\,; \dots; F^{[n]}_{x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k+1}} = 0\,;$$

$$F^{[n]}_{x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}} \neq 0,$$

oricare ar fi n, iar $x_{-k+1}, x_{-k+2}, \dots, x_0$ sînt aproximații inițiale.

Se cunosc unele metode de acest fel [13], [3] în care $k=2$ și [1], [2] pentru cazul $k = 3$. Vom arăta mai jos un mod unitar de construire a acestor metode.

Fie

$$F^{[n]}(x) = x - \lambda_n P(x) - \mu_n P^2(x) - \nu_n P(x)(x - x_n), \tag{3.3}$$

unde $\lambda_n \in \mathcal{L}(Y, X)$, $\mu_n \in \mathcal{L}(Y, \mathcal{L}(Y, X))$ și $\nu_n \in \mathcal{L}(Y, \mathcal{L}(X, X))$, λ_n, μ_n, ν_n, urmînd să fie determinați convenabil. Se vede că $F^{[n]}(x^*) = x^*$.

2. Dacă $\mu_n = 0$, $\nu_n = 0$, punînd condiția $F^{[n]}_{x_n, x_{n-1}} = 0$ avem $\lambda_n = [P_{x_n, x_{n-1}}]^{-1} = \Gamma_n$ și obținem metoda coardei [13], [3]:

$$x_{n+1} = F^{[n]}(x_n) = x_n - \Gamma_n P(x_n). \tag{3.4}$$

Se constată ușor, utilizînd rezultatele din paragrafele precedente, că $F^{[n]}_{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}} \neq 0$.

În lucrările [13], [3] s-a arătat că în anumite condiții $\|x^* - x_n\| \to 0$ cînd $n \to \infty$, deci metoda (3.4) este o metodă iterativă convergentă de ordinul doi spre x^*.

3. Dacă în (3.3) alegem $\nu_n = 0$ și punem condițiile

$$F^{[n]}_{x_n, x_{n-1}} = 0, \quad F^{[n]}_{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}} = 0 \tag{3.5}$$

obținem o metodă de iterație convergentă de ordinul trei către o soluție a ecuației (3.1).

În acest caz

$$P_{u, v, w} = (P_{u, x})_{w, v}$$

$$P_{u, v, w, z} = (P_{u, v, x})_{z, w}.$$

Să găsim în acest caz expresiile lui λ_n și μ_n. Conform rezultatelor aupra diferențelor divizate avem:

$$F^{[n]}_{x_n, x_{n-1}} \Delta x = \Delta x - \lambda_n P_{x_n, x_{n-1}} \Delta x - \mu_n P_{x_n, x_{n-1}} \Delta x P(x_n) -$$

$$- \mu_n P(x_{n-1}) P_{x_n, x_{n-1}} \Delta x$$

$$F^{[n]}_{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}} \Delta x' \Delta x'' = - \lambda_n P_{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}} \Delta x' \Delta x'' -$$

$$- \mu_n P_{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}} \Delta x' \Delta x'' P(x_n) -$$

$$- \mu_n P_{x_{n-1}, x_{n-2}} \Delta x' P_{x_n, x_{n-2}} \Delta x'' -$$

$$- \mu_n P(x_{n-1}) P_{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}} \Delta x' \Delta x''.$$

Utilizînd (3.5) avem un sistem, în care alegînd $\Delta x = \Gamma_n P_{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}} \Delta x' \Delta x''$ obținem

$$\lambda_n \Delta y = \Gamma_n \Delta y + \Gamma_n P_{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}} \Gamma_{n-1} \Delta y \overline{\Gamma}_n P(x_n) +$$

$$+ \Gamma_n P_{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}} \Gamma_{n-1} P(x_{n-1}) \overline{\Gamma}_n \Delta y$$

$$\mu_n \Delta \xi \Delta \eta = - \Gamma_n P_{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}} \Gamma_{n-1} \Delta \xi \overline{\Gamma}_n \Delta \eta,$$

unde $\Gamma_n [P_{x_n, x_{n-1}}]^{-1}$, $\overline{\Gamma}_n = [P_{x_n, x_{n-2}}]^{-1}$.

Înlocuind pe λ_n și μ_n în (3.3) și punînd $x = x_n$, obținem procesul de iterație

$$x_{n+1} = F^{[n]}(x_n) = x_n - \Gamma_n P(x_n) - \Gamma_n P_{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}} \Gamma_{n-1} P(x_{n-1}) \overline{\Gamma}_n P(x_n). \tag{3.6}$$

S-a demonstrat că în cazul diferențelor divizate simetrice șirul (x_n) definit de (3.6) converge în anumite condiții către o soluție x^* a ecuației (3.1), [1], adică acest procedeu este convergent de ordinul trei. Acest lucru se poate demonstra și pentru cazul general (nesimetric).

4. Considerînd $Y = X$, luînd în (3.3), $\mu_n = 0$ și punînd condițiile (3.5), obținem o altă metodă de iterație convergentă de ordinul trei către o soluție a ecuației (3.1). Vom utiliza aceleași diferențe divizate ca în punctul precedent.

Din condițiile puse obținem sistemul

$$F^{[n]}_{x_n, x_{n-1}} \Delta x = \Delta x - \lambda_n P_{x_n, x_{n-1}} \Delta \chi - \Gamma_n P(x_{n-1}) \Delta \chi = 0$$

$$F^{[n]}_{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}} \Delta x' \Delta x'' = - \lambda_n P_{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}} \Delta x' \Delta x'' - \nu_n P_{x_{n-1}, x_{n-2}} \Delta x' \Delta x'' = 0$$

care are soluția

$$\lambda_n \Delta y = \Gamma_n [I - P_{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}} \Gamma_{n-1} P(x_{n-1}) \Gamma_n]^{-1} \Delta y$$

$$\nu_n \Delta\xi \Delta\eta = -\Gamma_n [I - P_{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}} \Gamma_{n-1} P(x_{n-1}) \Gamma_n]^{-1} P_{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}} \Gamma_{n-1} \Delta\xi \Delta\eta.$$

De aici

$$x_{n+1} = F^{[n]}(x_n) = \chi_n - \Gamma_n [I - P_{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}} \Gamma_{n-1} P(x_{n-1}) \Gamma_n]^{-1} P(x_n) \tag{3.7}$$

obținîndu-se metoda dată în [2], pentru care s-au dat unele condiții suficiente de convergență a șirului (x_n) către o soluție a ecuației (3.1).

Observații. 1°. Pentru metodele (3.4) și (3.6) și (3.7) sînt stabilite și teoreme de unicitate a soluției ecuației (3.1), [13], [1], [2].

2°. Pentru obținerea unor procedee (3.2) convergente de ordinul k se poate porni în mod analog de la un operator de forma

$$F^{[n]}(x) = x - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{q} \lambda_{ij} [P(x)]^i (x - x_n)^j,$$

unde $q+p=k-1$, iar $\lambda_{i,j}$ este un operator $(i+j)$ — liniar.

Primită la redacție la 16 mai 1968

Universitatea ,,Babeș-Bolyai" Cluj
— Institutul pedagogic de 3 ani Cluj,
Catedra de matematică

DIFFERENCE QUOTIENTS IN BANACH SPACES AND SOME OF THEIR APPLICATIONS

(ABSTRACT)

This paper deals with all definitions already known of the difference quotients of first order in Banach spaces as well as with some relations between them. The authors accept the improved Schröder's definition (1.1). In § 1 some properties of the difference quotients of the first order are also proved.

In § 2 the authors define successively the difference quotients of the higher order; in some cases this way has proved to be advantageous. Some useful properties of the difference quotients of the higher order are given in this paragraph.

The results obtained in § 1 and § 2 are applied in § 3 in order to find out some iterative methods in solving operational equations in Banach spaces. It is given a unitary point of view about the methods (3.4), (3.6), (3.7).

BIBLIOGRAFIE

1. M. Balázs, G. Goldner, *On an iterative method with difference quotients of the second order.*
2. M. Balázs, G. Goldner, *On an analogical iterative method with the metod of the tangent hyperbolas.*
3. G. Goldner, M. Balázs, *Asupra metodei coardei și a unei modificări a ei pentru rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare.*
4. A. I. Belostoțki, *Cîteva metode de rezolvare a ecuațiilor funcționale.* Ycn. Mat. Hayk, **XVII**, *5* (*107*), 192—193 (1962).
5. B. Jankó, *Sur la théorie unitaire des méthodes d'itération pour la résolution des équations opérationnelles non-linéaires.* I. A. Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei, **VI**, *A. 3*, 301—311 (1961).
6. L. V. Kantorovici, *O metodă a lui Newton.* Труды Мат. Инст. Стеклова, **28**, 104—144 (1949).
7. M. A. Mertvetova, *Procedeul analog al hiperbolelor tangente pentru ecuații generale funcționale.* D. A.H., **88**, 611—614 (1953).
8. M. T. Necepurenko, *Despre metoda lui Cebîșev pentru ecuații funcționale.* Усп. мат. наук, **9**, 163—170 (1954).
9. J. W. Schmidt, *Die Regula Falsi für Operatoren in Banachräumen.* Z.A.M.M., **44**, Sonderheft, 61—63 (1961).
10. J. W. Schmidt, *Eine Übertragung der Regula Falsi auf Gleichungen in Banachräumen* I.Z.A.M.M., **43**, *1/2*, 1—8 (1963).
11. J. M. Schmidt, *Eine Übertragung der Regula Falsi auf Gleichungen in Banachräumen II.* Z.A.M.M., **43**, *3*, 97—100 (1963).
12. J. Schröder, *Nichtlineare Majoranten beim Verfahren der schrittweisen Näherung.* Arch. Math., **7**, *6*, 471—484 (1956).
13. A. S. Sergheev, *Despre metoda coardei.* Сибирский мат. журнал, **II**, *2*, Март-апр. 282—289 (1961).
14. A. S. Sergheev, *Despre convergența unor variante ale metodei coardei în spații normate.* Сбор. науч. труд. Пармского Политехн. ин-та. **13**, 43—54 (1963).
15. S. Ulm, *Despre diferențele divizate generalizate. I.* Известия Акад. наук ЭССР, **16** /*I*, 13—26 (1967).
16. S. Ulm, *Despre diferențele divizate generalizate II.* Известия Акад. наук ЭССР, **16/2**, 146—156 (1967).

ASUPRA ECUAŢIEI BICALORICE

DE

O. BERECHET

Articolul lărgeşte clasa de unicitate obţinută în [3] a problemei lui Cauchy pentru ecuaţia bicalorică (teorema 2).

Porinind de la rezultatele lui M. Nicolescu [1] şi M. Nicolescu-C. Foiaş [2] am dat în [3] anumite condiţii în care are loc extinderea formulei de reprezentare Poisson pentru funcţiile bicalorice. Această reprezentare ne-a permis să obţinem o nouă clasă de unicitate a problemei Cauchy pentru ecuţia bicalorică :

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{(2)} u = 0. \tag{1}$$

Prezenta lucrare are două părţi : în prima slăbim condiţiile din [3] în care are loc reprezentarea Poisson, obţinînd astfel o clasă de unicitate mai largă, iar în partea a doua arătăm că formula de reprezentare Poisson într-o bandă deschisă poate fi obţinută în condiţii şi mai slabe.

1. Vom demonstra următoarele :

1. TEOREMA 1. *Dacă $u(x,y)$ este o funcţie bicalorică în banda deschisă*

$$D = \{(x,y)\,;\quad -\infty < x < +\infty,\ 0 < y < \delta\}$$

continuă împreună cu $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ *în banda închisă*

$$\overline{D} = \{(x,y)\,;\quad -\infty < x < +\infty,\ 0 \leqslant y \leqslant \delta\}$$

satisfăcînd în $\overline{D}$ *inegalităţile :*

$$|u(x,y)| < Me^{kx^2} \tag{2}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 7, P. 997–1003, BUCUREŞTI, 1969

$$\frac{\partial u}{\partial y} > -Me^{kx^2} \tag{3}$$

iar în D_1 *inegalitatea*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < Me^{kx^2}, \quad D_1 = \{(x,y)\,;\ -\infty < x < +\infty,\ \ 0 < y \leqslant \delta\} \tag{4}$$

M și K fiind constante pozitive și $0 < k < \dfrac{1}{4\delta}$, *atunci pentru orice* $0 \leqslant h < y <$ $< \delta$ *are loc formula de reprezentare Poisson* :

$$\begin{aligned} u(x,y) = {} & \frac{1}{4\sqrt{\pi(y-h)}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(3 - \frac{(x-\xi)^2}{2(y-h)}\right)e^{-\frac{(n-\xi)^2}{4(y-h)}}\,u(\xi,h)\,d\xi + \\ & + \frac{\sqrt{y-h}}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(n-\xi)^2}{4(y-h)}}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{\eta=h} d\xi. \end{aligned} \tag{5}$$

TEOREMA 2. *Unicitatea problemei Cauchy pentru ecuația* (1) *în banda* $0 < y < Y$ *are loc în clasa funcțiilor satisfăcînd inegalitatățile* (2), (3) și (4).

Întrucît teorema 2 rezultă imediat din teorema 1, după cum a fost arătat în [2], vom demonstra numai teorema 1.

Demonstrația teoremei 1. Vom nota prin

$$\begin{aligned} B[u, x, y\,;\ \xi, \eta] = {} & \sqrt{y-\eta}\; e^{-\frac{(n-\xi)^2}{4(y-\eta)}}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} - \frac{(x-\xi)}{2(y-\eta)}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \right. \\ & + \frac{1}{2(y-\eta)}\left(\frac{(x-\xi)^2}{2(y-\eta)} - 1\right)\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{(x-\xi)}{4(y-\eta)^2}\left(\frac{(x-\xi)^2}{2(y-\eta)} - 3\right)u(\xi, \eta) - \\ & \left. - 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\delta\eta} + \frac{(x-\xi)}{y-\eta}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}\right] \end{aligned}$$

Cu această notație, formula (14) din [3] devine :

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{h}^{y} B[u, x, y\,;\ r, \eta]\,d\eta - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{h}^{y} B[u, 2R - x, y\,;\ r, \eta]\,d\eta + \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-k)^2}{4(y-\eta)}}(x-R)}{\sqrt{y-\eta}}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)_{\xi=R}-2\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{\xi=R}\right]\mathrm{d}\eta-\\
&-\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_h^y \frac{(x-R)}{(y-\eta)^{3/2}}\left[\frac{(x-R)^2}{2(y-\eta)}-3\right]u(R,\eta)\,\mathrm{d}\eta+\\
&+\frac{1}{4\sqrt{\pi(y-h)}}\int_r^R\left(3-\frac{(x-\xi)^2}{2(y-h)}\right)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-k)}}u(\xi,h)\,\mathrm{d}\xi-\\
&-\frac{1}{4\sqrt{\pi(y-h)}}\int_r^R\left(3-\frac{(2R-x-\xi)^2}{2(y-h)}\right)e^{-\frac{(2R-x-\xi)^2}{4(y-h)}}u(\xi,h)\,\mathrm{d}\xi+\\
&+\frac{\sqrt{y-h}}{2\sqrt{\pi}}\int_r^R\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}-e^{-\frac{(2R-x-\xi)^2}{4(y-h)}}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{\eta=h}\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}\tag{6}$$

Integrala a patra este majorată în modul, datorită condiției (2), de

$$\frac{Me^{kR^2}}{4\sqrt{\pi}}\int_h^y \frac{R-x}{(y-\eta)^{3/2}}\left|\frac{(x-R)^2}{2(y-\eta)}-3\right|e^{-\frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)}}\mathrm{d}\eta$$

expresie ce tinde la zero cînd $R\to\infty$.

Integrala a treia poate fi descompusă într-o sumă de două integrale: una pozitivă și cealaltă tinzînd la zero pentru $R\to\infty$. Acest lucru rezultă din condițiile (3) și (4). Făcînd în (6) pe $R\to\infty$ și ținînd cont de raționamentul din [3] pag. 15, rezultă:

$$\begin{aligned}
u(x,y)\geqslant{}&\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y B[u,x,y;r,\eta]\,\mathrm{d}\eta+\\
&+\frac{1}{4\sqrt{\pi(y-h)}}\int_r^{+\infty}\left(3-\frac{(x-\xi)^2}{2(y-h)}\right)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2(y-h)}}u(\xi,h)\,\mathrm{d}\xi+\\
&+\frac{\sqrt{y-h}}{2\sqrt{\pi}}\int_r^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2(y-h)}}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{\eta=h}\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}\tag{7}$$

În mod analog, din formula (16) din [3] obținem

$$0\geqslant-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y B[u,x,y;r,\eta]\,\mathrm{d}\eta+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{\pi(y-h)}}\int_{-\infty}^{r}\left(3-\frac{(x-\xi)^2}{2\,(y-h)}\right)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}u\,(\xi,\ h)\,d\xi+$$

(8)

$$+\frac{\sqrt{y-h}}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{r}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)_{\eta=h}d\xi.$$

Adunînd (7) cu (8) regăsim formula (18) din [3]

$$u\,(x,\ y)\geqslant\frac{1}{4\sqrt{\pi(y-h)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(3-\frac{(x-\xi)^2}{2\,(y-h)}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}u\,(\xi,\ h)\,d\xi+\right.$$

(9)

$$+\frac{\sqrt{y-h}}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)_{\eta=h}d\xi$$

din care, la fel ca în [3], obținem :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\xi^2}{4(\delta-h)}}\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|_{\eta=h}d\xi<C \tag{10}$$

oricare ar fi $0<h<\delta$, C fiind independent de h.

Funcția $\dfrac{\partial u}{\partial\eta}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ este o funcție calorică, după cum ușor se poate verifica și în plus, satisface în D_1 inegalitatea datorită lui (3) și (4). Prin urmare, conform rezultatului din [2]

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\xi^2}{4(\delta-h)}}\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\right|_{\eta=h}d\xi<C_1 \tag{11}$$

oricare ar fi $0<h<\delta$, C_1 fiind independent de h.

Făcînd în (6) $R\to\infty$ obținem

$$u\,(x,\ y)-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{h}^{y}B\,[u,\ x,\ y\,;\ r,\ \eta]\,d\eta+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{\pi(y-h)}}\int_{r}^{+\infty}\left(3-\frac{(x-\xi)^2}{2(y-h)}\right)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2(y-h)}}u\,(\xi,\ h)\,d\xi+$$

(12)

$$+\frac{\sqrt{y-h}}{2\sqrt{\pi}}\int_{r}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)_{\eta=h}d\xi+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\lim\int_{h}^{y}\frac{e^{-\frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)}}(x-R)}{\sqrt{y-\eta}}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\right)_{\xi=R}-2\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)_{\xi=R}\right]d\eta$$

Notînd cu $I(R)$ ultima integrală, repetînd raţionamentul din [2], pag. 474, obţinem, folosind (10) şi (11), că

$$\lim_{R\to\infty} I(h) = 0.$$

Deci :

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y B[u, x, y; r, \eta]\,\mathrm{d}\eta +$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{\pi(y-h)}}\int_r^{+\infty}\left(3-\frac{(x-\xi)^2}{2(y-h)}\right)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}u(\xi, h)\,\mathrm{d}\xi + \tag{13}$$

$$+\frac{\sqrt{y-h}}{2\sqrt{\pi}}\int_r^{\infty} e^{\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)_{\eta=h}\mathrm{d}\xi.$$

În mod analog, făcînd în (8) pe $R\to\infty$, obţinem :

$$0 = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y B[u, x, y; r, \eta]\,\mathrm{d}\eta +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi(y-h)}}\int_{-\infty}^{r}\left(3-\frac{(x-\xi)^2}{2(y-h)}\right)e^{\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}u(\xi, h)\,\mathrm{d}\xi + \tag{14}$$

$$+\frac{\sqrt{y-h}}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{r} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)_{\eta=h}\mathrm{d}\xi;$$

adunînd (13) cu (14), obţinem formula Poisson (5).

2. Folosind notaţia introdusă de M. Nicolescu în [1] $\underline{\cap} \equiv -\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ vom demonstra :

Teorema 3. *Dacă $u(x, y)$ este o funcţie bicalorică în banda D_1, în care satisface inegalităţile :*

$$|u(x, y)| < Me^{kx^2} \tag{15}$$

$$\underline{\cap}\, u < Me^{kx^2} \tag{16}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} > -Me^{kx^2}, \tag{17}$$

unde M şi K sînt constante pozitive şi $0 < k < \frac{1}{4\delta}$, *atunci pentru orice* $0 < h < y < \delta$ *avem formula de reprezentare Poisson* (5).

Demonstraţie. Observăm mai întîi că teorema de medie a lui M. Nicolescu [1] se poate enunţa, folosind rezultatul din [2] astfel :

Dacă $u\,(x,\ y)$ este o funcţie bicalorică în D_1, satisfăcînd inegalităţile $u\ (n,\ y) > -Me^{kx^2}$ şi (16) în această bandă, atunci are loc formula de medie a lui M. Nicolescu :

$$u\,(x,\ y) = 3\mu_1\,(u\,;\ h) - 2\mu_0\,(u\,;\ h) \tag{18}$$

unde

$$\mu_0\,(u\,;\ h) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4h}}\,\frac{u\,(\xi,\ y - h)}{\sqrt{h}}\,d\xi$$

şi

$$\mu_1(u\,;\ h) = \frac{2}{h^2}\int_0^h h'\mu_0\,(u\,;h')\,dh'.$$

Din (15) şi (18) rezultă, aplicînd reciproc teoremei de medie, că $u(x,\ y)$ satisface în orice bandă $[\varepsilon,\ y]$, $\varepsilon > 0$, inegalitatea

$$|\underline{\sqcap}\,u| < Me^{kx^2} \tag{19}$$

Folosind (15) (17) şi (19) şi făcînd $R \to \infty$ în (6), rezultă formula de reprezentare Poisson pentru orice $0 < h < y < \delta$.

Primită la redacţie la 22 noiembrie 1968

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Calea Griviţiei nr. 21, Bucureşti 12

DE L'ÉQUATION CALORIQUE

(RÉSUME)

L'article comprend deux parties. Dans la première, sont établies les conditions de [3] dans lesquelles a lieu la représentation de Poisson (5) de la solution de Cauchy pour l'équation (1). Par conséquent on obtient pour le problème de Cauchy une classe nouvelle d'unicité, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions satisfaisant aux conditions (2), (3) et (4).

Dans la deuxième partie, l'A. montre que la formule de représentation de Poisson en bande ouverte peut être obtenue aussi dans des conditions plus faibles.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Nicolescu, *Ecuaţia iterată a căldurii.* St. cerc. mat., *3–4*, 243–332 (1954).

2. M. Nicolescu, C. Foiaş, *Représentation de Poisson et le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur.* Rend. Acad. Naz. dei Lincei, **38**, *4*, 466–476 (1963).

3. O. Berechet, *Représentation de Poisson et le problème de Cauchy pour l'équation bicalorique.* Rev. Roum. de Math. Pures et Appl., **XIII**, *1*, 10–18 (1968).

ASUPRA INVARIANTEI UNUI MODEL STATISTIC

DE

ANCA CREANGĂ-SÂMBOAN

Se consideră spaţiul selecţiilor unui vector aleator, X. Pe o σ-algebră de părţi boreliene relative la acest spaţiu se consideră o probabilitate P invariantă la grupul de transformări G.

În această notă, grupul G se organizează ca un grup cu măsură şi se construieşte pe el o măsură, indusă de P, invariantă la dreapta.

În multe sectoare ale statisticii matematice, cum ar fi : testarea ipotezelor şi teoria deciziilor, teoria estimaţiilor, teoria încrederii, teoria Bayes, apare problema invarianţei unui model statistic faţă de un grup de transformări.

Fie $\mathfrak{X}$ din R^p spaţiul selecţiilor vectorului aleator X, $\mathfrak{B}_{\mathfrak{X}}$ o σ-algebră de părţi boreliene relative la $\mathfrak{X}$, θ un parametru vectorial definit pe $\Theta \subseteq R^k$.

Pe spaţiul $\mathfrak{B}_{\mathfrak{X}}\,\Theta$ este dată funcţia $P\ (.,.)$ cu proprietatea că oricare ar fi $\theta \in \Theta$, $P(.,\theta)$ este o probabilitate pe $\mathfrak{B}_{\mathfrak{X}}$.

Invarianţa lui $P(.,\theta)$ la grupul de transformări G se defineşte astfel :

i) G este un grup de transformări în $\mathfrak{X}$ şi Θ.

ii) Aplicaţia $g : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ este măsurabilă faţă de $\mathfrak{B}_{\mathfrak{X}}$.

iii) $P(gB,\ g\theta)=P(B,\theta)$ oricare ar fi $B \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{X}}$ şi $\theta \in \Theta$, unde pe spaţiul. $\mathfrak{X} \times \Theta$, g acţionează prin legea $g(x,\ \theta)= (g(x), g(\theta))$, iar $gB= \{g(x)\,;\ x \leftarrow B\}$.

Fraser în [2] reia problema invarianţei pusă de Brillinger în [1] şi propune găsirea unui model general invariant la un grup dat.

În articolul de faţă, se consideră cazul în care $P(B,\theta)$ nu depinde de θ şi este invariantă pe $\mathfrak{B}_{\mathfrak{X}}$ la grupul de transformări G şi se arată cum se poate construi, în acest caz, o măsură invariantă la dreapta pe grupul G. Dacă grupul G este topologic, atunci măsura este măsură Haar.

Prin urmare, G este un grup de transformări al spaţiului selecţiilor în el însuşi $G : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$. Vom considera $\mathfrak{X}$ ca submulţime a spaţiului normat R^p, unde $\mathfrak{B}^{(p)}$ va fi σ—algebra mulţimilor boreliene şi $\mathfrak{B}_{\mathfrak{X}}{}^{(p)}$ o σ — algebră de mulţimi boreliene relative la $\mathfrak{X}$.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 7, P. 1005–1008, BUCUREŞTI, 1969

DEFINIȚIA 1. Măsura probabilitate P definită pe $\mathfrak{B}_{\mathfrak{X}}^{(p)}$ este invariantă față de grupul G dacă oricare ar fi $g \in G$ și $B \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{X}}^{(p)}$, $P(gB) = P(B)$ unde $g\,B = \{g(x);\ x \in B\}$.

DEFINIȚIA 2. Pentru oricare mulțime $B \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{X}}^{(p)}$, mulțimea

$$B^\circ = \{g;\ \|g(x)\| \leqslant 1, \quad x \in B\}$$

se numește polara mulțimii B față de sfera unitate $\|x\| \leqslant 1$.

PROPOZIȚIA 1. *Mulțimile B° au următoarele proprietăți:*

i) *dacă* $B_1 \subseteq B_2$, *atunci* $B_2^0 \subseteq B_1^0$;

ii) $\left(\bigcup_\alpha B_\alpha\right)^\circ = \bigcap_\alpha B_\alpha^0$;

iii) $\left(\bigcap_\alpha B_\alpha\right)^\circ = \bigcup_\alpha B_\alpha^0$,

Vom completa proprietățile i) — iii) cu cererile:

iV) $\Phi^0 = G$ și $\mathfrak{X}^\circ = \Phi$.

Verificarea acestor proprietăți este aproape imediată.

PROPOZIȚIA 2. *Dacă G este grup topologic și aplicația $(g, x) \to g(x)$: $Gx\ \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ este continuă, atunci mulțimile B° sînt închise în G.*

În adevăr, fie g aderent la B°; pentru orice vecinătate V a lui g avem $V(g) \cap B^\circ = \emptyset$; există $g' \in V(g) \cap B^\circ$.

Putem scrie atunci

$$\|g(x)\| \leqslant \|g'(x)\| + \|g(x) - g'(x)\| \leqslant 1.$$

Prin urmare $g \in B^\circ$ și deci B° este închisă în G.

Dacă luăm, prin definiție, în G drept familie de mulțimi deschise mulțimile $\complement B^\circ$, atunci grupul G devine un spațiu topologic.

Acum să notăm cu τ aplicația $B \to \complement B^\circ$.

Proprietățile i) — iV) devin:

i) $B_1 \subseteq B_2$ implică $\tau(B_1) \subseteq \tau(B_2)$;

ii) $\tau\left(\bigcup_\alpha B_\alpha\right) = \bigcap_\alpha \tau(B)$;

iii) $\tau\left(\bigcap_\alpha B_\alpha\right) = \bigcap_\alpha \tau(B)$;

iv) $\tau(\emptyset) = \emptyset$ și $\tau(\mathfrak{X}) = G_1$.

DEFINIȚIA 3. Notăm cu $\mathfrak{B}^\circ$, σ-algebra grupului G obținută din σ-algebra $\mathfrak{B}^{(p)}_{\mathfrak{X}}$ prin aplicația τ.

PROPOZIȚIA 3. *Dacă* $s \in G$, *atunci are loc relația*

$$B^\circ s = (s^{-1} B)^\circ .$$

În adevăr, $B^\circ s = \{g s ;\ g \in B^\circ\}$. Din $g(x) = g s (s^{-1} x)$ și din $\| g (x) \| = \| g s (s^{-1} x) \| \leqslant 1$, rezultă că $g s \in (s^{-1} B)^\circ$, deci

$$B^\circ s \subseteq (s^{-1} B^0).$$

Din

$$(s^{-1} B)^0 = \{h,\ \| h (s^{-1} x) \| \leqslant 1, x \in B\} = \{h,\ \| h s^{-1} (x) \| \leqslant 1,\quad x \in B\}$$

rezultă

$$h s^{-1} \in B^\circ$$

și prin urmare

$$h \in B^\circ s.$$

Așadar

$$(s^{-1} B)^\circ \subseteq B^\circ s.$$

TEOREMĂ. *Pe grupul măsurabil* $(G, \mathfrak{B}^\circ)$, *funcția* ν *definită prin*

$$\nu(B^\circ) = P(C B) = 1 - P(B)$$

este măsură invariantă la dreapta.

a) *Pe* $\mathfrak{B}^\circ$ ν *este pozitivă și* $0 \leqslant \nu\ (B^\circ) \leqslant 1$.

b) $\nu(B^\circ)$ *este aditivă*; *fie* B_1^0, B_2^0 *astfel încît* $B_1^0 \cap B_2^0 = \emptyset$, și *din* $B_1^0 \cap B_2^0 = (B_1 \cup B_2)^\circ = \emptyset$ *rezultă*

$$B_1 \cup B_2 = \mathfrak{X} ;\quad \complement B_1 \cap \complement B_2 = \emptyset.$$

Atunci

$$\nu(B_1^0 \cup B_2^0 = \nu\ ((B_1 \cap B_2)^\circ) = P\ (C\ (B_1 \cap B_2)) = P\ (C\ B_1 \cup$$

$$\cup\ C\ B_2) = P(CB_1) + P(CB_2) = \nu\ (B_1^0) + \nu\ (B_2^0).$$

c) $\nu\ (B^\circ)$ este complet aditivă; dacă $(B_n)_n$ este un șir de mulțimi din $\mathfrak{B}^p_{\mathfrak{X}}$ crescător convergent către $\mathfrak{X}$, $(C\ B_n)_n$ este un șir descrescător convergent către $\emptyset$ și $\lim\limits_{n\to\infty} P(C\ B_n) = 0$. În același timp, $(B_n^0)_n$ este descrescător convergent către $\emptyset$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \nu\ (B_n^0) = \lim\limits_{n\to\infty} P(C\ B_n) = 0$.

d) Măsura ν este invariantă la dreapta pe grupul G. Din propoziția 3 rezultă

$$\nu(B^{\circ} s) = \nu(s^{-1} B)^{\circ} = 1 - P(s^{-1} B) = 1 - P(B) = \nu(B^{\circ})$$

Primită la redacție la 5 noiembrie 1968

Centrul de statistică matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Calea Griviței nr. 21, București 12.

SUR L'INVARIANT D'UN MODÈLE STATIQUE

(RÉSUMÉ)

Soit $\mathfrak{X}$ l'espace des sélections du vecteur aléatoire $\mathfrak{X}$. Sur une σ-algèbre de sous-ensembles boréliens relative à $\mathfrak{X}$, soit P une mesure de probabilité invariante pour les transformations du groupe G. Dans cette note, G est organisé comme groupe mesurable et l'A. construit sur G une mesure, induite par P, invariante à droite.

BIBLIOGRAFIE

1. Brillinger, D. R., *Necessary and sufficient conditions for a statistical problem to be invariant under a Lie group*. Ann. of. Math. Stat., **34**, *2*, 492—500 (1963).
2. Fraser, D.A.S., *Statistical models and invariance*. Ann. of. Math. Stat, **38**, *4*, 1061—1067 (1967).
3. Halmos, P. R., *Measure theory*. New York, 1950.

CONSTRUCȚIA SOLUȚIILOR UNEI ECUAȚII INTEGRALE DE TIP HAMMERSTEIN

DE

ȘTEFAN CRUCEANU

Relațiile dintre condițiile de tip monotonie și cele de tip contracție permit obținerea prin metode aproximative a punctelor fixe a operatorilor neliniari aparținînd unor clase suficient de largi (Browder [1], Browder-Petryshyn [2], Kolodner [8], Vainberg [4], Zarantonello [9]).

Folosind rezultatele obținute de Browder-Petryshyn [2], vom construi efectiv soluțiile unei ecuații integrale neliniare de tip Hammerstein. Amintim că în ipoteze asemănătoare, prin argumentări variaționale, topologice, sau caracteristice teoriei operatorilor monotoni, existența soluțiilor a fost obținută de Vainberg [3], Krasnoselski [7], Kaciurovski [6].

Fie S o mulțime de măsură finită din spațiul euclidian n-dimensional. Se consideră ecuația integrală de tip Hammerstein

$$x(s) = \int_S K(s, t)\, f(t, x(t))\, dt. \tag{1}$$

Presupunem că nucleul $K(s, t)$ generază în $L^2(S)$ operatorul liniar :

$$Ky = \int_S K(s, t)\, y(t)\, dt$$

mărginit, autoadjunct și pozitiv, iar funcția $f(s,t)$ definită pentru $s \in S$ $-\infty < x < \infty$, satisface condiția lui Caratheodory : este continuă în t a.p.t $s \in S$ și măsurabilă în S pentru fiecare $t \in (-\infty, \infty)$.

Vom nota cu $K^{\frac{1}{2}}$ rădăcina păstrată pozitivă din operatorul K, iar cu F operatorul de superpoziție definit de funcția f :

$$Fx = f(s, x(s)).$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 7, P 1009–1013, BUCUREȘTI, 1969

TEOREMĂ. *Dacă funcţia $f(s,t)$ satisface condiţiile :*

1. $|f(s,t)| \leqq a(s) + b|t|$, $b > 0$, $a(s) \in L^2(S)$;

2. $f'_t(s,t) \leqq L$ *a.p.t.* $s \in S$ şi $L\,\|K\| \leqq 1$;

3. $tf(s,t) \leqq ct^2 + d(s)|t|^{2-\alpha} + e(s)$ *cu*

$$0 < \alpha < 2 \qquad d(s) \in L^{\frac{2}{\alpha}}(S),\ e(s) \in L(S) \text{ și } c\,\|K\| < 1$$

şi dacă $R > 0$ este astfel încît

$$c\,\|K\|\,R^2 + \left[\int_S |d(s)|^{\frac{2}{\alpha}}\,\mathrm{d}s\right]^{\frac{\alpha}{2}} \|K\|^{1-\frac{\alpha}{2}} R^{2-\alpha} + \int_S e(s)\,\mathrm{d}s \leqq R^2,$$

atunci :

a) *Pentru orice y_0 fixat în sfera B_R ($\|x\| \leqq R$) din $L^2(S)$ și pentru orice λ cu $0 < \lambda < 1$, există x_λ, punct fix unic în B_R al operatorului $\lambda K^{\frac{1}{2}} F K^{\frac{1}{2}} + (1 - \lambda)\,y_0$.*

x_λ poate fi calculat ca limită a procesului iterativ :

$$x_\lambda^{n+1} = \begin{cases} (1+\mu)\,x_\lambda^n - \mu\lambda\,K^{\frac{1}{2}}FK^{\frac{1}{2}}x_\lambda^n - (1-\lambda)\mu\,y_0 \text{ dacă} \\ (1+\mu)\,x_\lambda^n - \mu\lambda\,K^{\frac{1}{2}}FK^{\frac{1}{2}}x_\lambda^n - (1-\lambda)\,\mu\,y_0 \in B_R \\ R\,\dfrac{(1+\mu)\,x_\lambda^n - \mu\lambda\,K^{\frac{1}{2}}FK^{\frac{1}{2}}\,x_\lambda^n - (1-\lambda)\mu\,y_0}{\|(1+\mu)\,x_\lambda^n - \mu\lambda\,K^{\frac{1}{2}}FK^{\frac{1}{2}}x_\lambda^n - (1-\lambda)\,\mu\,y_0\|} \\ \text{dacă } (1+\mu)\,x_\lambda^n - \mu\lambda\,K^{\frac{1}{2}}FK^{\frac{1}{2}}x_\lambda^n - (1-\lambda)\,\mu\,y_0 \notin B_R \end{cases}$$

$$x_\lambda = \lim_n x_\lambda^n \quad (x_0 \text{ dat arbitrar în } B_R)$$

iar $\mu \in \left(0, \dfrac{2(1-\lambda)}{(1+\lambda L\,\|K\|)^2}\right)$. *Eroarea are următoarea estimarea :*

$$\|x_\lambda - x_\lambda^n\| \leqq \frac{2\,R\,\varepsilon^n}{1-\varepsilon},$$

unde

$$\varepsilon = [1 - 2\,(1-\lambda) + \mu^2(1 + \lambda\,L\,\|K\|\,)^2]^{\frac{1}{2}}$$

b) *Ecuaţia (1) admite soluţii în mulţimea* $K^{\frac{1}{2}} B_R$. *Dacă* $\lambda \to 1$, *atunci* $K^{\frac{1}{2}} x_\lambda$ *converge către elementul* x_0 *soluţie a ecuaţiei (1)*

Demonstraţie. I. Din condiţia 2 rezultă imediat că operatorul $K^{\frac{1}{2}} FK^{\frac{1}{2}}$ este lipschitzian în $L^2(S)$:

$\| K^{\frac{1}{2}} FK^{\frac{1}{2}} x - K^{\frac{1}{2}} FK^{\frac{1}{2}} y \| \leqq L \| K \| \; \| x - y \|$ (oricare ar fi x şi y din $L^2(S)$).

II. Operatorul $I - K^{\frac{1}{2}} FK^{\frac{1}{2}}$ este monoton (deci $K^{\frac{1}{2}} FK^{\frac{1}{2}}$ este pseudocontractiv) :

$$(x - y,\ x - K^{\frac{1}{2}} FK^{\frac{1}{2}} x - y + K^{\frac{1}{2}} FK^{\frac{1}{2}} y) =$$

$$= \| x - y \|^2 - (x - y,\ K^{\frac{1}{2}} FK^{\frac{1}{2}} x - K^{\frac{1}{2}} FK^{\frac{1}{2}} y) =$$

$$= \| x - y \|^2 - (K^{\frac{1}{2}} (x - y),\ FK^{\frac{1}{2}} x - FK^{\frac{1}{2}} y) \geqq \| x - y \|^2 - L \| K \| \; \| x -$$

$$- y \|^2 = (1 - L \; \| K \|) \; \| x - y \|^2 \geqq 0 \text{ (oricare ar fi } x \text{ şi } y \text{ în } L^2(S))$$

III. Pe sfera S_R ($\| x \| = R$) operatorul $K^{\frac{1}{2}} FK^{\frac{1}{2}}$ verifică condiţia Lerey-Schauder :

$$(K^{\frac{1}{2}} FK^{\frac{1}{2}} \mathrm{x}, \mathrm{x}) \leqq \| x \|^2 .$$

Folosind ipoteza 3, obţinem :

$$(K^{\frac{1}{2}} FK^{\frac{1}{2}} x, x) = (FK^{\frac{1}{2}} x, x) = \int_S f\,[s, K^{\frac{1}{2}} x\,(s)]\; K^{\frac{1}{2}} x\,(s)\,\mathrm{d}s \leqq$$

$$\leqq c \int_S |K^{\frac{1}{2}} x\,(s)|^2\,\mathrm{d}s + \int_S \mathrm{d}\,(s)\,|\,K^{\frac{1}{2}} x\,(s)|^{2-\alpha}\,\mathrm{d}s + \int_S e\,(s)\,\mathrm{d}s \leqq$$

$$\leqq c \| K \| \, \| x \|^2 + \left[\int_S |d\,(s)|^{\frac{2}{\alpha}}\,\mathrm{d}s \right]^{\frac{\alpha}{2}} \| K \|^{1 - \frac{\alpha}{2}} \; \| x \|^{2-\alpha} + \int_S e\,(s)\,\mathrm{d}s \leqq$$

$$\leqq \| x \|^2 \text{ dacă } \| x \| = R$$

Afirmaţiile teoremei decurg din rezultatele lui Browder şi Petryshyn referitoare la metodele aproximative de construire a punctelor fixe pentru operatori pseudocontractivi şi lipschitzieni (teorema 14 din [2].

Observaţie. Operatorul $K^{\frac{1}{2}} FK^{\frac{1}{2}}$ este neexpansiv :

$$\| K^{\frac{1}{2}} FK^{\frac{1}{2}} x - K^{\frac{1}{2}} FK^{\frac{1}{2}} y \| \leqq \| x - y \|$$

(căci $L \| K \| \leq 1$) şi verifică pe S_R condiţia Lerey-Schauder.

Şirul $\left\{K^{\frac{1}{2}} x_n\right\}$, unde

$$x_n = \begin{cases} K^{\frac{1}{2}} F K^{\frac{1}{2}} x_{n-1} + (1-\lambda)\, x_{n-1} \text{ dacă } K^{\frac{1}{2}} F K^{\frac{1}{2}} x_{n-1} \in B_R \\[2ex] R \dfrac{K^{\frac{1}{2}} F K^{\frac{1}{2}} x_{n-1}}{\| K^{\frac{1}{2}} F K^{\frac{1}{2}} x_{n-1} \|} + (1-\lambda)\, x_{n-1} \text{ dacă } K^{\frac{1}{2}} F K^{\frac{1}{2}} x_{n-1} \notin B_R \end{cases}$$

$0 < \lambda < 1$ şi x_0 arbitrar în B_R, converge slab către o soluţie a ecuaţiei (1).

Primită la redacţie la 26 septembrie 1968

Centrul de calcul economic şi cibernetică economică Bucureşti, Piaţa Romană nr. 6

LÖSUNGSAUFBAU EINER HAMMERSTEINISCHEN INTEGRALGLEICHUNG

(ZUSAMMENFASSUNG)

Die Beziehungen zwischen den Bedingungen monotonen und kontrahierenden Typs erlauben die Bestimmung, mit Hilfe der Approximationsmethoden, der Fixpunkte der nichtlinearen Operatoren.

Mit der Hilfe einiger Ergebnisse Browders und Petryshyns kann man die Lösungen einiger nichtlinearer Integralgleichungen aufbauen.

BIBLIOGRAFIE

1. F. E. Browder, *Convergence of approximants to fixed points of nonexpansive nonlinear mappings in Banach spaces*. Arch. Rat. Mech. Anal., **24**, 82—90 (1967).
2. F. E. Browder W. V. Petryshyn, *Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert Spaces*. J. Math. Anal. Appl., **20**, 197—228 (1967).
3. M. M. Вайнберг *Вариационные методы исследования нелинейных операторов*. Гостехиздат, M. 1956.
4. — *О сходимости процесса наискорейшего спуска для нелинейных уравнений*. Сибирск. матем. журн., **2**, *2*, 201—220 (1961).
5. C. L. Dolph, G. J. Minty, *On non-linear integral equations of the Hammerstein type*. Univ. Wisconsin Proc. Sem. Cand. Math. Res. Center, 97—154 (1963).

6. Р. И. Качуровский, *Нелинейные монотонные операторы в Бaнaховых пространствах*. Усп. матем. Наук, **XXIII**, *2*, 121—168 (1968).

7. М. А. Карсносельзкий, *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*. Гостехиздат, М, 1956.

8. I. I. Kolodner, *Equations of Hammerstein type in Hilbert space*. J. Math. and. Mech., **13**, *5*, 701—750 (1964).

9. E. H. Zarantonello, *Solving functional equations by contractive averaging*. Univ. of Wisconsin Proc. Adv. Sem. Cand. Math. Res. Center, 160 (1960).

GENERAREA COEFICIENȚILOR SIMPSON PENTRU CAZUL INTEGRALELOR MULTIPLE

DE

CSABA FABIAN

În lucrarea de față se dă o metodă de generare a coeficienților Simpson pentru cazul integralelor multiple

Se consideră funcția $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definită și integrabilă într-un hiperparalelipiped D din spațiul n-dimensional.

Pentru calculul numeric al integralei

$$I = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\dots\int_{a_n}^{b_n} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n, \tag{1}$$

cu ajutorul metodei Simpson (presupunînd că numărul nodurilor $(2m(j) + 1)$ pe fiecare latură a hiperparalelipipedului este dată sau determinată pentru obținerea unei precizii dorite), se procedează astfel :

— Se determină pasul corespunzător fiecărui interval $[a_j, b_j]$:

$$h_j = \frac{b_j - a_j}{2m(j)} \qquad (j = 1, \dots, n). \tag{2}$$

— Se generează $n\,(2m(j) + 1)$ valori

$$x_j^k = a_j + kh_j \left\{ \begin{array}{l} j = 1, \dots n\,; \\ k = 0,1 \dots, 2m(j). \end{array} \right. \tag{3}$$

— Se determină coeficienții

$$A\,[i_1, i_2, \dots, i_n] \tag{4}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 7, P. 1015 – 1018, BUCUREȘTI, 1969

— Se calculează expresia

$$(5)\qquad I' = \frac{h_1 h_2 \dots h_n}{3^n} \sum_{i_1=0}^{2m(1)} \dots \sum_{i_n=0}^{2m(n)} A\,[i_1 \dots i_n]\, \varphi\,(x_1^{i_1}, \dots, x_n^{i_n} n).$$

Valoarea obținută din formula (5) va aproxima integrala I ($I \approx I'$). În continuare se dă o teoremă în baza căreia pot fi generați coeficienții (4) printr-un calcul simplu și scurt. Mai întîi facem o observație. Pentru o funcție $\varphi\,(x)$ definită pe $[a,b]$ avem

$$(6)\qquad \begin{aligned} \int_a^b \varphi\,(x)\,\mathrm{d}x &\approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{2m} A(i)\, \varphi\,(x^i) = \\ &= \frac{h}{3}\,(A\,[0], A\,[1], \dots A\,[2m]) * \begin{pmatrix} \varphi\,(x^0) \\ \varphi\,(x^{2m}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

unde $x^i = a + ih$ iar $h = \dfrac{b-a}{2m}$.

Considerînd funcția $q(i)$ definită după cum urmează

$$(7)\qquad q(i) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } i = 0 \vee i = 2m \\ 1 \text{ dacă } i \wedge 1 = 0 \\ 2 \text{ dacă } i \wedge 1 \neq 0 \end{cases}$$

este ușor de văzut că are loc următoarea egalitate

$$(8)\qquad A\,[i] = 2^{q(i)} \qquad i = 0,1,\dots, 2m$$

Din definiția metodei Simpson pe $2m+1$ noduri [1] sau pe baza algoritmului 84 a [2] are loc egalitatea:

$$(A\,[0], A\,[1], \dots, A\,[2m]) = (1,\ 4,\ 2,\ 4, \dots, 4,\ 2,\ 4,\ 1) =$$

$$= (2^0, 2^2, 2^1, 2^2, \dots, 2^2, 2^1, 2^2, 2^0).$$

Generarea coeficienților (4) se bazează pe această observație.

Teoremă. *Considerînd funcțiile:*

$$(9)\qquad q_j(i_j) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } i_j = 0 \vee i_j = 2m(j) \\ 1 \text{ dacă } i_j \wedge 1 = 0 \\ 2 \text{ dacă } i_j \wedge 1 \neq 0, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\} \end{cases}$$

și notînd $p = \sum_{j=1}^{n} q_j\,(i_j)$, *avem* $A\,[i_1, i_2, \dots, i_n] = 2^p$.

Demonstrația teoremei prin metoda inducției completă este imediată. Pentru integrale simple se transcrie relația (6) în relația :

$$(10)\qquad \int_{a_1}^{b_1} \varphi\,(x_1)\,\mathrm{d}x_1 \approx \frac{h_1}{3} \sum_{i_1=0}^{2m\,(1)} 2q_1\,(i_1)\;\varphi\;(a_1 + i_1 h_1).$$

Folosind relația (10) pentru integrale duble, se obține :

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \varphi\,(x_1,\ x_2)\;\mathrm{d}x_1\;\mathrm{d}x_2 \approx \int_{a_2}^{b_2} \frac{h_1}{3} \sum_{i_1=0}^{2m\,(1)} 2^{q}{}_1(i_1)\;\varphi\;(a_1 + i_1 h_1,\ x_2)\mathrm{d}x_2 =$$

$$= \frac{\mathrm{h}_1}{3} \sum_{i_1=0}^{2m\,(1)} 2_1^q\,(i_1) \int_{a_2}^{b_2} \varphi\;(a_1 + i_1\;h_1,\ x_2)\;\mathrm{d}x_2 \approx$$

$$\approx \frac{h_1 h_2}{3^2} \sum_{i_1=0}^{2m\,(1)} \sum_{i_2=0}^{2m\,(2)} 2_1^q\;(i_1) + q_2\;(i_2)\;\varphi\;(x_1^{i},\ x_2^{i_2}).$$

Presupunînd adevărata teorema pentru integrale multiple |de ordinul $n-1$, se poate scrie

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \varphi\;(x_{i_1},\ x_{i_2},\ \ldots,\ x_{i_n})\;\mathrm{d}x_{i_1}\,\mathrm{d}x_{i_2}\ldots\;\mathrm{d}x_{i_n} \approx$$

$$\approx \frac{h_1 h_2 \ldots h_{n-1}}{3n-1} \sum_{i_1=0}^{2m\,(1)} \cdots\cdot \sum_{i_{n-1}=0}^{2m\,(n-1)} 2 \sum_{j=1}^{n-1} q_j\;(i_j) \int_{a_n}^{b_n} \varphi\;(x_1^{i_1},\ x_2^{i_2},\ \ldots\ x_n^{i_n})\;\mathrm{d}x_n \approx$$

$$\approx \frac{h_1 h_2 \ldots h_n}{3^n} \sum_{i_1=0}^{2m\,(1)} \cdots\cdot \sum_{i_n=0}^{2m\,(n)} 2 \sum_{j=1}^{n} q_j\,(i_j)\;\varphi(x_1^{i_1},\ x_2^{i_2},\ \ldots\ x_n^{i_n})$$

Bazat pe teorema I, folosind funcția (9), unui sistem de valori a indicilor $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, se poate atașa un coeficient Simpson $A\;[i_1, i_2, \ldots, \ldots, i_n]$.

Utilizînd cu calculator electronic pentru determinarea coeficienților (4) se obțin următoarele avantaje :

1. Forma dată a coeficienților permite obținerea lor printr-un calcul simplu.

2. Coeficienții (4) se generează în funcție de indicii $(i_1, \ldots i_n)$.

Primită la redacție la 3 ianuarie 1968

Centrul de calcul economic și cibernetică
economică Bucureşti, Piața Romană
nr. 6.

GENERATING SIMPSON'S COEFFICIENTS FOR THE MULTIPLE INTEGRALS

(ABSTRACT)

In this paper a method for generating Simpson's coefficients under the form of 2^p is presented.

This method enable us to obtain these coefficients very easily by using computers.

BIBLIOGRAFIE

1 B. P. Demidovici, I. A. Maron, *Oșnovi vicestitelinoi matematiki.* Fizmatgiz, Moscva, 1960, pag. 629–633.

2. *** *Algoritm* 84, C. of ACM, **4, 7, 8, 11,** (1962).

3 Cs . Fabian, Gh, Weisz, *Algoritm pentru generarea coeficienților Simpson la integrale duble* St. cerc. chim., **15,** *2,* 161–162 (1967).

ASUPRA METODELOR CONVERGENTE DE ORDINUL 3 APLICATE LA REZOLVAREA ECUAȚIILOR FUNCȚIONALE NELINIARE

DE

A. GAIDICI şi F. FORNWALD

(Baia Mare)

Pentru rezolvarea ecuației funcționale $F(x)=0$ se întrebuințează algoritmul

$$x_{n+1} = x_n - \left[1 + \frac{\dfrac{1}{2}\dfrac{F''(x_n)\, y_n^2\, F(x_n)}{(F'(x_n)\, y_n)^2}}{1 - \dfrac{\lambda}{2}\dfrac{F''(x_n)\, y_n^2\, F(x_n)}{(F'(x_n)\, y_n)^2}} \right] \frac{F(x_n)}{F'(x_n)\, y_n}\, y_n$$

unde λ este un număr real oarecare. Pentru $\lambda = 0,1,2$ se obțin metodele şi teoremele din [4].

Pentru rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare $P(x) = 0$ definite în spațiul Banach X, U. Kaazik în lucrarea [1] consideră următoarea categorie de metode avînd următoarea formă generală

$$\text{(A)} \qquad x_{n+1} = x_n - [I + \lambda R_n]^{-1} [I + (1 + \lambda) R_n] \, \Gamma_n \, P(x_n),$$

unde $\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$ şi $R_n = \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) \Gamma_n P(x_n)$ iar λ este un număr real oarecare.

Pentru rezolvarea ecuațiilor funcționale neliniare de forma

$$\text{(1)} \qquad F(x) = 0$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 7, P. 1019–1025, BUCUREŞTI, 1969

vom folosi o altă categorie de metode ce se obţine din (A) :

$$x_{n+1} = x_n - \left[1 + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{F''(x_n)\,y_n^2\,F(x_n)}{(F'(x_n)\,y_n)^2}}{1 - \frac{\lambda}{2}\,\frac{F''(x_n)\,y_n^2\,F(x_n)}{(F'(x_n)\,y_n)^2}}\right] \frac{F(x_n)}{F'(x_n)\,y_n}\,y_n \tag{2}$$

unde λ este un număr real oarecare.

Despre $F(x)$ vom presupune că este definită în domeniul S complet şi convex din spaţiul Banach X, este continuă şi admite derivate în sens Fréchet pînă la ordinul 3. Presupunem apoi că funcţionala $F(x)$ este astfel încît şirul de elemente $\{y_n\}$, $y_n \in X$ să satisfacă condiţia [2] :

$$|F'(x_n)\,y_n| = \|F'(x_n)\|, \qquad \|y_n\| = 1, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{B}$$

În legătură cu existenţa soluţiei ecuaţiei (1) precum şi cu convergenţa metodelor date de (2) vom da cîteva teoreme.

TEOREMA 1. *Dacă pentru aproximaţia iniţială* x *sînt îndeplinite următoarele condiţii* :

1. $$\frac{1}{\|F'(x_0)\|} \leqslant B_0$$

2. $$\frac{|F(x_0)|}{\|F'(x_0)\|} \leqslant \eta_0$$

3. $$\|F''(x)\| \leqslant M, \qquad \|F'''(x)\| \leqslant N$$

4. $$h_0 = B_0\,M\eta_0 \begin{cases} < \dfrac{\sqrt{(2-|\lambda|)^2 + 8} - (2+|\lambda|)}{2(1-|\lambda|)} & |\lambda| \neq 1. \\[2ex] < \dfrac{2}{3} & |\lambda| = 1 \end{cases}$$

5. $h_0 E_0 < 1$, unde

$$E_0^2 = \frac{1}{H_0^2}\left\{\frac{(1-\lambda)^2 h_0 + 2\,|2-\lambda|}{2\,(2-|\lambda|\,h_0)^2} + \frac{N\,[2+(1-|\lambda|)\,h_0]^3}{6\,(2-|\lambda|\,h_0)^3\,B_0\,M^2}\right\}.$$

şi

$$H_0 = 1 - \frac{h_0\,[2+(1-|\lambda|)\,h_0]}{2-|\lambda|\,h_0},$$

atunci ecuaţia (*1*) *are în sfera* $S\left(x_0, \dfrac{\eta_0}{h_0}\right)$ *cel puţin o soluţie* $x^* = \lim x_n$, *unde șirul* $\{x_n\}$ *se obține succesiv din* (2). *Rapiditatea convergenței este caracterizată prin delimitarea*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \frac{(E_0 h_0)^{3^n - 1} H_0^n \eta_0}{h_0}. \tag{3}$$

Demonstrație. Demonstrăm că trecînd de la x_0 la x_1, condițiile 1—5 rămîn valabile.

a) Folosind inegalitatea

$$\| F'(x_1) \| \geqslant \| F'(x_0) \| \left(1 - \frac{\| F'(x_0) - F'(x_1) \|}{\| F'(x_0) \|} \right)$$

formula generalizată a lui Lagrange și algoritmul (2) rezultă

$$\| F'(x_1) \| \geqslant \| F'(x_0) \| \left(1 - \frac{h_0 [2 + (1 - |\lambda|) h_0]}{2 - |\lambda| h_0} \right)$$

de unde

$$\frac{1}{\| F'(x_1) \|} \leqslant \frac{B_0}{H_0} = B_1, \quad B_1 > B_0 \tag{4}$$

așadar condiția 1 este satisfăcută pentru aproximația x_1.

b) Din formula generalizată a lui Taylor pentru funcționala $F(x)$

$$| F(x_1) - F(x_0) - F'(x_0)(x_1 - x_0) - \frac{1}{2} F''(x_0)(x_1 - x_0)^2 | \leqslant \tag{5}$$

$$\leqslant \frac{1}{6} \| F'''(\bar{x}) \| \cdot \| x_1 - x_0 \|^3,$$

unde $\bar{x} = x_0 + t(x_1 - x_0)$. Folosind formula (12), expresia

$$S_0 = F(x_0) + F'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2} F''(x_0)(x_1 - x_0)^2$$

devine

$$S_0 = \frac{R_0 F''(x_0) y_0^2 [(1 - \lambda)^2 R_0 + 2 - \lambda]}{2(1 - \lambda R_0)^2} \; \frac{F^2(x_0)}{(F'(x_0) y_0)^2} \tag{6}$$

$$\text{unde} \quad R_0 = \frac{F(x_0) F''(x_0) y_0^2}{2(F'(x_0) y_0)^2}.$$

Din relaţiile (5), (6) şi condiţiile 1 — 5 rezultă delimitarea

$$|F(x_1)| \leqslant h_0 M \eta_0^2 E_0^2 H_0^2 = \frac{(E_0 h_0)^2 H_0^2 \eta_0}{B_0}. \tag{7}$$

Apoi din (4) şi (7) obţinem

$$\eta_1 = \frac{|F(x_1)|}{\|F'(x_1)\|} \leqslant (E_0 h_0)^2 H_0 \eta_0 < \eta_0 \tag{8}$$

Astfel condiţia 2 este verificată pentru aproximaţia x_1.

c) Din inegalităţile (4), (8) şi condiţia 5 rezultă

$$h_1 = B_1 M \eta_1 \leqslant h_0 (E_0 h_0)^2 < h_0 \tag{9}$$

deci şi condiţia 4 este îndeplinită.

d) Se arată uşor că $E_1 < E_0$, $H_1 > H_0$ şi $E_1 H_1 < E_0 H_0$, de unde rezultă că şi condiţia 5 este satisfăcută pentru aproximaţia x_1, adică

$$E_1 h_1 < E_0 h_0.$$

În consecinţă condiţiile 1 — 5 rămîn valabile pentru aproximaţia x_1 în care cantităţile B_0, η_0, h_0, E_0, H_0 au fost înlocuite cu B_1, η_1, h_1, E_1, H_1.

Aplicînd principiul inducţiei complete se ajunge la relaţiile

$$\eta_n \leqslant H_0^n (E_0 h_0)^{3^n - 1} \eta_0 \tag{10}$$

$$h_n \leqslant \frac{1}{E_0} (E_0 h_0)^{3^n} \tag{11}$$

$$B_n \leqslant \frac{B_0}{H_0^n}. \tag{12}$$

Din (2) rezultă delimitarea

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \left(1 + \frac{h_n}{2 - |\lambda| h_n}\right) \eta_n \leqslant \left(1 + \frac{h_0}{2 - |\lambda| h_0}\right) \eta_n \tag{13}$$

de unde

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \frac{(E_0 h_0)^{3^n - 1} H_0^n \eta_0 (1 - H_0^q)}{h_0}. \tag{14}$$

Din faptul că spaţiul X este complet, rezultă existenţa limitei $x^* = \lim x_n$. Făcînd în relaţia (14) $p \to \infty$, rezultă delimitarea (3).

Rămîne să demonstrăm că aproximaţiile x_n nu ies din sfera considerată. Într-adevăr,

$$\|x_0 - x_n\| \leqslant \frac{2 + (1 - |\lambda|)h_0}{2 - |\lambda| h_0}(\eta_0 + \eta_1 + \cdots + \eta_{n-1}) \leqslant \frac{\eta_0}{h_0}. \tag{15}$$

Arătăm că x^* este soluţia ecuaţiei (1). În mod analog ca şi pentru relaţia (7) se stabileşte delimitarea

$$|F(x_n)| \leqslant \frac{(E_0 h_0)^{3^n - 1} H_0^{n+1} \eta_0}{B_{n-1}} \tag{16}$$

în care pentru $n \to \infty$ avem $\lim |F(x_n)| = 0$ iar pe baza continuităţii lui $F(x)$ rezultă

$$F(x^*) = \lim |F(x_n)| = 0.$$

TEOREMA 2. *Dacă sînt îndeplinite următoarele condiţii :*

1. $\dfrac{1}{\|F'(x)\|} \leqslant B$ *pentru orice* $x \in S(x_0, \gamma)$,

$$v = \left(1 + \frac{h_0}{2 - |\lambda| h_0}\right)\eta_0 H,$$

unde $H = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (G_0 h_0)^{3^i - 1}$.

2. $\dfrac{|F(x_0)|}{\|F'(x_0)\|} \leqslant \eta_0$

3. $\|F''(x)\| \leqslant M, \quad \|F'''(x)\| \leqslant N$

4. $h_0 = BM\eta_0 \begin{cases} > 0, & \lambda = 0 \\ < \dfrac{2}{|\lambda|}, & \lambda \neq 0 \end{cases}$

5. $G_0 h_0 < 1$

unde

$$G_n^2 = \frac{(1 - \lambda)^2 h_n + 2|2 - \lambda|}{2(2 - |\lambda| h_n)^2} + \frac{N[2 + (1 - |\lambda|)h_n]^3}{6(2 - |\lambda| h_n)^3 BM^2},$$

atunci ecuația (1) admite cel puțin o soluție $x^* = \lim x_n$ *în sfera* $S(x_0, \gamma)$. *Rapiditatea convergenței este dată de relația*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \left(1 + \frac{h_0}{2 - |\lambda| h_0}\right) (G_0 h_0)^{3^n - 1} \eta_0 H. \tag{17}$$

Demonstrația este analogă cu aceea a teoremei 1.

Observații. 1. Deoarece în algoritmul (2) nu intervine derivata $F'''(x)$, condiția 3 din teoremele 1 și 2 poate fi înlocuită cu următoarea condiție :

$$\| F''(x) \| \leqslant M, \ \| F''(x') - F''(x'') \| \leqslant K \| x' - x'' \|$$

pentru orice $x, x', x'' \in S(x_0, r)$.

Expresiile lui E_n^2 și G_n^2 se modifică prin înlocuirea lui N cu K. În demonstrație în locul formulei (5) ne servim de formula următoare [3] :

$$| F(x_1) - F(x_0) - F'(x_0)(x_1 - x_0) - \frac{1}{2} F''(x_0)(x_1 - x_0)^2 x_1 \leqslant \frac{K \| x_1 - x_0 \|^3}{6}.$$

2. Teoremele de mai sus generalizează rezultatele din lucrarea [4] Astfel pentru $\lambda = 0,1,2$ regăsim metodele iterative și teoremele din lucrarea amintită.

Primită la redacție la 27 iulie 1968

Institutul pedagogic de 3 ani
Baia Mare

О СХОДЯЩИХСЯ МЕТОДАХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА, ПРИМЕНЕННЫХ В РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

РЕЗЮМЕ

Рассматривается уравнение $F(x) = 0$ с нелинейным непрерывным функционалом F, определённым на замкнутом выпуклом множестве в банаховом пространстве X. Предполагается, что $F(x)$ обладает первым тремя производными типа Фреше.

Для нахождения решения уравнения применяется итерационный процесс:

$$x_{n+1} = x_n - \left[1 + \frac{\dfrac{1}{2} \dfrac{F''(x_n) \ y_n^2 F(x_n)}{(F'(x_n) y_n)^2}}{1 - \dfrac{\lambda}{2} \dfrac{F''(x_n) y_n^2 F(x_n)}{(F'(x_n) y_n)^2}} \right] \frac{F(x_n)}{F'(x_n) y_n} y_n$$

где λ некоторое вещественное число, а элементы $y_n \in X$ выбираются так что

$$|F'(x_n)\,y_n| = \|F'(x_n)\|, \quad \|y_n\| = 1 \quad (n = 0,1,\ldots)\,.$$

Доказываются две теоремы о существовании решения уравнения $F(x) = 0$ и сходимости x_n к решению.

Для $\lambda = 0,1,2$. получаются методы и теоремы в статье [4].

BIBLIOGRAFIE

1. Ю. Я. Каазик, *Об одном классе итерационных процессов для приближенного решения операторных уравнений*. ДАН СССР, **112**, *4* (1957).
2. M. Altamn, *Concerning approximate solutions of non-linear functional equations*. Bull. de l'Acad. Polon de Sci., **V**, *5*, (1957).
3. Б. А. Вертчейм, *Об условиях применения метода Нютона*. ДАН СССР, **110**, *5* (1956).
4. B. Jankó, F. Fornwald, A. Gaidici, *Asupra rezolvării ecuaţiilor funcţionale neliniare*. St. cerc. mat., **21**, (1969).

CRITERII DE STABILITATE LINIARĂ A MIȘCĂRII PLAN PARALELE A UNUI FLUID NENEWTONIAN

DE

ADELINA GEORGESCU

În această lucrare se studiază efectul perturbațiilor ondulatorii bidimensionale asupra mișcării între două plăci paralele a unui fluid nenewtonian a cărui lege constitutivă conține și puterea a treia a tensorului viteză de deformație. Sînt date cîteva condiții suficiente de stabilitate care coincid cu cele găsite de Synge [1] cînd fluidul nenewtonian tinde către un fluid newtonian. Prin utilizarea inegalităților izoperimetrice obținem pentru viteza de amplificare a perturbației ondulatorii o limitare mai bună decît cea găsită cu ajutorul inegalității lui Synge [1]. Acest rezultat coincide cu cel al lui Joseph [3] cînd vîscozitatea de ordinul al treilea dispare. Se găsește că termenii cu puteri pare ale tensorului viteză de deformație din legea constitutivă nu au nici un efect în teoria liniară a stabilității mișcărilor plane paralele.

§ 1. CONDIȚII SUFICIENTE DE STABILITATE BAZATE PE INEGALITATEA LUI SYNGE

Să considerăm un fluid nenewtonian animat de o mișcare plan paralelă în direcția axei x-ilor între doi pereți ficși, impermeabili de ecuații $y = 0,1$. Mișcarea sa satisface ecuația de mișcare (valabilă, de altfel, pentru orice mediu continuu)

$$\rho \frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} = \rho\vec{F} + \operatorname{div} \vec{\vec{T}}, \tag{1}$$

ecuația de continuitate

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{V}) = 0, \tag{2}$$

și are drept lege constitutivă expresia

$$\vec{\vec{T}} = -p\vec{\vec{I}} + 2\mu\vec{\vec{D}} + 4\nu\vec{\vec{D}}^2 + k\vec{\vec{D}}^3 \tag{3}$$

ST. CERC. MAT. TOM. 21. NR. 7, P. 1027-1036, BUCUREȘTI, 1969

unde am notat cu $\vec{V} = (u,v)$ vectorul viteză, cu ρ densitatea, cu p presiunea, μ, ν, k sînt coeficienţii de viscozitate dinamică de ordinul I,II,III respectiv, $\vec{\vec{D}}$, $\vec{\vec{T}}$ sînt tensorii viteză de deformaţie şi tensorul tensiune, $\vec{\vec{I}}$ este tensorul unitate iar $\vec{F}$ vectorul forţelor masice. Sub formă matricială şi în ipoteza fluidului incompresibil avem

$$\vec{\vec{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\vec{D}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \vec{\vec{D}}^2 = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

$$\vec{\vec{D}}^3 = \begin{pmatrix} C\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{C}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \dfrac{C}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & C\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \vec{\vec{D}}^{2k} = \begin{pmatrix} C^k & 0 \\ 0 & C^k \end{pmatrix}, \quad \vec{\vec{D}}^{2k+1} =$$

$$= \begin{pmatrix} C^k\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{C^k}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \dfrac{C^k}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & C^k\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

unde pentru prescurtare am notat

$$C = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2. \tag{5}$$

Introducînd expresiile (4) şi (5) în (1), (2), (3) pentru cazul incompresibil, vom obţine ecuaţiile care guvernează mişcarea lichidului nenewtonian în absenţa forţelor masice sub forma

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\Delta u + \frac{4\nu}{\rho}\frac{\partial C}{\partial x} + \\ &\qquad + \frac{k}{\rho}\left[\frac{1}{2}C\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial C}{\partial y}\right], \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\Delta v + \frac{4\nu}{\rho}\frac{\partial C}{\partial y} + \\ &\qquad + \frac{k}{\rho}\left[\frac{1}{2}C\Delta v + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial C}{\partial y}\right], \\ &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right. \tag{6}$$

care cu ajutorul componentei $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ a rotorului vitezei se mai scriu

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y} &= \frac{\mu}{\rho}\Delta\zeta + \frac{k}{\rho}\left[\frac{1}{2} C\Delta\zeta + \frac{\partial C}{\partial x}\,\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y}\,\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right) - 2\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}\right].\end{aligned} \tag{7}$$

Vom lua drept mişcare de bază neperturbată, mişcarea staţionară pentru care

$$u = U(y)\ ,\quad v = 0, \tag{8}$$

în condiţiile la limită

$$U(1) = U_s\ ,\quad U(0) = 0. \tag{9}$$

În aceste ipoteze, din sistemul (6) găsim

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu\, U'' + \frac{3}{8} k\, U''\, U'^2, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 2\nu\, U' U'', \end{cases} \tag{10}$$

sau, punînd $p(x, y) = p_1(x) + p_2(y)$, avem

$$\begin{cases} p_1'(x) = \mu\, U'' + \frac{k}{8}(U'^3)' \\ p_2'(y) = \nu\,(U'^2)' \end{cases}$$

de unde

$$p_1(x) = A_1 x + B_1 \tag{11}$$

$$\frac{k}{8} U'^3 + \mu\, U' = A_1 y + B_2 \tag{12}$$

$$p_2'(y) = \nu\,(U'^2)'. \tag{13}$$

Din acest sistem se vede că faţă de cazul fluidului newtonian, viscozitatea de ordin II influenţează asupra variaţiei după y a presiunii iar viscozitatea de ordin III, are influenţă directă asupra profilului de viteză. Pentru $\nu \to 0$ şi $k \to 0$, regăsim mişcarea Poiseuille-Couette plană obişnuită.

Vom suprapune acum peste mişcarea principală de mai sus o perturbaţie astfel încît

$$\begin{cases} u = U(y) + u_1(x, y, t), \\ v = \phantom{U(y) + {}} v_1(x, y, t), \end{cases}$$

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Luînd

$$\psi = \varphi(y)\, e^{i\alpha(x-ct)}$$

pentru care

$$u_1 = \varphi'(y)\, e^{i\alpha(x-ct)}$$

şi introducînd acestea în ecuaţia (7), obţinem, după liniarizare, drept termen liber,

$$\mu U''' + k\left(\frac{3}{8} U'^2 U''' + \frac{3}{4} U' U''^2\right) = 0 \tag{14}$$

ar drept coeficient al lui $e^{i\alpha(x-ct)}$

$$\begin{aligned} (U-c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi &= \frac{\mu}{i\alpha\rho}(\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi) + \\ &+ \frac{k}{i\alpha\rho}\Big\{(\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi)\frac{U'^2}{8} + \\ &+ (\varphi'' + \alpha^2\varphi)\left(\frac{3}{4} U' U''' + \frac{3}{4} U''^2 + \frac{\alpha^2}{4} U'^2\right) + \\ &+ (\varphi''' - \alpha^2\varphi')\frac{U'U''}{2} + (\varphi''' + \alpha^2\varphi') U'U'' + (\varphi^{IV} + \alpha^2\varphi'')\frac{U'^2}{4}\Big\} \end{aligned} \tag{15}$$

Ecuaţia (14) este cea care furnizează profilul de viteze al mişcării principale şi se poate obţine uşor derivînd după y prima ecuaţie din sistemul (10). Se observă că şi aici, ca şi pentru fluidele newtoniene, liniarizarea pierde interacţiunea dintre mişcarea de bază şi perturbaţie.

În ecuaţia (15), care pentru $k \to 0$ devine ecuaţia lui Orr-Sommerfeld, nu apar termeni care să conţină pe ν (viscozitatea de ordin II). Aceasta era de aşteptat deoarece prin eliminarea presiunii se elimină automat şi termenii care reprezintă contribuţia pătratului tensorului vitezelor de deformaţie. Dacă în sistemul (6) am fi considerat şi influenţa termenilor care conţin pe $\vec{D}^{2k}$, am fi obţinut acelaşi lucru, deoarece în prima ecuaţie (6) am fi avut $\frac{\partial C^k}{\partial x}$ iar în cea de a II-a, $\frac{\partial C^k}{\partial y}$. Prin eliminarea presiunii dispar şi aceşti termeni.

Deci, *stabilitatea liniară pentru fluide nenewtoniene care se mişcă plan paralel între pereţii* $y = 0, 1$ *se tratează formal identic ca pentru cele newtoniene în cazul cînd primele au doar viscozităţi de ordin par.* Deşi presiunea de bază este alta, viteza mişcării principale va fi aceeaşi ca pentru fluide newtoniene deoarece în ecuaţia (12) nu vor apare termeni care să conţină viscozităţi de ordin $2k$, deoarece ei provin din $\frac{\partial C^k}{\partial x}$ care este zero, în ipoteza $u = U(y)$. În mod clar, dacă mişcarea n-ar mai fi paralelă, adică dacă U ar depinde şi de x, atunci concluzia de mai sus nu mai este valabilă.

Condiţia de aderenţă la pereţi ne va da

$$\varphi(1) = \varphi'(1) = \varphi'(0) = \varphi(0) = 0. \tag{16}$$

Scriind ecuaţia (15) adimensional şi notînd numerele adimensionale corespunzătoare lui μ şi k cu R_1 şi R_3 (R_1 este numărul lui Reynolds obişnuit), înmulţind ecuaţia obţinută cu $\overline{\varphi}\,\mathrm{d}y$, integrînd între 0 şi 1 şi ţinînd seama de condiţiile (16), găsim

$$\begin{aligned} & c(I_1^2 + \alpha^2 I_0^2) - \int_0^1 U\,|\varphi'|^2\,\mathrm{d}y - \int_0^1 U'\varphi'\,\overline{\varphi}\,\mathrm{d}y - \alpha^2\int_0^1 U\,|\varphi|^2\,\mathrm{d}y - \\ & - \int_0^1 U''\,|\varphi|^2\,\mathrm{d}y = \frac{-i}{\alpha R_1}(I_2^2 + 2\alpha^2 I_1^2 + \alpha^4 I_0^2) - \\ & - \frac{i}{\alpha R_3}\left[\int_0^1 \frac{3}{8}\,U'^2\,|\varphi''|^2\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \frac{\alpha^2}{4}\,U'^2\,|\varphi''|^2\,\mathrm{d}y + \right. \\ & \left. + \int_0^1\left(\frac{3}{4}\alpha^2 U''^2 + \frac{3}{4}\alpha^2 U' U''' + \frac{3}{8}\alpha^4 U'^2\right)|\varphi|^2\,\mathrm{d}y\right] \end{aligned} \tag{17}$$

I_i^2 ($i=0,1,2$) au expresii analoage cu cele din [1], cu deosebirea că în locul lui f din [1], aici avem φ. Prin adunarea lui (17) cu complex conjugata sa obţinem

$$\begin{aligned} & 2c_r(I_1^2 + \alpha^2 I_0^2) - 2\int_0^1 U\,|\varphi'|^2\,\mathrm{d}y - 2\alpha^2\int_0^1 U|\varphi|^2\,\mathrm{d}y - \\ & - \int_0^1 U'(\varphi'\overline{\varphi} - \overline{\varphi}'\varphi)\,\mathrm{d}y - 2\int_0^1 U''\,|\varphi|^2\,\mathrm{d}y = 0 \end{aligned}$$

ca şi în cazul fluidului newtonian pentru care, după Pai [2], avem

$$\frac{U''_{\min}}{2\alpha^2} + U_{\min} < c_r < \frac{U''_{\max}}{2\alpha^2} + U_{\max} \tag{18}$$

ceea ce constituie o îmbunătăţire faţă de rezultatul corespunzător al lui Synge [1].

Scăzînd acum din (17) complex conjugata sa avem

$$\begin{aligned} \alpha R_1 c_i (c_1^2 + \alpha^2 I_0^2) &= - \frac{i\alpha R_1}{2} \int_0^1 U' (\varphi' \bar{\varphi} - \varphi \bar{\varphi}') \,\mathrm{d}y - \\ &- (I_2^2 + 2\alpha^2 I_1^2 + \alpha^4 I_0^2) - \frac{R_1}{R_3} \left[\int_0^1 |\varphi|^2 \left(\frac{3}{8} \alpha^4 U'^2 + \frac{3}{4} \alpha^2 U''^2 + \right.\right. \\ &\left.\left. + \frac{3}{4} \alpha^2 U' U''' \right) \mathrm{d}y - \int_0^1 |\varphi'|^2 \frac{\alpha^2}{4} U'^2 \,\mathrm{d}y + \int_0^1 \frac{3}{8} U'^2 |\varphi''^2| \,\mathrm{d}y \right]. \end{aligned} \tag{19}$$

Ecuaţia (19) este singura în măsură să dea informaţii asupra instabilităţii mişcării staţionare considerate, instabilitate care are loc dacă există cel puţin un $c_i > 0$ (pentru R_1 şi R_3 într-un domeniu ce depinde de α). Cum condiţii de instabilitate au putut fi date doar în cazuri foarte simple (mişcarea Couette plană), ne vom mărgini la găsirea condiţiilor suficiente de stabilitate.

O condiţie suficientă de stabilitate se obţine extremînd membrul al doilea al relaţiei (19) faţă de toate funcţiile care satisfac condiţiile la limită (16). Ecuaţia extremalilor este

$$\begin{aligned} &\varphi^{\mathrm{IV}} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{R_1}{R_3} U'^2 \right) + \varphi''' \left(\frac{3}{2} \frac{R_1}{R_3} U' U'' \right) + \\ &+ \varphi'' \left[-2\alpha^2 + \frac{R_1}{R_3} \left(\frac{\alpha^2}{4} U'^2 + \frac{3}{4} U''^2 + \frac{3}{4} U' U''' \right) \right] + \\ &+ \varphi' \left(i\alpha R_1 U' + \frac{R_1}{R_3} \frac{\alpha^2}{2} U' U'' \right) + \\ &+ \varphi \left[\alpha^4 + \frac{i\alpha R_1}{2} U'' + \frac{R_1}{R_3} \left(\frac{3}{8} \alpha^4 U'^2 + \frac{3}{4} \alpha^2 U''^2 + \frac{3}{4} \alpha^2 U' U''' \right) \right] = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

la care se ataşează condiţiile la limită (16). Soluţia acestei probleme este funcţie de R_1, R_3, α şi pentru ea membrul doi al relaţiei (19) ia valoarea maximă $M(\alpha, R_1, R_3)$. Impunînd lui M să fie negativ, obţinem cea mai puternică condiţie suficientă de stabilitate. Este greu însă de sperat că ecuaţia (20) se poate rezolva uşor, fapt care impune căutarea altor criterii de stabilitate, mai slabe dar mai puţin complicate.

În relația (19) în paranteza care înmulțește pe $\frac{R_1}{R_3}$ există doi termeni negativi și anume termenul

$$-\int_0^1 |\varphi'|^2 \frac{\alpha^2}{4} U'^2 \,\mathrm{d}y \quad \text{și} \quad \int_0^1 |\varphi|^2 \cdot \frac{3}{4} \alpha^2 U' U''' \,\mathrm{d}y.$$

Acesta din urmă este negativ, deoarece înmulțind (14) cu U' obținem

$$U' U''' = -\frac{3}{4} \frac{U'^2 U''^2}{\mu + \frac{3}{8} k U'^2} < 0.$$

Existența acestor termeni face să nu putem trage concluzia că pentru același profil de viteze, mișcarea fluidului nenewtonian este mai stabilă decît a celui newtonian. În ipoteza că s-ar reuși să se demonstreze că ei sînt mai mici în valoare absolută decît restul termenilor de pe lîngă $\frac{R_1}{R_3}$ din (19), concluzia de mai sus ar fi valabilă și criteriile de stabilitate ale fluidului newtonian ar fi valabile și pentru cel nenewtonian. Cum acest lucru este greu de realizat, vom mai slăbi criteriul care a condus la relația (20), deducînd din (19) următoarea expresie

$$\begin{aligned} c_i (I_1^2 - \alpha^2 I_0^2) \leqslant & -\frac{1}{\alpha R_1} (I_2^2 + 2\alpha^2 I_1^2 + \alpha^4 I_0^2) + q_1 I_0 I_1 - \\ & - \frac{1}{\alpha R_3} \left[\int_0^1 |\varphi|^2 \frac{3}{4} \alpha^2 U' U''' \mathrm{d}y - \int_0^1 |\varphi'|^2 \frac{\alpha^2}{4} U'^2 \,\mathrm{d}y \right] - \\ & - \frac{1}{\alpha R_3} \int_0^1 |\varphi|^2 \left(\frac{3}{8} \alpha^4 U'^2 + \frac{3}{4} \alpha^2 U''^2 \right) \mathrm{d}y + \int_0^1 |\varphi''|^2 \cdot \frac{3}{8} U'^2 \,\mathrm{d}y \Bigg], \end{aligned} \tag{21}$$

unde $q_i = \max\limits_{y \in [0,1]} | U^{(i)} (y) |$.

Condiția ca membrul al doilea al inegalității (21) să fie negativ constituie de asemenea un criteriu de stabilitate. Din inegalitatea (21) obținem o inegalitate mai slabă și anume

$$\begin{aligned} c_i (I_1^2 + \alpha^2 I_0^2) \leqslant & \, q_1 I_0 I_1 - \frac{1}{\alpha R_1} (I_2^2 + 2\alpha^2 I_1^2 + \alpha^4 I_0^2) - \\ & - \frac{1}{\alpha R_3} \left[\int_0^1 |\varphi|^2 \frac{3}{4} \alpha^2 U' U''' \,\mathrm{d}y - \right. \\ & \left. - \int_0^1 |\varphi'|^2 \frac{\alpha^2}{4} U'^2 \,\mathrm{d}y \right] - \frac{1}{\alpha R_3} \int_0^1 |\varphi|^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \alpha^2 U''^2 \,\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{22}$$

Integrînd prin părţi şi folosind inegalitatea lui Schwartz găsim

$$-\int_0^1 |\varphi|^2 \left(\frac{3}{4}\alpha^2 U'U''' + \frac{3}{4}\alpha^2 U''^2\right) \mathrm{d}y = \frac{3}{4}\alpha^2 \int_0^1 \varphi\bar{\varphi}' +$$

$$+ \bar{\varphi}\varphi') \, U'U'' \, \mathrm{d}y \leqslant \frac{3}{2}\alpha^2 I_1 I_0 q_1 q_2;$$

$$\int_0^1 |\varphi'|^2 \frac{\alpha^2}{4} U'^2 \mathrm{d}y \leq \frac{\alpha^2}{4} q_1^2 I_1^2.$$

Prin aceasta relaţia (22) devine

$$\alpha R_1 c_i (I_1^2 + \alpha^2 I_0^2) \leqslant I_0 I_1 \left(\alpha q_1 R_1 + \frac{3}{2}\alpha^2 q_1 q^2 \frac{R_1}{R_3}\right) -$$

$$- (I_2^2 + 2\alpha^2 I_1^2 + \alpha^4 I_0^2) + \frac{\alpha^2}{4} q_1^2 I_1^2 \cdot \frac{R_1}{R_3}, \tag{23}$$

inegalitate, care se mai poate scrie astfel

$$\alpha R_1 c_i (I_1^2 + \alpha^2 I_0^2) \leqslant \alpha R_1 q_1 I_0 I_1 - (I_2^2 + 2\alpha^2 I_1^2 + \alpha^4 I_0^2) +$$

$$+ \frac{R_1}{R_3}\left[\frac{\alpha^2}{4} q_1^2 I_1^2 + \frac{3}{2}\alpha^2 q_1 q_2 I_0 I_1\right). \tag{23'}$$

Din (23′) se vede că din criteriile de stabilitate pentru fluide nenewtoniene va rezulta condiţia de stabilitate şi pentru fluide newtoniene corespunzătoare.

Unul din criteriile de stabilitate pentru fluide nenewtoniene ce poate fi dedus din relaţia (23) este de forma

$$\alpha R_1 q_1 + \frac{R_1}{R_3}\left(\frac{3}{2}\alpha^2 q_1 q_2 I_0 I_1 + \frac{\alpha^2}{4} q_1^2 I_1^2\right) / I_0 I_1 \leqslant$$

$$\leqslant \min \frac{I_2^2 + 2\alpha^2 I_1^4 + \alpha^4 I_0^2}{I_1 I_0} \tag{24}$$

şi altul, care foloseşte inegalitatea lui Synge [1]

$$\eta^2 + I_2^2 > I_1^2 (\xi\eta - \xi^2 + 2\eta) + I_0^2 (\xi - 1), \tag{25}$$

adevărată pentru orice η, ξ reale, este

$$\left(q_1 \alpha R_1 + \frac{3}{2}\alpha^2 \frac{R_1}{R_3} q_1 q_2\right) \eta^2 I_0 I_1 - I_1^2 \left(2\alpha^2 \eta^2 - \frac{\alpha^2}{4} q_1^2 \frac{R_1}{R_3} \eta^2 +\right.$$

$$\left. + \xi\eta - \xi^2 + 2\eta\right) - I_0^2 (\alpha^4 \eta^2 + \xi - 1) < 0. \tag{26}$$

Pentru ca forma pătratică din membrul întîi al inegalității (26) să fie negativ definită este necesar ca

$$
(27)\quad \begin{cases}
2\alpha^2\eta^2 - \dfrac{\alpha^2}{4} q_1^2 \dfrac{R_1}{R_3}\eta^2 + \xi\eta - \xi^2 + 2\eta > 0, \\[2mm]
\alpha^4\eta^2 + \xi - 1 > 0, \\[2mm]
\left[\left(q_1\alpha R_1 + \dfrac{3}{2}\alpha^2 \dfrac{R_1}{R_3} q_1 q_2\right)\eta^2\right]^2 < \Bigg(2\alpha^2\eta^2 - \\[2mm]
\quad - \dfrac{\alpha^2}{4} q_1^2 \dfrac{R_1}{R_3}\eta^2 + \xi\eta - \xi^2 + 2\eta\Bigg)(\alpha^4\eta^2 + \xi - 1).
\end{cases}
$$

Relațiile (27) constituie generalizarea imediată a rezultatelor lui Synge [1] la cazul fluidelor nenewtoniene. La fel ca acolo, acesta este criteriul cel mai slab dar cel mai simplu și care poate duce la evaluări efective.

§ 2. MAJORAREA LUI c_i CU AJUTORUL INEGALITĂȚILOR IZOPERIMETRICE

Recent, în studiul stabilității hidrodinamice, a apărut un fapt nou și anume utilizarea inegalităților izoperimetrice [3] în locul inegalităților (25) a lui Synge, primele fiind mai simple și conducînd la evaluări mai bune pentru regiunea de stabilitate liniară. Noi am aplicat aceste inegalități în cazul fluidelor nenewtoniene, rezultatele obținute fiind în deplin acord cu cele ale lui Joseph pentru $R_3 \to \infty$ (sau $k \to 0$).

Inegalitățile izoperimetrice amintite sînt următoarele

$$I_1^2 \geqslant \pi^2 I_0^2; \quad I_2^2 \geqslant \pi^2 I_1^2; \quad I_2^2 \geqslant 4{,}73^4 I_0^2.$$

Ele permit ca din (23′) să deducem

$$
(23'')\quad \begin{aligned}
c_i \leqslant q_1 \frac{I_0 I_1}{I_1^2 + \alpha^2 I_0^2} - \frac{1}{\alpha R_1}\frac{I_2^2 + 2\alpha^2 I_1^2 + \alpha^4 I_0^2}{I_1^2 + \alpha^2 I_0^2} + \\
+ \frac{1}{\alpha R_3}\frac{\dfrac{\alpha^2}{4} q_1^2 I_1^2 + \dfrac{3}{2}\alpha^2 q_1 q_2 I_0 I_1}{I_1^2 + \alpha^2 I_0^2}
\end{aligned}
$$

și următoarele inegalități au loc

$$(28)\qquad I_0 I_1 \leqslant \frac{1}{2\alpha}\cdot 2\cdot I_1\cdot(\alpha I_0) \leqslant \frac{1}{2\alpha}(I_1^2 + \alpha^2 I_0^2),$$

$$
(29)\quad \begin{aligned}
I_2^2 + 2\alpha^2 I_1^2 + \alpha^4 I_0^2 = I_2^2 + \alpha^2 I_1^2 + \alpha^2(I_1^2 + \alpha^2 I_0^2) \geqslant \\
\geqslant \pi^2(I_1^2 + \alpha^2 I_0^2) + \alpha^2(I_1^2 + \alpha^2 I_0^2) = (\pi^2 + \alpha^2)(I_1^2 + \alpha^2 I_0^2),
\end{aligned}
$$

$$(30)\qquad \frac{\dfrac{\alpha^2}{4} q_1 I_1^2}{I_1^2 + \alpha^2 I_0^2} \leqslant \frac{\dfrac{\alpha^2}{4} q_1 I_1^2}{I_1^2} = \frac{\alpha^2}{4} q_1,$$

care ne conduc la majorarea căutată

$$c_i \leqslant \frac{q_1}{2\alpha} - \frac{\pi^2 + \alpha^2}{\alpha R_1} + \frac{1}{\alpha R_3}\left(\frac{\alpha^2}{4} q_1^2 + \frac{3}{4} \alpha q_1 q_2\right). \tag{31}$$

Această inegalitate constituie generalizarea relației (5) din [3] pentru cazul mişcării unui fluid nenewtonian.

Ținînd seama de îmbunătățirea adusă de noi în [6] evaluării lui c_i față de Joseph, găsim o relație mai restrictivă pentru c_i şi anume

$$\begin{aligned} c_i \leqslant \frac{q_1}{2\alpha} - \Bigg[& \frac{\pi^2\, 4{,}73^4}{4{,}73^4 + \alpha^2 \pi^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{\pi^2 + \alpha^2} + \\ & + \alpha^2 \Bigg] (\alpha R_1)^{-1} + (\alpha R_3)^{-1} \left[\frac{\alpha^2}{4} q_1^2 + \frac{3\alpha}{4} q_1 q_2\right]. \end{aligned} \tag{32}$$

Folosind inegalitățile izoperimetrice de mai sus pentru c_i, Joseph [3] a obținut rezultate mai bune (teorema 2) decît cele ale lui Pai. Acestea se mențin şi în cazul nostru.

Primită la redacție la 12 septembrie 1968

Institutul de matematică al Academiei Republicii Socialiste România
Calea Griviței nr. 21, București 12

LINEAR STABILITY CRITERIA OF THE PLANE PARALLEL MOTIONS OF A NONNEWTONIAN FLUID

(ABSTRACT)

In this work the effect of the two-dimensional wavy perturbations on a nonnewtonian fluid flow between two parallel plates is studied. The stress-strain law contains the third power of rate of deformation tensor too. Some sufficient stability conditions which are the same as the Synge's ones [1] as the nonnewtonian fluid turns into newtonian are given. Using isoperimetrical inequalities we obtain for the rate of amplification of the wavy perturbation a better limitation than the one found by means of Synge's inequality [1]. This result coincides with the Joseph's result [3] as the third order viscosity vanishes. It is found that the terms which contain even powers of the rate of deformations tensor from the stress-strain law have no effect in the frame of linear stability theory of plane parallel flows.

BIBLIOGRAFIE

1. J. L. Synge, *Hydrodynamical stability. Semicentennial Publications.* Amer. Math. Soc., N. Y., 1938, vol. 2, pp. 227–269.
2. S. I. Pai, *On a generalization of Synge's criterion for sufficient stability of plane parallel flows.* Quart. Appl. Math., **12**, 203–206 (1954).
3. D. D. Joseph, *Eigenvalue bounds for the Orr-Sommerfeld equation.* J. Fluid Mech., **33**, part. 3, 617–621 (1968).
4. Э. Беккенбах, Р. Беллман, *Неравенства.* Изд. Мир, Москва, 1965
5. Лорд Рэлеу, *Теория звука*, vol. I, Москва, 1955.
6. A. Georgescu, *Improvement of a Joseph's theorem and one of its applications.*

DESPRE O EXTENSIUNE A TEOREMEI LUI MILMAN

DE

G. GODINI

Se dă o extensiune a teoremei lui Milman, reciproca teoremei Krein-Milman, pentru conuri convexe

Teorema lui Milman, reciproca teoremei Krein-Milman [1] se formulează astfel : Dacă X este o submulţime compactă şi convexă dintr-un spaţiu local convex, Z o submulţime a lui X, cu proprietatea că X este învelişul convex închis al lui Z, atunci punctele extremale ale lui X (pe care le notăm ex X) sînt conţinute în închiderea lui Z. Vom arăta că această teoremă se poate extinde la o clasă particulară de conuri convexe proprii K (adică $K \cap (-K) = \{0\}$) dintr-un spaţiu local convex real E.

Vom da unele definiţii necesare din [2].

DEFINIŢIE. O *rază* a conului convex K cu vîrful în origină este o mulţime de forma $R^+x = \{\lambda x ; \lambda \geqslant 0$, unde $x \in K$, $x \neq 0\}$. Să observăm că orice element diferit de zero al razei ρ generează pe ρ.

O rază ρ a lui K se numeşte *rază extremală* a lui K dacă pentru $x \in \rho$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ şi $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$ cu y, $z \in K$ rezultă $y, z \in \rho$. Vom nota cu exr K reuniunea razelor extremale ale lui K.

DEFINIŢIE. Fie K un con convex închis dintr-un spaţiu local convex. O mulţime nevidă C din K se numeşte *căciulă* a lui K („cap" în terminologie engleză, „chapeau" în cea franceză), dacă C este compactă, convexă şi $K \sim C$ este convexă. Dacă C este o căciulă a lui K astfel încît $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} n C$, atunci C se numeşte *căciulă universală* a lui K.

În cele ce urmează vom avea de-a face cu conuri convexe închise K, care sînt reuniunea căciulilor sale, adică a conurilor convexe închise K cu proprietatea că pentru orice $x \in K$ există o căciulă C a lui K aşa încît $x \in C$.

Avem nevoie de o caracterizare a mulţimii exr K.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 7, P., 1037–1039, BUCUREŞTI, 1969

5 – c. 3390

PROPOZIŢIA 1. *Fie K un con convex închis care este reuniunea căciulilor sale și fie* $x \in \operatorname{exr} K$. *Atunci există o căciulă C a lui K și un numă $\lambda > 0$ așa încît λx să fie un punct extremal al lui C.*

Demonstrație. Dacă $x = 0$, atunci pentru orice căciulă C avem $0 \in C$ pentru că $K \sim C$ este convexă şi C este convexă şi compactă, şi cum $x =$ este un punct extremal al oricărui C, propoziţia este adevărată. Să presupunem deci $x \in \operatorname{exr} K$, $x \neq 0$. Deoarece K este reuniunea căciulilor sale există o căciulă C astfel încît $x \in C$. Fie $\lambda_0 = \max \{\mu \in R^+ ; \mu x \in C\}$ Pentru că C este compactă, $\lambda_0 < \infty$ şi pentru că $x \in C$, $\lambda_0 \geqslant 1$. Căciul C este închisă şi deci punctul $x = \lambda_0 x \in C$. Avem că $z = \lambda_0 x$ est un punct extremal al lui C. Într-adevăr, dacă $\lambda_0 x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $x_i \in$ $(i = 1,2)$, $x_1 \neq x_2$, atunci din faptul că $R^+ x$ este o rază extremală rezult $x_i \in R^+ x = R^+ (\lambda_0 x)$ şi deci $x_1 = \alpha_1 \lambda_0 x$, $x_2 = \alpha_2 \lambda_0 x$, $\alpha_i \geqslant 0$ şi trebui să avem $\alpha_1 + \alpha_2 = 2$. Nu putem avea $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ pentru că atunci $x_1 = x_2$. Să presupunem că $\alpha_1 > 1$. Din definiţia lui λ_0 avem că pentru $\lambda_1 > \lambda_0$, $\lambda_1 x \notin C$ şi cum $\alpha_1 > 1$, avem $\alpha_1 \lambda_0 > \lambda_0$, adică $x_1 = \alpha_1 \lambda_0 x \notin C$, ceea ce contrazice alegerea lui x_1. Prin urmare $\lambda_0 x$ este un punct extremal al lui C şi propoziţia este demonstrată.

Pentru orice con convex închis K are loc următoarea propoziție ([2], pag. 88, propoziţia 11.1).

PROPOZIŢIA 2. *Dacă C este o căciulă a unui con convex închis K și x un punct extremal al lui C, atunci x se află pe o rază extremală a lui K.*

Din propoziţiile 1 şi 2 obţinem următorul corolar.

COROLAR. *Fie K un con convex închis care este reuniunea căciulilor sale. Atunci* $\operatorname{exr} K = \bigcup\limits_{C} R^+ \operatorname{ex} C$[1]). *Dacă conul K are o căciulă universală C, atunci* $\operatorname{exr} K = R^+ \operatorname{ex} C$.

Putem acum demonstra următoarea extensiune a teoremei lui Milman.

TEOREMĂ. *Fie K un con convex închis propriu dintr-un spaţiu local convex E, care este reuniunea căciulilor sale, și fie $\mathfrak{R}$ o mulţime de raze ale lui K cu proprietatea că $R^+ \overline{\text{co}}\, (\mathfrak{R} \cap C)$ este închis pentru orice căciulă C a lui K. Să presupunem că învelișul convex închis al lui $\mathfrak{R}$ este K. Atunci mulţimea razelor extremale ale lui K este inclusă în închiderea lui $\mathfrak{R}$.*

Demonstrație. Vom arăta că pentru orice căciulă C a lui K, avem $\overline{\text{co}}\, (\mathfrak{R} \cap C) = C$. Să observăm întîi că mulţimea $R^+ \overline{\text{co}}\, (\mathfrak{R} \cap C)$ este convexă. Într-adevăr, fie $x_1, x_2 \in \overline{\text{co}}\, (\mathfrak{R} \cap C)$, $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, $0 < a < 1$, şi $\lambda = \max (\lambda_1, \lambda_2)$. Atunci mulţimea $\lambda\, \overline{\text{co}}\, (\mathfrak{R} \cap C) = \overline{\text{co}}\, [\lambda (\mathfrak{R} \cap C)]$ este convexă şi este închisă în $R^+ \overline{\text{co}}\, (\mathfrak{R} \cap C)$. Deoarece $\lambda_i \overline{\text{co}}\, (\mathfrak{R} \cap C) \subset \subset \lambda\, \overline{\text{co}}\, (\mathfrak{R} \cap C)$ $(i = 1,2)$, afirmaţia este evidentă.

Pentru a arăta că $C = \overline{\text{co}}\, (\mathfrak{R} \cap C)$, să presupunem că incluziunea $\overline{\text{co}}\, (\mathfrak{R} \cap C) \subset C$ este strictă. Există atunci $x \in C$, $x \notin \overline{\text{co}}\, (\mathfrak{R} \cap C)$ şi deci $x \notin R^+ \overline{\text{co}}\, (\mathfrak{R} \cap C)$. Deoarece mulţimea $R^+ \overline{\text{co}}\, (\mathfrak{R} \cap C)$ este convexă și închisă și $x \notin R^+ \overline{\text{co}}\, (\mathfrak{R} \cap C)$, aplicînd teorema de separare găsim un $f \in E^*$ cu proprietatea

$$\sup f(\mathfrak{R}^+ \overline{\text{co}}\, (R \cap C)) < f(x).$$

---

[1] Pentru o mulţime A vom nota $R^+ A = \{\lambda a ; \lambda \geqslant 0, a \in A$.

De aici rezultă $f \leqslant 0$ pe $R^+ \overline{\text{co}}\, (\mathfrak{R} \cap C)$ şi deci $f \leqslant 0$ pe $\mathfrak{R}$ iar $f(x) > 0$. Deoarece $\mathfrak{R} \subset \{ y\, ; f(y) \leqslant 0 \}$ şi ultima mulţime este convexă şi închisă pentru că f este liniară şi continuă, rezultă $K = \overline{\text{co}}\, \mathfrak{R} \subset \{ y\, ;\ f(y) \leqslant 0 \}$ şi deci $x \notin K$, contradicţie care ne arată că $C = \overline{\text{co}}\, (\mathfrak{R} \cap C)$ pentru orice căciulă C. Aplicînd teorema lui Milman obţinem

$$\text{ex}\ C \subset \overline{\mathfrak{R} \cap C} \subset \overline{\mathfrak{R}} \text{ pentru orice } C$$

şi deci R^+ ex $C \subset \overline{\mathfrak{R}}$ care împreună cu corolarul ne dă

$$\bigcup_{C} R^+ \text{ ex } C = \text{exr}\, K \subset \overline{\mathfrak{R}}$$

şi teorema este demonstrată.

Observaţie. Dacă conul are o bază convexă şi compactă B, inclusă într-un hiperplan care nu conţine originea, $H = \{y\, ;\ f(y) = 1\}$, $f \in E^*$, atunci mulţimea $C = \{x \in K\, ; f(x) \leqslant 1\}$ este o căciulă universală pentru K şi pentru orice mulţime de raze $\mathfrak{R}$ ale lui K avem $\text{R}^+ \overline{\text{co}}\, (\mathfrak{R} \cap C)$ închisă.

Primită la redacţie la 9 decembrie 1968

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România
Calea Griviţei nr. 21, Bucureşti 12.

ON AN EXTENSION OF MILMAN'S THEOREM

(ABSTRACT)

An extension of Milman's theorem, the converse of Krein-Milman's theorem, is given for convex closed cones which are the union of its caps for a special class of rays.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Dunford, J. Schwartz, *Linear Operators*, Part. I. Interscience, New York-London, 1958.
2. R. R. Phelps, *Lectures on Choquet's Theorem.*

ASUPRA RELAȚIILOR DE SALT DIN ELECTRODINAMICĂ

DE

D. HOMENTCOVSCHI

Se deduc formulele de salt pentru cîmpul electromagnetic într-un mediu continuu în mişcare.

Vom investiga, în cele ce urmează, condiţiile ce trebuie să fie îndeplinite de cîmpul electromagnetic într-un mediu în mişcare la traversarea unei suprafeţe de discontinuitate. Aceasta poate fi fie suprafaţa unei unde de şoc ce se propagă în mediu, fie suprafaţa de separare a două medii diferite, caz în care relaţiile de salt vor constitui condiţiile la limită ale cîmpului electromagnetic pe suprafaţa respectivă.

În [1] condiţiile de salt sînt stabilite în cazul cînd viteza mediului este continuă în tot spaţiul şi în cazul în care unul din medii este fix. De asemenea, în [2] se găseşte o deducere a condiţiei de salt, rezultînd din legea lui Faraday pe o cale ocolită, şi anume, prin punerea acestei legi sub forma unei integrale de volum. Noi vom stabili relaţiile de salt pe o cale mai directă ce se vrea o generalizare a celei din [3] pentru legile a căror formă integrală include integrale de suprafaţă şi integrale curbilinii (cum sînt legile lui Faraday şi Ampère din electrodinamică).

Fie $C(t)$ o curbă mobilă în spaţiu, de ecuaţie :

$$(1) \qquad \begin{cases} x = x(r, t) \\ y = y(r, t) \\ z = z(r, t) \end{cases} \qquad \begin{matrix} r_1(t) \leqslant r \leqslant r_2(t) \\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \end{matrix}$$

r fiind parametrul pe curbă, iar t timpul. Fie, de asemenea, vectorul

$$(2) \qquad \vec{\Delta} = \dot{x}\vec{i}_1 + \dot{y}\,\vec{i}_2 + \dot{z}\,\vec{i}_3$$

punctul indicînd derivata în raport cu timpul, iar $\vec{i}_1$, $\vec{i}_2$, $\vec{i}_3$, fiind versorii

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 7, P. 1041–1045, BUCUREŞTI, 1969

axelor de coordonate. Vom numi viteză de deplasare a curbei $C\,(t)$ în punctul M, proiecţia $\vec{\delta}$ a vectorului $\vec{\Delta}$ din punctul M în planul normal al curbei din acest punct. Să luăm acum curba $C\,(t)$ ca intersecţie a suprafeţelor $S_1\,(t)$ şi $S_2(t)$. Dacă $f_1\,(x, y, z, t) = 0$ este ecuaţia suprafeţei $S_1\,(t)$, vom avea pe C

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial f_1}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

iar de aici

$$\vec{\delta}\cdot\vec{n}_1 = d_1 \tag{4}$$

$\vec{n}_1$ desemnînd versorul normalei la S_1 în punctul considerat, iar $\vec{d}_1 = d_1\,\vec{n}_1$ viteza de deplasare a acestei suprafeţe. Analog putem scrie :

$$\vec{\delta}\cdot\vec{n}_2 = d_2 \tag{5}$$

astfel că în definitiv avem :

$$\vec{\delta} = d_1\vec{n}_1 + d_2\vec{n}_2 = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 \tag{6}$$

relaţie ce justifică definiţia dată mai sus pentru viteza de deplasare a curbei.

Fie acum $C\,(t)$ o curbă închisă, iar $S(t)$ o suprafaţă ce se sprijină pe această curbă. Dacă $F(x,y,z,t)$ este o funcţie derivabilă definită într-o regiune din spaţiu incluzînd suprafaţa $S\,(t)$, vom avea următoarea formulă de derivare :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint\limits_{S(t)} \vec{F}\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{S(t)} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}\,\vec{N}\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{S(t)} \operatorname{div}\vec{F}\,(\vec{d}\cdot\vec{N})\,\mathrm{d}\sigma + \int\limits_{C(t)} (\vec{F}\times\vec{\delta})\,\vec{\mathrm{d}s}. \tag{7}$$

Aici $\vec{N}$ este versorul normalei la suprafaţă, orientat astfel ca vectorul $\vec{N}\times\vec{s}$ să fie orientat spre interiorul porţiunii de suprafaţă mărginit de $C\,(t)$, $\vec{d}$ este viteza de deplasare a suprafeţei $S\,(t)$, iar $\vec{\delta}$ viteza de deplasare a lui $C\,(t)$.

Dacă considerăm curba materială $\Gamma(t)$ mărginind suprafaţa materială $\Sigma\,(t)$, formula de derivare (7) are forma :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint\limits_{\Sigma(t)} \vec{F}\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{\Sigma(t)} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}\,\vec{N}\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{\Sigma(t)} \operatorname{div}\vec{F}\,(\vec{v}\cdot\vec{N})\,\mathrm{d}\sigma + \int\limits_{\Gamma(t)} (\vec{F}\times\vec{v})\,\vec{\mathrm{d}s} \tag{8}$$

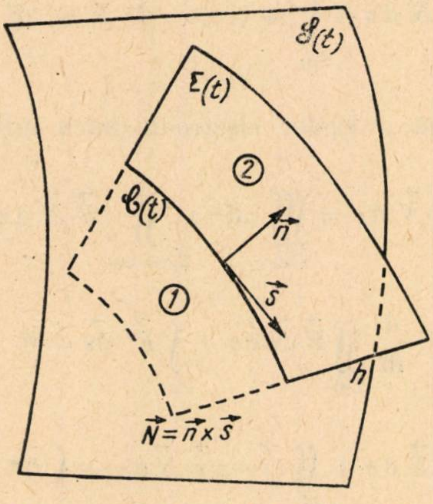
$\vec{v}$ fiind viteza mediului (viteza particulei materiale din punctul respectiv).

Să admitem că la un moment dat cele două curbe $C(t)$ și $\Gamma(t)$ coincid și la fel și suprafețele $S(t)$ și $\Sigma(t)$. Din (7) și (8) se obține:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{\Sigma(t)} \vec{F}\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{S(t)} \vec{F}\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{\Sigma(t)} (\operatorname{div}\vec{F})\,(\vec{v}-\vec{d})\,\vec{N}\,\mathrm{d}\sigma + \tag{9}$$

$$+\int_{\Gamma(t)} (\vec{F}\times(\vec{v}-\vec{\delta}))\,\vec{\mathrm{d}s}$$

Fie acum $\mathcal{S}(t)$ o suprafață de discontinuitate pentru F și $\vec{v}$. Să considerăm pe $\mathcal{S}(t)$ o curbă oarecare $\mathcal{C}(t)$ și prin fiecare punct al acesteia să luăm vectorii $h\vec{n}$ și $-h\vec{n}$, $\vec{n}$ fiind normala la suprafața $\mathcal{S}(t)$, orien-



tată ca în figură, iar h o constantă pozitivă. Se obține astfel o suprafață pe care o vom nota cu $\Sigma(t)$. Formula (9) rămîne valabilă și pentru aceast suprafață, deoarece în (7) și (8) în membrul drept trebuie a dăugat

$$\int_{\mathcal{C}(t)} ([\vec{F}]\times\vec{\delta})\,\vec{\mathrm{d}s},$$

unde $[F]=F_2-F_1$ este saltul funcției F la traversarea suprafeței $\mathcal{S}(t)$. Dacă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{C}(t)} \vec{F}\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}s$$

rămîne mărginit pentru $h \to 0$, trecînd la limită în (9) se găsește :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint\limits_{\Sigma(t)} \vec{F}\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{h\to 0} \iint\limits_{\Sigma(t)} (\operatorname{div}\vec{F})\,(\vec{v}-\vec{\mathrm{d}})\,\vec{N}\,\mathrm{d}\sigma + \tag{10}$$

$$+ \int\limits_{\mathcal{C}(t)} \{[\vec{F}\cdot\times(\vec{v}-\vec{\delta})]\}\,\vec{\mathrm{d}s}$$

croșetul indicînd ca și mai sus saltul mărimii respective.

Primul termen din dreapta în (10) este nenul numai în ipoteza existenței unor surse de suprafață pentru cîmpul $\vec{F}$. Notînd cu $\omega = \operatorname{div}\vec{F}$ densitatea acestor surse de suprafață, obținem în definitiv :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint\limits_{\Sigma(t)} \vec{F}\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}\sigma = \int\limits_{\mathcal{C}(t)} \{\omega\,([\vec{v}]-\vec{\delta})\,\vec{N} + [\vec{F}\times(\vec{v}-\vec{\delta})]\,\vec{s}\}\,\mathrm{d}s. \tag{11}$$

Forma integrală a legilor electrodinamicii este următoarea [1]:

$$\iint\limits_{\Sigma_1(t)+\Sigma_2(t)} \vec{D}\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_{\Omega(t)} \rho\,\mathrm{d}\tau\,; \qquad \iint\limits_{\Sigma_1(t)+\Sigma_2(t)} \vec{B}\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}\sigma = 0 \tag{12; 13}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint\limits_{\Sigma(t)} \vec{B}\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}\sigma + \int\limits_{\Gamma(t)} \vec{E}^{*}\,\vec{\mathrm{d}s} = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint\limits_{\Sigma(t)} \vec{D}\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{\Sigma(t)} (\vec{j}-\rho\,\vec{v})\,\vec{N}\,\mathrm{d}\sigma - \int\limits_{\Gamma(t)} \vec{H}^{*}\,\vec{\mathrm{d}s} = 0 \tag{15}$$

$\Sigma_1(t) + \Sigma_2(t)$ fiind o suprafață materială închisă, ce mărginește domeniul $\Omega(t)$, iar $\Sigma(t)$ și $\Gamma(t)$ cele de mai sus. S-a notat

$$\begin{aligned} \vec{E}^{*} &= \vec{E} + \vec{v}\times\vec{B} \\ \vec{H}^{*} &= \vec{H} - \vec{v}\times\vec{D}. \end{aligned} \tag{16}$$

Din (12) și (13) avem imediat următoarele relații de salt :

$$[\vec{D}]\cdot\vec{n} = \sigma\,; \qquad [\vec{B}]\cdot\vec{n} = 0 \tag{17; 18}$$

Prin σ s-a notat densitatea superficială de sarcină electrică pe $\mathcal{S}(t)$. Aplicînd formula (11) în (14), găsim :

$$\int_{\mathcal{C}(t)} \{[\vec{B}\times(\vec{v}-\vec{\delta})]+[\vec{E}^*]\}\,d\vec{s}=0 \tag{19}$$

valabilă oricare ar fi curba $\mathcal{C}(t)$ pe $\mathcal{S}(t)$, iar de aici, cum integrantul este continuu, avem următoarea relaţie de salt :

$$\{[\vec{B}\times(\vec{v}-\vec{\delta})]+[\vec{E}^*]\}\vec{s}=0 \tag{20}$$

$\vec{s}$ fiind aici un versor oarecare tangent la $\mathcal{S}(t)$.

Analog (15) ne conduce la relaţia :

$$\sigma([\vec{v}]-\vec{\delta})\vec{N}+[\vec{D}\times(\vec{v}-\vec{\delta})]\vec{s}+(\vec{i}-\sigma[\vec{v}])\vec{N}-[\vec{H}^*]\vec{s}=0, \tag{21}$$

unde $\vec{i}$ este densitatea curenţilor superficiali.

După transformări simple, utilizînd (6), (16), (17), (18), obţinem :

$$[\vec{E}\cdot\vec{s}-d\vec{B}\cdot\vec{N}]=0 \tag{22}$$

$$[\vec{H}\cdot\vec{s}-d\,\vec{D}\cdot\vec{N}]=\vec{i}\cdot\vec{N}, \tag{23}$$

unde $d=\vec{\delta}\cdot\vec{n}$ este viteza de deplasare a suprafeţei $\mathcal{S}(t)$. De asemenea menţionăm că $\vec{s}$ este un versor oarecare tangent la $\mathcal{S}(t)$, iar $\vec{N}=\vec{n}\times\vec{s}$.

Primită la redacţie la 2 septembrie 1968

Universitatea din Bucureşti
Facultatea de matematică-mecanică,
Str. Academiei nr. 14

SUR LES RELATIONS DE SAUT DANS L'ÉLECTRODYNAMIQUE

(RÉSUMÉ)

Les formules de saut pour le champ électromagnétique dans un milieu continu en mouvement sont déduites sans une transformation préalable de la forme intégrale des lois de l'électrodynamique.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Sommerfeld, *Elektrodynamik*. Leipzig, 1949.
2. H. Cabannes, *Magnétodynamique des fluides*. Paris, 1965.
3. C. Iacob, *Introduction Mathématique à la Mécanique des Fluides*. Bucarest — Paris, 1961, cap. XII.

ASUPRA REPARTIȚIEI COEFICIENTULUI DE VARIABILITATE

DE

C. IVAN și I VĂDUVA

În ipoteza că o variabilă aleatoare X urmează o distribuție normală, se determină atît o distribuție exactă a coeficientului său de variabilitate V, cît și o aproximare a sa. În continuare este studiată o aproximare a distribuției statisticii

$$U = \frac{1}{1 + c_1V_1^2}\,\frac{1}{1 + c_2V_2^2}$$

care, împreună cu primele două, este folosită la prezentarea unor teste, în ultima parte a lucrării.

Se prezintă unele considerații referitoare la repartiția coeficientului de variabilitate empiric V arătîndu-se că între acesta și variabila aleatoare F există relația :

$$V^2 = \nu F_{\nu,\,1;\,0,\,\delta}$$

Pentru determinarea repartiției coeficientului empiric de variabilitate se procedează în două moduri. Se aproximează mai întîi variabila aleatoare F necentrată, cu o funcție liniară de o variabilă F centrată, prin procedeul introdus de Patnaik pentru variabilele hi-pătrat necentrate și se determină o repartiție aproximativă a lui V^2.

Se determină apoi direct densitatea de repartiție a coeficientului de variabilitate V, folosindu-se procedee de calcul obișnuite.

De asemenea, în § 3 se studiază repartiția unei statistici , care se folosește la compararea coeficienților de variabilitate.

În ultima parte a lucrării, sînt prezentate cîteva teste pentru verificarea unor ipoteze asupra coeficienților de variabilitate teoretici.

Punctele de vedere legate de studierea repartiției coeficientului de variabilitate, folosite în această notă, diferă de punctul de vedere adoptat în lucrarea [3], pentru determinarea unor regiuni de încredere ale coeficientului de variabilitate.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 7, P. 1047–1062, BUCUREȘTI, 1969

§ 1. CONSIDERAŢII PRELIMINARE

Fie variabilele aleatoare independente $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ distribuite normal $N(\xi_i, 1)$, $1 \leqslant i \leqslant \nu$. Variabila aleatoare

$$\chi^2_{\nu;\,\delta} = \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2 \tag{1.1}$$

se numeşte variabila hi-patrat necentrată, cu ν grade de libertate şi parametru de excentricitate $\delta = \left(\sum_{i=1}^{\nu} \xi_i^2\right)^{1/2}$. Este cunoscută densitatea sa de repartiţie (vezi [1]),

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, 2^{\frac{1}{2}\nu}}\, e^{-\frac{1}{2}(z+\delta^2)} \cdot z^{\frac{1}{2}\nu-1} \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{(\delta^2 z)^\beta}{(2\beta)!}\, \frac{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\nu\right)}. \tag{1.2}$$

Fie acum variabilele aleatoare independente $\chi^2_{\nu_1;\,\delta_1}$ şi $\chi^2_{\nu_2;\,\delta_2}$. Variabila aleatoare

$$F_{\nu_1,\,\nu_2;\,\delta_1,\,\delta_2} = \frac{\nu_2}{\nu_1}\, \frac{\chi^2_{\nu_1,\,\delta_1}}{\chi^2_{\nu_2,\,\delta_2}} \tag{1.3}$$

se numeşte variabila F dublu necentrată, cu ν_1 şi ν_2 grade de libertate şi parametri de excentricitate δ_1 şi δ_2.

Se observă uşor că

$$F_{\nu_1,\,\nu_2;\,\delta_1,\,\delta_2} \cdot F_{\nu_2,\,\nu_1;\,\delta_2,\,\delta_1} = 1. \tag{1.4}$$

Fie variabilele aleatoare independente U şi $\chi^2_{\nu;\,\delta_2}$, prima distribuită normal $N(\delta_1, 1)$ iar a doua conform (1.2). Variabila aleatoare

$$t_{\nu;\,\delta_1,\,\delta_2} = \frac{U}{\dfrac{\chi^2_{\nu,\,\delta_2}}{\sqrt{\nu}}} \tag{1.5}$$

se numeşte variabila t a lui Student, dublu necentrată, cu ν grade de libertate şi parametri de excentricitate δ_1 şi δ_2.

Variabilele corespunzătoare centrate χ^2_ν, $F_{\nu_1,\,\nu_2}$ şi t_ν se obţin din expresiile (1.1), (1.3) şi (1.5) pentru $\delta_1 = \delta_2 = \delta = 0$.

Se poate arăta că, dacă $X_1, X_2, \ldots, X_n$ este o selecţie efectuată asupra unei variabile aleatoare X, distribuită normal $N(\mu, \delta)$, atunci

$$t_\nu = \frac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}},\ \nu = n - 1, \tag{1.6}$$

unde

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad s^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} (X_i - \overline{X})^2, \tag{1.7}$$

sînt respectiv media aritmetică și dispersia de selecție, este o variabilă a lui Student centrată, cu ν grade de libertate.

Se observă, de asemenea, că legătura dintre variabilele definite de (1.3) și (1.5) este următoarea

$$t^2_{\nu;\delta_1,\delta_2} = F_{1,\nu;\delta_1,\delta_2}. \tag{1.8}$$

Fie variabila aleatoare X, avînd media μ și dispersia σ^2. Se numește coeficient de variabilitate al lui X, raportul

$$\eta = \frac{\sigma}{\mu}. \tag{1.9}$$

O estimație a sa, corespunzătoare unei selecții $X_1, X_2, \ldots, X_n$ este definită de relația

$$V = \frac{\overline{\sigma}}{X}, \tag{1.10}$$

unde

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2. \tag{1.11}$$

Desigur, se poate considera și o altă estimație a coeficientului de variabilitate și anume :

$$V_u = \frac{S}{\overline{X}}, \tag{1.12}$$

care folosește estimația nedeplasată S^2 a dispersiei σ^2. Nu ne vom referi însă, în cele ce urmează, la această estimație, întrucît repartiția ei se poate deduce în același mod cu aceea a lui V.

Deoarece, în cazul cînd variabila aleatoare X urmează o distribuție (normală $N(\mu, \sigma^2)$, se arată ușor [4] că

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \sigma^2 \chi^2_\nu, \quad \nu = n - 1, \tag{1.13}$$

din (1.10) rezultă că

$$V = \frac{\chi_\nu}{U^*}, \tag{1.14}$$

unde variabila U^* urmează o distribuție normală $N\left(\frac{\mu\sqrt{n}}{\sigma}, 1\right)$, Legătura dintre variabilele (1.5) şi (1.10) se obţine din (1.14)

$$V = \sqrt{\nu}\,\frac{1}{t_{\nu;\,\delta,\,0}} \tag{1.15}$$

de unde, conform relaţiei (1,8), rezultă că legătura dintre variabilele (1.3) şi (1.10) este

$$V^2 = \nu\,\frac{\dfrac{\chi^2_{\nu}}{\nu}}{\chi^2_{1;\,\delta}} = \nu F_{\nu,\,1;\,0,\,\delta} = \frac{\nu}{F_{1,\,\nu;\,\delta,\,0}} \tag{1.16}$$

în care parametrul de excentricitate δ are expresia :

$$\delta = \frac{|\mu|\sqrt{n}}{\sigma}. \tag{1.17}$$

§ 2. REPARTIŢIA VARIABILEI ALEATOARE V

Înainte de prezentarea sub formă generală a repartiţiei variabilei aleatoare V, ne vom ocupa de aproximarea repartiţiei sale, deoarece această aproximare înlătură multe din dificultăţile practice, legate de determinarea cuantilelor variabilei V, care se folosesc de obicei în aplicaţii.

a) *Aproximarea repartiţiei variabilei aleatoare V*

După cum se vede din relaţia (1.19), pentru a aproxima repartiţia variabilei V^2, este necesar să aproximăm variabila aleatoare F necentrată, printr-o variabilă F centrată, de unde rezultă necesitatea aproximării variabilei aleatoare hi-pătrat necentrată, care apare în expresia sa, printr-o variabilă hi-pătrat centrată. În acest scop, vom folosi aproximarea lui Patnaik [5] :

$$\chi^2_{1;\,\delta} = c\chi^2_{h^*}, \tag{2.1}$$

unde c este o constantă, care urmează a fi determinată împreună cu numărul gradelor de libertate h^* ale noii variabile hi-pătrat centrate. Din calculul mediilor şi dispersiilor în (2.1), rezultă sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned} ch &= 1 + \delta^2 \\ c^2h^* &= 1 + 2\delta^2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

a cărei soluție unică

$$(2.3)\qquad c = \frac{1 + 2\delta^2}{1 + \delta^2}, \qquad h = \frac{(1 + \delta^2)^2}{1 + 2\delta^2}$$

determină perechea de constante căutată (c, h^*), unde am notat prin

$$(2.4)\qquad h^* = \boxed{h}$$

întregul cel mai apropiat de h. Se poate observa cu ușurință că h^* ia numai valori impare, pentru valori întregi ale lui δ.

Înlocuind consecutiv pe (c, h^*) în (2.1) și apoi rezultatul în expresia (1.16), rezultă că variabila V^2 satisface relația

$$(2.5)\qquad V^2 = \frac{\nu}{ch^*} F_{\nu, h^*}$$

de unde se deduce că repartiția variabilei V^2 se poate aproxima cu repartiția unei variabile aleatoare F centrate, cu ν și h grade de libertate. Deci funcția de repartiție a pătratului coeficientului de variabilitate se poate aproxima astfel

$$F(x) = P(V^2 < x) = P\left(\frac{\nu}{ch^*} F_{\nu, h^*} < x\right) =$$
$$= P\left(F_{\nu, h^*} < \frac{ch^*}{\nu} x\right) = S_{\nu, h^*}\left(\frac{ch^*}{\nu} x\right),$$

unde $S_{\nu, h^*}(z)$ este funcția de repartiție a variabilei F_{ν, h^*}.

b) *Densitatea de repartiție a coeficientului de variabilitate V*

Deși deducerea densității de repartiție a variabilei aleatoare V nu diferă, ca procedeu de calcul, de aceea a variabilei aleatoare F necentrată [1], vom prezenta pe larg, într-o primă etapă, toate detaliile de calcul, întrucît, pe baza unor rezultate parțiale, vom putea găsi apoi o expresie finită a densității de repartiție căutate.

TEOREMA 2.1. *Densitatea de repartiție a variabilei aleatoare V definită de (1.14), în ipoteza că variabila aleatoare X urmează o repartiție normală $N(\mu, \sigma^2)$, este*

$$(2.6)\qquad f_V(v) = \frac{2e^{-\frac{1}{2}\delta^2}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu\right)} v^{\nu-1} \cdot \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{(2\delta^2)^\beta}{(2\beta)!} \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(\nu+1)+\beta\right]}{(1+v^2)^{\frac{1}{2}(\nu+1)+\beta}}$$

în care δ este definit de (1.17).

Demonstrație. Am văzut că variabila aleatoare V se poate scrie sub forma

$$V^2 = \frac{W}{U},$$

unde W și U sînt variabile hi-pătrat independente, prima centrată, cu ν grade de libertate și cea de-a doua necentrată, cu un grad de libertate și parametru de excentricitate δ.

Considerăm acum densitatea de repartiție bi-dimensională a vectorului aleator (W, U), care , datorită independenței componentelor și folosind relația (1.3), devine succesiv

$$f_{(W,U)}(w, u) = f_W(w)\cdot f_U(u) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu\right)} w^{\frac{1}{2}\nu-1} e^{-\frac{1}{2}w}\,.$$

$$\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}} u^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\delta^2+u)} \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{(\delta^2 u)^\beta}{(2\beta)!} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}\delta^2}}{\sqrt{\pi}\,2^{\frac{1}{2}(\nu+1)}\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu\right)} w^{\frac{1}{2}\nu-1} e^{-\frac{1}{2}(w+u)} u^{-\frac{1}{2}} \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{(\delta^2 u)^\beta}{(2\beta)!}\,.$$

Pentru a obține, în continuare, densitatea de probabilitate a vectorului aleator (V, U), vom face în expresia precedentă transformarea

$$\text{(2.7)}\qquad \begin{aligned} v &= \frac{w}{u} \\ u &= u \end{aligned}$$

cu determinantul funcțional u. Rezultă

$$\text{(2.8)}\qquad f_{(V^2,U)}(v, u) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\delta^2}}{\sqrt{\pi}\,2^{\frac{1}{2}(\nu+1)}\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu\right)} v^{\frac{1}{2}\nu-1} u^{\frac{1}{2}(\nu-1)} e^{-\frac{1}{2}(1+v)u} \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{(\delta^2 u)^\beta}{(2\beta)!}\,.$$

În sfîrșit, densitatea de probabilitate a variabilei V^2 se poate obține din (2.8), prin integrare în raport cu variabila u, pe intervalul $(0, +\infty)$. Deoarece avem integrale de forma

$$\text{(2.9)}\qquad \int_0^\infty u^{\frac{1}{2}(\nu-1)+\beta} e^{-(1+v)u}\, du = \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(\nu+1)+\beta\right]}{\left[\frac{1}{2}(1+v)\right]^{\frac{1}{2}(\nu+1)+\beta}}$$

rezultă, după efectuarea unor calcule elementare, că

$$(2.10)\qquad f_{V^2}(v) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\delta^2}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu\right)}\, v^{\frac{1}{2}\nu-1} \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{(2\delta^2)^\beta}{(2\beta)!}\, \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(\nu+1)+\beta\right]}{(1+v)^{\frac{1}{2}(\nu+1)+\beta}}.$$

Dacă în expresia (2.10) facem acum transformarea $x = \sqrt{v}$ $(\mathrm{d}v = 2x\,\mathrm{d}x)$, obținem expresia (2.6).

Pentru aplicații însă ar fi utilă găsirea unei expresii finite a densității de repartiție a coeficientului de variabilitate.

În acest sens vom stabili acum

TEOREMA 2.2. *Densitatea de repartiție a variabilei* V *se poate scrie sub forma*

$$(2.11)\qquad \begin{aligned} f_V(v) = {} & \frac{4}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu\right)}\, v^{\nu-1}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{\delta^2 v^2}{1+v^2}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{1}{2}\nu\right]} C_\nu^k\, 2^k\, \delta^{\nu-2k}\,(1+v^2)^{k-\nu-\frac{1}{2}} \times \\ & \Gamma\left[\frac{1}{2}(k+1)\right]\left\{1-\Gamma\left[\frac{1}{2}(k+1);\ \frac{1}{2}\,\frac{\delta^2}{1+v^2}\right]\right\}, \end{aligned}$$

unde δ *e definit de (1.17), iar* $\Gamma(\alpha; a)$ *este funcția gamma incompletă, definită astfel*

$$(2.12)\qquad \Gamma(\alpha;\, a) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^a y^{\alpha-1} e^{-y}\, \mathrm{d}y.$$

Demonstrație. În expresia (2.8), făcînd transformarea

$$(2.13)\qquad \begin{aligned} y &= \sqrt{v} \\ z &= \sqrt{u} \end{aligned}$$

cu determinantul funcțional $4\,yz$, vom obține densitatea de repartiție a vectorului aleator (Y, Z), unde $Y = V$ iar $Z = \sqrt{U}$. Observînd că

$$\sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{(2\delta^2)^\beta}{(2\beta)!} = \operatorname{ch}(\delta u^{1/2}) = \frac{1}{2}\left(e^{\delta u^{\frac{1}{2}}} + e^{-\delta u^{\frac{1}{2}}}\right)$$

obținem

$$f_{(V,Z)}(v, z) = \frac{2e^{-\frac{1}{2}\delta^2}}{\sqrt{\pi}\, 2^{\frac{1}{2}(\nu+1)}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu\right)}\, v^{\nu-1}\left[z^\nu \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2(1+v^2)+\delta z} + z^\nu \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2(1+v^2)-\delta z}\right].$$

Din această ultimă expresie vom putea obţine densitatea de repartiţie a variabilei V integrînd în raport cu variabila z pe intervalul $(0, +\infty)$:

$$f_v(v) = \frac{2e^{-\frac{1}{2}\delta^2}}{\sqrt{\pi}\, 2^{\frac{1}{2}(\nu+1)}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\nu\right)} v^{\nu-1}\left[\int_0^\infty z^\nu e^{-\frac{1}{2}z^2(1+v^2)+\delta z} dz + \right. \tag{2.14}$$

$$\left. + \int_0^\infty z^\nu e^{-\frac{1}{2}z^2(1+v^2)-\delta z} dz\right].$$

Vor trebui calculate integrale de forma :

$$I_1 = \int_0^\infty z^\nu e^{-\frac{1+v^2}{2}z^2+\delta z} dz = e^{\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{1+v^2}} \int_0^\infty z^\nu e^{-\left(\sqrt{\frac{1+v^2}{2}}z - \frac{\delta}{\sqrt{2(1+v^2)}}\right)^2} dz.$$

Cu ajutorul schimbării de variabilă

$$\sqrt{\frac{1+v^2}{2}}\, z - \frac{\delta}{\sqrt{2(1+v^2)}} = y \quad \left(dz = \sqrt{\frac{1}{2+v^2}}\, dy\right)$$

şi folosind formula lui Newton de dezvoltare a puterii unui binom, obţinem succesiv

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{1+v^2}} \sqrt{\frac{2}{1+v^2}} \int_{\frac{-\delta}{\sqrt{2(1+v^2)}}}^{\infty} \left[\sqrt{\frac{2}{1+v^2}}\, y + \frac{\delta}{1+v^2}\right]^\nu \cdot e^{-y^2} dy =$$

$$= e^{\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{1+v^2}} \sqrt{\frac{2}{1+v^2}} \sum_{k=0}^{\nu} C_\nu^k \left[\sqrt{\frac{2}{1+v^2}}\right]^k \left[\frac{\delta}{1+v^2}\right]^{\nu-k} \int_{\frac{-\delta}{\sqrt{2(1+v^2)}}}^{\infty} y^k e^{-y^2} dy.$$

Făcînd o nouă schimbare de variabilă

$$x = y^2 \quad \left(d_y = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx\right),$$

integrala devine, ţinînd cont de definiţia (2.12),

$$I_1 = \frac{1}{2} e^{\frac{\delta^2}{2(1+v^2)}} \sqrt{\frac{2}{1+v^2}} \sum_{k=0}^{\nu} C_\nu^k \left[\sqrt{\frac{2}{1+v^2}}\right]^k \left[\frac{\delta}{1+v^2}\right]^{\nu-k} \times \tag{2.15}$$

$$\times \Gamma\left[\frac{1}{2}(k+1)\right]\left\{1 - \Gamma\left[\frac{1}{2}(k+1);\ \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{1+v^2}\right]\right\}.$$

Analog se poate calcula

$$I_2 = \int_0^{\infty} z^{\nu} e^{-\frac{1}{2} z^2 (1+v^2) - \delta z} dz =$$

$$(2.16) \quad = \frac{1}{2} e^{\frac{\delta^2}{2(1+v^2)}} \sqrt{\frac{2}{1+v^2}} \sum_{k=0}^{\nu} C_{\nu}^{k} (-1)^{\nu-k} \left[\sqrt{\frac{2}{1+v^2}}\right]^{k} \left[\frac{\delta}{1+v^2}\right]^{\nu-k} \times$$

$$\times \Gamma\left[\frac{1}{2}(k+1)\right] \left\{1 - \Gamma\left[\frac{1}{2}(k+1) ; \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{1+v^2}\right)\right\}.$$

Înlocuind expresiile obţinute (2.15) şi (2.16) în (2.14), după reducerea termenilor asemenea se obţine expresia (2.11).

§ 3. REPARTIŢIA UNEI STATISTICI UTILĂ ÎN COMPARAREA COEFICIENŢILOR DE VARIABILITATE

Vom studia acum repartiţia unei statistici care prezintă interes în ceea ce priveşte compararea a doi coeficienţi de variabilitate. Să presupunem că sînt daţi doi coeficienţi de variabilitate empirici V_1 şi V_2, determinaţi pe baza unor selecţii de volume n_1 şi n_2; coeficienţii de variabilitate teoretici se vor nota respectiv η_1 şi η_2. Conform relaţiei (2.5) rezultă că au loc aproximările

$$(3.1) \qquad V_i^2 = \frac{\nu_i}{c_i \nu_i^*} F_{\nu i, \nu_i^*}, \qquad \nu_i = n_i - 1, \qquad i = 1,2$$

unde c_i şi ν_i^* se determină conform formulelor (2.3) şi (2.4) în care

$$(3.2) \qquad \delta_i = \frac{1}{\eta_i} \sqrt{n_i}, \qquad i = 1,2$$

presupunîndu-se $\eta_i > 0$, $i = 1,2$.

Să notăm cu $\beta(p,q)$ variabila aleatoare beta de parametri p şi q (vezi [2]) a cărei densitate de repartiţie este

$$(3.3) \quad f(x) = \frac{1}{B(p,q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

În această formulă $B(p,q)$ este funcţia beta de p şi q. Se ştie ([1]) că între variabilele aleatoare $\beta(p,q)$ şi $F_{p,q}$ există relaţia

$$(3.4) \qquad \beta(p,q) = \frac{1}{1 + \frac{q}{2} F_{p,q}}.$$

Din această formulă deducem conform (3.1) că variabilele

$$(3.5)\qquad \beta_1 = \beta\left(\frac{\nu_1^*}{2}, \frac{\nu_1}{2}\right) = \frac{1}{1 + c_1 V_1^2}, \qquad \beta_2 = \beta\left(\frac{\nu_2^*}{2}, \frac{\nu_2}{2}\right) = \frac{1}{1 + c_2 V_2^2}$$

au aproximativ repartiţii beta.

Statistica de care ne vom ocupa are expresia

$$(3.6)\qquad U = \frac{1}{1 + c_1 V_1^2}\,\frac{1}{1 + c_2 V_2^2} = \beta_1 \beta_2.$$

Vom studia în continuare repartiţia statisticii U.

Densitatea de repartiţie comună a variabilelor β_1 şi β_2 este

$$f(z_1, z_2) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1 + \nu_1^*}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2 + \nu_2^*}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_1^*}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2^*}{2}\right)} z_1^{\frac{\nu_1^*}{2}} (1 - z_1)^{\frac{\nu_1}{2} - 1} z_2^{\frac{\nu_2^*}{2}} (1 - z_2)^{\frac{\nu_2}{2} - 1}$$

iar funcţia de repartiţie a variabilei U devine

$$(3.7)\qquad F(u) = P(U < u) = \iint\limits_D f(z_1, z_2)\, \mathrm{d}z_1\, \mathrm{d}z_2, \qquad 0 \leqslant u \leqslant 1,$$

unde D este domeniul din planul (z_1, z_2) definit de relaţiile

$$D = \begin{cases} 0 \leqslant z_1 z_2 \leqslant u \\ 0 \leqslant z_i \leqslant 1, \quad i = 1,2 \end{cases}$$

şi este reprezentat în figura 1.

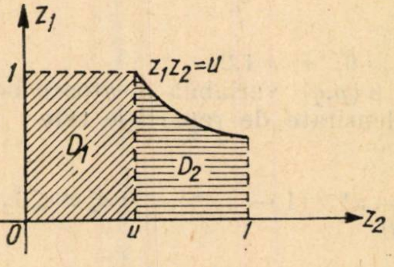


Fig. 1

Se observă că

$$F(u) = J_1 + J_2, \qquad J_i = \iint\limits_{D_i} f(z_1, z_2)\, \mathrm{d}z_1\, \mathrm{d}z_2, \qquad i = 1,2$$

și deci determinarea funcției de repartie $F(u)$ revine la calculul integralelor J_1 și J_2.

În ceea ce privește integrala J_1 avem

$$(3.8)\qquad J_1 = \frac{1}{B\left(\frac{\nu_2^*}{2}, \frac{\nu_2}{2}\right)} \int_0^u z_2^{\frac{\nu_2^*}{2}-1} (1 - z_2)^{\frac{\nu_2}{2}-1} \mathrm{d}z = I\left(\frac{\nu_2^*}{2}, \frac{\nu_2}{2}; u\right),$$

unde $I(p, q; u)$ este funcția beta incompletă.

Calculul integralei J_2 este în general mai complicat; o primă simplificare se obține în ipoteza $n_1 = 2p + 1$, adică $\nu_1 = 2p$. Într-adevăr, notînd

$$K = \frac{1}{B\left(\frac{\nu_1^*}{2}, \frac{\nu_1}{2}\right) B\left(\frac{\nu_2^*}{2}, \frac{\nu_2}{2}\right)},$$

avem

$$J_2 = K \int_u^1 \int_0^{\frac{u}{z^2}} z_1^{\frac{\nu_1^*}{2}-1} (1 - z_1)^{p-1} z_2^{\frac{\nu_2^*}{2}-1} (1 - z_2)^{\frac{\nu_2}{2}-1} \mathrm{d}z_1 \, \mathrm{d}z_2 =$$

$$= K \int_u^1 \left(\int_0^{\frac{u}{z_2}} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(-1)^i (p-1)!}{i!(p-i-1)!} z_1^{\frac{\nu_1^*}{2}+i-1} \mathrm{d}z_1 \right) z_2^{\frac{\nu_2^*}{2}-1} (1 - z_2)^{\frac{\nu_2}{2}-1} \mathrm{d}z_2$$

adică

$$(3.9)\quad J_2 = K \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(-1)^i (p-1)!}{i!(p-i-1)!} \frac{2}{\nu_1^* + 2i} u^{\frac{\nu_1^*}{2}+i} \int_u^1 z_2^{\frac{\nu_2^*}{2}-\frac{\nu_1^*}{2}-i-1} (1 - z_2)^{\frac{\nu_2}{2}-1} \mathrm{d}z_2$$

Din cele de mai sus rezultă

TEOREMA 4.2. *Funcția de repartiție a variabilei U definită de (3.6) în cazul $\nu_1 = 2p$ este dată de relația*

$$(3.10)\qquad \begin{aligned} F(u) &= I\left(\frac{\nu_2^*}{2}, \frac{\nu_2}{2}; u\right) + \\ &+ K \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(-1)^i (p-1)!}{i!(p-i-1)!} \frac{2}{\nu_1^* + 2i} u^{\frac{\nu_1^*}{2}+i} \left[1 - T\left(\frac{\nu_2^*}{2} - \frac{\nu_1^*}{2} - i, \frac{\nu_2}{2}; u\right)\right] \end{aligned}$$

pentru $0 \leqslant u \leqslant 1$, *unde*

$$(3.11)\qquad T\left(\frac{\nu_2^*}{2} - \frac{\nu_1^*}{2} - i, \frac{\nu_2}{2}; u\right) = \int_0^u z^{\frac{\nu_2^*}{2}-\frac{\nu_1^*}{2}-i-1} (1 - z)^{\frac{\nu_2}{2}-1} \mathrm{d}z.$$

În formula (3.10) se mai pot face unele simplificări, deoarece ν_i^*, $i = 1,2$ şi ν_2 sînt întregi. Astfel, dacă $\nu_2 = 2r$, atunci în integrala din (3.9) putem dezvolta $(1 - z_2)^{r-1}$ şi obţinem sub integrală o combinaţie liniară de puteri ale lui z_2. Dacă $\nu_2 = 2r + 1$, observăm că $(1 - z_2)^{\frac{2r+1}{2}-1} = (1 - z_2)^{r-1}\sqrt{1 - z_2}$ şi dezvoltînd de asemenea $(1 - z_2)^{r-1}$, integrala din (3.9) se reduce la o sumă de integrale binome.

Vom considera cîteva cazuri particulare.

Cazul $\nu_1 = \nu_2 = 2$. În acest caz din (3.9) deducem

$$J_2 = K \frac{4}{\nu_1^*} \frac{u^{\frac{\nu_1^*}{2}}}{\nu_2^* - \nu_1^*}\left[1 - u^{\frac{\nu_2^* - \nu_1^*}{2}}\right], \; K = \frac{4}{\nu_1^{*2}}, \; \nu_1^* \neq \nu_2^*$$

şi deci

$$F(u) = I\left(\frac{\nu_2^*}{2}, 1; u\right) + \frac{16}{\nu_1^{*3}(\nu_2^* - \nu_1^*)} u^{\frac{\nu_1^*}{2}}\left[1 - u^{\frac{\nu_2^* - \nu_1^*}{2}}\right] \tag{3.12}$$

iar dacă $\nu_1^* = \nu_2^* = \nu^*$, atunci

$$F(u) = I\left(\frac{\nu^*}{2}, 1; u\right) - \frac{8}{\nu^{*3}} u^{\frac{\nu^*}{2}} \ln u, \tag{3.12'}$$

unde peste tot în formulele precedente avem $0 \leqslant u \leqslant 1$.

Cazul $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 3$. În acest caz avem

$$K = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_2^* + 3}{2}\right)}{\frac{\nu_1^*}{2}\Gamma\left(\frac{\nu^*}{2}\right)\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \frac{4}{3\nu_1^*}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_2^* + 3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_2^*}{2}\right)}$$

şi conform (3.9) deducem

$$J_2 = \frac{16}{3\nu_1^{*2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_2^* + 3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_2^*}{2}\right)}\,\frac{u^{\frac{\nu_1^*}{2}}}{\nu_2^* - \nu_1^*}\left[u^{\frac{\nu_2^* - \nu_1^*}{2}}\sqrt{1 - u} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{\frac{\nu_2^* - \nu_1^*}{2}} (-1)^{\frac{\nu_2^* - \nu_1^*}{2}} (1 - u)^{k + \frac{1}{2}}\right]$$

Ultima relație are sens deoarece din cauză că ν_i^* iau valori impare, numărul $\nu_2^* - \nu_1^*$ este par și deci $\frac{\nu_2^* - \nu_1^*}{2}$ este întreg. Funcția de repartiție în acest caz este

$$F(u) = I\left(\frac{\nu_2^*}{2}, \frac{3}{2}; u\right) + \frac{16}{3\nu_1^{*2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_2 + 3}{2}\right) u^{\frac{\nu_1^*}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu_2^*}{2}\right)\nu_2^* - \nu_1^*}\left[u^{\frac{\nu_2^* - \nu_1^*}{2}}\sqrt{1-u} - \right.$$

(3.13)

$$\left. - \sum_{k=0}^{\frac{\nu_2^* - \nu_1^*}{2}} (-1)^{\frac{\nu_2^* - \nu_1^*}{2}} (1-u)^{k+\frac{1}{2}}\right].$$

Cazul $\nu_1 = \nu_2 = \nu = 2p$. Din (3.10) se vede că dacă are loc ipoteza $H : \eta_1 = \eta_2$, atunci (din cauză că $\nu_1^* = \nu_2^* = \nu^*$,

$$F_0(u) = I\left(\frac{\nu^*}{2}, p; u\right) + K\sum_{i=0}^{p-1}\frac{(-1)^i (p-1)!}{i!(p-i-1)!}\,\frac{2}{\nu^* + 2i}\,[1 - T(-i, p; u)],$$

(3.14)

unde

$$K = \frac{1}{B^2\left(\frac{\nu}{2}, p\right)}$$

Dacă ipoteza H nu este adevărată, atunci

$$F_1(u) = I\left(\frac{\nu_2}{2}, p; u\right) + K\sum_{i=0}^{p-1}\frac{(-1)^i (p-1)!}{i!(p-i-1)!}\,\frac{1}{\nu_1^* + 2i}\left[1 - \right.$$

(3.15)

$$\left. - T\left(\frac{\nu_2^*}{2} - \frac{\nu_1^*}{2} - i, p; u\right)\right],$$

unde

$$K = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1^*}{2} + p\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2^*}{2} + p\right)}{\Gamma^2(p)\,\Gamma\left(\frac{\nu_1^*}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2^*}{2}\right)}.$$

În afara statisticii U definită de (3.6), ar fi util să se studieze statistica $D = V_1^2 - V_2^2$. Studiul repartiţiei variabilei aleatoare D ridică însă mari dificultăţi de calcul chiar şi în cazul cînd se fac aproximări conform relaţiilor (3.1).

§ 4. IPOTEZE ASUPRA COEFICIENTULUI DE VARIABILITATE

Folosind repartiţiile referitoare la coeficienţii de variabilitate studiate anterior, se pot construi teste pentru verificarea ipotezelor asupra coeficienţilor de variabilitate.

Mai întîi considerăm ipoteza $H_0 : \eta = \eta_0$, cu alternativa $H_1 : \eta = \eta_1 (\eta_1 > \eta_0 > 0)$.

Vom considera deci o selecţie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ efectuată asupra variabilei aleatoare X al cărei coeficient de variabilitate este η. Pentru verificarea ipotezei H_0 vom folosi statistica V definită de (1.14). În ipoteza H_0, statistica V are densitatea de repartiţie (2.6), unde $\delta = \delta_0$ iar

$$\delta_0 = \frac{1}{\eta_0} \sqrt{n}. \tag{4.1}$$

Dacă riscul de genul întîi este α şi dacă notăm cu V_α, α - quantila superioară a variabilei aleatoare V, adică

$$P(V \geqslant V_\alpha / H_0) = \alpha, \tag{4.2}$$

atunci domeniul critic al testului pentru verificarea ipotezei H_0 este

$$V \geqslant V_\alpha. \tag{4.3}$$

Riscul de genul al doilea se determină ţinîndu-se seama de faptul că în ipoteza H_1 densitatea de repartiţie a variabilei aleatoare V este de forma (2.6) cu $\delta = \delta_1$:

$$\delta_1 = \frac{1}{\eta_1} \sqrt{n}. \tag{4.1'}$$

Deci riscul de genul al doilea este

$$\beta = P(V \leqslant V_\alpha / H_1). \tag{4.4}$$

Din cauză că expresia densităţii de repartiţie a coeficientului de variabilitate V este complicată, în practică se ivesc dificultăţi în ceea ce priveşte calculul riscului de genul al doilea β. Pentru a înlătura aceste dificultăţi, verificarea ipotezei H_0 cu alternativa H_1 poate fi făcută folosindu-se aproximarea variabilei V^2 dată de formula (2.5), unde c şi h^* sînt soluţii ale sistemului (2.2). Testul care rezultă pe această cale este un test aproximativ. Domeniul critic în acest caz este definit de relaţia

(4.3′) $$V^2 > V_\alpha^{*2}.$$

unde α-quantila superioară V_α^{*2} este dată de formula

(4.5) $$V_\alpha^{*2} = \frac{\nu}{c_0 h_0^*} F_{\nu,h_0^*,\alpha}$$

în care c_0 şi h_0^* sînt soluţii ale sistemului (2.2) cu $\delta = \delta_0$ iar $F_{\nu,h_0^*,\alpha}$ este α-quantila superioară a variabilei aleatoare F_{ν,h_0^*}.

Pentru determinarea riscului de genul al doilea să observăm mai întîi că, în ipoteza H_1, variabila V^2 este de forma

(4.6) $$V^2 = \frac{\nu}{c_1 h_1^*} F_{\nu,h_1^*},$$

unde c_1 şi h_1^* sînt soluţii ale sistemului (2.2) în care $\delta = \delta_1$. Deoarece

(4.7) $$\beta = P(V^2 < V_\alpha^{*2}/H_1),$$

rezultă că

(4.7′) $$\beta = S_{\nu,h_1^*}\left(\frac{c_1 h_1^*}{c_0 h_0^*} F_{\nu,h_0^*,\alpha}\right)$$

unde prin $S_{\nu,h_1^*}(x)$ se notează funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare F_{ν,h_1^*}.

Să vedem acum cum se construieşte testul pentru verificarea ipotezei $H_0 : \eta_1 = \eta_2$ cu alternativa $H_1 : \eta_1 \neq \eta_2$. Presupunem că pe baza a două selecţii de volume n_1 şi n_2 s-au determinat coeficienţii de variabilitate empirici V_1^2 şi V_2^2.

Testul se bazează pe statistica U definită de (3.6) a cărei repartiţie aproximativă a fost studiată în § 3. Dacă $n_1 = n_2$ (deci $\nu_1 = n_1 - 1 = \nu_2 = n_2 - 1 = \nu$), atunci din (3.14) se pot determina U_{α_1}, şi U_{α_2} astfel încît

(4.8) $$P_0(U_{\alpha_1} < U < U_{\alpha_2}) = 1 - \alpha.$$

Ipoteza H_0 se verifică dacă U definit de (3.6) satisface relaţia

(4.8′) $$U_{\alpha_1} < U < U_{\alpha_2}.$$

Puterea testului va fi în acest caz

(4.9) $$\beta = P_1(U_{\alpha_1} < U < U_{\alpha_2}) = F_1(U_{\alpha_2}) - F_1(U_{\alpha_1}),$$

unde $F_1(x)$ este funcţia de repartiţie (3.15).

Deoarece în acest caz nu se cunosc η_1 şi η_2 care folosesc la determinarea mărimilor ν_1^* şi ν_2^*, se pot lua eventual alte estimaţii ale lor.

Repartiţia variabilei aleatoare V poate fi folosită şi la determinarea unei regiuni de încredere pentru coeficientul de variabilitate η.

Primită la redacţie la 14 iunie 1968

Centru de statistică matematică al
Academiei Republicii Socialiste
România, Calea Griviţei, nr. 21,
Bucureşti 12

ON THE DISTRIBUTION OF THE VARIABILITY COEFFICIENT

(ABSTRACT)

Starting from the fact that the square of the empiric variability coefficient V of a random variable X, under the assumption that this variable follows a normal distribution $N(\mu, \sigma^2)$, is a noncentral random variable F, multiplied by a constant, i.e.

$$V^2 = \nu \cdot F_{\nu,1;0,\delta}$$

one of its approximate distribution is determined, making use of Patnaik's approximation for the noncentral hi-square variables. Also, using the ordinary calculation procedures the exact distribution of the empiric variability coefficient and an approximate of the distribution of the statistics

$$U = \frac{1}{1 + c_1 V_1^2} \cdot \frac{1}{1 + c_2 V_2^2}$$

are determined, where V_1 and V_2 are two variability coefficients determined according to two independent samples of sizes n_1 and n_2, and c_1 and c_2 are determined constants.

According to these distributions some tests for hypotheses concerned with theoretical variability coefficients are presented in the last part of the paper.

BIBLIOGRAFIE

1. ANDESON, T. W., *An introduction to multivariate statistics analysis.* John Wiley, New York, London, 1958.
2. KENDALL, M. G.; STUART, A., *The advanced theory of statistics*, vol. 1, *Distribution theory.* Charls Griffin — London, 1962.
3. KOOPMANS, L. H.; OEWN, D. R: ROSENBLATT, J. I., *Confidence intervals for the coefficient of variation for the normal and lognormal distribution.* Biometrika, **51**, *1—2*, 25—32 (1964).
4. ONICESCU, O., MIHOC, GH., *Lecţii de statistică matematică.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1958.
5. SCHEFFÉ, H., *The analysis of variance.* John Wiley, New York, London, 1950.

ASUPRA MIŞCĂRII FLUIDELOR VÎSCOASE, ELECTROCONDUCTOARE ÎN JURUL UNEI PLĂCI PLANE

DE

N. MARCOV

Se consideră mişcarea plană, permanentă a fluidelor vîscoase, incompresibile, electroconductoare în jurul unei plăci plane. Incidenţa plăcii este zero. Cîmpul magnetic aplicat are o direcţie oarecare. Se foloseşte aproximaţia lui Oseen şi se utilizează transformatele Fourier pentru ecuaţiile liniare astfel obţinute. În felul acesta problema considerată se reduce la studiul unui sistem de două ecuaţii integrale (3), § 7.

§ 1. INTRODUCERE

Mişcarea plană, magnetohidrodinamică a fluidelor vîscoase, electroconductoare în jurul unei plăci plane, a fost considerată de către H. P. Greenspan, G. F. Carrier şi H. Cabannes [1], [2], [3], pentru cazul în care cîmpul magnetic aplicat, viteza curentului fluid neperturbat şi placa sînt paralele. D. L. Hector [4] a studiat cazul în care cîmpul magnetic este aplicat perpendicular pe placa semiinfinită. În lucrarea [5] a fost studiat cazul în care incidenţa plăcii este diferită de zero, cîmpul magnetic aplicat fiind paralel cu viteza curentului fluid neperturbat.

În cele ce urmează se consideră mişcarea plană a fluidelor vîscoase, electroconductoare în jurul unei plăci plane finite, incidenţa plăcii fiind zero, iar cîmpul magnetic aplicat avînd o direcţie oarecare dată. Ecuaţiile de mişcare sînt liniarizate prin metoda lui Oseen, şi separate în două sisteme de ecuaţii. Aplicarea transformatei Fourier dă posibilitatea reprezentării soluţiei ecuaţiilor în raport cu două funcţii $f(x)$ şi $g(x)$. Impunînd condiţiile la limită, se obţine un sistem de două ecuaţii integrale pentru aceste funcţii şi anume sistemul (3), § 7. Calculul rezistenţei la înaintarea plăcii plane, arată că funcţiile $g(x)$ şi $-f(x)$ reprezintă distribuţia pe placă a rezistenţei la înaintare şi respectiv a portanţei.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 7, P. 1063–1072, BUCUREŞTI, 1969

§ 2. ECUAŢIILE DE MIŞCARE

Fluidul considerat este presupus omogen avînd vîscozitatea ν, conductibilitatea electrică σ şi permeabilitatea magnetică μ. În variabilele adimensionale într-un sistem cartezian drept, ecuaţiile de mişcare, [6], sînt :

$$(1)\qquad (\vec{V}\,\mathrm{grad})\,\vec{V} = -\,\mathrm{grad}\,P + \frac{1}{R}\,\Delta\,\vec{V} + \beta\,(\vec{H}\,\mathrm{grad})\,\vec{H},$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \varepsilon\,R\,(\vec{E} + \vec{V}\times\vec{H}),\quad \mathrm{rot}\,\vec{E} = 0,\quad \mathrm{div}\,\vec{H} = 0,$$

$$P = p + \frac{1}{2}\,\beta\,(H^2 - 1),\quad \mathrm{div}\,\vec{V} = 0,$$

unde

$$(2)\qquad R = LV_\infty/\nu,\qquad \varepsilon = \sigma\mu\nu,\qquad \beta = \mu H_\infty^2/\rho\,V_\infty^2.$$

În cele ce urmează se presupune mişcarea plană şi anume

$$(3)\qquad \vec{V} = (1+u)\,\vec{i} + v\vec{j},\ \vec{H} = (m + h_x)\,\vec{i} + (n + h_y)\,\vec{j},\ \vec{E} = -\,n\vec{k}$$

Înlocuim (3) în (1) şi neglijăm produsele în care intervin mărimile de perturbaţie sau derivatele lor. Rezultă sistemul de ecuaţii :

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{R}\,\Delta u + \beta\left(m\frac{\partial}{\partial x} + n\frac{\partial}{\partial y}\right)h_x \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{R}\,\Delta v + \beta\left(m\frac{\partial}{\partial x} + n\frac{\partial}{\partial y}\right)h_y \end{aligned}$$

$$p = P - \beta\,(mh_x + nh_y)$$

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} = \varepsilon R\,(h_y + nu - mv) \\ &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,\qquad \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Acest sistem de ecuaţii (4), (5) este echivalent cu sistemul de ecuaţii (5), (6) :

$$(6)\qquad Q = v - \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \beta(nh_x - mh_y)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y},\qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

pentru funcţiile u, v, h_x, h_y şi P, Q.

Pentru a separa ecuaţiile (5), (6), definim funcţiile :

$$
\begin{aligned}
U &= u + k_{21}P - k_{22}Q \\
V &= v - k_{22}P - k_{21}\,Q \\
H_x &= h_x + k_{11}P - k_{12}Q \\
H_y &= h_y - k_{12}P - k_{11}Q
\end{aligned}
\tag{7}
$$

constantele k_{ij} avînd următoarele expresii :

$$k_{ij} = \frac{1}{\delta}c_{ij}, \qquad \delta = (1-\beta)^2m^2 + (1+\beta)^2n^2$$

$$c_{11} = (1-\beta)\,m, \qquad c_{12} = (1+\beta)\,n$$

$$c_{21} = 1 - \beta\,(m^2 - n^2), \qquad c_{22} = 2\beta mn.$$

Aceste funcţii verifică ecuaţiile :

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = RV + \beta R\,(nH_x - mH_y) \\
\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon RH_y + \varepsilon R\,(nU - mV) \\
\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Vectorial, relaţiile (7) şi (8) se scriu sub forma :

$$-A\Phi + B\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \qquad \Phi = \varphi + aP - bQ \tag{9}$$

în care

$$A = -R\begin{pmatrix} 0 & 1 & \beta n & -\beta m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon n & -\varepsilon m & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\qquad \Phi=\begin{pmatrix}U\\ V\\ H_x\\ H_y\end{pmatrix}$$

iar a, b sînt vectori constanţi.

§ 3. PROPRIETĂŢI ALE RĂDĂCINILOR POLINOMULUI $|A+i\xi B-\lambda E|$

Polinomul caracteristic

$$|A+i\xi B-\lambda E|=(\lambda^2-\xi^2+iR\xi)\,(\lambda^2-\xi^2+i\varepsilon R\xi)-\\ -\varepsilon\beta R^2(n\lambda-im\xi)^2 \tag{1}$$

defineşte patru funcţii continue, [7], $\lambda_j(\xi)$ în raport cu ξ real, astfel încît

$$|A+i\xi B-\lambda_j(\xi)E|=0,\quad j=1,2,3,4.$$

PROPOZIŢIA 1. *Dacă* $\xi\neq 0$, *atunci părţile reale ale valorilor proprii sînt diferite de zero.*

Într-adevăr, presupunînd prin absurd că o valoare proprie λ_j este imaginară, se obţine

$$\mathrm{Im}\,|A+i\xi B-\lambda_j E|=-(|\lambda_j|^2+\xi^2)(1+\varepsilon)R\xi=0$$

contrar ipotezei $\xi\neq 0$ şi condiţiilor $\varepsilon\geqslant 0$, $R>0$.

PROPOZIŢIA 2. *Părţile reale ale valorilor proprii au semn constant pe intervalele* $(-\infty,0)$ *şi* $(0,\infty)$.

Într-adevăr, presupunem prin absurd că partea reală a unei valori proprii schimbă de semn în intervalul (ξ_1,ξ_2) inclus în unul din aceste intervale. Partea reală considerată este funcţie continuă pe intervalul (ξ_1,ξ_2), deci se va anula într-un punct $\xi_0\in(\xi_1,\xi_2)$ diferit de zero. Acest fapt contrazice propoziţia de mai sus.

Comportamentul valorilor $\lambda_j(\xi)$ pentru $|\xi|\to\infty$ este dat de dezvoltările

$$\lambda_j(\xi)\sim\pm\left[\xi+a_0+0\left(\frac{1}{\xi}\right)\right]. \tag{2}$$

Înlocuim în polinomul considerat şi egalăm cu zero coeficientul lui ξ^2. Se obţine

$$(a_0+iR)\,(a_0+i\varepsilon R)-\varepsilon\beta R^2\,(n\mp im)^2=0.$$

În felul acesta, pentru valorile mari ale modulului $|\xi|$, valorile proprii sînt distincte, două din ele au părţile reale pozitive, iar celelalte două au părţile reale negative. Astfel pe baza propoziţiei 2 şi a continuităţii valorilor λ_j în punctul $\xi = 0$, rezultă

PROPOZIŢIA 3. *Două valori proprii* $\lambda_1(\xi)$ *şi* $\lambda_2(\xi)$ *au părţile reale pozitive pentru* $\xi \neq 0$, *şi expresiile* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ *pentru* $\xi = 0$, *iar celelalte două valori* $\lambda_3(\xi)$ *şi* $\lambda_4(\xi)$ *au părţile reale negative pentru* $\xi \neq 0$, *şi valorile* $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = -1$ *pentru* $\xi = 0$.

PROPOZIŢIA 4. *Părţile reale ale valorilor proprii sînt funcţii pare, iar părţile imaginare sînt funcţii impare în raport cu* ξ.

Într-adevăr, se efectuează substituţia $\xi \to -\xi$ în polinomul (1), şi se conjugă expresia obţinută. Rezultă

$$(3) \qquad |A + i\xi B - \overline{\lambda(-\xi)}E| = 0.$$

Comparînd ecuaţiile (1) şi (3) se poate arăta

$$(4) \qquad \lambda_j(\xi) = \overline{\lambda_j(-\xi)}, \qquad j = 1, 2, 3, 4.$$

§ 4. CONDIŢIILE LA LIMITĂ ŞI LA INFINIT

Presupunem că mişcarea are loc în jurul unei plăci plane situate pe segmentul (0,1) al axei Ox. Fluidul fiind vîscos, condiţiile la limită pentru viteze sînt

$$(1) \qquad u(x, \pm 0) = -1, \quad v(x, \pm 0) = 0 \quad \text{pentru} \quad x \in (0,1).$$

Presupunem placa izolatoare. Atunci componentele cîmpului magnetic trebuie să fie continue :

$$(2) \qquad \begin{aligned} h_x(x, +0) - h_x(x, -0) &= [h_x] = 0, \\ h_y(x, +0) - h_y(x, -0) &= [h_y] = 0. \end{aligned}$$

Din aceste relaţii şi din relaţiile (9), § 2, rezultă

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\Phi(x, \pm 0) = \varphi(x, \pm 0) + aP(x, \pm 0) - bQ(x, \pm 0) \\ &[\varphi] = 0, \quad [\Phi] = a[P] - b[Q] \quad \text{pentru} \quad x \in (0,1). \end{aligned}$$

Explicit, pe segmentul (0,1), se obţine

$$U(x, +0) = -1 + k_{21}P(x, +0) - k_{22}Q(x, +0)$$

$$V(x, +0) = -k_{22}P(x, +0) - k_{21}Q(x, +0)$$

astfel încît

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
P(x,+0) &= k_{21} + k_{21}U(x,+0) - k_{22}V(x,+0)\\
Q(x,+0) &= -k_{22} - k_{22}U(x,+0) - k_{21}V(x,+0).
\end{aligned}
$$

Pe axa Ox, în exteriorul segmentului $[0, 1]$, funcţiile considerate trebuie să fie continue şi cu derivate normale continue :

$$
(5)\qquad [\varphi] = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] = [\Phi] = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right] = 0 \text{ pentru } y = 0 \text{ şi } x \notin [0, 1].
$$

Deoarece presiunea P, viteza $\vec{v}$ şi cîmpul magnetic $\vec{h}$ sînt mărimi de perturbaţie, ele trebuie să se anuleze la infinit :

$$
(6)\qquad u,\ v,\ h_x,\ h_y,\ P = 0 \text{ la infinit.}
$$

Din relaţia (6), § 2, rezultă că funcţia Q se anulează la infinit, deci

$$
(7)\qquad U,\ V,\ H_x,\ H_y,\ Q = 0 \text{ la infinit.}
$$

§ 5. REPREZENTAREA FUNCŢIEI VECTORIALE $\Phi(x, y)$

Funcţia $\Phi(x, y)$ este definită în exteriorul segmentului $[0,1]$ al axei Ox. Această funcţie trebuie să se anuleze la infinit conform relaţiilor (7), § 4. Aplicăm transformata Fourier ecuaţiei (9), § 2 şi inversăm. Se obţine soluţia

$$
(1)\qquad \Phi(x, y \gtrless 0) = \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i\xi x}\, \mathrm{e}^{(A+i\xi B)y}\, C_{\pm}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \text{ pentru } y \neq 0.
$$

Determinarea constantelor vectoriale $C_{\pm}(\xi)$ trebuie efectuată pe baza condiţiilor la infinit şi la limită.

Fie M matricea care reduce matricea $A + i\xi B$ la forma diagonală D :

$$
(2)\qquad (A + i\xi B)\,M - M\,D = 0.
$$

Rezultă

$$
\mathrm{e}^{(A+i\xi B)y} = M\,\mathrm{e}^{Dy}\,M^{-1} = M(\xi)\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1(\xi)y} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{e}^{\lambda_4(\xi)y} \end{pmatrix} M^{-1}(\xi)
$$

$$\Phi(x, y \lessgtr 0) = \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i\xi x} M \, \mathrm{e}^{Dy} M^{-1} C_{\pm} \, \mathrm{d}\xi. \tag{3}$$

Pentru ca această funcţie să se anuleze, atunci cînd $y \to +\infty$, este necesar ca integrantul să nu conţină termenii exponenţiali $\exp(\lambda_{1,2} y)$ deoarece părţile reale ale valorilor proprii $\lambda_{1,2}(\xi)$, aşa cum se arată în § 3, sînt pozitive. Astfel se impune condiţia ca vectorul $M^{-1}C_{+}$ să aibă primele două componente nule. Analog, pentru $y < 0$, se impune condiţia anulării ultimelor două componente ale vectorului $M^{-1}C_{-}$.

Notăm cu l_1, l_2, l_3, l_4 liniile matricii M^{-1}. Condiţiile impuse se scriu

$$l_1 C_{+} = l_2 C_{+} = l_3 C_{-} = l_4 C_{-} = 0.$$

Însemnăm

$$C = C_{+} + C_{-}. \tag{4}$$

Condiţiile de mai sus se scriu

$$l_1 C_{+} = 0, \quad l_2 C_{+} = 0, \quad l_3 C_{+} = l_3 C, \quad l_4 C_{+} = l_4 C$$

$$l_1 C_{-} = l_1 C, \quad l_2 C_{-} = l_2 C, \quad l_3 C_{-} = 0, \quad l_4 C_{-} = 0.$$

Se obţin relaţiile

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \boldsymbol{M}_{+} + \boldsymbol{M}_{-}, \qquad \boldsymbol{M}^{-1} C_{\pm} = \boldsymbol{M}_{\pm} C \tag{5}$$

în care matricea M_{+} are liniile $(0, 0, l_3, l_4)$, iar matricea $\boldsymbol{M}_{-}$ liniile $(l_1, l_2, 0, 0)$.

Înlocuim (5) în (3). Rezultă

$$\Phi(x, y \lessgtr 0) = \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i\xi x} \boldsymbol{M}(\xi) \, \mathrm{e}^{D(\xi) y} \boldsymbol{M}_{\pm}(\xi) \, C(\xi) \, \mathrm{d}\xi, \quad y \neq 0. \tag{6}$$

Constanta vectorială $C(\xi)$ trebuie determinată din condiţiile la limită.

Valorile limită ale funcţiei Φ sînt

$$\Phi(x, \pm 0) = \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i\xi x} \boldsymbol{M} \boldsymbol{M}_{\pm} C(\xi) \, \mathrm{d}\xi. \tag{7}$$

Scădem aceste relaţii şi inversăm. Prin relaţiile (3) şi (5), § 4, rezultă

$$C(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i\xi x} \{\Phi(x, +0) - \Phi(x, -0)\} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} \mathrm{e}^{i\xi x} \{a[P] - b[Q]\} \, \mathrm{d}x. \tag{8}$$

În felul acesta funcția $\Phi(x, y)$ admite reprezentarea (6), (8). Funcți nedeterminate sînt salturile $[P]$ și $[Q]$ ale presiunii și respectiv ale funcție Q pe placa considerată.

§ 6. REPREZENTAREA FUNCȚIILOR P, Q

Funcțiile P, Q sînt armonic conjugate în exteriorul segmentului (0,1) și nule la infinit, conform relațiilor (6), § 2 și (6), (7), § 4. Aceste funcții admit reprezentarea :

$$P(x, y) + iQ(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f(\alpha) + ig(\alpha)}{\alpha - (x + iy)}\,\mathrm{d}\alpha \tag{1}$$

și au valorile limită

$$\begin{aligned} P(x, \pm 0) + iQ(x, \pm 0) &= \pm \frac{1}{2}\{f(x) + ig\{(x)\} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f(\alpha) + ig(\alpha)}{\alpha - x}\,\mathrm{d}\alpha, \quad x \in (0, 1). \end{aligned} \tag{2}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} P(x, \pm 0) &= \pm \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{g(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha}{\alpha - x} \\ Q(x, \pm 0) &= \pm \frac{1}{2} g(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{f(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha}{\alpha - x} \\ f(x) &= [P], \quad g(x) = [Q], \quad x \in (0,1). \end{aligned} \tag{3}$$

§ 7. ECUAȚIILE INTEGRALE ATAȘATE PROBLEMEI LA LIMITĂ

Înlocuim funcția $C(\xi)$ din (8) în relația (7), § 5. Permutăm ordinea de integrare. Se obține

$$\Phi(x, \pm 0) = \pm \int_0^1 K_{\pm}(x - \alpha)\ \{af(\alpha) - bg(\alpha)\}\,\mathrm{d}\alpha, \tag{1}$$

unde

$$K_{\pm}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i\xi x}\, M(\xi)\, M_{\pm}(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \quad K_{+}(x) + K_{-}(x) = E\delta(x).$$

În particular, pentru primele două componente, relaţia (1) se scrie

$$
(2)\quad \begin{aligned}
U(x, +0) &= \int_0^1 \{K_{+,1}\, af(\alpha) - K_{+,1}\, bg(\alpha)\}\, \mathrm{d}\alpha \\
V(x, +0) &= \int_0^1 \{K_{\pm,2}\, af(\alpha) - K_{+,2}\, bg(\alpha)\}\, \mathrm{d}\alpha
\end{aligned}
$$

unde $K_{+,j}$, $j = 1, 2, 3, 4$, sînt liniile matricii $K_+(x - \alpha)$.

Înlocuim această relaţie şi relaţiile (3), § 6, în condiţia la limită (4), § 4. Rezultă sistemul de ecuaţii integrale

$$
(3)\quad \begin{aligned}
&\frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{g(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha}{\alpha - x} = k_{21} + \int_0^1 \{K_{11}(x - \alpha) f(\alpha) + \\
&\qquad + K_{12}(x - \alpha)\, g(\alpha)\}\, \mathrm{d}\alpha, \\
&\frac{1}{2} g(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{f(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha}{\alpha - x} = -k_{22} + \\
&\qquad + \int_0^1 \{K_{21}(x - \alpha) f(\alpha) + K_{22}(x - \alpha)\, g(\alpha)\}\, \mathrm{d}\alpha.
\end{aligned}
$$

Nucleele scalare K_{ij} au expresiile

$$
(4)\quad \begin{aligned}
&K_{11} = (k_{21}K_{+,1} - k_{22}K_{+,2})\, a,\ K_{12} = (-k_{21}K_{+,1} + k_{22}K_{+,2})\, b \\
&K_{21} = -(k_{22}K_{+,1} + k_{21}K_{+,2})\, a,\ K_{22} = (k_{22}K_{+,1} + k_{21}K_{+,2}) b.
\end{aligned}
$$

§ 8. REZISTENŢA LA ÎNAINTAREA PLĂCII PLANE

Efortul dinamic unitar exercitat de către fluid asupra obstacolului, are expresia

$$
\vec{T} = p\vec{n} + \frac{1}{R} \vec{n} \times \operatorname{rot} \vec{v} = p\vec{n} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \vec{k} \times \vec{n}.
$$

Deoarece placa plană este situată pe segmentul (0,1) al axei Ox, rezultă, prin relaţiile (4), (6), § 2 şi condiţiile la limită din § 4, expresiile rezistenţei la înaintare

$$
R_x = \int_0^1 \frac{1}{R} \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right] \mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\, \mathrm{d}x
$$

$$R_y = \int_0^1 - [p]\,\mathrm{d}x = - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Primită la redacţie la 18 iulie 1968

Universitatea din Bucureşti
Facultatea de matematică-mecanică, Str. Academiei
nr. 14

SUR L'ÉCOULEMENT DES FLUIDES VISQUEUX, ÉLECTROCONDUCTEURS, EN PRÉSENCE D'UNE PLAQUE PLANE

(RÉSUMÉ)

L'A. considère l'écoulement plan permanent des fluides visqueux électroconducteurs en présence d'une plaque plane. L'incidence de la plaque est nulle. Le champ magnétique a une direction quelconque. Par la méthode d'Oseen, les équations du mouvement sont linéarisées. L'A. applique la transformation de Fourier. Le problème aux limites est ramené à la résolution d'un système à deux équations intégrales.

BIBLIOGRAFIE

1. H. P. Greenspan, G. F. Carrier, *The magnetohydrodynamic flow past a flat plate.* J. Fluid Mech., **6**, 77 (1959).
2. H. P. Greenspan, *Flat plate in magnetohydrodynamic flow.* Phys. Fluids, **3**, 581 (1960).
3. H. Cabannes, *Magnétodynamique des fluides.* Paris, 1965.
4. D. L. Hector, *On the linearized M. H. D. flow past a semi-infinite flat plate in the presence of a transverse magnetic field.* J. Math. and Phys., **46**, 408–424 (1967).
5. L. Dragoş et N. Marcov, *L'écoulement des fluides visqueux, électroconducteurs, en présence d'une plaque plane à incidence non nulle.* J. de Mécanique, **7**, 2, (1968).
6. L. Dragoş, *Magnetodinamica fluidelor.* Ed. Academiei, Bucureşti, 1969.
7. А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций.* Москва — Ленинград, 1950.

EXTINDEREA UNEI PROBLEME DE MAXIM LA REȚELE OARECARE DE TRANSPORT

DE

ŞT. MITITELU

În [1] se determină cantitatea maximă de materiale care trec printr-o rețea de transport între două noduri principale ale sale atunci cînd rețeaua se află în regim optim de transport. De asemenea, în [1] se determină şi un mod de distribuție a acestei cantități pe arcele rețelei de transport.

În această lucrare se extind aceste probleme la rețele de transport cu n noduri principale şi se rezolvă în condiții diferite de cele din [1] şi se fac cîteva considerații teoretice asupra rețelelor.

§ 1

Fie $\mathfrak{R}$ o rețea de transport cu m noduri $X_1, X_2, \ldots, X_m$ şi fie $n\,(< m)$ dintre ele, $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_n}$, noduri principale. Dacă între două noduri vecine se circulă în ambele sensuri, atunci vom considera arcele (X_i, X_j) şi (X_j, X_i). Pentru arcele (X_i, X_j) ale rețelei de transport să notăm cu $c_{ij}\,(\geqslant 0)$ capacitățile lor. Reamintim că prin capacitatea c_{ij} a unui arc (X_i, X_j) se înțelege cantitatea maximă (fluxul optim) de materiale care se pot transporta de la X_i, la X_j. Deoarece rețeaua de transport este oarecare, în unele cazuri $c_{ij} = c_{ji}$ iar în altele $c_{ij} \neq c_{ji}$. Între oricare două noduri principale, şi în ambele sensuri, are loc un trafic de materiale. Presupunînd că materialele în circulația lor nu descriu circuite, ne propunem să determinăm cantitatea maximă de materiale care trec prin rețeaua $\mathfrak{R}$ şi distribuțiile acestei cantități pe arcele rețelei, atunci cînd rețeaua se află deci în regim optim de transport.

Presupunînd că materialele nu staționează pe arcele rețelei, vom pune condiția ca în orice nod X_i $(i \neq i_1, i_2, \ldots, i_n)$ fluxul să fie conservativ, adică :

$$\sum_{(X_k, X_i)} u_{ki} = \sum_{(X_i, X_l)} u_{il}, \tag{1}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 7, p. 1073–1082 BUCUREŞTI, 1969

unde prima sumă reprezintă cantitatea de materiale ce intră în nodul X_i pe arcele (X_k, X_i), iar a doua sumă reprezintă cantitatea de materiale care iese din nodul X_i pe arcele (X_i, X_l).

Prin u_{ki} s-a notat fluxul de materiale care trece prin arcul (X_k, X_i).

§ 2

Fie φ un izomorfism de rețea [4]. Imaginea izomorfă a drumurilor din $\mathcal{R}$ care merg de la X_{i_k} la X_{i_l} este o rețea $\mathcal{R}'_{i_k i_l}$ cu intrarea X'_{i_k} și ieșirea X'_i . Prin izomorfismul φ :

$$X_i \xrightarrow{\varphi} X'_i \tag{2}$$

şi

$$(X_i, X_j) \xrightarrow{\varphi} (X'_i, X'_j). \tag{3}$$

Vom considera că izomorfismul păstrează capacitățile, adică $c_{ij} = c'_{ij}$, unde c'_{ij} e capacitatea arcului (X'_i, X'_j).

Deci există o subrețea $\mathcal{R}_{i_k i_l} \subseteq \mathcal{R}$ cu intrarea X_{i_k} și ieșirea X_{i_l} astfel ca :

$$\varphi(\mathcal{R}_{i_k i_l}) = \mathcal{R}'_{i_k i_l}. \tag{4}$$

Deoarece rețeaua $\mathcal{R}$ conține C_n^2 perechi de noduri principale, rezultă că ei îi corespund $2C_n^2 = n(n-1)$ asemenea rețele $\mathcal{R}'_{i_k i_l}$. Ele se corespund prin izomorfism cu subrețele $\mathcal{R}_{i_k i_l}$ din $\mathcal{R}$.

Să considerăm rețelele $\mathcal{R}_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n; i \neq j)$, ale căror noduri fac parte din aceeași mulțime M şi care conțin subrețelele $S_{\alpha\beta}^{(i,j)}$ $(i, j = 1, 2, 3, \ldots, n: i \neq j)$ cu intrările α şi ieşirile β, izomorfe între ele.

În [2] s-a dat într-o formulare apropiată,

Definiția 1. Reuniunea dipolară $\bigcup\limits_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \mathcal{R}_{ij}$, a rețelelor $\mathcal{R}_{ij}$ cu două noduri principale [1]), este o rețea obținută din rețelele $\mathcal{R}_{12}$ și $\mathcal{R}_{ij} \setminus S_{\alpha\beta}^{(i,j)}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$, $(i, j) \neq (1, 2)$, de exemplu, prin conectarea nodurilor α, respectiv β, în care nodurile își păstrează proprietatea din rețelele $\mathcal{R}_{ij}$ de a fi simple, intrări sau ieşiri.

Vom considera :

Definiția 2. Intersecția dipolară $\bigcap\limits_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \mathcal{R}_{ij}$, a rețelelor $\mathcal{R}_{ij}$ cu două noduri principale este o rețea izomorfă cu subrețelele $S_{\alpha\beta}^{(i,j)}$, în care nodurile îşi păstrează proprietatea din subrețelele $S_{\alpha\beta}^{(i,j)}$ de a fi simple, intrări sau ieşiri.

---

[1]) În [2], [4] nodurile principale se numesc poli.

TEOREMA 1. *Rețeaua* $\mathcal{R}$ *și reuniunea dipolară* $\bigcup\limits_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{n} \mathcal{R}'_{i_k i_l}$ *a rețelelor* $\mathcal{R}'_{i_k i_l}$ *sînt izomorfe.*

Demonstrație. Fie izomorfismul $\psi = \varphi^{-1}$.

Din (4) rezultă că $\psi(\mathcal{R}'_{i_k i_l}) = \mathcal{R}_{i_k i_l}$ astfel încît:

$$X'_i \xrightarrow{\psi} X_i \text{ și } (X'_i, X'_j) \xrightarrow{\psi} (X_i, X_j).$$

Trebuie ca $\psi\left(\bigcup\limits_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{n} \mathcal{R}'_{i_k i_l}\right) = \mathcal{R}$. Într-adevăr,

$$\psi\left(\bigcup_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{n} \mathcal{R}'_{i_k i_l}\right) = \bigcup_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{n} \psi(\mathcal{R}'_{i_k i_l}) = \bigcup_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{n} \mathcal{R}_{i_k i_l} = \mathcal{R}.$$

TEOREMA 2. *Dacă odată cu acul* (X_i, X_j) *rețeaua* $\mathcal{R}$ *conține și arcul* (X_j, X_i), *atunci rețeaua* $\mathcal{R}$ *și intersecția dipolară* $\bigcap\limits_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{n} \mathcal{R}'_{i_k i_l}$ *a rețelelor* $\mathcal{R}'_{i_k i_l}$ *sînt izomorfe.*

Demonstrație. Deoarece arcele (X_i, X_j) și (X_j, X_i) se află împreună în $\mathcal{R}$ înseamnă că:

$$\bigcap_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{n} \mathcal{R}_{i_k i_l} = \mathcal{R}.$$

Avem:

$$\psi\left(\bigcap_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{n} \mathcal{R}'_{i_k i_l}\right) = \bigcap_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{n} \psi(\mathcal{R}'_{i_k i_l}) = \bigcap_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{n} \mathcal{R}_{i_k i_l} = \mathcal{R},$$

ceea ce trebuia arătat.

În cele ce urmează vom nota nodurile X'_i cu X_i.

§ 3

Un arc (X_i, X_j) al rețelei $\mathcal{R}$ se găsește pe drumuri care unesc diferite noduri principale, ceea ce înseamnă că transportul de materiale între două noduri principale este condiționat de transporturile de materiale dintre alte noduri principale. Rețeaua $\mathcal{R}$ cu n noduri principale se află, în regim optim de transport, dată între orice două noduri principale ale sale, se face un transport optim condiționat de materiale.

În cele ce urmează căutăm să determinăm transporturile optime de materiale dintre oricare două noduri principale care se influenţează reciproc şi astfel încît să nu existe blocări de materiale. Adică dacă pe drumul $(X_{i_k}, \ldots, X_i, X_j, \ldots, X_{i_l})$ arcul (X_i, X_j) este folosit cu întreaga sa capacitate, atunci pe oricare alt drum $(X_{i_r}, \ldots, X_i, X_j, \ldots, X_{i_s})$ transportul de materiale este blocat.

Fie ν_{ij} numărul tuturor drumurilor care conţin arcul (X_i, X_j). Presupunem că el se găseşte şi în reţeaua $\mathcal{R}_{i_k i_l}$ cu intrarea X_{i_k} şi ieşirea X_{i_l} în care este străbătut de $p_{ij}^{i_k i_l}$ drumuri care unesc aceste noduri. Să asociem arcului (X_i, X_j) din $\mathcal{R}_{i_k i_l}$ capacitatea:

$$c_{ij}^{i_k i_l} = \frac{p_{ij}^{i_k, i_l}}{\nu_{ij}} c_{ij}. \tag{5}$$

Evident,

$$\nu_{ij} = \sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{n} p_{ij}^{i_k i_l} \quad \text{şi} \quad c_{ij} = \sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{n} c_{ij}^{i_k i_l}.$$

Dacă în reţeaua $\mathcal{R}_{i_k i_l}$ pe un drum $(X_{i_k}, \ldots, X_i, X_j, X_k, \ldots, X_{i_l})$ apar consecutiv nodurile X_i, X_j şi X_k, iar X_j nu este legat cu alte noduri în afară de X_i şi X_k, atunci drumul (X_i, X_j, X_k) se înlocuieşte cu arcul (X_i, X_k) de capacitate:

$$c_{ik}^{i_k i_l} = c_{ij}^{i_k i_l} = c_{jk}^{i_k i_l}, \tag{6}$$

căci $p_{ij}^{i_k i_l} = p_{jk}^{i_k i_l}$ şi $\nu_{ij} = \nu_{jk}$.

Tuturor arcelor celor $n(n-1)$ reţele $\mathcal{R}_{i_k i_l}$ le asociem capacităţi conform relaţiilor (5) şi (6).

Fie $\Phi(i_k, i_l)$ fluxul optim de materiale în reţeaua $\mathcal{R}_{i_k i_l}$ şi fie de asemenea $\overline{u}_{ij}^{i_k i_l}$ distribuţiile lui $\Phi(i_k, i_l)$ pe arcele (X_i, X_j) ale acestei reţele. În reţeaua $\mathcal{R}$ să considerăm fluxurile de materiale $\Phi(i_k, i_l)$ între fiecare pereche de noduri principale i_k şi i_l. Fluxurile de materiale prin arcele (X_i, X_j) ale reţelei $\mathcal{R}$ vor fi în acest caz:

$$u_{ij}^{*} = \sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{n} \overline{u}_{ij}^{i_k i_l}, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, m; \quad i \neq j). \tag{7}$$

Prin trecerea fluxurilor $\Phi(i_k, i_l)$ în reţeaua $\mathcal{R}$, între unele noduri principale vor mai rămîne drumuri nesaturate.

Să notăm cu c cantitatea de materiale care saturează aceste drumuri, cu δ_s $(s = 1, 2, \ldots, p)$ acelea dintre ele prin care trec materialele suplimentare şi cu v_s fluxul de materiale suplimentar care trece pe drumul δ_s. Atunci au loc următoarele teoreme:

TEOREMA 3. *Cantitatea maximă $\mathcal{C}$ de materiale care trec prin rețeaua $\mathfrak{R}$ de transport este dată de relația :*

$$\mathcal{C} = \sum_{\substack{k,l=1 \\ k\neq l}}^{n} \Phi(i_k, i_l) + c. \tag{8}$$

TEOREMA 4. *Fluxurile $\overline{u}_{ij}$ de materiale ale arcelor (X_i, X_j) ale rețelei $\mathfrak{R}$ de transport, în cazul cînd prin ea trece cantitatea maximă $\mathcal{C}$ de materiale, sînt date de relațiile :*

$$\overline{u}_{ij} = \sum_{\substack{k,l=1 \\ k\neq l}}^{n} \overline{u}_{ij}^{i_k i_l} + v_{ij} \ (i, j = 1, 2, \ldots, m ; i \neq j), \tag{9}$$

unde :

$$v_{ij} = \begin{cases} \sum\limits_{r\in N} v_r, & \text{dacă } (X_i, X_j) \in \bigcap\limits_{r\in N} \delta_r, \ (N \subset [1,2,\ldots,p]) \\ 0, & \text{dacă } (X_i, X_j) \notin \bigcup\limits_{s=1}^{p} \delta_s. \end{cases}$$

Din cauza că $\overline{u}_{ij}^{i_k i_l}$ nu sînt unice [1], rezultă că nici $\overline{u}_{ij}$ nu sînt unice, adică există mai multe moduri de distribuție a lui $\mathcal{C}$ pe arcele rețelei.

Exemplu. Pentru rețeaua $\mathfrak{R}$ din figura 1, cu nodurile principale *1*, *4* și *7*, pe ale cărei arce s-a notat capacitățile lor, să determinăm rețelele $\mathfrak{R}_{14}$, $\mathfrak{R}_{41}$, $\mathfrak{R}_{17}$, $\mathfrak{R}_{71}$, $\mathfrak{R}_{47}$ și $\mathfrak{R}_{74}$.

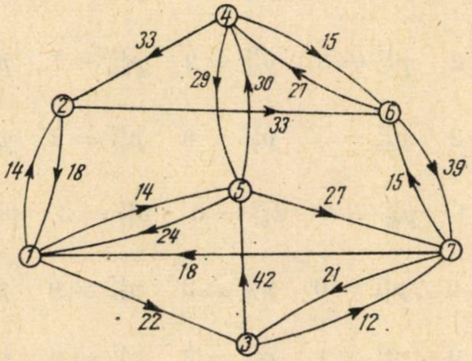


Fig. 1 ($\mathfrak{R}$)

Pentru simplificarea calculelor pentru rețeaua $\mathfrak{R}$, capacitățile arcelor au fost alese astfel : $c_{1j} = 2\nu_{1j}$ și în rest $c_{ij} = 3\,\nu_{ij}$, unde :

$$\nu_{ij} = p_{ij}^{14} + p_{ij}^{41} + p_{ij}^{17} + p_{ij}^{71} + p_{ij}^{47} + p_{ij}^{74}.$$

p_{ij} şi ν_{ij} sînt următorii :

$p_{12}^{14} = 2$ $p_{12}^{41} = 0$ $p_{12}^{17} = 2$ $p_{12}^{71} = 0$ $p_{12}^{47} = 1$ $p_{12}^{74} = 2$ $\nu_{12} = 7$

$p_{21}^{14} = 0$ $p_{21}^{41} = 1$ $p_{21}^{17} = 0$ $p_{21}^{71} = 2$ $p_{21}^{47} = 3$ $p_{21}^{74} = 0$ $\nu_{21} = 6$

$p_{42}^{14} = 0$ $p_{42}^{41} = 3$ $p_{42}^{17} = 2$ $p_{42}^{71} = 2$ $p_{42}^{47} = 4$ $p_{42}^{74} = 0$ $\nu_{42} = 11$

$p_{15}^{14} = 2$ $p_{15}^{41} = 0$ $p_{15}^{17} = 3$ $p_{15}^{71} = 0$ $p_{15}^{47} = 1$ $p_{15}^{74} = 1$ $\nu_{15} = 7$

$p_{51}^{14} = 0$ $p_{51}^{41} = 3$ $p_{51}^{17} = 0$ $p_{51}^{71} = 2$ $p_{51}^{47} = 2$ $p_{51}^{74} = 1$ $\nu_{51} = 8$

$p_{71}^{14} = 0$ $p_{71}^{41} = 3$ $p_{71}^{17} = 0$ $p_{71}^{71} = 1$ $p_{71}^{47} = 0$ $p_{71}^{74} = 2$ $\nu_{71} = 6$

$p_{54}^{14} = 3$ $p_{54}^{41} = 0$ $p_{54}^{17} = 4$ $p_{54}^{71} = 1$ $p_{54}^{47} = 0$ $p_{54}^{74} = 2$ $v_{54} = 10$

$p_{45}^{14} = 0$ $p_{45}^{41} = 2$ $p_{45}^{17} = 1$ $p_{45}^{71} = 1$ $p_{45}^{47} = 0$ $p_{45}^{74} = 0$ $\nu_{45} = 7$

$p_{57}^{14} = 2$ $p_{57}^{41} = 1$ $p_{57}^{17} = 3$ $p_{57}^{71} = 0$ $p_{57}^{47} = 3$ $p_{57}^{74} = 0$ $\nu_{57} = 9$

$p_{13}^{14} = 3$ $p_{13}^{41} = 0$ $p_{13}^{17} = 4$ $p_{13}^{71} = 0$ $p_{13}^{47} = 3$ $p_{13}^{74} = 1$ $v_{13} = 11$

$p_{37}^{14} = 1$ $p_{37}^{41} = 0$ $p_{37}^{17} = 1$ $p_{37}^{71} = 0$ $p_{37}^{47} = 2$ $p_{37}^{74} = 0$ $\nu_{37} = 4$

$p_{73}^{14} = 1$ $p_{73}^{41} = 2$ $p_{73}^{17} = 0$ $p_{73}^{71} = 2$ $p_{73}^{47} = 0$ $p_{73}^{74} = 2$ $\nu_{73} = 7$

$p_{35}^{14} = 3$ $p_{35}^{41} = 2$ $p_{35}^{17} = 3$ $p_{35}^{71} = 2$ $p_{35}^{47} = 1$ $p_{35}^{74} = 3$ $\nu_{35} = 14$

$p_{26}^{14} = 2$ $p_{26}^{41} = 2$ $p_{26}^{17} = 3$ $p_{26}^{71} = 0$ $p_{26}^{47} = 2$ $p_{26}^{74} = 2$ $\nu_{26} = 11$

$p_{67}^{14} = 1$ $p_{67}^{41} = 4$ $p_{67}^{17} = 5$ $p_{67}^{71} = 0$ $p_{67}^{47} = 3$ $p_{67}^{74} = 0$ $\nu_{67} = 13$

$p_{76}^{14} = 2$ $p_{76}^{41} = 0$ $p_{76}^{17} = 0$ $p_{76}^{71} = 2$ $p_{76}^{47} = 0$ $p_{76}^{74} = 1$ $\nu_{76} = 5$

$p_{64}^{14} = 3$ $p_{64}^{41} = 0$ $p_{64}^{17} = 1$ $p_{64}^{71} = 2$ $p_{64}^{47} = 0$ $p_{64}^{74} = 3$ $\nu_{64} = 9$

$p_{46}^{14} = 0$ $p_{46}^{41} = 2$ $p_{46}^{17} = 2$ $p_{46}^{71} = 0$ $p_{46}^{47} = 1$ $p_{46}^{74} = 0$ $\nu_{46} = 5$

Ţinînd seama de relaţiile (5) şi (6) şi făcînd abstracţie de un izomorfism, reţelele $\mathcal{R}_{i_k, i_l}$ corespunzătoare reţelei $\mathcal{R}$ sînt cele din figurile 2—7.

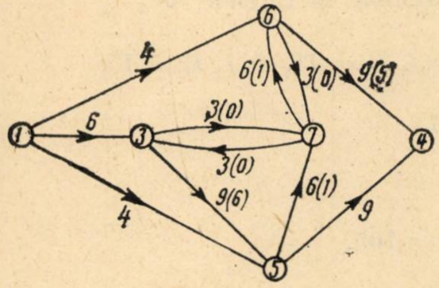

6
4
6(1)
3(0)
9(5)
1
6
3
3(0)
7
4
3(0)
9(6)
6(1)
4
9
5

Fig. 2 ($\mathfrak{R}_{14}$)

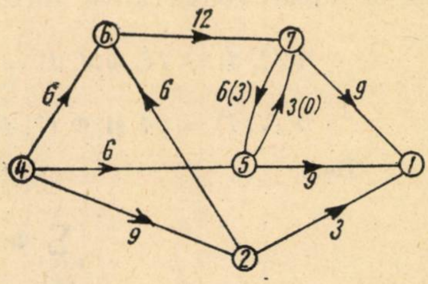

6
12
7
6
6
6(3)
3(0)
9
4
6
5
1
9
9
2
3

Fig. 3 ($\mathfrak{R}_{41}$)

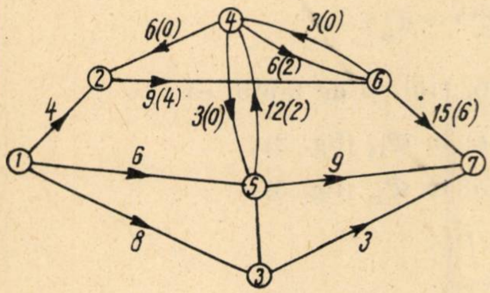

6(0)
4
3(0)
6(2)
2
9(4)
6
4
3(0)
12(2)
15(6)
1
6
9
5
7
8
3
3

Fig. 4 ($\mathfrak{R}_{17}$)

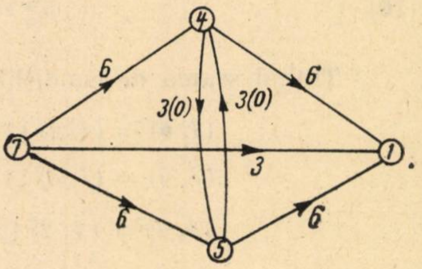

4
6
6
3(0)
3(0)
7
3
1
6
6
5

Fig. 5 ($\mathfrak{R}_{71}$)

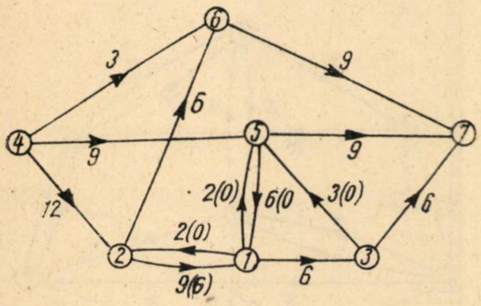

6
3
9
6
4
9
5
9
7
12
2(0)
6(0
3(0)
6
2(0)
2
1
3
9(6)
6

Fig. 6 ($\mathfrak{R}_{47}$)

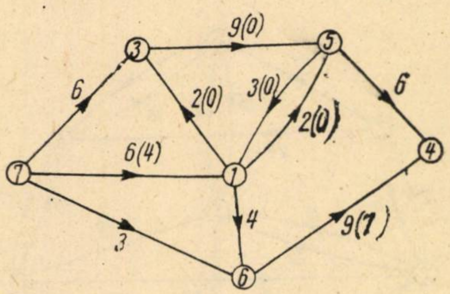

9(0)
3
5
6
2(0)
3(0)
6
2(0)
6(4)
4
7
1
4
3
9(7)
6

Fig. 7. ($\mathfrak{R}_{74}$)

Pe arce s-au notat capacitățile.

Folosind algoritmul lui Ford-Fulkerson [3] se determină, plecîn de la fluxuri conservative, fluxurile maxime în rețelele $\mathcal{R}_{i_k\ i_l}$

$$\Phi(1, 4) = 14,\ \Phi(4, 1) = 21,\ \Phi(1, 7) = 18,\ \Phi(7, 1) = 15,$$

$$\Phi(4, 7) = 24 \text{ și } \Phi(7, 4) = 13.$$

Deci

$$\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{3} \Phi(i_k, i_l) = 105.$$

Dacă $\overline{u}_{ij}^{i_k i_l} \neq c_{ij}^{i_k i_l}$, atunci pe arcele figurilor 2 — 7, în paranteze s-au notat aceste fluxuri $\overline{u}_{ij}^{i_k i_l}$.

Din condițiile (6) rezultă că:

$$\overline{u}_{ik}^{i_k i_l} = \overline{u}_{ij}^{i_k i_l} = \overline{u}_{jk}^{i_k i_l}. \tag{10}$$

Ținînd seama de condițiile (9), (10), și de faptul că:

$$(1, 6) = (1, 2) \cup (2, 6) \text{ în } \mathcal{R}_{14} \text{ (fig. 2)};$$

$$(7, 5) = (7, 3) \cup (3, 5) \text{ în } \mathcal{R}_{41} \text{ (fig. 3)};$$

$$(4, 1) = (4, 2) \cup (2, 1),$$

$$(7, 4) = (7, 6) \cup (6, 4);$$

$$(7, 5) = (7, 3) \cup (3, 5) \text{ în } \mathcal{R}_{71} \text{ (fig. 5)};$$

$$(1, 6) = (1, 2) \cup (2, 6) \text{ în } \mathcal{R}_{74} \text{ (fig. 7)},$$

rezultă fluxurile u_{ij}^{*} $(i, j = 1, 2, \ldots, m;\ i \neq j)$ (fig. 8).

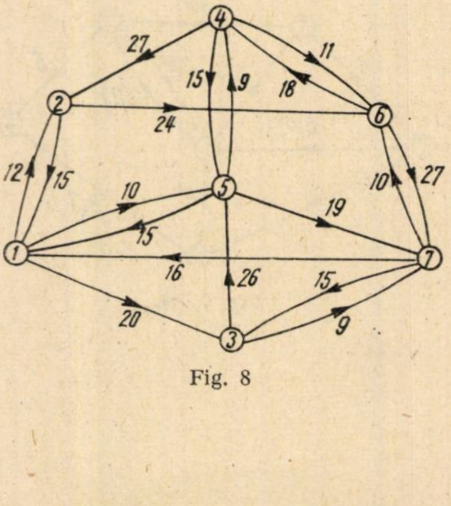

4
27
11
15
9
18
2
24
6
12
15
10
10
27
5
19
15
1
7
16
26
15
20
3
9

Fig. 8

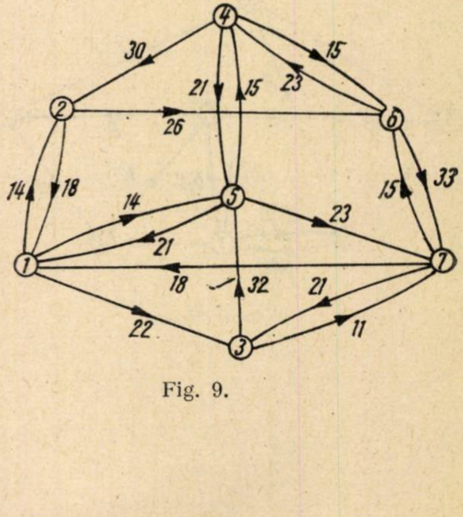

4
30
15
21
15
23
2
26
6
14
18
14
5
15
33
23
21
1
7
18
32
21
22
3
11

Fig. 9.

Adăugînd în figura 8 pe drumurile (*1,3,7*), (*1,2,6,7*), (*7,1*) cîte două unități, pe drumul (*4,2,1*) trei unități, pe drumurile (*1,5,7*), (*4,6,7*) cîte patru unități, pe drumul (*7,6,4*) cinci unități și pe drumurile (*4, 5, 1*), (*7,3,5,4*) cîte șase unități în rețeaua $\mathcal{R}$ (fig. 9) nu mai există drumuri nesaturate. Pe arce s-au notat fluxurile $\overline{u}_{ij}$.

Deci $c = \sum_{s=1}^{p} v_s = 34$, iar $\mathcal{C} = 105 + 34 = 139$.

Dacă capacitățile $c_{ij}^{i_k i_l}$, determinate prin relațiile (5), nu sînt întregi, atunci putem să le înmulțim pe toate cu numere convenabile, astfel încît ele să devină numere întregi.

§ 4

În nodurile principale fluxurile de materiale nu sînt conservative căci, în general, cantitatea de materiale care intră în rețea printr-un nod principal nu este egală cu cantitatea de materiale care iese din rețea prin același nod principal.

Să considerăm rețeaua cu două noduri principale $\overline{\mathcal{R}}_{i_k i_l} = \mathcal{R}_{i_k i_l} \cup \mathcal{R}_{i_l i_k}$ și să notăm cu $\mathcal{C}(\mathcal{R}_{i_k i_l})$ cantitatea de materiale care trec prin această rețea cînd se află în regim optim de transport. Deoarece din (8) obținem :

$$\mathcal{C} > \Phi(i_k, i_l) + \Phi(i_l, i_k) = \mathcal{C}(\overline{\mathcal{R}}_{i_k i_l}),$$

înseamnă că $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}(\overline{\mathcal{R}}_{i_k i_l})$ adică problema din §1 nu se reduce la problema din [1], nici în cazul teoremei 2 cînd $\mathcal{R}$ este izomorfă cu oricare din rețelele $\overline{\mathcal{R}}_{i_k i_l}$ și cînd acest fapt pare posibil.

Primită la redacție la 5 iulie 1968

Institutul de construcții București

EXTENSION D'UN PROBLÈME DE MAXIMUM POUR DES RÉSEAUX QUELCONQUES DE TRANSPORT

(RÉSUMÉ)

Il a été montré en [1] que la détermination maximum de matériaux qui passent par un réseau de transport, entre deux nœuds principaux, est fondée sur la détermination des flux optimum de matériaux. Le travail présent traite de l'extension du problème pour les réseaux de transport à n nœuds principaux et détermine dans ce cas les flux de matériaux qui passent par les arcs du réseau.

Le problème est résolu pour un cas particulier. L'A. fait aussi quelques considérations théoriques sur les réseaux.

BIBLIOGRAFIE

1. Şt. Mititelu, *Determinarea cantității maxime de materiale care trec printr-o rețea d transport și distribuția ei pe arce* St. cerc. mat., **21**, *3* (1969).
2. Şt. Mititelu, *Asupra sintezei multipolilor (p—q) (cu contacte fără repetiție.* St. cerc. mat. **18**, *6* (1966).
3. A. Kaufmann, *Metode și modele ale cercetării operaționale.* vol. II., Ed. științifică, București 1967.
4. B. A. Trahtenbrot, *Asupra teoriei schemelor cu contacte fără repetiții. Probleme de cibernetică.* Acad. R.P.R., Bibl. anal., rom. sov., Seria tehnică, *69—70,* 129—217, București, 1959.

EVALUAREA ERORII ÎN REZOLVAREA APROXIMATIVĂ A UNOR PROBLEME LA LIMITĂ PENTRU ECUAŢIA DE TIP PARABOLIC

DE

F. M. PASCAL

În lucrare se aplică metoda dreptelor la rezolvarea aproximativă a ecuaţiei cu derivate parţiale (1), pentru trei tipuri de probleme la limită date de condiţiile (2), (3), şi (4). La construirea sistemelor de ecuaţii diferenţiale care aproximează ecuaţia cu derivate parţiale se folosesc formule de derivare numerică cunoscute, precum şi formule de derivare numerică stabilite în § 3 al lucrării, avînd exactitatea de ordinul h^2. Mai departe, se evaluează eroarea soluţiei aproximative pentru fiecare din cele trei probleme, constatîndu-se că ea este tot de ordinul lui h^2.

În lucrarea [1] s-a aplicat metoda dreptelor pentru rezolvarea unor probleme la limită referitoare la ecuaţia

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, y)$$

dîndu-se şi delimitarea erorii. Acum vom expune metoda dreptelor pentru ecuaţia mai generală

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} - c(x, t)\, u + f(x, t) \tag{1}$$

cu următoarele condiţii la limită şi iniţiale

$$\begin{array}{llllll}
 & u(x, 0) = g(x) & & u(x, 0) = g(x) & & u(x, 0) = g(x) \\
(2) & u(0, t) + \psi_1(t) & (3) & \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi_1(t) & (4) & \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi_1(t) \\
 & u(l, t) = \psi_2(t) & & u(l, t) = \psi_2(t) & & \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \Psi_2(t),
\end{array}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 7, P. 1083–1098 BUCUREŞTI, 1969

arătînd pentru fiecare din aceste probleme care este ordinul de mărime al erorii.

Vom presupune că funcţiile $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c\ (x,t)$ şi $f(x,t)$ sînt definite în domeniul $D: 0 \leq x \leq l,\ 0 \leq t \leq T$, $g\ (x)$ în intervalul $[0, l]$, $\psi_1\ (t)$ şi $\psi_2(t)$ în intervalul $[0, T]$. Totodată vom presupune că toate aceste funcţii sînt suficient de netede pentru a asigura existenţa şi unicitatea soluţiilor problemelor expuse mai sus, precum şi existenţa derivatelor parţiale ale acestor soluţii pînă la ordinele care intervin în consideraţiile noastre. Pe lîngă acestea vom considera că $a(x,t) \geqq a > 0$ în domeniul D.

§ 1. CONSTRUIREA SISTEMULUI DE ECUAŢII DIFERENŢIALE ÎN PROBLEMA (1), (2)

Pentru aplicarea metodei dreptelor ecuaţiei (1), vom împărţi intervalul $[0,l]$ în $n+1$ părţi egale de lungime $h = \dfrac{l}{n+1}$ prin punctele $x_1 x_2, \ldots, x_n$ şi vom face următoarele notaţii :

$$u_i\,(t) = u\ (x_i,\, t),\quad a_i\,(t) = a\,(x_i,\, t),\quad b_i\,(t) = b\ (x_i,\, t)$$

$$c_i\,(t) = c\,(x_i,\, t),\quad f_i\,(t) = f\,(x_i,\, t),\quad (i = 0,\, 1, \ldots\, n+1).$$

Înlocuind în ecuaţia (1) derivatele în raport cu x prin diferenţe divizate conform formulelor

$$(5)\qquad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_i} = \frac{u_{i+1}\,(t) - 2u_i\,(t) + u_{i-1}\,(t)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{x=\xi_i}$$

$$x_{i-1} < \xi_i < x_{i+1}$$

şi

$$(6)\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_i} = \frac{u_{i+1}\,(t) - u_{i-1}\,(t)}{2h} - \frac{h^2}{6}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{x=\eta_i}$$

$$x_{i-1} < \eta_i < x_{i+1}$$

$(i = 1,2,\ldots,n)$, se obţine sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$(7)\qquad u_i' = \frac{a_i}{h^2}\left(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}\right) + \frac{b_i}{2h}\left(u_{i+1} - u_{i-1}\right) - c_i u_i + f_i + R_i$$

$(i = 1,2,\ldots,n)$, unde, conform condiţiilor (2), $u_0\,(t) = \psi_1(t)$, $u_{n+1}\,(t) = \psi_2\,(t)$, şi a cărui soluţie trebuie să satisfacă condiţiile iniţiale

$$(8)\qquad u_i\,(0) = g(x_i)\,,\qquad (i = 1,\, 2, \ldots,\, n).$$

Din formulele (5) şi (6) rezultă că

$$R_i = -\frac{h^2}{6}\left[\frac{a_i}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\bigg|_{x=\xi_i} + b_i\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\bigg|_{x=\eta_i}\right]. \tag{9}$$

Dacă în sistemul (7) se neglijează resturile $R_i(t)$, se obţine sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\tilde{u}_i' = \frac{a_i}{h^2}\left(\tilde{u}_{i+1} - 2\tilde{u}_i + \tilde{u}_{i-1}\right) + \frac{b_i}{2h}\left(\tilde{u}_{i+1} - \tilde{u}_{i-1}\right) - c_i\tilde{u}_i + f_i \tag{10}$$

cu condiţiile iniţiale

$$\tilde{u}_i(0) = g(x_i) \tag{11}$$

$$(i = 1,2,\ldots, n).$$

Soluţia acestui sistem aproximează pe dreptele de ecuaţii $x = x_i$ $(i = 1,2,\ldots, n)$ soluţia ecuaţiei (1) cu condiţiile (2).

§ 2. EVALUAREA ERORII ÎN PROBLEMA (1), (2)

Vom nota prin $v_i(t)$ eroarea cu care soluţia sistemului (10), cu condiţiile (11), aproximează soluţia ecuaţiei (1) cu condiţiile (2), adică $v_i(t) = u_i(t) - \tilde{u}_i(t)$. Scăzînd din ecuaţiile sistemului (7) ecuaţiile corespunzătoare ale sistemului (10), rezultă că $\{v_1, v_2, \ldots, v_\eta\}$ este soluţia sistemului

$$v_i' = \frac{a_i}{h^2}(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}) + \frac{b_i}{2h}(v_{i+1} - v_{i-1}) - c_i v_i + R_i \tag{12}$$

cu condiţiile iniţiale

$$v_i(0) = 0, \qquad (i = 1, 2,\ldots, n) \tag{13}$$

şi $v_0(t) = 0$, $v_{n+1}(t) = 0$.

Pentru evaluarea erorii $v_i(t)$ vom considera mai întîi cazul cînd $c(x,t) \geqq c > 0$ în domeniul D.

Deoarece coeficienţii sistemului (12) sînt funcţii continue de t pe intervalul $[0, T]$, rezultă că soluţia sa $\{v_1(t), v_2(t),\ldots, v_n(t)\}$ care satisface la condiţiile (13) este formată din funcţii continue, mărginite şi care îşi ating valorile extreme pe acest interval. Să notăm cu

$$V_i = \max_{[0,\,T]} v_i(t), \quad v_i = \min_{[0,\,T]} v_i(t), \qquad (i = 1, 2,\ldots, n)$$

(14) şi

$$V = \max\{V_1, V_2,\ldots, V_n\}, \; v = \min \quad \{v_1, v_2, \ldots, v_n\};$$

atunci, deoarece funcţiile $v_i(t)$ îşi ating valorile extreme în intervalul $[0, T]$, rezultă că există un punct $t^* \in [0,T]$ în care cel puţin una din funcţiile $v_i(t)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ îşi atinge maximul egal cu V. Fie această funcţie $v_j(t)$, adică

$$V = V_j = \max_{[0,\, T]} v_j(t^*).$$

Dacă $t^*=0$, rezultă că $V = 0$, dacă $t^* > 0$, atunci, deoarece $v_j(t^*) = \max\limits_{[0,\, T]} v_j(t)$, rezultă că $v_j'(t^*) \geqq 0$. În ultimul caz, considerînd din sistemul (12) ecuaţia de ordinul j în punctul t^*, rezultă că în acest punct avem inegalitatea :

$$-\frac{a_j}{h^2}\left[\left(v_j - v_{j+1}\right)\left(1+\frac{b_j}{2a_j}h\right) + \left(v_j - v_{j-1}\right)\left(1-\frac{b_j}{2a_j}h\right)\right] - c_j v_j + R_j \geqq 0.$$

Conform definiţiei lui $v_j(t^*)$, diferenţele $v_j(t^*) - v_{j+1}(t^*)$ şi $v_j(t^*) - v_{j-1}(t^*)$ sînt nenegative şi prin urmare din inegalitatea precedentă reiese că pentru $h \leq \frac{2a_j}{|b_j|}$, avem

$$-c_j(t^*)\, v_j(t^*) \geqq -R_j(t^*).$$

Deoarece am presupus că $c(x, t) \geqq c > 0$ în D, avem şi $c_j(t^*) \geqq \geqq c > 0$ şi deci

$$v_j(t^*) \leq \frac{R_j(t^*)}{c_j(t^*)}.$$

Incluzînd acum şi cazul cînd $t^* = 0$, rezultă că

$$\max_{[0,\, T]} v_i(t) \leq \max\left\{0, \max_{\substack{t\in[0,T]\\ k\in(1,2,\ldots,n)}} \frac{R_k(t)}{c}\right\}, \qquad (i = 1, 2,\ldots, n).$$

Printr-un raţionament analog se deduce că

$$\min_{[0,T]} v_i(t) \geqq \min\left\{0, \min_{\substack{t\in[0,T]\\ k\in(1,2,\ldots,n)}} \frac{R_k(t)}{c}\right\}, \qquad (i = 1, 2,\ldots, n)$$

de unde rezultă evaluarea erorii

$$|v_i(t)| \leq \max_{\substack{[0,T]\\ k\in(1,2,\ldots,n)}} \frac{|R_k(t)|}{c}, \qquad (i = 1, 2,\ldots, n) \tag{15}$$

Presupunînd că ecuația cu derivate parțiale (1) cu condițiile (2) re o soluție unică continuă, împreună cu primele trei derivate în raport u x, în domeniul D și că derivata de ordinul patru în raport cu x este nărginită — în domeniul D, atunci, ținînd seama de valoarea lui $R_i(t)$ lată de (9), avem

16) $$|v_i(t)| \leq \frac{h^2}{6} \frac{M_4}{c},$$

ınde

17) $$M_4 = \max_{D} \left| \frac{a\,(x, t)}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + b\,(x, t) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|.$$

Să considerăm acum cazul cînd $c\,(x, t)$ nu este pozitiv în domeniul D. În acest caz, făcînd în sistemul (12) schimbarea de funcții

(18) $$v_i(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\, W_i(t), \qquad (i = 1,2,\ldots, n)$$

obținem pentru $W_i(t)$ sistemul de ecuații diferențiale

(19) $$w_i' = \frac{a_i}{h^2} (w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}) + \frac{b_i}{2h} (w_{i+1} - w_{i-1}) - (\lambda + c_i) w_i + R_i\, e^{-\lambda t}$$
$$(i = 1,\ 2, \ldots, n)$$

cu condițiile inițiale $w_i\,(0) = 0$, $(i = 1,2,\ldots,n)$.

Alegînd pe λ astfel încît $c_i + \lambda \geqq \gamma > 0$, sistemul de ecuații diferențiale (19) are aceeași particularitate ca și sistemul (12) în cazul considerat mai sus și anume cînd $c(x,t) \geqq c > 0$. Prin urmare folosind același raționament, se deduce pentru evaluarea lui $w_i\,(t)$ o formulă analoagă cu (15), dacă $h < \frac{2a_j}{|b_j|}$, $j = 1,2,\ldots,n$, și anume:

(15′) $$|W_i(t)| \leqq \max_{\substack{x \in [0,\, l] \\ t \in [0,\, T] \\ k \in (1,2,\ldots,n)}} \frac{|R_k(t)|\, \mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda + c(x,\ t)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

iar din relația (18) avem pentru $v_i\,(t)$ delimitarea

(20) $$|v_i(t)| \leqq \max_{\substack{x \in [0,\, l] \\ t \in [0,\, T] \\ k \in (1,2,\ldots,n)}} \frac{|R_k(t)|\, \mathrm{e}^{\lambda(T-t)}}{\lambda + c(x,\ t)}$$

$(i = 1,2,\ldots,n)$ unde $\lambda + c\,(x, t) > 0$.

Ţinînd seama de expresia lui R_i dată de formula (9) şi de notaţi făcută în (17), inegalitatea (20) devine

$$|v_i(t)| \leqq \frac{h^2}{6}\,\frac{e^{\lambda T}}{\lambda-c_0}\,M_4, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{21}$$

unde s-a notat $-c_0 = \min\limits_{D} c\,(x, t)$. Pentru a obţine o evaluare cît ma bună a erorilor $v_i\,(t)$, vom alege pe λ astfel încît pe lîngă condiţia $\lambda - c_0 > 0$ să avem şi o valoare minimă pentru $\dfrac{e^{\lambda T}}{\lambda - c_0}$. Această valoare minimă fiind realizată pentru $\lambda = \dfrac{1}{T} + c_0$, obţinem în locul inegalităţii (21) delimitarea

$$|v_i(t)| \leqq \frac{h^2}{6}\,T\,e^{1+c_0T}\,M_4, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{22}$$

§ 3. O FORMULĂ DE DERIVARE NUMERICĂ

Deoarece în cazul problemei (1), (3) şi (1), (4) condiţiile la limită nu dau posibilitatea să cunoaştem funcţiile $u_0\,(t)$ sau $u_0\,(t)$ şi $u_n\;(t)$, pentru construirea sistemului de ecuaţii diferenţiale din metoda dreptelor nu putem folosi în punctele x_1 şi, respectiv x_1 şi x_n, formulele (5) şi (6). Din aceste motive în punctele x_1 şi x_n vom exprima derivata $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ cu ajutorul formulelor date în lucrarea [1] şi anume :

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_1} = \frac{2}{11h^2}\,(-2u_1 + u_2 + u_3) - \frac{6}{11h}\,\psi_1(t) + R_1^*, \tag{23}$$

unde

$$R_1^* = -\frac{29}{132}\,h^2 \left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{x=\xi_1}, \quad 0 < \xi_1 < 3h \tag{24}$$

şi

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_n} = \frac{2}{11h^2}\,(-2u_n + u_{n-1} + u_{n-2}) + \frac{6}{11h}\,\psi_2(t) + R_n^*, \tag{25}$$

unde

$$R_n^* = -\frac{29}{132}\,h^2 \left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{x=\xi_n}, \quad l - 3h < \xi_n < l. \tag{26}$$

Pentru exprimarea derivatei de ordinul întîi $\frac{\partial u}{\partial x}$ în punctele x_1 şi x_n prin datele din condiţiile la limită, vom construi în cele ce urmează o formulă de derivare numerică adecvată.

Fie $f(x)$ o funcţie definită pe intervalul $[x_0,x_2]$ şi avînd derivate continue pînă la ordinul trei inclusiv pe acest interval. În cele ce urmează vom deduce o formulă de derivare numerică de forma

$$A_0 f'(x_0) + A_1 f'(x_1) + B_1 f(x_1) + B_2 f(x_2) = R, \tag{27}$$

unde $x_1 = \frac{x_2 + x_0}{2}$.

Pentru determinarea coeficienţilor şi restului din această formulă, folosim metoda din lucrarea [2]. Ataşăm intervalului $[x_0, x_2]$ funcţia $\varphi(x)$, soluţie a ecuaţiei $\varphi'''(x) = 0$, şi notăm cu $\varphi_1(x)$ funcţia $\varphi(x)$ pe intervalul $[x_0, x_1]$ şi cu $\varphi_2(x)$ pe intervalul $[x_1,x_2]$.

Dacă se aplică metoda integrării prin părţi generalizată integralelor

$$\int_{x_0}^{x_2} \varphi'''(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} \varphi_1'''(x) f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2(x) f(x)\,\mathrm{d}x$$

şi se pun asupra funcţiilor $\varphi_1(x)$ şi $\varphi_2(x)$ condiţiile

$$\varphi_1(x_0) = 0, \quad \varphi_1''(x_0) = 0, \quad \varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_1), \quad \varphi_2(x_2) = 0, \quad \varphi_2'(x_2) = 0, \tag{28}$$

se obţine formula

$$\begin{aligned}\varphi_1'(x_0) f'(x_0) + [\varphi_1''(x_1) - \varphi_2''(x_1)] f(x_1) + [\varphi_2'(x_1) - \varphi_1'(x_1)] f'(x_1) +\\ + \varphi_2''(x_2) f(x_2) = \int_{x_0}^{x_2} \varphi(x) f'''(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{29}$$

Deoarece funcţiile $\varphi_1(x)$ şi $\varphi_2(x)$ care satisfac la condiţiile puse mai sus sînt

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \frac{h}{2}(x - x_0), \text{ unde } h = x_1 - x_0\\ \varphi_2(x) &= \frac{1}{2}(x - x_2)^2\end{aligned} \tag{30}$$

obţinem din (29)

$$f'(x_1) = \frac{1}{3} f'(x_0) + \frac{2}{3}\,\frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} + R, \tag{31}$$

unde

$$R = -\frac{2}{3}\int_{x_0}^{x_2} \varphi(x) f'''(x)\, \mathrm{d}x. \tag{32}$$

Avînd în vedere faptul că $\varphi(x)$ este pozitivă pe intervalul $[x_0, x_2]$, avem aplicînd formula mediei integralei din (32), următoarea expresie a restulu

$$R = -\frac{5}{18} h^2 f'''(\xi), \qquad x_0 < \xi < x_2$$

şi delimitarea

$$|R| < \frac{5}{18} h^2 M_3 , \tag{33}$$

unde

$$M_3 = \max_{[x_0, x_2]} |f'''(x)|.$$

Înlocuind în (31) pe h cu $-h$ şi schimbînd notaţiile, avem

$$f'(x_1) = \frac{1}{3} f'(x_2) + \frac{2}{3}\, \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} + R. \tag{34}$$

Folosind notaţiile din §1 şi condiţiile la limită (3) şi (4), se deduce din (31) şi (34) următoarele formule pentru $\frac{\partial u}{\partial x}$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1} = \frac{2}{3}\, \frac{u_2 - u_1}{h} + \frac{1}{3}\psi_1(t) + R_1^{**} \tag{35}$$

şi

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_n} = \frac{2}{3}\, \frac{u_n - u_{n-1}}{h} + \frac{1}{3}\psi_2(t) + R_n^{**} , \tag{36}$$

unde

$$R_1^{**} = -\frac{5}{18} h^2 \left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{x=\eta_1} , \quad 0 < \eta_1 < 2h \tag{37}$$

şi

$$R_n^{**} = -\frac{5}{18} h^2 \left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{x=\eta_2} , \quad l - 2h < \eta_2 < l . \tag{38}$$

§ 4. CONSTRUIREA SISTEMULUI DE ECUAŢII DIFERENŢIALE ŞI EVALUAREA ERORII ÎN PROBLEMA (1), (3)

În aplicarea metodei dreptelor la rezolvarea problemei (1), (3) vom folosi pentru exprimarea derivatelor în punctele $x_2, x_3, \ldots, x_n$ formulele (5) şi (6) iar în punctul x_1 formulele (23) şi (35). Neglijînd resturile din aceste formule, obţinem sistemul de ecuaţii diferenţiale al valorilor aproximative pe dreptele de ecuaţii $x = x_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1' &= \frac{2a_1}{11h^2}(-2\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_3) + \frac{2b_1}{3h}(\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1) - c_1\tilde{u}_1 + \left(\frac{b_1}{3} - \frac{6a_1}{11h}\right)\psi_1 + f_1 \\ \tilde{u}_i' &= \frac{a_i}{h^2}(\tilde{u}_{i+1} - 2\tilde{u}_i + \tilde{u}_{i-1}) + \frac{b_i}{2h}(\tilde{u}_{i+1} - \tilde{u}_{i-1}) - c_i\tilde{u}_i + f_i \end{aligned} \tag{39}$$

$(i = 2,3,\ldots,n)$ şi $u_{n+1} = \psi_2(t)$, cu condiţiile iniţiale

$$\tilde{u}_i(0) = g(x_i), \qquad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{40}$$

Ne propunem acum să evaluăm eroarea cu care soluţia sistemului (39) cu condiţiile (40) aproximează pe dreptele de ecuaţii $x = x_i$ soluţia problemei (1), (3).

Notînd $v_i(t) = u_i(t) - \tilde{u}_i(t)$, observăm că funcţiile $v_i(t)$ satisfac sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{2a_1}{11h^2}(-2v_1 + v_2 + v_3) + \frac{2b_1}{3h}(v_2 - v_1) - c_1v_1 + R_1 \\ v_i' &= \frac{a_i}{h^2}(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}) + \frac{b_i}{2h}(v_{i+1} - v_{i-1}) - c_iv_i + R_i \end{aligned} \tag{41}$$

$(i = 2,3,\ldots,n)$ şi $v_{i+1} = 0$.

cu condiţiile iniţiale

$$v_i(0) = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{42}$$

În cele ce urmează vom presupune că ecuaţia cu derivate parţiale (1) cu condiţiile la limită şi iniţială (3) are o soluţie unică u, continuă împreună cu primele trei derivate în raport cu x în domeniul D şi că derivata de ordinul patru în raport cu x, există şi este mărginită în D.

Pentru evaluarea erorilor $v_i(t)$ vom nota ca în § 2 cu

$$V_i = \max_{[0,T]} v_i(t), \quad v_i = \min_{[0,T]} v_i(t) \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

şi

$$V = \max\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}, \; v = \min\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

Dacă $V = V_j$, unde $j \neq 1$ şi $v = v_k$, unde $k \neq 1$, atunci consideraţiile făcute asupra soluţiei sistemului (2) rămîn valabile şi pentru soluţia sistemului (41) şi deci eroarea în problema (1) este evaluată conform formulelor (16) pentru $c(x, t) \geqq c > 0$ şi (22) pentru $c(x, t)$ oarecare.

Rămîne de cercetat cazul cînd

$$V = V_1 = \max_{[0, T]} v_1(t) \text{ şi } v = v_1 = \min_{[0, T]} v_1(t).$$

Presupunînd că maximul lui $v_1(t)$ este atins în punctul t^*, atunci

$$V = v_1(t^*).$$

Referitor la punctul t^* facem următoarea precizare: dacă $t^* = 0$, atunci $V = 0$, iar dacă $t^* > 0$, deoarece $v_1(t^*) = \max\limits_{[0, T]} v_1(t)$, atunci $v_1'(t^*) \geqq 0$. În acest ultim caz, din prima ecuaţie a sistemului (41) deducem că în punctul $t = t^*$ are loc inegalitatea:

$$-\frac{2a_1}{11h^2}\left[(v_1 - v_2)\left(1 + \frac{11b_1}{3a_1}h\right) + (v_1 - v_3)\right] - c_1 v_1(t^*) + R_1 \geqq 0.$$

Deoarece $v_1(t^*) - v_2(t^*) \geqq 0$, $v_1(t^*) - v_3(t^*) \geqq 0$, pentru $h < \dfrac{3a_1}{11|b_1|}$ avem $-c_1 v_1(t^*) \geqq -R_1$ sau $v_1(t^*) \leqq \dfrac{R_1(t^*)}{c_1(t^*)}$ prin urmare

$$V \leqq \max_{[0, T]}\left\{0, \frac{R_1(t)}{c}\right\}.$$

În mod analog

$$v \geqq \min_{[0, T]}\left\{0, \frac{R_1(t)}{c}\right\}$$

sau

$$|v_i(t)| \leqq \max_{[0, T]} \frac{|R_1(t)|}{c}, \quad (i = 1,2, \ldots, n). \tag{43}$$

Dacă $c(x, t)$ nu este pozitivă în domeniul D, făcînd schimbarea de funcţii $v_i(t) = e^{\lambda t} w_i(t)$, $(i = 1,2, \ldots, n)$.

Obţinem pentru $w_i(t)$ un sistem de ecuaţii diferenţiale de forma lui (41), unde în loc de c_i vom avea $c_i + \lambda$ $(i = 1,2, \ldots, n)$. Luînd pentru λ o astfel de valoare încît $c_i + \lambda \geqq \gamma > 0$, raţionamentul făcut mai sus pentru delimitarea lui $v_i(t)$ din (43) se poate repeta pentru $w_i(t)$ obţinîndu-se delimitarea

$$w_i(t) \leqq \max_{[0,T]} \frac{R_1(t)\, e^{-\lambda t}}{c_1(t)+\lambda}.$$

Ținînd seama de relația dintre w_i și v_i, avem pentru v_i, $i=1,2,\ldots,n$, evaluarea

(44) $$|v_i(t)| \leqq \max_{[0,T]} T\, e^{1+c_0 T}\, |R_1|,$$

unde $-c_0 = \min_{D} c(x,t)$.

Ținînd seama de expresiile (24) și (37) ale resturilor care-l compun pe R_1 din prima ecuație a sistemului (41), vom avea pentru $v_i(t)$ următoarele delimitări

(45) $$|v_i(t)| \leqq \frac{h^2}{6}\,\frac{M_4^*}{c}$$

pentru cazul cînd $c(x,t) \geqq c > 0$, și

(46) $$|v_i(t)| \leqq \frac{h^2}{6}\, T\, e^{1+c_0 T} M_4^*$$

cînd $c(x,t)$ nu este pozitivă în D.

În formulele de mai sus, M_4^* este dat prin formula

(47) $$M_4^* = \max_{\substack{0<x<3h\\ 0\leqslant t\leqslant T}} \left| \frac{87}{62}\, a_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{5}{3}\, b_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|.$$

Din cele arătate mai sus rezultă că erorile $v_i(t)$ sînt delimitate conform formulelor

$$|v_i(t)| \leqq \frac{h^2}{6}\,\frac{M}{c}$$

cînd $c(x,t) \geqq c > 0$, și

$$|v_i(t) \leqq \frac{h^2}{6}\, T\, e^{1+c_0 T} M$$

cînd $c(x,t) \geqq -c_0$, $c_0 > 0$, unde

$$M = \max\{M_4, M_4^*\}.$$

Revenind la sistemul (39) observăm că acesta ne furnizează valori aproximative ale soluției problemei considerate numai pe dreptele interioare domeniului D, adică pentru $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$. Deoarece pe dreapta $x = x_{n+1} = l$ funcția $u(x,t)$ se cunoaște din condițiile la limită (3), rămîne de determinat o valoare aproximativă pentru funcția $u(x,t)$ pe dreapta

$x = 0$. Dat fiind faptul că pentru $x = 0$ se cunoaşte derivata $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ia pentru $x = x_1$ sistemul (39) ne dă valoarea aproximativă $\tilde{u}_1(t)$, vom ex prima pe $u(0, t)$ prin formula

$$u(0, t) = u(h, t) - \frac{h}{1!}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} - \frac{h^2}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=\xi}, \quad 0 < \xi < h.$$

Neglijînd în această formulă termenul cu derivata a doua, obţinem pentru $u(0,t)$ valoarea aproximativă

$$\tilde{u}_0(t) = \tilde{u}_1(t) - h\psi_1(t). \tag{48}$$

Notînd cu $v_0(t)$ eroarea $u((0,t) - \tilde{u}_0(t)$, avem delimitarea

$$|v_0(t)| \leq \frac{h^2}{2}\left[M_2 + \frac{M_4^*}{3c}\right] \tag{49}$$

pentru cazul cînd $c(x, t) \geqq c > 0$ în D, şi

$$|v_0(t)| \leq \frac{h^2}{2}\left\{M_2 + \frac{1}{3}\, T e^{1+C_0 T} M_4^*\right\} \tag{50}$$

cînd $c(x,t) \geqq - C_0$, $c_0 > 0$, în D.

În formulele (49) şi (50) M_4^* are semnificaţia dată în formula (47) iar

$$M_2 \geqq \max_{\substack{0<x<h \\ 0\leqq t\leqq T}} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|.$$

§ 5. CONSTRUIREA SISTEMULUI DE ECUAŢII DIFERENŢIALE ŞI EVALUAREA ERORII PENTRU PROBLEMA (1), (4)

Din condiţiile la limită (4) fiind cunoscută derivata $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ la capetele intervalului $[0,l]$ pentru construirea sistemului de ecuaţii diferenţiale din metoda dreptelor, vom exprima derivata $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ în punctul x_1 şi în punctul x_n cu ajutorul formulelor (23) şi (25), iar derivata $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ în x_1 şi x_n prin formulele (35) şi (36).

Pentru punctele interioare $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ folosim formulele (5) şi (6). Neglijînd resturile din aceste formule obţinem sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\widetilde{u}_1' = \frac{2a_1}{11h^2}(-2\widetilde{u}_1 + \widetilde{u}_2 + \widetilde{u}_3) + \frac{2b_1}{3h}(\widetilde{u}_2 - \widetilde{u}_1) - c_1\widetilde{u}_1 + \left(\frac{b_1}{3} - \frac{6a_1}{11h}\right)\psi_1 + f_1$$

$$\text{(51)} \qquad \widetilde{u}_i' = \frac{a_i}{h^2}(\widetilde{u}_{i+1} - 2\widetilde{u}_i + \widetilde{u}_{i-1}) + \frac{b_i}{2h}(\widetilde{u}_{i+1} - \widetilde{u}_{i-1}) - c_i\widetilde{u}_i + f_i,$$

$$(i = 2, 3, \ldots, n-1)$$

$$\widetilde{u}_n' = \frac{2a_n}{11h^2}(-2\widetilde{u}_n + \widetilde{u}_{n-1} + \widetilde{u}_{n-2}) + \frac{2b_n}{3h}(\widetilde{u}_n - \widetilde{u}_{n-1}) - c_n\widetilde{u}_n +$$

$$+ \left(\frac{6a_n}{11h} + \frac{b_n}{3}\right)\psi_2 + f_n$$

cu condiţiile iniţiale

$$\text{(52)} \qquad \widetilde{u}_1(0) = g(x_i), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Soluţia sistemului (51) cu condiţiile (52) furnizează valori aproximative ale soluţiei problemei (1), (4) pe dreptele de ecuaţii $x = x_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Pentru a evalua eroarea acestor valori aproximative vom nota cu $v_i(t) = u_i(t) - \widetilde{u}_i(t)$ şi vom considera sistemul de ecuaţii diferenţiale la care satisfac funcţiile $v_i(t)$ şi anume

$$v_1' = \frac{2a_1}{11h^2}(-2v_1 + v_2 + v_3) + \frac{2b_1}{3h}(v_2 - v_1) - c_1v_1 + R_1$$

$$v_i' = \frac{a_i}{h^2}(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}) + \frac{b_i}{2h}(v_{i+1} - v_{i-1}) - c_iv_i + R_i,$$

$$\text{(53)} \qquad (i = 2, 3, \ldots, n-1)$$

$$v_n' = \frac{2a_n}{11h^2}(-2v_n + v_{n-1} + v_{n-2}) + \frac{2b_n}{3h}(v_n - v_{n-1}) - c_nv_n + R_n.$$

Deoarece $u_i(t)$ şi $\widetilde{u}_i(t)$ satisfac aceleaşi condiţii iniţiale, rezultă că

$$\text{(54)} \qquad v_i(0) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ţinînd seama de expresia resturilor din formulele de derivare numerică folosite pentru obţinerea sistemului (51), şi presupunînd că ecuaţia cu derivate parţiale (1) cu condiţiile (4) are o soluţie unică u, continuă împreună cu primele trei derivate în raport cu x în domeniul D şi că există şi derivate de ordinul patru în raport cu x mărginite în D, atunci resturile R_i din sistemul (53) sînt date de următoarele formule :

$$R_1 = -\frac{h^2}{2}\left\{\frac{29a_1}{62}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\bigg|_{x=\xi_1} + \frac{5b_1}{9}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\bigg|_{x=\eta_1}\right\}$$

$$R_i = -\frac{h^2}{6}\left\{\frac{a_i}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\bigg|_{x=\xi_i} + b_i\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\bigg|_{x=\eta_i}\right\}, \qquad (i = 2, 3, \ldots, n-1)$$

$$R_n = -\frac{h^2}{2}\left\{\frac{29a_n}{62}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\bigg|_{x=\xi_n} + \frac{5b_n}{9}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\bigg|_{x=\xi_n}\right\}.$$

Pentru delimitarea soluţiei sistemului (53) cu condiţiile (54) facem următoarea observaţie:

Dacă

$$V = \max_{[0,T]} v_j(t) \geqq \max_{[0,T]} [v_1(t),\ v_2(t),\ \ldots,\ v_n(t)],\ (j = 2,\ 3, \ldots,\ n-1)$$

şi

$$v = \min v_k(t) \leqq \min_{[0,T]} [v_1(t),\ v_2(t),\ \ldots,\ v_n(t)],\ (k = 2,\ 3, \ldots,\ n-1),$$

atunci pentru $v_i(t)$ este valabilă delimitarea dată de formula (16) cînd $c(x,t) \geqq c > 0$ în D sau de formula (22) pentru $c(x, t)$ oarecare.

Dacă

$$V = \max_{[0,T]} v_1(t) \geqq \max_{[0,T]} [v_1(t), v_2(t), \ldots, v_n(t)]$$

şi

$$v = \min_{[0,T]} v_1(t) \leqq \min_{[0,T]} [v_1(t),\ v_2(t), \ldots, v_n(t)],$$

atunci pentru $v_i(t)$ avem delimitarea dată de formulele (45) sau (46), iar dacă

$$V = \max_{[0,T]} v_n(t) \geqq \max_{[0,T]} [v_1(t), v_2(t), \ldots, v_n(t)]$$

$$v = \min_{[0,T]} v_n(t) \leqq \min_{[0,T]} [v_1(t), v_2(t), \ldots, v_n(t)],$$

atunci printr-un raţionament analog cu cel făcut pentru deducerea formulelor (45) şi (46) se ajunge la următoarele evaluări

$$|v_n(t)| \leqq \frac{h^2}{6}\frac{M_4^*}{c}$$

pentru $c(x, t) \geqq c > 0$ în D, şi

$$|v_n(t)| \leqq \frac{h^2}{6} T e^{1+c_0 T} M_4^{**}$$

pentru $c(x, t) \geqq -c_0, \quad c_0 > 0,$ unde

$$M_4^{**} = \max_{\substack{l-3h<x<l \\ \leqslant t}} \left| \frac{87}{62} a_n \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{5}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|. \tag{55}$$

Ținînd seama de cele arătate mai sus, avem pentru eroarea cu care soluția sistemului (51) cu condițiile (52) aproximează pe dreptele de ecuații $x = x_i (i = 1,2,\ldots,n)$ soluția problemei (1), (4) următoarele evaluări

$$|v_i(t)| \leqq \frac{h^2}{6} \frac{M}{c} \qquad (i = 1, 2,\ldots, n) \tag{56}$$

cînd $c(x, t) \geqq c > 0$ în D, și

$$|v_i(t)| \leqq \frac{h^2}{6} T e^{1+c_0 T} M, \quad \text{cînd } c(x, t) \geqq -c_0, \tag{57}$$

unde

$$M = \max \{ M_4, M_4^*, M_4^{**} \}.$$

În acest paragraf s-a arătat cum se pot obține , cu ajutorul sistemului de ecuații diferențiale (51) cu condițiile (52), valori aproximative, ale soluției problemei (1), (4) pe dreptele $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$. Deoarece condițiile la limită (4) ne dau derivata $\frac{\partial u}{\partial x}$ la $x = 0$ și $x = l$, se pune problema să se determine funcția $u(x, t)$ la capetele intervalului $[0, l]$. Pentru $x = 0$, o valoare aproximativă a funcției $u(0,t)$ este dată de formula (48), iar la $x = l$ se poate scrie în mod analog valoarea aproximativ $\tilde{u}(l,t)$ sub forma

$$\tilde{u}(l, t) = \tilde{u}_{n+1}(t) = \tilde{u}_n(t) + h\psi_2(t).$$

Notînd $v_{n+1}(t) = u_n(l, t) - \tilde{u}_n(t)$, avem evaluarea

$$|v_{n+1}(t)| \leqq \frac{h^2}{2} \left[\overline{M}_2 + \frac{M_4^{**}}{3c} \right]$$

pentru $c(r, t) \geqq c > 0$ în D și

$$|v_{n+1}(t)| \leqq \frac{h^2}{2} \left[\overline{M}_2 + \frac{T}{3} e^{1+c_0 T} M_4^{**} \right]$$

pentru $c(x, t) \geqq -c_0, \quad c_0 > 0,$ unde M_4^{**} are semnificația dată în (55) iar

$$\overline{M}_2 = \max_{\substack{l-h<x<l \\ 0\leqslant t\leqslant T}} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|.$$

În cele de mai sus s-a arătat că aplicînd metoda dreptelor la cele trei tipuri de probleme amintite se obţin valori aproximative ale soluţiei pe anumite drepte şi că erorile acestor aproximaţii sînt de ordinul lui h^2 ca şi erorile cu care sînt aproximate derivatele din ecuaţia cu derivate parţiale. Acest fapt ne îndreptăţeşte să afirmăm că procedeul propus converge spre soluţia problemei date, cînd $h \to 0$. Pe de altă parte, s-a arătat cum se pot determina valori aproximative ale soluţiei problemei propuse la capetele intervalului $(0, l]$ cînd acestea nu sînt cunoscute din condiţiile la limită şi aceste valori aproximative sînt date tot cu eroarea de ordinul lui h^2. Rezultatele obţinute se aplică pentru cazul cînd funcţiile $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$ satisfac condiţiile amintite la începutul lucrării. Menţionăm că, în cazul cînd $b(x, t) \equiv 0$ şi $c(x, t) \equiv 0$, rezultatele găsite rămîn valabile, însă evaluări mai bune ale erorilor au fost date în lucrarea [1].

Primită la redacţie la 25 noiembrie 1968

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”,
Bucureşti, Str. Polizu nr. 1

ÉVALUATION DE L'ERREUR DANS LA RÉSOLUTION APPROXIMATIVE DE CERTAINS PROBLÈMES AUX LIMITES POUR L'ÉQUATION DE TYPE PARABOLIQUE

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail l'A. applique la méthode des droites pour la résolution approximative de l'équation aux dérivées partielles (1) dans le cas de trois problèmes aux limites données par les conditions (2), (3) et (4). Dans l'équation (1), en considérant les droites $x = x_i = i h$, $(i=1,2,\ldots, n)$, $h = \dfrac{l}{n+1}$, les dérivées partielles de la fonction $u(x,t)$ par rapport à x sont remplacées par des combinaisons linéaires des valeurs de la fonction $u(x,t)$ sur les droites $x = x_i$, en utilisant dans ce but les formules de dérivation numérique connues, ainsi que les formules qui sont établies dans le présent travail.

De cette manière, la résolution approximative des trois problèmes énoncés a été réduite à la résolution des systèmes d'équations différentielles ordinaires avec les conditions initiales. Etant donné que les systèmes d'équations différentielles représentent l'équation aux dérivées partielles et les conditions aux limites avec une erreur d'ordre h^2, l'A. démontre que les solutions de ces systèmes représentent les solutions des problèmes aux limites pour l'équation aux dérivées partielles avec des erreurs d'ordre h^2. Pour chacun de ces problèmes l'A. donne des évaluations des erreurs.

BIBLIOGRAFIE

1. F. M. PASCAL, *Metoda dreptelor în rezolvarea unor probleme referitoare la o ecuaţie cu derivate parţiale de tip parabolic*. St. cerc. mat., **19**, *6*, 871—890 (1967).
2. D. V. IONESCU, *Aplicarea formulelor de derivare numerică la integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale*. St. cerc. mat. Cluj, **10**, *2*, 259—315 (1959).
3. Н. В. ФАДЕЕВА, *Метод прямых применений к краевым задачам*. ТР. МАТЕМ. ИН-ТА-ИМ. В. А. Стеклова, *28* (1949).
4. L. COLLATZ, *The numerical treatment of differential equations*, Berlin, 1960.
5. Л. В. КАНТОРОВИЧ, В. Н. КРЫЛОВ, *Приближенные методы высшего анализа*. Москва, 1962.

ASUPRA UNEI INEGALITĂŢI DE TIP KOLMOGOROV

DE

OCTAVIAN POPESCU

În această lucrare se dă o extensie a inegalităţii lui A. N. Kolmogorov. pentru cazul multidimensional.
Se arată că inegalitatea poate fi atinsă şi că este exactă.

1. INTRODUCERE

Fie Y o variabilă aleatoare mărginită definită pe cîmpul de probabilitate (Ω, K, P).

Notăm cu $M = \sup | Y(\omega) |$ şi presupunem că momentul de ordinul doi $E_2(Y)$ există. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ are loc relaţia

$$P[\,|Y| \geqslant \varepsilon] \geqslant \frac{E_2(Y) - \varepsilon^2}{M^2}$$

cunoscută sub numele de inegalitatea Kolmogorov (vezi, de exemplu, [1], pp. 59–64, [4], Cap. VI, §7).

Extinderea la cazul multidimensional a acestei inegalităţi a lui Kolmogorov se face prin analogie cu rezultatele din lucrarea [3].

2. O INEGALITATE MULTIDIMENSIONALĂ DE TIP KOLMOGOROV

În cele ce urmează prezintă interes următoarele două leme :

LEMA 1. *Fie* $\mathbf{Y} = (Y_1 \ldots, Y_n,)$ *un vector aleator cu* $E(\mathbf{Y}) = \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ *şi* $f \geqslant 0$, *o funcţie reală convexă, definită pe* R^n, *neidentic nulă şi mărginită.*[1]

---

[1] Funcţia f poate fi considerată definită şi numai pe un domeniu din R^n, cu condiţia ca $\mathbf{Y}$ să ia valori în acel domeniu.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 7, P. 1099–1105, BUCUREŞTI, 1969

Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$

$$(1) \qquad P[f(\mathbf{Y}) \geqslant \varepsilon] \geqslant \frac{f(\mu) - \varepsilon}{\lambda},$$

unde $\lambda = \sup\limits_{\mathbf{Y}\in R^n} f(\mathbf{y})$.

Demonstrație. Din calculul mediei rezultă [2])

$$E[f(\mathbf{Y})] = \int_{R^n} f(\mathbf{y})\, \mathrm{d}F(\mathbf{y}) = \int_{\{\mathbf{y};f(\mathbf{y})<\varepsilon\}} f(\mathbf{y})\, \mathrm{d}F(\mathbf{y}) + \int_{\{\mathbf{y};\, f(\mathbf{y}) \geqslant \varepsilon\}} f(\mathbf{y})\, \mathrm{d}F(\mathbf{y}) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \lambda P[f(\mathbf{Y}) \geqslant \varepsilon]$$

de unde

$$(2) \qquad P[f(\mathbf{Y}) \geqslant \varepsilon] \geqslant \frac{E[f(\mathbf{Y})] - \varepsilon}{\lambda}.$$

Ne folosim de faptul că f este convexă și scriem inegalitatea lui Jenssen pentru funcțiile convexe :

$$(3) \qquad E[f(\mathbf{Y})] \geqslant f[E(\mathbf{Y})] = f(\mu).$$

Înlocuind pe (3) în (2) se obține (1) și lema este demonstrată.

Observația 1. Fracția $\dfrac{f(\mu) - \varepsilon}{\lambda} \leqslant 1$, deoarece $\lambda \geqslant f(\mu)$.

Observația 2. Inegalitatea este nebanală dacă are loc condiția $\dfrac{f(\mu) - \varepsilon}{\lambda} \geqslant 0$, adică dacă $f(\mu) \geqslant \varepsilon$.

LEMA 2. *Pentru orice funcție omogenă* $g \geqslant 0$ *definită pe* R^n *și mărginită cu* $\lambda = \sup\limits_{x\in R^n} g(x)$, *există un vector aleator* $\mathbf{Y}_0$ *cu* $E(\mathbf{Y}_0) = \mu$ *astfel încît pentru orice* $\varepsilon > 0$ *și* $g(\mu) \geqslant \varepsilon$ *să avem*

$$P[g(\mathbf{Y}_0) \geqslant \varepsilon] = \frac{g(\mu) - \varepsilon}{\lambda}.$$

Demonstrație. Considerăm vectorul $\mathbf{Y}_0$ cu repartiția dată de

$$P\left[\mathbf{Y}_0 = \frac{\lambda}{g(\mu) - \varepsilon}\, \mu\right] = \frac{g(\mu) - \varepsilon}{\lambda},$$

$$P[\mathbf{Y}_0 = 0] = 1 - \frac{g(\mu) - \varepsilon}{\lambda}.$$

---

[2]) Prin $F(\mathbf{y})$ se notează funcția de repartiție a lui $\mathbf{Y}$.

Demonstraţia lemei se reduce la a arăta că

$$E(\mathbf{Y}_0) = \boldsymbol{\mu} \text{ şi } P[g(\mathbf{Y}_0) \geqslant \varepsilon] = P\left[\mathbf{Y}_0 = \frac{\lambda}{g(\boldsymbol{\mu}) - \varepsilon}\boldsymbol{\mu}\right] = \frac{g(\boldsymbol{\mu}) - \varepsilon}{\lambda}.$$

Mai întîi se observă că

$$E(\mathbf{Y}_0) = \frac{\lambda}{g(\boldsymbol{\mu}) - \varepsilon} \cdot \frac{g(\boldsymbol{\mu}) - \varepsilon}{\lambda} = \boldsymbol{\mu}.$$

Din repartiţia vectorului $\mathbf{Y}_0$ se poate scrie

$$P\left[\mathbf{Y}_0 = \frac{\lambda}{g(\boldsymbol{\mu}) - \varepsilon}\boldsymbol{\mu}\right] = P\left[g(\mathbf{Y}_0) = g\left(\frac{\lambda}{g(\boldsymbol{\mu}) - \varepsilon} \cdot \boldsymbol{\mu}\right)\right].$$

Rămîne să arătăm că

$$P[g(\mathbf{Y}_0) \geqslant \varepsilon] = P\left[g(\mathbf{Y}_0) = g\left(\frac{\lambda}{g(\boldsymbol{\mu}) - \varepsilon} \cdot \boldsymbol{\mu}\right)\right].$$

Aceasta revine la a arăta că

$$g\left(\frac{\lambda}{g(\boldsymbol{\mu}) - \varepsilon}\boldsymbol{\mu}\right) \geqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Din omogeneitatea lui g rezultă

$$g\left(\frac{\lambda}{g(\boldsymbol{\mu}) - \varepsilon}\boldsymbol{\mu}\right) = \left[\frac{\lambda}{g(\boldsymbol{\mu}) - \varepsilon}\right]^{\alpha} \cdot g(\boldsymbol{\mu}) \tag{5}$$

în care α reprezintă gradul de omogeneitate.
Înlocuind pe (5) în (4) se obţine

$$\left[\frac{\lambda}{g(\boldsymbol{\mu}) - \varepsilon}\right]^{\alpha} \cdot g(\boldsymbol{\mu}) \geqslant \varepsilon$$

sau

$$\left[\frac{\lambda}{g(\boldsymbol{\mu}) - \varepsilon}\right]^{\alpha} \cdot \frac{g(\boldsymbol{\mu})}{\varepsilon} \geqslant 1$$

care este satisfăcută dacă

$$\lambda \geqslant g(\boldsymbol{\mu}) \geqslant \varepsilon.$$

Inegalitatea (4) fiind adevărată, lema este demonstrată.

TEOREMA 1. *Fie* $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'$ *un vector aleator cu* $E(\mathbf{Y}) = \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)'$ *şi* $\varphi \geqslant 0$, *o funcţie reală convexă mărginită şi omogenă definită pe* R^n.

Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ avem

$$P[\varphi(\mathbf{Y}) \geqslant \varepsilon] \geqslant \frac{\varphi(\boldsymbol{\mu}) - \varepsilon}{\lambda}, \tag{6}$$

unde $\lambda = \sup\limits_{\mathbf{Y} \in R^n} \varphi(\mathbf{y})$ şi egalitatea poate fi atinsă dacă

$$\lambda \geqslant \varphi(\boldsymbol{\mu}) \geqslant \varepsilon.$$

Demonstraţie. Teorema 1 este o consecinţă imediată a lemelor 1 şi 2.

DEFINIŢIE. O inegalitate $P[Y \in T] \geqslant K$ valabilă pentru toate variabilele aleatoare ale unei familii $\mathcal{J}$, se spune că este *exactă* în raport cu familia $\mathcal{J}$ (vezi [3]) dacă ea nu poate fi îmbunătăţită, adică pentru orice $\delta > 0$ există o variabilă aleatoare $Y_0 \in \mathcal{J}$ astfel ca $P[Y_0 \in T] \geqslant K + \delta$ să fie falsă şi deci $P[Y_0 \in T] < K + \delta$.

TEOREMA 2. *În condiţiile teoremei 1 inegalitatea*

$$P[\varphi(\mathbf{Y}) \geqslant \varepsilon] \geqslant \frac{\varphi(\boldsymbol{\mu}) - \varepsilon}{\lambda}$$

este exactă.

Demonstraţie. Presupunem că nu este exactă şi deci poate fi îmbunătăţită. Adică există un număr $\varepsilon_0 < \varepsilon$ astfel încît

$$P[\varphi(\mathbf{Y}) \geqslant \varepsilon] \geqslant \frac{\varphi(\boldsymbol{\mu}) - \varepsilon_0}{\lambda}. \tag{7}$$

Să considerăm un număr ε_1 care îndeplineşte condiţia

$$\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon. \tag{8}$$

Din condiţiile teoremei 1 rezultă că putem găsi un vector $\mathbf{Y}_1$ cu $E(\mathbf{Y}_1) = \boldsymbol{\mu}$ astfel încît

$$P[\varphi(\mathbf{Y}_1) \geqslant \varepsilon_1] = \frac{\varphi(\boldsymbol{\mu}) - \varepsilon_1}{\lambda}. \tag{9}$$

Din (7), (8), (9) putem scrie :

$$\frac{\varphi(\boldsymbol{\mu}) - \varepsilon_1}{\lambda} = P[\varphi(\mathbf{y}_1) \geqslant \varepsilon_1] \geqslant P[\varphi(\mathbf{Y}) \geqslant \varepsilon] \geqslant \frac{\varphi(\boldsymbol{\mu}) - \varepsilon_0}{\lambda}.$$

Această relație este falsă deoarece conform alegerii numerelor ε_0 și ε_1 avem

$$\frac{\varphi(\mu) - \varepsilon_1}{\lambda} < \frac{\varphi(\mu) - \varepsilon_0}{\lambda}$$

și deci teorema este demonstrată.

Exemplu. Funcția $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$ definită pe domeniul $R_+^n = \{\mathbf{x}\,;\, x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\,;\, \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)'\}$ este o funcție convexă. Să considerăm vectorul aleator $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'$ astfel încît $0 \leqslant Y_i \leqslant d_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ și fie $D_+^n = \{\mathbf{x}\,;\; 0 \leqslant x_i \leqslant d_i\}$. Evident, funcția $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ este mărginită pe D_+^n și fie $\lambda = \sup\limits_{\mathbf{x} \in D_+^n} \varphi(\mathbf{x})$. Atunci inegalitatea(6) devine :

$$P[Y_1 + \ldots + Y_n \geqslant \varepsilon] \geqslant \frac{\mu_1 + \ldots + \mu_n - \varepsilon}{\lambda}$$

unde $\mu_i = E(Y_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, presupunîndu-se desigur că aceste medii există.

Dacă presupunem acum că $\mathbf{X}$ este un vector aleator ale cărui componente sînt mărginite și $E(X_i^2) = \mu_i^*$, și dacă punem $X_i^2 = Y_i$, atunci inegalitatea precedentă se mai scrie

$$P[X_i^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant \varepsilon] \geqslant \frac{\mu_1^* + \ldots + \mu_n^* - \varepsilon}{\lambda^*},$$

unde $\lambda^* = \sup\limits_{D} (x_i^2 + \ldots + X_n^2)$ iar D este domeniul valorilor vectorului aleator $\mathbf{X}$.

3. CAZ PARTICULAR

Fie $\mathbf{Y}^* = (Y_1^2, \ldots, Y_n^2)'$, un vector aleator a cărui medie există și este egală cu :

$$\boldsymbol{\mu}^* = (\mu_1^*, \ldots, \mu_n^*)', \text{ unde } \mu_i^* = E(Y_i^2) = E_2(Y_i).$$

Dacă $\varphi \geqslant 0$ este o funcție reală convexă mărginită și omogenă pe R^n cu $\lambda^* = \sup\limits_{\mathbf{y} \in R^n} \varphi(\mathbf{y})$, se poate scrie inegalitatea lui Kolmogorov generalizată :

$$P[\varphi(\mathbf{Y}^*) \geqslant \varepsilon] \geqslant \frac{\varphi(\boldsymbol{\mu}^*) - \varepsilon}{\lambda^*}.$$

Luînd $n = 1$ se obține

$$P[\varphi(Y_1^2) \geqslant \varepsilon] \geqslant \frac{\varphi(\mu_1^*) - \varepsilon}{\lambda^*} \tag{10}$$

Presupunem că $Y_1(\omega)$ este o variabilă aleatoare mărginită cu $M = \sup\limits_{\omega \in \Omega} |Y_1(\omega)|$.

Dacă luăm

$$\varphi(Y) = |Y|$$

definită pe intervalul $(-M, M)$, atunci

$$\varphi(Y_1^2) = |Y_1^2| = Y_1^2 \tag{11}$$

$$\varphi(\mu_1^*) = |\mu_1^*| = \mu_1^* = E_2(Y_1) \tag{12}$$

și rezultă în plus că

$$\lambda^* = M^2. \tag{13}$$

Înlocuind în (10) pe (11), (12) și (13), obținem

$$P[Y_1^2 \geqslant \varepsilon] \geqslant \frac{E_2(Y_1) - \varepsilon}{M^2}.$$

Dacă notăm $\sqrt{\varepsilon} = \eta$ și ținem seama de faptul că

$$P[Y_1^2 \geqslant \varepsilon] = P[|Y_1| \geqslant \sqrt{\varepsilon}],$$

atunci se deduce

$$P[|Y_1| \geqslant \eta] \geqslant \frac{E_2(Y_1) - \eta^2}{M^2},$$

adică inegalitatea lui Kolmogorov unidimensională. În concluzie inegalitatea lui Kolmogorov este o consecință a inegalității (6).

Primită la redacție la 26 septembrie 1968

Academia de studii economice,
Piața Română nr. 6,
București

SUR UNE INÉGALITÉ DU TYPE KOLMOGOROW

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail l'A. donne une extension pour le cas multidimensionnel de l'inégalité de Kolmogorow.

Si Y est un vecteur aléatoire n-dimensionnel et φ une fonction réelle convexe définie sur R^n, non identique à zéro, bornée et homogène d'un degré quelconque, alors (théorème 1) l'inégalité (6) a lieu et (théorème 2) cette inégalité ne peut pas être améliorée.

Enfin, l'A. montre que l'inégalité classique de Kolmogorow est un cas spécial de l'inégalité (6).

BIBLIOGRAFIE

1. Ciucu, G., *Elemente de teoria probabilităţilor şi statistică matematică*. Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1963.
2. Marshall, A. W., Olkin, I., *A one sided inequality of the Chebychev type*. Ann. Math. Statist., **31**, *2*, 488–491 (1960).
3. Mudholkar, G. S., Poduri, S.R.S. Rao, *Some Sharp multivariate Tchebycheff inequalities*. Ann. Math. Statist., **38**, *2*, 393–400 (1967).
4. Onicescu, O., Mihoc, Gh., Ionescu Tulcea, C. T., *Calculul probabilităţilor şi aplicaţii.*, Editura Academiei Republicii Populare Române, Bucureşti, 1956.

LINGVISTICA ALGEBRICĂ ȘI TEORIA MODELELOR

DE

STEPHAN – YLAN SOLOMON

Lucrarea de față își propune în primul rînd să ilustreze una din modalitățile de tratare a unor noțiuni și rezultate ale lingvisticii algebrice într-un cadru mai general, și anume în cel al teoriei modelelor. Posibilitatea unei astfel de încadrări prezintă unele avantaje :

a) Eliminarea elementelor neesențiale din demonstrații, prin aplicarea raționamentelor în cadrul cel mai larg în care ele sînt valabile ; rezultatul este un spor de simplitate și eleganță.

b) O formalizare mai completă, favorabilă unei mai lesnicioase manipulări algebrice ; de aici posibilitatea unei orientări mai rapide și a sesizării unor analogii, unor noi legături.

c) Aplicarea rezultatelor obținute și altor structuri de tip algebric, logic subsumate structurii de model.

1. INTRODUCERE

1.1. Scopul lucrării este de a aplica metodele de lucru ale teoriei modelelor în domeniul lingvisticii, neglijîndu-se deocamdată alte structuri în care ele și-ar putea găsi teren prielnic. (Aceasta și datorită faptului că punctul său de plecare îl constituie modelele analitice ale lingvisticii).

Totodată, nu ne vom ocupa pentru moment de interpretarea în limbile naturale a noilor noțiuni introduse sau a rezultatelor obținute pentru a nu pierde din unitatea tratării ; ne vom mărgini numai la abordarea strict matematică a subiectului, ocupîndu-ne de aspectele sale pur algebrice.

Prin model în accepția adoptată în lucrare ([8]) vom înțelege o mulțime V împreună cu o familie $\mathcal{P}$ de predicate (proprietăți, relații) pe V, susceptibile de a lua valoarea 1 (ce simbolizează adevărul) sau 0 (a cărui interpretare este falsul). O limbă în sensul lui Kulagina poate fi privită ca un model , dacă luăm drept V vocabularul limbii și drept $\mathcal{P}$ mulțimea numerelor naturale ; astfel, în locul expresiei „fraza de lungime n $x_1 \ldots x_n$ este marcată" vom spune, în limbajul modelelor : „predicatul n ia valoarea

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 7, P. 1107–1134, BUCUREȘTI, 1969

1 cînd îi înlocuim variabilele în ordine cu $x_1, \ldots, x_n$", sau, mai pe scurt „$n(x_1, \ldots, x_n) = 1$".

Noțiunile de model, model factor, omomorfism, omomorfism tare și izomorfism definite ca în [8], precum și cele de model redus și omomorfism saturat introduse de noi se dovedesc suficiente pentru abordarea tuturor conceptelor lingvistice în discuție. Astfel, relația de ρ-dominare între elementele mulțimii unui model (sau ale vocabularului unei limbi), de o deosebită importanță în cele ce urmează, este definită prin condiția ca o anumită aplicație să stabilească un omomorfism între două modele reduse și apoi factorizate.

Pe de altă parte, deoarece printre noțiunile utilizate în lucrare, cea de omomorfism cu diversele ei variante ocupă un loc central, devine foarte posibilă o tratare a subiectului în termenii teoriei categoriilor. Teoremele 3.8 și 4.7 , care dau condiții suficiente pentru ca, într-un pătrat de tipul

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \mathcal{M}_2 \arrow[d] \\
\mathcal{M}'_1 \arrow[r, dashed] & \mathcal{M}'_2
\end{tikzcd}$$

(ale cărui laturi și vîrfuri reprezintă, respectiv, omomorfisme și modele) cu diagrama comutativă, una din săgețile punctate s-o inducă pe cealaltă, subliniază încă o dată acest lucru.

O altă încercare de a încadra conceptele și rezultatele lui Kulagina [2], Uspenskii [14] și Marcus [3] într-o teorie mai generală (a așa-numitelor R-sisteme) aparține lui M. Novotný [7]. Comparînd între ele definițiile unui R-sistem A și a unui model de tip (A, R), ne dăm ușor seama de echivalența lor; același lucru poate fi spus și despre noțiunile de partiție ale unui R-sistem și model factor. Dar, spre deosebire de cele trei tipuri de omomorfisme considerate de noi, care păstrează numai corectitudinea frazelor, omomorfismul în sensul lui Novotný transportă și frazele nemarcate în fraze nemarcate, fiind astfel mai tare decît toate celelalte. Rezultatele obținute folosind acest tip de omomorfism, se referă de aceea, numai la relații de echivalență, care sînt simetrice. Avantajul utilizării omomorfismelor simple, tari și saturate mai constă, deci, și în faptul că ele pot descrie relații binare cu sens unic (cum este prin excelență de dominare).

1.2. §. 2 este destinat unor noțiuni algebrice introductive, formînd o bază inițială necesară urmăririi paragrafelor următoare. Toate conceptele sînt privite prin prisma noțiunii de predicat, atît pentru familiarizarea cu această noțiune, cît și pentru formarea unei viziuni unitare asupra relațiilor. Tot în §2 ne ocupăm de transportarea paradigmelor printr-o aplicație de pe un vocabular pe altul, dînd o condiție necesară și suficientă de transportabilitate.

În § 3 și §4 se definesc noțiunile de model, omomorfism și model factor (după [8]). Tot aici se dau și cîteva teoreme generale despre modele și partiții conținînd esența a aproape tuturor rezultatelor ulterioare. Definiția relației de congruență este transpusă din [7] în limbajul modelelor.

După introducerea în §5 a conceptelor de model redus, omomorfism saturat și partiție saturată (termenul lui Revzin, conform lui [10]), §6 se ocupă cu relația de ρ-dominare (o generalizare a relației de dominare a lui Dobrušin [1] și Sestier [11] precum și a relației „ρ-zamestimo na" a lui Trybulec [12]), arătînd, între altele că este o proprietate abstractă, adică se păstrează prin izomorfisme (mai mult, chiar prin omomorfisme saturate). În continuare, se definește așa-numita stea a unei partiții (ce apare într-o definiție echivalentă în [13]) și se dă o condiție necesară și suficientă pentru ca un omomorfism (o partiție) să fie saturat(ă) (îmbogățindu-se teorema 1 din [12]).

În §7 se studiază derivata și steaua unei partiții, ajungîndu-se pe altă cale la rezultate cunoscute, ale lui Kulagina și Marcus. În plus, se arată derivata unei partiții este o proprietate invariantă a omomorfismelor tari și că condiția necesară și suficientă pentru ca steaua și derivata unei partiții să coincidă este ca partiția să fie saturată.

Cîteva rezultate obținute în primele paragrafe sînt aplicate la limbaje în §8. Cu ajutorul unui exemplu se arată că paralelismul între steaua și derivata unei partiții este limitat (8.12) și se pune în evidență faptul că steaua partiției improprii coincide cu partiția N a lui Trybulec [12]. De asemenea, noțiunea de limbă adecvată se dovedește a fi un invariant al omomorfismelor în sensul lui Novotný [7].

1.3. Peste tot pe parcursul lucrării (cu excepția cazurilor cînd vom specifica contrariul), aplicațiile considerate vor fi presupuse surjective.

2. PREDICATE. RELAȚII DE ECHIVALENȚĂ

2.1. Fie V o mulțime nevidă, $\mathcal{N}$ mulțimea numerelor naturale (inclusiv 0) și $n \in \mathcal{N}$. Se numește predicat de n argumente (sau relație n-ară) pe mulțimea V, o aplicație P a mulțimii V^n (adică a produsului cartezian $\underbrace{Vx\ Vx\ \ldots\ xV}_{n \text{ factori}}$) în mulțimea $\{0,1\}$. Printr-un predicat de 0 argumente vom înțelege pur și simplu unul din elementele 0 sau 1.

Notînd mulțimea tuturor predicatelor de n argumente pe mulțimea V cu $\mathcal{P}_n(V)$ și mulțimea părților lui V^n cu $\mathcal{P}(V^n)$, se poate stabili în mod natural o corespondență biunivocă între aceste două mulțimi; și anume, predicatului $P \in \mathcal{P}_n(V)$ i se asociază submulțimea $\overline{P}$ a lui V^n astfel încît $(x_1, \ldots, x_n) \in \overline{P}$ dacă și numai dacă $P(x_1, \ldots, x_n) = 1$. (Predicatul P de n argumente pe mulțimea V nu este altceva decît funcția caracteristică a submulțimii $\overline{P}$ a lui V^n).

2.2. Fie V și V' două mulțimi nevide și φ o aplicație a lui V pe V'; φ se poate prelungi canonic pînă la o aplicație a lui V^n pe V'^n_+, punînd $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$.

Fie acum $P \in \mathcal{P}_n(V)$ și $P' \in \mathcal{P}_n(V')$. Vom spune că P' îl majorează pe P modulo φ și vom scrie $P \leqslant P'$ (mod. φ) dacă din $P(x_1, \ldots, x_n) = 1$ rezultă $P'(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) = 1$. Conform lui 2.1, aceasta nu înseamnă altceva decît că $(x_1, \ldots, x_n) \in \overline{P}$ implică $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \overline{P}'$, ceea ce se poate scrie mai concis $\overline{P} \subseteq \varphi^{-1}(\overline{P}')$ sau $\varphi(\overline{P}) \subseteq \overline{P}'$.

P și Q fiind predicate n-are pe V, vom scrie $P \leqslant Q$ dacă $P \leqslant Q$ (mod. 1_V), unde 1_V este aplicația identică a mulțimii V. Aceasta revine la condiţia ca $P(x_1,\dots,x_n) = 1$ să implice $Q(x_1,\dots,x_n) = 1$, sau la incluziunea $\overline{P} \subseteq \overline{Q}$. De aici rezultă imediat că relaţia $\leqslant$ este o relaţie de ordine (parţială) pe $\mathcal{P}_n(V)$.

2.3. Fie V şi V' două mulţimi şi $\varphi : V \to V'$.

2.3.1. Fiind dat $P \in \mathcal{P}_n(V)$, vom construi un predicat de n argumente pe V', notat cu $\varphi(P)$, în modul următor :

$\varphi(P)(x'_1,\dots,x'_n) = 1$ dacă şi numai dacă există $x_1,\dots,x_n \in V$ cu proprietatea că $P(x_1,\dots,x_n) = 1$ şi astfel ca $\varphi(x_i) = x'_i$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$. În limbajul mulţimilor asociate, aceasta se poate exprima astfel: $(x'_1,\dots,x'_n) \in \overline{\varphi(P)}$ dacă şi numai dacă există $(x_1,\dots,x_n) \in \overline{P}$ în aşa fel încît $\varphi(x_1,\dots,x_n) = (x'_1,\dots,x'_n)$, adică $\overline{\varphi(P)} = \varphi(\overline{P})$. Comparînd cu 2.2, observăm că $\varphi(P)$ este cel mai mic predicat din $\mathcal{P}_n(V')$ care îl majorează pe P modulo φ.

2.3.2. Invers, dacă $P' \in \mathcal{P}_n(V')$, atunci se poate construi un predicat $\varphi^{-1}(P') \in \mathcal{P}_n(V)$ în felul următor : $\varphi^{-1}(P')(x_1,\dots,x_n) = 1$ în V dacă şi numai dacă $P'(\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_n)) = 1$ în V'. Cu alte cuvinte, $(x_1,\dots,x_n) \in \overline{\varphi^{-1}(P')}$ este echivalent cu $\varphi(x_1,\dots,x_n) \in \overline{P'}$, adică $\overline{\varphi^{-1}(P')} = \varphi^{-1}(\overline{P'})$. Ţinînd seama de definiţiile din 2.2 putem spune că $\varphi^{-1}(P')$ este cel mai mare dintre predicatele de n argumente pe mulţimea V majorate modulo φ de P'.

2.3.3. Am obţinut astfel aplicaţiile $\varphi : \mathcal{P}_n(V) \to \mathcal{P}_n(V')$ şi $\varphi^{-1} : \mathcal{P}_n(V') \to \mathcal{P}_n(V)$ care se comportă absolut analog cu aplicaţiile $\varphi : \mathcal{P}(V^n) \to \mathcal{P}(V'^n)$ şi $\varphi^{-1} : \mathcal{P}(V'^n) \to \mathcal{P}(V^n)$ respectiv, datorită relaţiilor $\overline{\varphi(P)} = \varphi(\overline{P})$, $\overline{\varphi^{-1}(P')} = \varphi^{-1}(\overline{P'})$ şi a echivalenţei dintre inegalitatea $P \leqslant Q$ din $\mathcal{P}_n(V)$ şi incluziunea $\overline{P} \subseteq \overline{Q}$ din $\mathcal{P}(V^n)$. Putem deci retranscrie în limbaj de predicate cunoscutele proprietăţi ale ultimei perechi de aplicaţii :

1°. Dacă $P \in \mathcal{P}_n(V)$, atunci $\varphi^{-1}(\varphi(P)) \geqslant P$.

2°. Dacă $P' \in \mathcal{P}_n(V')$, atunci $\varphi(\varphi^{-1}(P')) = P'$ (φ este surjectivă).

3°. Dacă $P, Q \in \mathcal{P}_n(V)$ şi $P \leqslant Q$, atunci $\varphi(P) \leqslant \varphi(Q)$.

4°. Dacă $P', Q' \in \mathcal{P}_n(V')$ şi $P' \leqslant Q'$, atunci $\varphi^{-1}(P') \leqslant \varphi^{-1}(Q')$.

5°. Dacă $P \in \mathcal{P}_n(V)$ şi $P' \in \mathcal{P}_n(V')$, atunci $P \leqslant P'$ (mod φ) este echivalent cu $\varphi(P) \leqslant P'$, sau cu $P \leqslant \varphi^{-1}(P')$.

2.4. Vom conveni ca în cazul relaţiilor binare (predicate de două argumente), în loc de $P(x, y) = 1$ sau $(x, y) \in \overline{P}$ să folosim notaţia mai uzitată xPy. Astfel, dacă $P, Q \in \mathcal{P}_2(V)$, atunci $P \leqslant Q$ dacă şi numai dacă din xPy rezultă xQy.

Un tip important de relaţii binare îl constituie relaţiile de echivalenţă. Relaţia $\rho \in \mathcal{P}_2(V)$ se numeşte de echivalenţă dacă este reflexivă (adică pentru orice $x \in V$ avem $x\rho x$), simetrică ($x\rho y$ implică $y\rho x$) şi tranzitivă (din $x\rho y$ şi $y\rho z$ rezultă $x\rho z$) mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe V va fi notată cu $E(V)$.

2.4.1. Vom demonstra acum că, faţă de ordinea introdusă în 2.2, mulţimea $E(V)$ formează o latice, adică pentru orice două elemente

$\rho_1, \rho_2 \in E(V)$ există o margine inferioară, notată cu $\rho_1 \wedge \rho_2$ şi o margine superioară, notată cu $\rho_1 \vee \rho_2$.

Definiţia relaţiei $\rho_1 \wedge \rho_2$ este următoarea : $x\,(\rho_1 \wedge \rho_2)\,y$ dacă şi numai dacă avem atît $x\rho_1 y$ cît şi $x\rho_2 y$. Este clar că $\rho_1 \wedge \rho_2 \leqslant \rho_1, \rho_1 \wedge \rho_2 \leqslant \rho_2$ şi că $\rho_1 \wedge \rho_2 \in E(V)$. Pentru ca $\rho_1 \wedge \rho_2$ să fie margine inferioară, trebuie ca, dată fiind relaţia de echivalenţă ρ cu proprietăţile $\rho \leqslant \rho_1$ şi $\rho \leqslant \rho_2$, să rezulte $\rho \leqslant \rho_1 \wedge \rho_2$; într-adevăr, $x\rho y$ implică atît $x\rho_1 y (\rho \leqslant \rho_1)$, cît şi $x\rho_2 y\,(\rho \leqslant \rho_2)$, adică $x(\rho_1 \wedge \rho_2)\,y$.

$\rho_1 \vee \rho_2$ se defineşte astfel : $x(\rho_1 \vee \rho_2)\,y$ dacă şi numai dacă există $n \in \mathcal{N}$ şi nişte elemente $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1} \in V$ astfel încît să avem relaţiile $x\rho_1 a_1\ a_1, \rho_2 a_2, a_2\rho_1 a_3, \ldots, a_{2n-2}\rho_1 a_{2n-1}, a_{2n-1}\rho_2 y$ (spunem în acest caz că x a fost unit cu y printr-un lanţ de lungime $2n$).

Din definiţie rezultă că $\rho_1 \vee \rho_2$ este o relaţie reflexivă, deoarece x poate fi unit cu x prin lanţul de lungime 2 : $x\rho_1 x$, $x\rho_2 x$. Relaţia este simetrică, deoarece din existenţa lanţului de lungime $2n$ care-l leagă pe x cu y : $x\rho_1 a_1, a_1\rho_2 a_2, \ldots, a_{2n-1}\rho_2 y$, rezultă existenţa unui lanţ de lungime $2n+2$ ce-l uneşte pe y cu x : $y\rho_1 y, y\rho_2 a_{2n-1}, a_{2n-1}\rho_1 a_{2n-2}, \ldots, a_2\rho_2 a_1$, $a_1\rho_1 x$, $x\rho_2 x$.

Tranzitivitatea rezultă astfel : $x(\rho_1 \vee \rho_2)\,y$ şi $y(\rho_1 \vee \rho_2)\,z$ presupun lanţurile $x\rho_1 a_1, \ldots, a_{2n-1}\rho_2 y$ şi $y\rho_1 b_1, \ldots, b_{2m-1}\rho_2 z$ de lungimi respectiv $2n$ şi $2m$; lanţul de lungime $2n+2m$ $x\rho_1 a_1, \ldots, a_{2n-1}\rho_2 y, y\rho_1 b_1, \ldots, b_{2m-1}\rho_2 z$ îl uneşte pe x cu z; avem deci $x(\rho_1 \vee \rho_2)\,z$ şi am arătat că $\rho_1 \vee \rho_2 \in E(V)$. Să demonstrăm acum că $\rho_1 \vee \rho_2$ este marginea superioară a relaţiilor de echivalenţă ρ_1 şi ρ_2. Din $x\rho_1 y$ deducem $x\rho_1 y, y\rho_2 y$, adică $x(\rho_1 \vee \rho_2)\,y$; avem deci $\rho_1 \leqslant \rho_1 \vee \rho_2$; analog, $x\rho_2 y$ implică $x\rho_1 x, x\rho_2 y$, adică $x(\rho_1 \vee \rho_2)\,y$, de unde $\rho_2 \leqslant \rho_1 \vee \rho_2$. Fie acum $\rho \in E(V')$ astfel încît $\rho_1 \leqslant \rho$ şi $\rho_2 \leqslant \rho$; vom arăta că avem şi $\rho_1 \vee \rho_2 \leqslant \rho$. Fie $x, y \in V$ că proprietatea că $x(\rho_1 \vee \rho_2)\,y$; există deci $n \in \mathcal{N}$ şi $a_1, \ldots, a_{2n-1} \in V$ astfel ca $x\rho_1 a_1, a_1\rho_2 a_2, a_{2n-2}\rho_1 a_{2n-1}$, $a_{2n-1}\rho_2 y$; din $\rho_1 \leqslant \rho$ şi $\rho_2 \leqslant \rho$ rezultă $x\rho a_1, a_1\rho a_2, \ldots, a_{2n-2}\rho a_{2n-1}$ şi $a_{2n-1}\rho y$, relaţii care, pe baza tranzitivităţii lui ρ, conduc la $x\rho y$.

2.4.2. Vom nota cu 1 relaţia binară definită prin $x\,1y$ dacă şi numai dacă $x=y$ (egalitatea) şi cu ∞ pe cea pentru care $x \infty y$ oricare ar fi $x, y \in V$. Este evident că $1, \infty \in E(V)$ şi că inegalităţile $1 \leqslant \rho \leqslant \infty$ sînt adevărate pentru orice $\rho \in E(V)$. Astfel, laticea $E(V)$ are un prim şi un ultim element.

2.5. Fie V şi V' două mulţimi nevide şi φ o aplicaţie a lui V pe V'.

2.5.1. Dacă $\rho \in E(V')$, atunci predicatul binar pe V $\varphi^{-1}(\rho)$ este o relaţie de echivalenţă. Acest lucru este uşor de sesizat rescriind, în conformitate cu convenţia adoptată la începutul punctului 2.4, definiţia predicatului $\varphi^{-1}(\rho)$ (dată în 2.3.2) : $x\,\varphi^{-1}(\rho)\,y$ dacă şi numai dacă $\varphi(x)\,\rho\varphi\,(y)$.

Vom nota cu ρ_φ imaginea inversă prin φ a celei mai mici relaţii de echivalenţă a mulţimii V', adică $\rho_\varphi = \varphi^{-1}(1)$. Particularizînd observaţia de mai sus, să remarcăm că $\rho_\varphi \in E(V)$ şi că $x\rho_\varphi y$ este echivalent cu $\varphi(x) = \varphi(y)$; de aici rezultă şi că $\rho_\varphi = 1$, dacă şi numai dacă aplicaţia φ este injectivă.

2.5.2. Fie acum $\rho \in E(V)$; revenim la definiţia din 2.3.1 dată relaţiei binare $\varphi(\rho)$: $\varphi(x)\,\varphi(\rho)\,\varphi(y)$ dacă şi numai dacă există $x', y' \in V$ cu proprietăţile $\varphi(x') = \varphi(x)$, $\varphi(y') = \varphi(y)$ şi $x'\rho\,y'$. Cu alte cuvinte, $\varphi(x)\varphi(\rho)\,\varphi(y)$

dacă şi numai dacă există x', $y' \in V$ astfel ca $x \rho_\varphi x'$, $x' \rho y'$ şi $y' \rho_\varphi y$. Relaţia $\varphi(\rho)$ este, deci, reflexivă ($x \rho_\varphi x$, $x \rho x$, $x \rho_\varphi x$) şi simetrică ($x \rho_\varphi x'$, $x' \rho y'$ şi $y' \rho_\varphi y$ implică $y \rho_\varphi y'$, $y' \rho x'$ şi $x' \rho_\varphi x$).

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca $\varphi(\rho)$ să fie o relaţie de echivalenţă este ca din relaţiile $x \rho x'$, $x' \rho_\varphi y'$, $y' \rho y$ să rezulte existenţa elementelor x'', $y'' \in V$ cu proprietăţile $x \rho_\varphi x''$, $x'' \rho y''$ şi $y'' \rho_\varphi y$. (Vom spune în acest caz că relaţia ρ este compatibilă cu φ) :

Fie $\varphi(x)\ \varphi(\rho)\ \varphi(y)$ şi $\varphi(y)\ \varphi(\rho)\ \varphi(z)$, adică $x \rho_\varphi x'$, $x' \rho y'$, $y' \rho_\varphi y$ şi $y \rho_\varphi y''$, $y'' \rho z'$, $z' \rho_\varphi z$; neglijînd prima şi ultima relaţie obţinem $x' \rho y'$, $y' \rho_\varphi y''$ şi $y'' \rho z'$ care implică, în virtutea condiţiei enunţate, existenţa elementelor x'', $z'' \in V$ astfel încît să avem $x' \rho_\varphi x''$, $x'' \rho z''$ şi $z'' \rho_\varphi z'$. Ţinînd seama, însă, că $x \rho_\varphi x'$ şi $z' \rho_\varphi z$, obţinem în final relaţiile $x \rho_\varphi x''$, $x'' \rho z''$ şi $z'' \rho_\varphi z$, adică $\varphi(x)\ \varphi(\rho)\ \varphi(z)$. Tranzitivitatea fiind verificată, rezultă $\varphi(\rho) \in E(V')$. Reciproc, dacă $\varphi(\rho) \in E(V')$, atunci condiţia din enunţ este satisfăcută : din $x \rho x'$, $x' \rho_\varphi y'$ şi $y' \rho y$ deducem $\varphi(x)\ \varphi(\rho)\ \varphi(x')$, $\varphi(x') = \varphi(y')$ şi $\varphi(y')\ \varphi(\rho)\ \varphi(y)$, de unde, în baza tranzitivităţii lui $\varphi(\rho)$, $\varphi(x)\ \varphi(\rho)\ \varphi(y)$; dar aceasta înseamnă că există x'', $y'' \in V$ astfel ca $x \rho_\varphi x''$, $x'' \rho y''$ şi $y'' \rho_\varphi y$.

2.6. Fie φ o aplicaţie a mulţimii V pe mulţimea V'.

2.6.1. O relaţie de echivalenţă comparabilă cu ρ_φ este compatibilă cu φ :

Fie $\rho \in E(V)$ şi $x, y, x', y' \in V$ astfel ca $x \rho x'$, $x' \rho_\varphi y'$, $y' \rho y$. Dacă $\rho \leqslant \rho_\varphi$, atunci $y' \rho_\varphi y$, de unde $x' \rho_\varphi y$ şi deci $x \rho_\varphi x$, $x \rho x'$ şi $x' \rho_\varphi y$ ceea ce ne arată, conform lui 2.5.2, că ρ este compatibilă cu φ. Dacă $\rho_\varphi \leqslant \rho$, atunci $x' \rho y'$, de unde $x \rho y$ şi deci $x \rho_\varphi x$, $x \rho y$, $y \rho_\varphi y$; ρ rezultă şi în acest caz compatibilă cu φ.

2.6.2. Fie $\rho \in E(V)$ o relaţie de echivalenţă compatibilă cu φ; atunci, $\varphi(\rho) = 1$ dacă şi numai dacă $\rho \leqslant \rho_\varphi$. Într-adevăr, din $\rho \leqslant \rho_\varphi$ deducem, conform cu 2.3.3. (3°), $\varphi(\rho) \leqslant \varphi(\rho_\varphi) = \varphi(\varphi^{-1}(1)) = 1$. Reciproc, dacă $\varphi(\rho) = 1$, atunci $\varphi^{-1}(\varphi(\rho)) = \varphi^{-1}(1) = \rho_\varphi$; punctul 1° de la 2.3.3 ne arată însă că $\rho \leqslant \varphi^{-1}(\varphi(\rho))$; rezultă $\rho \leqslant \rho_\varphi$.

2.6.3. Fie $\rho \in E(V)$, compatibilă cu φ; atunci, $\varphi^{-1}(\varphi(\rho)) = \rho$ dacă şi numai dacă $\rho_\varphi \leqslant \rho$.

Să facem întîi observaţia, importantă în cele ce urmează, că dacă $\rho_\varphi \leqslant \rho$, atunci $\varphi(x)\ \varphi(\rho)\ \varphi(y)$ este echivalent cu $x \rho y$. (Într-adevăr, $\varphi(x)\ \varphi(\rho)\ \varphi(y)$ înseamnă, după 2.5.2, $x \rho_\varphi x'$, $x' \rho y'$, $y' \rho_\varphi y$, care implică $x \rho x'$, $x' \rho y$, $y' \rho y$ şi deci $x \rho y$.)

Fie acum $\rho_\varphi \leqslant \rho$ şi $x\ \varphi^{-1}(\varphi(\rho))\ y$; aceasta este echivalent (2.5.1) cu $\varphi(x)\ \varphi(\rho)\ \varphi(y)$, adică cu $x \rho y$; avem deci $\varphi^{-1}(\varphi(\rho)) = \rho$. Reciproc, din $\varphi^{-1}(\varphi(\rho)) = \rho$ şi relaţia evidentă $1 \leqslant \varphi(\rho)$ obţinem (2.3.3, 4°) $\varphi^{-1}(1) \leqslant \varphi^{-1}(\varphi(\rho))$, adică $\rho_\varphi \leqslant \rho$.

2.6.4. Relaţiile $\varphi(\varphi^{-1}(\rho)) = \rho$ şi $\varphi^{-1}(\varphi(\rho)) = \rho$ arată că între mulţimea $E_\varphi(V)$ a tuturor relaţiilor de echivalenţă pe V care majorează relaţia ρ_φ şi mulţimea $E(V')$ a tuturor relaţiilor de echivalenţă pe V', există o corespondenţă biunivocă dată de funcţiile φ şi φ^{-1}, inverse una alteia. Conform lui 2.3.3 (3°, 4°), această corespondenţă păstrează ordinea, adică este un izomorfism ordinal. Mulţimea ordonată $E_{\varphi}(V)$ este închisă faţă de operaţiile $\wedge$ şi $\vee$. (Într-adevăr, din $\rho_1, \rho_2 \in E_{\varphi}(V)$, adică din $\rho_{\varphi} \leqslant \rho_1$ şi $\rho_{\varphi} \leqslant \rho_2$, rezultă $\rho_{\varphi} \leqslant \rho_1 \wedge \rho_2$ şi $\rho_{\varphi} \leqslant \rho_1 \vee \rho_2$.) De aceea, prin izomorfismul ordinal al laticilor $E_{\varphi}(V)$ şi $E(V')$, atît marginile inferioare cît şi cele superioare se corespund reciproc. Mai precis, dacă $\rho_1, \rho_2 \in E_{\varphi}(V)$, atunci $\varphi(\rho_1 \wedge \rho_2) = \varphi(\rho_1) \wedge \varphi(\rho_2)$ şi $\varphi(\rho_1 \vee \rho_2) = \varphi(\rho_1) \vee \varphi(\rho_2)$, iar dacă $\rho_1, \rho_2 \in E(V')$, atunci $\varphi^{-1}(\rho_1 \wedge \rho_2) = \varphi^{-1}(\rho_1) \wedge \varphi^{-1}(\rho_2)$ şi $\varphi^{-1}(\rho_1 \vee \rho_2) = \varphi^{-1}(\rho_1) \vee \varphi^{-1}(\rho_2)$. În acelaşi fel se justifică şi egalităţile $\varphi(\infty) = \infty$ şi $\varphi^{-1}(\infty) = \infty$.

2.6.5. Dacă ρ_1 ρ_2 şi $\rho_1 \vee \rho_2$ sînt compatibile cu φ, atunci $\varphi(\rho_1 \vee \rho_2) = \varphi(\rho_1) \vee (\varphi(\rho_2)$:

Din $\rho_1 \leqslant \rho_1 \vee \rho_2$ şi $\rho_2 \leqslant \rho_1 \vee \rho_2$ obţinem, aplicînd 2.3.3 (3°), $\varphi(\rho_1) \leqslant \varphi(\rho_1 \vee \rho_2)$ şi $\varphi(\rho_2) \leqslant \varphi(\rho_1 \vee \rho_2)$, de unde $\varphi(\rho_1) \vee \varphi(\rho_2) \leqslant \varphi(\rho_1 \vee \rho_2)$. Pentru a stabili şi inegalitatea opusă, fie $x', y' \in V'$, astfel ca $x' \varphi(\rho_1 \vee \rho_2) y'$; aceasta înseamnă că există $x, y \in V$ astfel încît $\varphi(x) = x'$, $\varphi(y) = y'$ şi $x(\rho_1 \vee \rho_2) y$; există deci $a_1, \ldots, a_{2n-1}$ V cu proprietăţile $x \rho_1 a_1$, $a_1 \rho_2 a_2, \ldots, a_{2n-1} \rho_2 y$. Ţinînd seama de 2.3.1, rezultă $\varphi(x)$ $\varphi(\rho_1)$ $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_1)$ $\varphi(\rho_2)$ $\varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_{2n-1})$ $\varphi(\rho_2)$ $\varphi(y)$, adică $x'(\varphi(\rho_1) \vee \varphi(\rho_2)) y'$.

Ca un corolar al acestei proprietăţi şi al lui 2.6.2 rezultă că dacă ρ este o relaţie de echivalenţă pe V compatibilă cu φ, atunci $\varphi(\rho) = \varphi(\rho \vee \rho_{\varphi})$. (Să remarcăm că $\rho \vee \rho_{\varphi} \in E_{\varphi}(V)$, deoarece $\rho_{\varphi} \leqslant \rho \vee \rho_{\varphi}$.)

2.7. Fie V o mulţime nevidă, $\rho \in E(V)$ şi $x \in V$. Submulţimea lui V $\rho(x) = \{z \in V \mid x \rho z\}$ se numeşte clasa de ρ-echivalenţă a elementului x. Pentru două elemente oarecare $x, y \in V$ avem fie $\rho(x) = \rho(y)$, fie $\rho(x) \cap \rho(y) = \emptyset$ (deoarece, dacă $z \in \rho(x) \cap \rho(y)$, atunci $x \rho z$ şi $y \rho z$, de unde $x \rho y$, adică $\rho(x) = \rho(y)$); în plus, este evident că $\bigcup_{x \in V} \rho(x) = V$. O relaţie de echivalenţă pe o mulţime determină deci o descompunere a acesteia în submulţimi disjuncte ce o acoperă; vom utiliza, de aceea, şi termenul de partiţie pentru a desemna o relaţie de echivalenţă.

2.7.1. Dacă $\rho_1, \rho_2 \in E(V)$, atunci $(\rho_1 \wedge \rho_2)(x) = \rho_1(x) \cap \rho_2(x)$. Într-adevăr, relaţia $z(\rho_1 \wedge \rho_2) x$ este echivalentă cu perechea de relaţii $z \rho_1 x$, $z \rho_2 x$, deci $z \in (\rho_1 \wedge \rho_2)(x)$ dacă şi numai dacă $z \in \rho_1(x)$ şi $z \in \rho_2(x)$.

Ţinînd seama de definiţia relaţiilor 1 (partiţia unitate) şi ∞ (partiţia improprie), avem $1(x) = \{x\}$ şi $\infty(x) = V$ pentru orice $x \in V$.

2.7.2. Fie $\varphi: V \to V'$, $\rho_1 \in E(V)$ şi $\rho_2 \in E(V')$. Atunci $\rho_1 \leqslant \rho_2$ (mod. φ) dacă şi numai dacă $\varphi(\rho_1(x)) \subseteq \rho_2(\varphi(x))$ pentru orice $x \in V$. Într-adevăr, următoarele două condiţii sînt evident echivalente:

(i) $x \rho_1 y$ implică $\varphi(x) \rho_2 \varphi(y)$.

(ii) $y \in \rho_1(x)$ implică $\varphi(y) \in \rho_2(\varphi(x))$.

Dar (i) este însăşi definiţia relaţiei $\rho_1 \leqslant \rho_2$ (mod. φ), iar (ii) a incluziunii $\varphi(\rho_1(x)) \in \rho_2(\varphi(x))$.

În particular, dacă $\rho_1, \rho_2 \in E(V)$, atunci $\rho_1 \leqslant \rho_2$ dacă şi numai dacă $\rho_1(x) \subseteq \rho_2(x)$ pentru orice $x \in V$.

Tot din această afirmaţie rezultă că, pentru o relaţie $\rho \in E(V)$ compatibilă cu φ, avem incluziunea $\varphi(\rho(x)) \subseteq \varphi(\rho)(\varphi(x))$ (deoarece $\rho \leqslant \varphi(\rho)$ (mod. φ)).

Dacă $\rho \in E_\varphi(V)$, atunci avem chiar $\varphi(\rho(x)) = \varphi(\rho)(\varphi(x))$ (2.6.3.), iar dacă $\rho \in E(V')$, atunci $\varphi^{-1}(\rho)(x) = \varphi^{-1}(\rho(x)))$.

2.7.3. Fie $\rho \in E(V)$. Mulţimea tuturor claselor de ρ-echivalenţă $\rho(x)$ se numeşte mulţimea factor a lui V prin ρ şi se notează cu V/ρ. Aplicaţia canonică a lui V pe V/ρ care duce fiecare element x în clasa sa de ρ-echivalenţă $\rho(x)$ va fi notată în continuare cu φ_ρ.

În acest fel, am asociat fiecărei relaţii de echivalenţă $\rho \in E(V)$ o aplicaţie $\varphi_\rho : V \to V/\rho$. În 2.5.1 am arătat cum se ataşează unei aplicaţii $\varphi : V \to V'$ o relaţie de echivalenţă $\rho_\varphi \in E(V)$. Această corespondenţă este biunivocă în următorul sens: dacă $\rho \in E(V)$, atunci $\rho_{\varphi_\rho} = \rho$, iar dacă $\varphi : V \to V'$, atunci φ_{ρ_φ} este egal cu φ abstracţie făcînd de compunerea cu o aplicaţie bijectivă; să demonstrăm aceste afirmaţii:

(i) Fie $\rho \in E(V)$. Relaţia $x \, \rho_{\varphi_\rho} \, y$ este echivalentă prin definiţie cu $\varphi_\rho(x) = \varphi_\rho(y)$, care nu înseamnă altceva decît $\rho(x) = \rho(y)$ adică $x \rho y$; rezultă $\rho_{\varphi_\rho} = \rho$.

(ii) Fie $\varphi : V \to V'$ şi să notăm cu ψ_φ aplicaţia lui V/ρ_φ pe V' definită prin: $\psi_\varphi(\rho_\varphi(x)) = \varphi(x)$. (Definiţia este corectă, deoarece din $\rho_\varphi(x) = \rho_\varphi(y)$ rezultă $\varphi(x) = \varphi(y)$), ψ_φ este o bijecţie pentru că $\psi_\varphi(\rho_\varphi(x)) = \psi_\varphi(\rho_\varphi(y))$, adică $\varphi(x) = \varphi(y)$ implică $\rho_\varphi(x) = \rho_\varphi(y)$, şi pentru că φ este o aplicaţie surjectivă.

În plus, este evident că diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_{\rho_\varphi}"'] & & V' \arrow[dl, "\psi_\varphi"] \\ & V/\rho_\varphi & \end{tikzcd}$$

este comutativă, adică $\varphi = \psi_\varphi \, \varphi_{\rho_\varphi}$.

3. MODELE ŞI OMOMORFISME

3.1. Definiţie. Vom numi mulţime de simboluri predicative o mulţime $\mathcal{P} \neq \emptyset$ împreună cu o aplicaţie ***deg*** $: \mathcal{P} \to \mathcal{N}$ (nu neapărat surjectivă). În locul notaţiei ($\mathcal{P}$, ***deg***) vom desemna mulţimea de simboluri predicative doar prin litera $\mathcal{P}$, aplicaţia ***deg*** fiind subînţeleasă. Un element $P \in \mathcal{P}$ astfel încît ***deg*** $P = n$ va fi numit simbol predicativ n — ar.

3.2. Definiţie. Fie V o mulţime oarecare nevidă şi $\mathcal{P}$ o mulţime de simboluri predicative. Vom numi model pe V un cuplu format din mulţimea V (numită vocabularul sau mulţimea de bază a modelului) şi o familie de predicate pe V indexată după $\mathcal{P}$, astfel încît predicatul corespunzător unui simbol n-ar să fie de n argumente. Vom nota un model indicîndu-i numai vocabularul şi mulţimea simbolurilor predicative, nu şi modul în care fiecărui simbol $P \in \mathcal{P}$ (***deg*** $P = n$) i se asociază predicatul (notat pentru simplitate tot cu P) definit pe V^n cu valori în $\{0,1\}$. Astfel, două modele $\mathscr{M} = \mathscr{M}(V, \mathcal{P})$ şi $\mathscr{M}' = \mathscr{M}'(V, \mathcal{P})$ pot diferi (în sensul că predicatul P din $\mathscr{M}$ poate fi altfel definit decît predicatul P din $\mathscr{M}'$) deşi mulţimile simbolurilor predicative şi vocabularele lor sînt identice.

Două modele vor fi numite asemenea dacă au aceeaşi mulţime de simboluri predicative.

3.3. Definiţie. Fie $\mathscr{M}(V, \mathcal{P})$ şi $\mathscr{M}'(V', \mathcal{P})$ două modele asemenea şi $\varphi : V \to V'$. Vom spune că φ este un omomorfism al modelului $\mathscr{M}$ pe modelul $\mathscr{M}'$ (şi vom scrie $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{M}'$ sau $\mathscr{M} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{M}'$) dacă pentru orice $P \in \mathcal{P}$ avem $P \leqslant P$ (mod. φ). Conform cu 2.2 aceasta înseamnă că oricare ar fi $P \in \mathcal{P}$ ($deg\ P = n$) şi $x_1, \ldots, x_n \in V$ cu proprietatea că $P(x_1, \ldots, x_n) = 1$ (în $\mathscr{M}$), avem şi $P(\varphi(x_1) \ldots, \varphi(x_n)) = 1$ (în $\mathscr{M}'$).

3.4. Definiţie. Aplicaţia $\varphi : V \to V'$ se numeşte omomorfism tare al modelului $\mathscr{M}(V, \mathcal{P})$ pe modelul $\mathscr{M}'(V', \mathcal{P})$ dacă pentru orice $P \in \mathcal{P}$ avem $\varphi(P) = P$ (în acest caz vom scrie $\varphi : \mathscr{M} \twoheadrightarrow \mathscr{M}'$ sau $\mathscr{M} \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} \mathscr{M}'$).

Din definiţie rezultă imediat că un omomorfism tare este un omomorfism (2.3.3, 5°), care are în plus proprietatea că din $P(x'_1, \ldots, x'_n) = 1$ ($x'_1, \ldots, x'_n \in V'$) rezultă existenţa unor elemente $x_1, \ldots, x_n \in V$ astfel încît $\varphi(x_i) = x'_i$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$ şi $P(x_1, \ldots, x_n) = 1$ (2.3.1.).

3.5. Definiţie. Modelele asemenea $\mathscr{M}(V, \mathcal{P})$ şi $\mathscr{M}'(V', \mathcal{P})$ se zic izomorfe dacă există o bijecţie $\varphi : V \to V'$ astfel încît φ să fie un omomorfism al lui $\mathscr{M}$ pe $\mathscr{M}'$ şi $\varphi^{-1} : V' \to V$ un omomorfism al lui $\mathscr{M}'$ pe $\mathscr{M}$. (φ se numeşte în acest caz izomorfism iar notaţia folosită va fi $\varphi : \mathscr{M} \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}'$ sau $\mathscr{M} \overset{\varphi}{\xrightarrow{\sim}} \mathscr{M}'$.)

În conformitate cu 3.3, dacă φ este un izomorfism al lui $\mathscr{M}$ pe $\mathscr{M}'$, atunci pentru orice $P \in \mathcal{P}$ avem atît $P \leqslant P$ (mod. φ) cît şi $P \leqslant P$ (mod. φ^{-1}), adică egalităţile $P(x_1, \ldots, x_n) = 1$ şi $P(\varphi(x_1), \ldots \varphi(x_n)) = 1$ sînt echivalente ($x_1, \ldots, x_n \in V$).

În sfîrşit, este evident că o aplicaţie bijectivă φ a lui V pe V' este un izomorfism al lui $\mathscr{M}$ pe $\mathscr{M}'$ dacă şi numai dacă φ este un omomorfism tare al lui $\mathscr{M}$ pe $\mathscr{M}'$.

3.6. Propoziţie. *Compunerea a două omomorfisme (tari) este un omomorfism (tare).*

Demonstraţie. Fie $\mathscr{M}(V, \mathcal{P})$, $\mathscr{M}'$,$(V', \mathcal{P})$ şi $\mathscr{M}''(V'', \mathcal{P})$ trei modele asemenea, $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{M}'$ şi $\varphi' : \mathscr{M}' \to \mathscr{M}''$. Fie de asemenea $P \in \mathcal{P}$ (deg $P = n$) şi $x_1, \ldots, x_n \in V$ astfel ca $P(x_1, \ldots, x_n) = 1$. Deoarece φ este un omomorfism, obţinem $P(\varphi(x_1) \ldots, \varphi(x_n)) = 1$. Dar şi φ' este presupus a fi omomorfism, deci $P(\varphi'(\varphi(x_1)), \ldots, \varphi'(\varphi(x_n))) = 1$, adică $P(\varphi'\varphi(x_1) \ldots, \varphi'\varphi(x_n)) = 1$.

Rezultă $\varphi'\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{M}''$.

Să presupunem acum că φ şi φ' sînt tari şi fie $x''_1, \ldots, x''_n \in V''$ astfel încît $P(x''_1 \ldots, x''_n) = 1$. Există deci în V' elementele $x'_1 \ldots, x'_n$ cu proprietatea că $P(x'_1, \ldots x'_n) = 1$ şi astfel încît $\varphi'(x'_i) = x''_i$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$ (φ' este tare).

Folosind acum faptul că φ este tare, obţinem elementele $x_1, \ldots, x_n \in V$ cu proprietăţile $P(x_1, \ldots, x_n) = 1$ şi $\varphi(x_i) = x'_i$ ($1 \leqslant i \leqslant n$). Deoarece $\varphi'\varphi(x_i) = \varphi'(\varphi(x_i)) = \varphi'(x'_i) = x''_i$, rezultă (3.4) că $\varphi'\varphi : \mathscr{M} \twoheadrightarrow \mathscr{M}''$.

3.7. COROLAR. *Compunerea a două izomorfisme este un izomorfism.*

Demonstrație. Un izomorfism este un omomorfism bijectiv tare, iar compunerea a două bijecții este o bijecție.

3.8. TEOREMĂ. *Fie* $\mathcal{M}_1(V_1, \mathcal{P})$, $\mathcal{M}_2(V_2, \mathcal{P})$, $\mathcal{M}_1'(V_1', \mathcal{P})$, $\mathcal{M}_2'(V_2', \mathcal{P})$ *patru modele asemenea și* ψ_1, ψ_2, φ, φ' *astfel de aplicații ale mulțimilor lor de bază, încît diagrama :*

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi_1"'] & V_2 \arrow[d, "\psi_2"] \\
V_1' \arrow[r, "\varphi'"] & V_2'
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă, adică să avem $\varphi'\psi_1 = \psi_2\varphi$. *Să presupunem în plus că* $\psi_1 : \mathcal{M}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{M}_1'$. *În aceste condiții, dacă* $\varphi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ *și* $\psi_2 : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2'$ *atunci* $\varphi' : \mathcal{M}_1' \to \mathcal{M}_2'$, *iar dacă* $\varphi : \mathcal{M}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{M}_2$ *și* $\psi_2 : \mathcal{M}_2 \twoheadrightarrow M_2'$, *atunci* $\varphi' : \mathcal{M}_1' \twoheadrightarrow \mathcal{M}_2'$.

Demonstrație. Fie $P \in \mathcal{P}$ $(deg\ P = n)$ și $x_1', \ldots, x_n' \in V_1'$ astfel încît $P(x_1', \ldots, x_n') = 1$. ψ_1 este un omomorfism tare, deci există niște elemente $x_1 \ldots, x_n \in V_1$ astfel încît $P(x_1, \ldots, x_n) = 1$ și $\psi_1(x_i) = x_i'$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. φ și ψ_2 fiind omomorfisme, rezultă că $\psi_2\varphi$ este de asemenea un omomorfism (3.6). Avem deci $P(\psi_2\varphi(x_1), \ldots, \psi_2\varphi(x_n)) = 1$ de unde, folosind ipoteza, $P(\varphi'(\psi_1(x_1)), \ldots, \varphi'(\psi_1(x_n))) = 1$, adică $P(\varphi'(x_1'), \ldots, \varphi'(x_n')) = 1$. Am obținut deci $\varphi' : \mathcal{M}_1' \to \mathcal{M}_2'$.

Să presupunem acum că φ și ψ_2 sînt tari, și fie $x_1', \ldots, x_n' \in V_2'$ astfel ca $P(x_1', \ldots x_n') = 1$. $\psi_2\varphi$ este un omomorfism tare (3.6), deci există $x_1, \ldots, x_n \in V_1$ astfel încît $\psi_2(\varphi(x_i)) = x_i'$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$ și $P(x_1, \ldots, x_n) = 1$. Rezultă $P(\psi_1(x_1) \ldots, \psi_1(x_n)) = 1$ (ψ_1 fiind un omomorfism); dar $\varphi'(\psi_1(x_i)) = \psi_2(\varphi(x_i)) = x_i'$, deci $\varphi' : \mathcal{M}_1' \twoheadrightarrow \mathcal{M}_2'$.

4. MODEL FACTOR. MODELE ȘI PARTIȚII

4.1. DEFINIȚIE. Fie $\mathcal{M}(V, \mathcal{P})$ un model și $\rho \in E(V)$. Vom numi model factor modelul $\mathcal{M}/\rho$ $(V/\rho, \mathcal{P})$ asemenea cu $\mathcal{M}$ astfel încît aplicația $\varphi_\rho : V \to V/\rho$ să fie un omomorfism tare al lui $\mathcal{M}$ pe $\mathcal{M}/\rho$. Conform cu 3.4, aceasta revine la următoarea definiție a lui P în $\mathcal{M}/\rho$: $P(\rho(x_1), \ldots, \rho(x_n)) = 1$ dacă și numai dacă pentru orice i există $x_i' \in \rho(x_i)$ astfel încît $P(x_1', \ldots, x_n') = 1$ (în $\mathcal{M}$).

4.2. TEOREMĂ. *Fie* $\mathcal{M}_1(V_1, \mathcal{P})$ *și* $\mathcal{M}_2(V_2, \mathcal{P})$ *două modele asemenea,* $\varphi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$, $\rho_1 \in E(V_1)$ *și* $\rho_2 \in E(V_2)$ *astfel încît* $\rho_1 \leqslant \rho_2$ (mod. φ). *Să notăm cu* ψ *aplicația lui* V_1/ρ_1 *pe* V_2/ρ_2 *definită prin egalitatea* $\psi(\rho_1(x)) = \rho_2(\varphi(x))$.

În aceste condiții, ψ *este un omomorfism al modelului* $\mathcal{M}_1/\rho_1$ *pe modelul* $\mathcal{M}_2/\rho_2$, *iar dacă* φ *este tare, atunci și* ψ *este tare.*

Demonstrație. Să remarcăm întîi că aplicația ψ (evident surjectivă) este bine definită, adică din $\rho_1(x) = \rho_1(y)$ (sau $x \rho_1 y$) rezultă $\rho_2(\varphi(x)) =$

$= \rho_2(\varphi(y))$ (adică $\varphi(x)\rho_2\,\varphi(y)$), acest lucru fiind asigurat de ipoteza $_1 \leqslant \rho_2$ (mod. φ). Să mai observăm că diagrama

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi_{\rho_1}"'] & V_2 \arrow[d, "\varphi_{\rho_2}"] \\
V_1/\rho_1 \arrow[r, "\psi"] & V_2/\rho_2
\end{tikzcd}$$

este comutativă; într-adevăr, $\varphi_{\rho_2}(\varphi(x)) = \rho_2(\varphi(x))$, iar $\psi(\varphi_{\rho_1}(x)) = \psi(\rho_1(x)) = \rho_2(\varphi(x))$. În plus, $\varphi_{\rho_1} : \mathscr{M}_1 \twoheadrightarrow \mathscr{M}_1/\rho_1$. Ipotezele teoremei 3.8. fiind îndeplinite, rezultă concluzia : $\psi : \mathscr{M}_1/\rho_1 \to \mathscr{M}_2/\rho_2$. Cum avem şi $\varphi_{\rho_2} : \mathscr{M}_2 \twoheadrightarrow \mathscr{M}_2/\rho_2$, deducem, tot din 3.8, că dacă φ este tare, ψ este de asemenea tare.

4.3. COROLAR. *Fie* $\mathscr{M}(V, \mathcal{P})$ *un model şi* $\rho_1, \rho_2 \in E(V)$, *astfel ca* $\rho_1 \leqslant \rho_2$. *Atunci, aplicaţia mulţimii* V/ρ_1 *pe* V/ρ_2 *care duce pe* $\rho_1(x)$ *în* $\rho_2(x)$ (*pentru orice* $x \in V$) *este un omomorfism tare al modelului* $\mathscr{M}/\rho_1$ pe $\mathscr{M}/\rho_2$.

Demonstraţie. Luăm în 4.2 $\mathscr{M}_1 = \mathscr{M}_2 = \mathscr{M}$ şi $\varphi = 1_V$. Conform lui 2.2 avem $\rho_1 \leqslant \rho_2$ (mod. 1_V). În plus, 1_V este un omomorfism tare al lui $\mathscr{M}$ pe $\mathscr{M}$ (chiar un izomorfism). Rezultă că aplicaţia ψ definită prin $\psi(\rho_1(x)) = \rho_2(1_V(x)) = \rho_2(x)$ este un omomorfism tare al lui $\mathscr{M}/\rho_1$ pe $\mathscr{M}/\rho_2$.

4.4. PROPOZIŢIE. *Fie* $\mathscr{M}(V, \mathcal{P})$ *şi* $\mathscr{M}'(V', \mathcal{P})$ *două modele asemenea,* φ *un omomorfism* (*omomorfism tare*) *al lui* $\mathscr{M}$ *pe* $\mathscr{M}'$ *şi* $\rho \in E_\varphi(V)$. *Atunci, modelul* $\mathscr{M}/\rho$ *este omomorf pe* (*izomorf cu*) *modelul* $\mathscr{M}'/\varphi(\rho)$ *prin aplicaţia* ψ *definită astfel* : $\psi(\rho(x)) = \varphi(\rho)(\varphi(x))$.

Demonstraţie. Deoarece $\rho \leqslant \varphi(\rho)$ (mod. φ) şi $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{M}'$ ($\varphi : \mathscr{M} \twoheadrightarrow \mathscr{M}'$), putem folosi teorema 4.2 ($\rho_1 = \rho$, $\rho_2 = \varphi(\rho)$). Rezultă $\psi : \mathscr{M}/\rho \to \mathscr{M}'/\varphi(\rho)$ ($\psi : \mathscr{M}/\rho \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}'/\varphi(\rho)$). ψ este şi o aplicaţie injectivă; într-adevăr, $\psi(\rho(x)) = \psi(\rho(y))$ înseamnă $\varphi(\rho)\,(\varphi(x)) = \varphi(\rho)(\varphi(y))$, adică $\varphi(x)\,\varphi(\rho)\,\varphi(y)$; aceasta însă implică $x\rho y$ (2.6.3), deci $\rho(x) = \rho(y)$. În conformitate cu 3.5, în cazul cînd φ este un omomorfism tare, obţinem $\psi : \mathscr{M}/\rho \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}'/\varphi(\rho)$ (ψ este un omomorfism tare, bijectiv).

4.5. PROPOZIŢIE. *Fie* $\mathscr{M}(V, \mathcal{P})$, $\mathscr{M}'(V', \mathcal{P})$ *două modele asemenea şi* $\varphi : V \to V'$. *Atunci, din faptul că* φ *este un omomorfism* (*tare*) *al lui* $\mathscr{M}$ *pe* $\mathscr{M}'$, *rezultă că aplicaţia* $\psi_\varphi : V/\rho_\varphi \to V'$ (2.7.3). *este un omomorfism* (*izomorfism*) *al lui* $\mathscr{M}/\rho_\varphi$ *pe* $\mathscr{M}'$ *şi reciproc.*

Demonstraţie. Să presupunem că $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{M}'$ ($\varphi : \mathscr{M} \twoheadrightarrow \mathscr{M}'$) şi să aplicăm 4.4 ($\rho = \rho_\varphi \in E_\varphi(V)$, $\varphi(\rho_\varphi) = 1$); obţinem $\psi : \mathscr{M}/\rho_\varphi \to \mathscr{M}'/1$ ($\psi : \mathscr{M}/\rho_\varphi \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}'/1$), unde $\psi(\rho_\varphi(x)) = 1(\varphi(x)) = \{\varphi(x)\}$; dar $\mathscr{M}'/1 \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}'$ prin aplicaţia care duce clasa de echivalenţă $1\,(\varphi(x))$ în unicul ei reprezentant $\varphi(x)$. Rezultă $\psi_\varphi : \mathscr{M}/\rho_\varphi \to \mathscr{M}'$ ($\psi_\varphi : \mathscr{M}/\rho_\varphi \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}'$) (3.7) Reciproc, dacă $\psi_\varphi : \mathscr{M}/\rho_\varphi \to \mathscr{M}'$ ($\psi_\varphi : \mathscr{M}/\rho_\varphi \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}'$), atunci $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{M}'$ ($\varphi : \mathscr{M} \twoheadrightarrow \mathscr{M}'$), deoarece $\varphi_{\rho_\varphi} : \mathscr{M} \twoheadrightarrow \mathscr{M}/\rho_\varphi$ *şi* $\varphi = \psi_\varphi\,\varphi_{\rho_\varphi}$ (2.7.3, (ii)).

4.6. Definiţie. Fie $\mathscr{M}(V, \mathcal{P})$ un model şi $\rho \in E(V)$. ρ se numeşt relaţie de congruenţă a modelului $\mathscr{M}$ dacă pentru orice $P \in \mathcal{P}$ (*deg* $P = n$ din $P(x_1, \ldots, x_n) = 1$ şi $x_i' \rho\, x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ rezultă $P(x_1', \ldots, x_n') = 1$

4.7. Teoremă. *Fie* $\mathscr{M}_1(V_1, \mathcal{P}), \mathscr{M}_2(V_2, \mathcal{P}), \mathscr{M}_1'(V_1', \mathcal{P}), \mathscr{M}_2'(V_2', \mathcal{P}$ *patru modele asemenea*, $\varphi' : \mathscr{M}_1' \to \mathscr{M}_2'$, $\psi_1 : \mathscr{M}_1 \to \mathscr{M}_1'$, $\psi_2 : \mathscr{M}_2 \twoheadrightarrow \mathscr{M}$ *şi* $\varphi : V_1 \to V_2$.

Să presupunem că ρ_{ψ_2} este o relaţie de congruenţă a modelului $\mathscr{M}$ şi că $\varphi'\psi_1 = \psi_2\varphi$ (diagrama celor patru aplicaţii este comutativă). În aceste condiţii, φ este un omomorfism al modelului $\mathscr{M}_1$ pe modelul $\mathscr{M}_2$.

Demonstraţie. Fie $P \in \mathcal{P}$ (*deg*. $P = n$) şi $x_1, \ldots, x_n \in V_1$ astfel încît $P(x_1, \ldots, x_n) = 1$. Aplicaţia $\varphi'\psi_1$ fiind un omomorfism (3.6), rezultă $P(\varphi'\psi_1(x_1), \ldots, \varphi'\psi_1(x_n)) = 1$ în $\mathscr{M}_2'$. Dar ψ_2 este un omomorfism tare deci există elementele $x_1', \ldots, x_n' \in V_2$ cu proprietăţile $P(x_1', \ldots, x_n') = 1$ şi $\psi_2(x_i') = \varphi'\psi_1(x_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Deoarece $\varphi'\psi_1 = \psi_2\varphi$, rezultă că $\psi_2(x_i') = \psi_2(\varphi(x_i))$, adică $x_i' \rho_{\psi_2} \varphi(x_i)$ (2.5.1). Folosind acum faptul că ρ_{ψ_2} este o congruenţă a lui $\mathscr{M}_2$, din egalitatea $P(x_1', \ldots, x_n') = 1$ deducem $P(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) = 1$. Conform definiţiei 3.3 avem, deci, $\varphi : \mathscr{M}_1 \to \mathscr{M}_2$.

5. MODEL REDUS. OMOMORFISME ŞI PARTIŢII SATURATE

5.1. Definiţie. Fie $\mathcal{P}$ o mulţime de simboluri predicative. Notînd cu $\mathcal{P}^*$ mulţimea tuturor simbolurilor P_i (unde $P \in \mathcal{P}$, *deg*. $\mathcal{P} \geqslant 1$ şi $1 \leqslant i \leqslant$ *deg* P) şi cu *deg** aplicaţia lui $\mathcal{P}^*$ în $\mathcal{N}$, definită prin egalitatea *deg** $P_i =$ *deg* $P - 1$, am obţinut o nouă mulţime de simboluri predicative, derivată din $\mathcal{P}$.

5.2. Definiţie. Fie $\mathscr{M}(V, P)$ un model şi $x \in V$. Vom numi model redus modelul $\mathscr{M}_x(V, \mathcal{P}^*)$ în care predicatul P_i (*deg* $P = n + 1$) se defineşte astfel: $P_i(x_1, \ldots, x_n) = P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_i, \ldots, x_n)$. (Deoarece P are o definiţie precisă în $\mathscr{M}$, valoarea membrului drept al egalităţii este determinată pentru orice $x_1, \ldots, x_n \in V$.)

5.3. Propoziţie. *Fie* $\mathscr{M}(V, \mathcal{P}), \mathscr{M}'(V', \mathcal{P})$ *două modele asemenea şi* $\varphi : V \to V'$. *Atunci, următoarele afirmaţii sînt echivalente*:

(i) φ *este un omomorfism al lui* $\mathscr{M}$ pe $\mathscr{M}'$.

(ii) *Pentru orice* $x \in V$, φ *este un omomorfism al lui* $\mathscr{M}_x$ *pe* $\mathscr{M}'_{\varphi(x)}$.

Demonstraţie. Să presupunem că $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{M}'$ şi fie $x \in V$. Să luăm $P_i \in \mathcal{P}^*$ (*deg* $P = n + 1$) şi $x_1, \ldots, x_n \in V$ astfel încît $P_i(x_1, \ldots, x_n) = 1$ (în $\mathscr{M}_x$). Aceasta înseamnă că în $\mathscr{M}$ avem $P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_i, \ldots, x_n) = 1$, deci în $\mathscr{M}'$ $P(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{i-1}), \varphi(x), \varphi(x_i), \ldots, \varphi(x_n)) = 1$. Conform definiţiei 5.2, observăm că în $\mathscr{M}'_{\varphi(x)}$ aceasta revine la $P_i(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) = 1$. Rezultă $\varphi : \mathscr{M}_x \to \mathscr{M}'_{\varphi(x)}$.

Să arătăm acum că (ii) implică (i). Fie $P \in \mathcal{P}$ (*deg* $P = n$) şi $x_1, \ldots, x_n \in V$ astfel ca $P(x_1, \ldots, x_n) = 1$; aceasta se poate rescrie în $\mathscr{M}_{x_1}$ ca $P_1(x_2, \ldots, x_n) = 1$, de unde $P_1(\varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)) = 1$ în $\mathscr{M}'_{\varphi(x_1)}$ (am folosit faptul că $\varphi : \mathscr{M}_{x_1} \to \mathscr{M}'_{\varphi(x_1)}$), adică $P(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)) = 1$ în $\mathscr{M}'$. Deci $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{M}'$.

5.4. Definiţie. Fie $\mathscr{M}(V, \mathcal{P})$, $\mathscr{M}'(V', \mathcal{P})$ două modele asemenea şi $\varphi : V \to V'$. Vom spune că φ este un omomorfism saturat al lui $\mathscr{M}$ pe

$\mathcal{M}'$ dacă pentru orice $x \in V$, φ este un omomorfism tare al modelului $\mathcal{M}_x$ pe $\mathcal{M}'_{\varphi(x)}$. Cu 5.3 rezultă că un omomorfism saturat este un omomorfism. În plus, conform lui 3.4 și 5.2, el are proprietatea că din $P(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{i-1}), \varphi(x), \varphi(x_i), \ldots, \varphi(x_n) = 1$ $(x, x_1, \ldots, x_n \in V)$ rezultă existența unor astfel de elemente $x'_1, \ldots, x'_n \in V$ încît $P(x'_1, \ldots, x'_{i-1}, x, x'_i, \ldots, x'_n) = 1$ și $\varphi(x'_j) = \varphi(x_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$. Rezultă, în particular, că un omomorfism saturat este și un omomorfism tare. Pe de altă parte, se observă ușor (3.5) că dacă $\varphi : \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}'$, atunci $\varphi : \mathcal{M}_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}'_{\varphi(x)}$ pentru orice $x \in V$; un izomorfism este deci un omomorfism saturat (5.4).

5.5. PROPOZIȚIE. φ *este un omomorfism saturat al modelului* $\mathcal{M}$ *pe modelul* $\mathcal{M}'$ *dacă și numai dacă pentru orice* $x \in V$ *modelele* $\mathcal{M}x/\rho_\varphi$ *și* $\mathcal{M}'_{\varphi(x)}$ *sînt izomorfe prin aplicația* ψ_φ.

Demonstrație. Afirmația rezultă imediat din 4.5 și din definiția 5.4.

5.6. PROPOZIȚE. *Compunerea a două omomorfisme saturate este un omomorfism saturat.*

Demonstrație. Dacă φ este un omomorfism saturat al modelului $\mathcal{M}$ pe $\mathcal{M}'$ și φ' un omomorfism saturat al lui $\mathcal{M}'$ pe $\mathcal{M}''$, atunci, conform cu 5.4, avem $\varphi : \mathcal{M}_x \twoheadrightarrow \mathcal{M}'_{\varphi(x)}$ și $\varphi' = \mathcal{M}'_{\varphi(x)} \twoheadrightarrow \mathcal{M}''_{\varphi'(\varphi(x))}$. Din 3.6 rezultă atunci $\varphi'\varphi : \mathcal{M}_x \twoheadrightarrow \mathcal{M}''_{\varphi'\varphi(x)}$ și cum x a fost arbitrar, urmează că $\varphi'\varphi$ este un omomorfism saturat al lui $\mathcal{M}$ pe $\mathcal{M}''$.

5.7. DEFINIȚIE. Fie $\mathcal{M}(V, \mathcal{P})$ un model și $\rho_\rho \in E(V)$. ρ se numește o partiție saturată a lui $\mathcal{M}$ dacă aplicația $\varphi_\rho : V \rightarrow V/\rho$ este un omomorfism saturat al modelului $\mathcal{M}$ pe modelul $\mathcal{M}/\rho$.

Conform lui 5.4, aceasta revine la condiția ca pentru orice $x \in V$ să avem $\varphi_\rho : \mathcal{M}_x \twoheadrightarrow (\mathcal{M}/\rho)_{\rho(x)}$. Din 5.5 rezultă că o partiție ρ este saturată dacă și numai dacă $1_{V/\rho} : \mathcal{M}_{x/\rho} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}/\rho)_{\rho(x)}$ oricare ar fi $x \in V$ (2.7.3).

Tot din 5.4 obținem următoarea definiție echivalentă : ρ este o partiție saturată a lui $\mathcal{M}$ dacă în $\mathcal{M}/\rho$ egalitatea $P(\rho(x_1), \ldots, \rho(x_{i-1}), \rho(x), \rho(x_i), \ldots, \rho(x_n)) = 1$ implică existența elementelor $x'_j \in \rho(x_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$ cu proprietatea $P(x'_1, \ldots, x'_{i-1}, x, x'_i, \ldots, x'_n) = 1$.

6. RELAȚIA DE ρ-DOMINARE. STEAUA UNEI PARTIȚII

6.1. DEFINIȚIE. Fie $\mathcal{M}(V, \mathcal{P})$ un model, $\rho \in E(V)$ și $x, y \in V$. Vom spune că x ρ-domină y (în scris $x \overset{\rho}{\rightarrow} y$) relativ la (în) $\mathcal{M}$ dacă aplicația φ_ρ este un omomorfism al modelului $\mathcal{M}_x$ pe modelul $\mathcal{M}_{y/\rho}$. Deoarece $\rho_{\varphi_\rho} = \rho$ și $\psi_{\varphi_\rho} = 1_{V/\rho}$ rezultă că $x \overset{\rho}{\rightarrow} y$ în $\mathcal{M}$ dacă și numai dacă $1_{V/\rho} : \mathcal{M}_{x/\rho} \rightarrow \mathcal{M}_{y/\rho}$ (4.5).

Explicitînd definiția, rezultă că $x\ \rho \overset{\rho}{\rightarrow} y$ în $\mathcal{M}$ dacă $P_i(x_1, \ldots, x_n) = 1$ (în $\mathcal{M}_x$) implică $P_i(\rho(x_1), \ldots, \rho(x_n)) = 1$ (în $\mathcal{M}_{y/\rho}$), adică, revenind la $\mathcal{M}$, dacă din $P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_i, \ldots, x_n) = 1$, rezultă existența elementelor $x'_j\ \rho\ x_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ cu proprietatea $P(x'_1, \ldots, x'_{i-1}, y, x'_i, \ldots, x'_n) = 1$. În continuare, vom folosi pentru $x \overset{1}{\rightarrow} y$ prescurtarea $x \rightarrow y$ (1 fiind partiția unitate a lui V); în acest caz $1_V : \mathcal{M}_x \rightarrow \mathcal{M}_y$.

6.2. PROPOZIȚIE. *Relația de* ρ*- dominare este o relație de preordine, adică reflexivă și tranzitivă.*

Demonstrație. Avem, evident, $x \overset{\rho}{\to} x$ pentru că $1_{V/\rho} : \mathscr{M}_{x/\rho} \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}_{x/\rho}$. Să presupunem acum că $x \overset{\rho}{\to} y$ și $y \overset{\rho}{\to} z$; avem $1_{V/\rho} : \mathscr{M}_{x/\rho} \to \mathscr{M}_{y/\rho}$ și $1_{V/\rho} : \mathscr{M}_{y/\rho} \to \mathscr{M}_{z/\rho}$, de unde, cu 3.6, rezultă $1_{V/\rho} : \mathscr{M}_{x/\rho} \to \mathscr{M}_{z/\rho}$, adică $x \overset{\rho}{\to} z$.

6.3. DEFINIȚIE. Fie $\mathscr{M}$ $(V, \mathcal{P})$ un model și $\rho \in E(V)$. Vom înțelege prin steaua partiției ρ (relativă la $\mathscr{M}$) relația binară ρ^* definită astfel: $x\ \rho^*\ y$ dacă și numai dacă $x \overset{\rho}{\to} y$ și $y \overset{\rho}{\to} x$. Din 6.1 și 3.5 rezultă că $x\ \rho^*\ y$ dacă și numai dacă $1_{V/\rho} : \mathscr{M}_{x/\rho} \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}_{y/\rho}$. Se vede ușor că relația ρ^* este reflexivă, simetrică și tranzitivă (6.2), deci $\rho^* \in E(V)$. Evident, steaua unei partiții din $E(V)$ într-un model poate diferi de steaua aceleiași partiții luată în alt model, cu același vocabular V.

O partiție a lui $\mathscr{M}$ cu un rol special este steaua partiției unitate; o vom nota în continuare cu $\leftrightarrow$; avem deci $1^* = \leftrightarrow$. În această notație, $x \leftrightarrow y$ dacă și numai dacă $x \to y$ și $y \to x$, adică dacă și numai dacă $1_V : \mathscr{M}_x \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}_y$.

6.4. PROPOZIȚIE. *Fie* $\mathscr{M}$ $(V, \mathcal{P})$ *un model și* $\rho \in E(V)$. *Atunci,* ρ *este o relație de congruență a modelului* $\mathscr{M}$ *dacă și numai dacă* $\rho \leqslant \leftrightarrow$.

Demonstrație. Să presupunem că ρ este o congruență a lui $\mathscr{M}$ și fie $x, y \in V$ astfel încît $x\ \rho\ y$. Să luăm $P_i \in P^*$ (*deg* $P = n$) și $x_1 \ldots, x_n \in V$ astfel ca $P_i(x_1, \ldots, x_n) = 1$ (în $\mathscr{M}_x$). Avem deci în $\mathscr{M}$ $P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_i, \ldots, x_n) = 1$ și, deoarece $x_j\ \rho\ x_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ și $x\ \rho\ y$, rezultă (4.6.) $P(x_1, \ldots x_{i-1}, y, x_i, \ldots, x_n) = 1$ în $\mathscr{M}$, adică $P_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots\ldots, x_n) = 1$ în $\mathscr{M}_y$. Aceasta înseamnă că $1_V : \mathscr{M}_x \to \mathscr{M}_y$; analog, $1_V : \mathscr{M}_y \to \mathscr{M}_x$ (căci și $y\ \rho\ x$), deci $x \leftrightarrow y$. Am arătat astfel că $\rho \leqq \leftrightarrow$.

Reciproc, dacă $\rho \leqq \leftrightarrow$, să luăm $P \in \mathcal{P}$ (*deg* $P = n$) și $x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n \in V$ cu proprietățile $P(x_1, \ldots, x_n) = 1$ și $x'_i\ \rho\ x_i$ pentru $1 \leqq i \leqq n$; prin ipoteză avem deci $x'_i \leftrightarrow x_i$ și în particular $x_i \to x'_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. În $\mathscr{M}_{x_1}$ avem $P_1(x_2, \ldots, x_n) = P(x_1, \ldots, x_n) = 1$, de unde, deoarece $1_V : \mathscr{M}_{x_1} \to \mathscr{M}_{x'_1}$ $(x_1 \to x'_1)$, rezultă $P_1(x_2, \ldots, x_n) = 1$ în $\mathscr{M}'_{x1}$, adică $P(x'_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ în $\mathscr{M}$. În mod analog, avem în $\mathscr{M}_{x_2}$ $P_2(x'_1, x_3, \ldots, x_n) = P(x'_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 1$ și cum $1_V : \mathscr{M}_{x_2} \to \mathscr{M}_{x'_2})$, $(x_2 \to x'_2)$, rezultă că $P_2(x'_1, x_3, \ldots x_n) = 1$ în $\mathscr{M}_{x'_2}$, adică $P(x'_1\ x'_2, x_3 \ldots, x_n) = 1$ în $\mathscr{M}$. Continuînd în același fel, obținem în încă $n - 2$ pași, $P(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = 1$. Cu 4.6 conchidem că ρ este o relație de congruență a lui $\mathscr{M}$.

6.5. COROLAR. *Steaua partiției unitate* $(\leftrightarrow)$ *este cea mai mare relație de congruență a modelului* $\mathscr{M}$.

6.6. TEOREMĂ. *Fie* $\mathscr{M}(V, \mathcal{P})$ și $\mathscr{M}'(V', \mathcal{P})$ *două modele asemenea,* φ *un omomorfism saturat al lui* $\mathscr{M}$ *pe* $\mathscr{M}'$, $\rho_1 \in E(V)$ *și* $\rho_2 \in E(V')$. *Atunci,* $\rho_1 \leqq \rho_2$ (mod. φ) *implică* $\overset{\rho_1}{\to} \leqq \overset{\rho_2}{\to}$ (mod. φ).

Demonstrație. Să presupunem că $x \overset{\rho_1}{\to} y$ în $\mathscr{M}$, adică $\varphi_{\rho_1} : \mathscr{M}_x \to \mathscr{M}_{y/\rho_1}$. Punînd $\mathscr{M}_1 = \mathscr{M}_x$, $\mathscr{M}_2 = \mathscr{M}_{y/\rho}$, $\mathscr{M}'_1 = \mathscr{M}'_{\varphi(x)}$, $\mathscr{M}'_2 = \mathscr{M}'_{\varphi(y)/\rho_2}$, $\varphi = \varphi_{\rho_1}$, $\varphi' = \varphi_{\rho_2}$, $\psi_1 = \varphi$ și $\psi_2 = \psi$(ψ fiind definit ca în 4.2, adică $\psi(\rho_1(z)) = \rho_2(\varphi(z))$), observăm că $\varphi'\psi_1 = \psi_2\varphi$ (într-adevăr, $\varphi'\psi_1(z) = \varphi_{\rho_2}(\varphi(z)) = \rho_2(\varphi(z))$, iar $\psi_2\varphi(z) = \psi(\varphi_{\rho_1}(z)) = \psi(\rho_1(z)) = \rho_2(\varphi(z))$), $\varphi : \mathscr{M}_1 \to \mathscr{M}_2$ (deoarece $x \overset{\rho_1}{\to} y$), $\psi_1 : \mathscr{M}_1 \twoheadrightarrow \mathscr{M}'_1$ (conform definiției omomorfismului saturat) și $\psi_2 : \mathscr{M}_2 \twoheadrightarrow \mathscr{M}'_2$ (deoarece, φ fiind saturat, $\varphi : \mathscr{M}_y \twoheadrightarrow \mathscr{M}'_{\varphi(y)}$

şi, cu 4.2, $\psi : \mathcal{M}_{y/\rho_1} \twoheadrightarrow \mathcal{M}'_{\varphi(y)/\rho_2})$. Putem aplica deci teorema 3.8 şi obţinem, $\varphi' : \mathcal{M}'_1 \to \mathcal{M}'_2$, adică $\varphi_{\rho_2} : \mathcal{M}'_{\varphi(x)} \to \mathcal{M}'_{\varphi(y)/\rho_2}$, ceea ce înseamnă tocmai $\varphi(x) \overset{\rho_2}{\to} \varphi(y)$ în $\mathcal{M}'$. Faptul că din $x \overset{\rho_1}{\to} y$ rezultă $\varphi(x) \overset{\rho_2}{\to} \varphi(y)$ se mai poate scrie, ţinînd seama de 2.2, $\overset{\rho_1}{\to} \leqq \overset{\rho_2}{\to}$ (mod. φ).

6.7. Corolar. *Dacă* φ *este un omomorfism saturat al modelului* $\mathcal{M}$ $(V, \mathcal{P})$ *pe modelul* $\mathcal{M}'$ $(V', \mathcal{P})$, *atunci* $\rho_1 \leqq \rho_2$ (mod. φ) *implică* $\rho_1^* \leqq \leqq \rho_2^*$ (mod. φ).

Demonstraţie. Fie $x, y \in V$ astfel încît $x\ \rho_1^*\ y$; aceasta înseamnă $x \overset{\rho_1}{\to} y$ şi $y \overset{\rho_1}{\to} x$; conform lui 6.6 avem deci, atît $\varphi(x) \overset{\rho_2}{\to} \varphi(y)$ cît şi $\varphi(y) \overset{\rho_2}{\to} \varphi(x)$, adică $\varphi(x)\ \rho_2^*\ \varphi(y)$.

6.8. Corolar. *Fie* $\mathcal{M}(V, \mathcal{P})$ *un model şi* $\rho_1, \rho_2 \in E(V)$ *astfel încît* $\rho_1 \leqslant \rho_2$. *Atunci* $\overset{\rho_1}{\to} \leqq \overset{\rho_2}{\to}$ *şi* $\rho_1^* \leqq \rho_2^*$.

Demonstraţie. Folosim 6.6 şi 6.7 punînd $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$ şi $\varphi = 1_V$; apoi ţinem seama de 2.2.

6.9. Teoremă. *Fie* $\mathcal{M}(V, \mathcal{P})$ *şi* $\mathcal{M}'(V', \mathcal{P})$ *două modele asemenea,* φ *un omomorfism saturat al lui* $\mathcal{M}$ *pe* $\mathcal{M}'$ *şi* $\rho \in E_\varphi(V)$ $(\rho_\varphi \leqq \rho)$. *În aceste condiţii, avem* $x \overset{\rho}{\to} y$ *dacă şi numai dacă* $\varphi(x) \overset{\rho(\varphi)}{\to} \varphi(y)$.

Demonstraţie. Observînd că $\rho \leqq \varphi(\rho)$ (mod. φ), putem aplica teorema 6.6 $(\rho_1 = \rho,\ \rho_2 = \varphi(\rho))$; rezultă că $x \overset{\rho}{\to} y$ implică $\varphi(x) \overset{\varphi(\rho)}{\to} \varphi(y)$. Să păstrăm notaţiile din demonstraţia acestei teoreme. În condiţiile noastre, ψ este un izomorfism al lui $\mathcal{M}_{y/\rho}$ pe $\mathcal{M}'_{\varphi(y)/\varphi(\rho)}$ (am aplicat 4.4, ştiind că $\varphi : \mathcal{M}_y \twoheadrightarrow \mathcal{M}'_{\varphi(y)})$, deci $\rho_{\Psi_2} = 1$ (2.5.1). Din 6.4 deducem că ρ_{Ψ_2} este o congruenţă a lui $\mathcal{M}_2$ $(1 \leqq \leftrightarrow)$. Ne situăm deci, în condiţiile teoremei 4.7; presupunînd că $\varphi(x) \overset{\varphi(\rho)}{\to} \varphi(y)$, adică $\varphi_{\varphi(\rho)} = \mathcal{M}'_{\varphi(x)} \to \mathcal{M}'_{\varphi(y)/\varphi(\rho)}$, $(\varphi' : \mathcal{M}'_1 \to M'_2)$, deducem $\varphi_\rho : \mathcal{M}_x \to \mathcal{M}_{y/\rho}$ $(\varphi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2)$, adică $x \overset{\rho}{\to} y$.

6.10. Corolar. *Dacă* φ *este un omomorfism saturat al modelului* $\mathcal{M}(V, \mathcal{P})$ *pe modelul* $\mathcal{M}'(V', \mathcal{P})$ *şi* $\rho \in E\ (V')$, *atunci* $x \xrightarrow{\varphi^{-1}(\rho)} y$ *este echivalent cu* $\varphi(x) \overset{\rho}{\to} \varphi(y)$.

Demonstraţie. $\varphi^{-1}(\rho) \in E_\varphi\ (V)$ şi $\varphi(\varphi^{-1}(\rho)) = \rho$ (2.6.4).

6.11. Corolar. *Dacă* φ *este un omomorfism saturat al lui* $\mathcal{M}$ *pe* $\mathcal{M}'$, *atunci* $x \overset{\rho_\varphi}{\to} y$ *este echivalent cu* $\varphi(x) \to \varphi(y)$.

Demonstraţie. Punem în 6.10 $\rho = 1$; observăm că $\varphi^{-1}(1) = \rho_\varphi$ (2.5.1) şi că $\overset{1}{\to} = \to$ prin convenţie.

6.12. Corolar. *Fie* ρ *o partiţie saturată a modelului* $\mathcal{M}$. *Atunci* $x \overset{\rho}{\to} y$ *dacă şi numai dacă* $\rho(x) \to \rho(y)$.

Demonstraţie. φ_ρ este un omomorfism saturat al lui $\mathcal{M}$ pe $\mathcal{M}/\rho$ (5.7.). În plus, $\rho_{\varphi_\rho} = \rho$ (2.7.3), $\varphi_\rho\ (x) = \rho\ (x)$ şi $\varphi_\rho\ (y) = \rho\ (y)$. Folosim acum 6.11.

6.13. PROPOZIȚIE. *Dacă* φ *este un omomorfism saturat al modelului* $\mathcal{M}$ *pe modelul* $\mathcal{M}'$ *și* ρ *o partiție a lui* $\mathcal{M}$ *compatibilă cu* φ (2.5.2), *atunci* $x \xrightarrow{\rho} y$ *implică* $\varphi(x) \xrightarrow{\varphi(\rho)} \varphi(y)$.

Demonstrație. Avem $\rho \leqslant \rho \vee \rho_\varphi$, deci $\xrightarrow{\rho} \leqslant \xrightarrow{\rho \vee \rho_\varphi}$ (6.8); aceasta înseamnă că $x \xrightarrow{\rho} y$ implică $x \xrightarrow{\rho \vee \rho_\varphi} y$. Dar ρ V $\rho_\varphi \in E_\varphi\ (V)$, deci cu 6.9 obținem $\varphi(x) \xrightarrow{\varphi(\rho \vee \rho_\varphi)} \varphi\ (y)$; avem însă $\varphi(\rho \vee \rho_\varphi) = \varphi\ (\rho)$ (2.6.5), de unde $\varphi(x) \xrightarrow{\varphi(\rho)} \varphi\ (y)$.

6.14. TEOREMĂ. *Fie* $\mathcal{M}(V, \mathcal{P})$, $\mathcal{M}'(V', \mathcal{P})$ *două modele asemenea și* $\varphi : M \twoheadrightarrow \mathcal{M}'$. φ *este un omomorfism saturat dacă și numai dacă* $\rho_\varphi \leqslant \rho_\varphi^*$.

Demonstrație. Să presupunem că φ este saturat și fie $x, y \in V$ astfel ca $x \rho_\varphi y$; atunci $\varphi(x) = \varphi(y)$ și, cu 6.2, $\varphi(x) \to \varphi(y)$ și $\varphi(y) \to \varphi(x)$. Cu ajutorul lui 6.11 deducem $x \xrightarrow{\rho_\varphi} y$ și $y \xrightarrow{\rho_\varphi} x$, deci $x\, \rho_\varphi^*\, y$; am obținut $\rho_\varphi \leqslant \rho_\varphi^*$. Reciproc, să admitem că $\rho_\varphi \leqslant \rho_\varphi^*$ și să demonstrăm că φ este saturat. Deoarece $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$, rezultă (5.3) că oricare ar fi $x \in V$ $\varphi : \mathcal{M}_x \to \mathcal{M}'_{\varphi(x)}$. Să arătăm că $\varphi : \mathcal{M}_x \twoheadrightarrow \mathcal{M}'_{\varphi(x)}$. Fie $P_i \in \mathcal{P}^*$ ($deg\ P = n + 1$) și $x_1, \ldots, x_n \in V$ astfel încît $P_i(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) = 1$ în $\mathcal{M}'_{\varphi(x)}$, adică $P(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{i-1}), \varphi(x), \varphi(x_i), \ldots, \varphi(x_n)) = 1$ în $\mathcal{M}'$. Cum φ este un omomorfism tare, rezultă că există $x'_1, \ldots, x'_n, x' \in V$ astfel încît $P(x'_1, \ldots, x'_{i-1}, x', x'_i, \ldots, x'_n) = 1$ (în $\mathcal{M}$), $\varphi(x'_j) = \varphi(x_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$ și $\varphi(x') = \varphi(x)$. Ultima egalitate arată că $x'\, \rho_\varphi\, x$; aceasta implică, conform ipotezei, $x'\, \rho_\varphi^*\, x$, de unde $x' \xrightarrow{\rho_\varphi} x$ (în $\mathcal{M}$). Această relație, împreună cu egalitatea $P(x'_1, \ldots, x'_{i-1}, x', x'_i, \ldots, x'_n) = 1$, implică (conform uneia din formulările echivalenței ale definiției 6.1) existența unor elemente $x''_1, \ldots, x''_n \in V$ cu proprietățile $x''_j\, \rho_\varphi\, x'_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ și $P(x''_1, \ldots, x''_{i-1}, x, x''_i, \ldots\ldots, x''_n) = 1$ (în $\mathcal{M}$). Din $P_i(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) = 1$ în $\mathcal{M}'_{\varphi(x)}$ am obținut deci $x''_1, \ldots, x''_n \in V$ astfel încît $P_i(x''_1, \ldots, x''_n) = 1$ în $\mathcal{M}_x$ și $\varphi(x''_j) = \varphi(x'_j) = \varphi(x_j)$ pentru $1 \leqslant j \leqslant n$. Rezultă $\varphi : \mathcal{M}_x \twoheadrightarrow \mathcal{M}'_{\varphi(x)}$, și cum x a fost arbitrar, φ este saturat.

6.15. Corolar. $\rho \in E\ (V)$ *este o partiție saturată a modelului* $\mathcal{M}\ (V, \mathcal{P})$ *dacă și numai dacă* $\rho \leqslant \rho^*$.

Demonstrație. Ținem seama de 5.7 și de 2.7.3 ($\rho_{\varphi_\rho} = \rho$).

6.16. PROPOZIȚIE. *O relație de congruență este o partiție saturată.*

Demonstrație. Fie ρ o relație de congruență. Cu 6.4 avem $\rho \leqslant \longleftrightarrow$. Dar $1 \leqslant \rho$, deci $1^* \leqslant \rho^*$ (6.8) Ținînd seama că $1^* = \longleftrightarrow$ (6.3), obținem $\rho \leqslant \rho^*$. Acum folosim 6.15.

6.17. PROPOZIȚIE. *Dacă* ρ *este o partiție saturată a modelului* $\mathcal{M}$, *atunci partiția* ρ^* *este de asemenea saturată.*

Demonstrație. Avem $\rho \leqslant \rho^*$ (6.15), de unde, folosind 6.8, $\rho^* \leqslant \rho^{**}$; tot cu 6.15 rezultă că ρ^* este saturată.

6.18. PROPOZIȚIE. *Dacă* ρ_1 *și* ρ_2 *sînt partiții saturate ale modelului* $\mathcal{M}$, *atunci partiția* $\rho_1 \vee \rho_2$ *este de asemenea saturată.*

Demonstraţie. Avem evident $\rho_1 \leqslant \rho_1 \vee \rho_2$ şi $\rho_2 \leqslant \rho_1 \vee \rho_2$ (2.4.1). Cu 6.8 obţinem $\rho_1^* \leqslant (\rho_1 \vee \rho_2)^*$ şi $\rho_2^* \leqslant (\rho_1 \vee \rho_2)^*$. Folosind din nou 2.4.1, rezultă $\rho_1^* \vee \rho_2^* \leqslant (\rho_1 \vee \rho_2)^*$. Ipoteza afirmă, însă, că $\rho_1 \leqslant \rho_1^*$ şi $\rho_2 \leqslant \rho_2^*$ (6.15), de unde $\rho_1 \vee \rho_2 \leqslant \rho_1^* \vee \rho_2^*$. Obţinem în final $\rho_1 \vee \rho_2 \leqslant (\rho_1 \vee \rho_2)^*$, relaţie ce arată că $\rho_1 \vee \rho_2$ este saturată (6.15).

6.19. TEOREMĂ. *Fie $\mathcal{M}(V, \mathcal{P})$, $\mathcal{M}'(V' \mathcal{P})$, două modele asemenea şi φ un omomorfism saturat al lui $\mathcal{M}$ pe $\mathcal{M}'$. Dacă $\rho \in E_\varphi(V)$, atunci $\varphi(\rho)^* = \varphi(\rho^*)$.*

Demonstraţie. Deoarece $\rho \in E_\varphi(V)$ avem $\rho_\varphi \leqslant \rho$, de unde $\rho_\varphi^* \leqslant \rho^*$ (6.8); dar φ este saturat, deci $\rho_\varphi \leqslant \rho_\varphi^*$ (6.14); rezultă $\rho_\varphi \leqslant \rho^*$, adică $\rho^* \in E_\varphi(V)$. Putem deduce, deci, că $\varphi(x)\ \varphi(\rho^*)\ \varphi(y)$ este echivalent cu $x \rho^* y$ (2.6.3), adică cu $x \xrightarrow{\rho} y$ şi $y \xrightarrow{\rho} x$. Aceste din urmă relaţii sînt echivalente, la rîndul lor, în virtutea lui 6.9., cu $\varphi(x) \xrightarrow{\varphi(\rho)} \varphi(y)$ şi $\varphi(y) \xrightarrow{\varphi(\rho)} \varphi(x)$, adică cu $\varphi(x)\ \varphi(\rho)^*\ \varphi(y)$. Rezultă $\varphi(\rho^*) = \varphi(\rho)^*$.

6.20. COROLAR. *Dacă φ este un omomorfism saturat al modelului $\mathcal{M}(V, \mathcal{P})$ pe modelul $\mathcal{M}'(V', \mathcal{P})$ şi $\rho \in E(V')$, atunci $\varphi^{-1}(\rho)^* = \varphi^{-1}(\rho^*)$.*

Demonstraţie. $\varphi^{-1}(\rho) \in E_\varphi(V)$. Din 6.19 rezultă $\varphi(\varphi^{-1}(\rho))^* = \varphi(\varphi^{-1}(\rho)^*)$, adică $\rho^* = \varphi(\varphi^{-1}(\rho)^*)$; dar $\varphi^{-1}(\rho)^* \in E_\varphi(V)$, deci $\varphi^{-1}(\rho^*) = \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(\rho)^*)) = \varphi^{-1}(\rho)^*$ (2.6.4).

6.21. PROPOZIŢIE. *Fie $\mathcal{M}(V, \mathcal{P})$ un model şi $\rho_1, \rho_2 \in E(V)$ astfel încît $\rho_1 \leqslant \rho_2$. Dacă ρ_1 şi ρ_2 sînt partiţii saturate ale lui $\mathcal{M}$, atunci $\varphi_{\rho_1}(\rho_2)$ este o partiţie saturată a lui $\mathcal{M}/\rho_1$.*

Demonstraţie. Prin ipoteză φ_{ρ_1} este saturat ($\rho_{\varphi_{\rho_1}} = \rho_1$ şi ρ_1 este saturată), $\rho_2 \in E_{\varphi_{\rho_1}}(V)$ ($\rho_1 \leqslant \rho_2$) şi $\rho_2 \leqslant \rho_2^*$ (6.15). Rezultă $\varphi_{\rho_1}(\rho_2) \leqslant \varphi_{\rho_1}(\rho_2^*) = \varphi_{\rho_1}(\rho_2)^*$ (2.3.3., 3° şi 6.19). Aplicăm acum 6.15.

6.22. PROPOZIŢIE. *Fie $\mathcal{M}(V, \mathcal{P})$ un model, ρ_1 o partiţie saturată a lui $\mathcal{M}$ şi ρ_2 o partiţie saturată a lui $\mathcal{M}/\rho_1$. Atunci, partiţia $\varphi_{\rho_1}^{-1}(\rho_2)$ este o partiţie saturată a lui $\mathcal{M}$.*

Demonstraţie. φ_{ρ_1} este un omomorfism saturat al lui $\mathcal{M}$ pe $\mathcal{M}/\rho_1$ deci $\varphi_{\rho_1}^{-1}(\rho_2)^* = \varphi_{\rho_1}^{-1}(\rho_2^*)$ (6.20). Dar $\rho_2 \leqslant \rho_2^*$, deci $\varphi_{\rho_1}^{-1}(\rho_2) \leqslant \varphi_{\rho_1}^{-1}(\rho_2^*)$ (2.3.3, 4°), adică $\varphi_{\rho_1}^{-1}(\rho_2) \leqslant \varphi_{\rho_1}^{-1}(\rho_2)^*$.

6.23. PROPOZIŢIE. *Fie $\mathcal{M}(V, \mathcal{P})$ un model şi $\rho \in E(V)$. Atunci $\varphi_{\rho^*}(\rho \vee \rho^*)^* = \varphi_{\rho^*}((\rho \vee \rho^*)^*)$.*

Demonstraţie. Vom arăta întîi că relaţiile $x \xrightarrow{\rho \vee \rho^*} y$ şi $\rho^*(x) \xrightarrow{\varphi_{\rho^*}(\rho \vee \rho^*)} \rho^*(y)$ sînt echivalente ($x, y \in V$). Să presupunem întîi că $x \xrightarrow{\rho \vee \rho^*} y$. Vom folosi definiţia 6.1 explicitată. Fie deci $P \in \mathcal{P}$ ($deg\ P = n + 1$) şi $\rho^*(x_1), \ldots, \rho^*(x_n) \in \mathcal{M}/\rho^*$, astfel încît $P(\rho^*(x)_1, \ldots, \rho^*(x_{i-1}), \rho^*(x), \rho^*(x_i), \ldots, \rho^*(x_n)) = 1$ (în $\mathcal{M}/\rho^*$). Există (4.1) elementele $x'_1, \ldots, x'_n, x' \in V$ astfel încît $P(x'_1, \ldots, x'_{i-1}, x', x'_i, \ldots, x'_n) = 1$ (în $\mathcal{M}$), $x'_j \rho^* x_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ şi $x'\ \rho^* x$.

Rezultă $x' \xrightarrow{\rho} x$, şi, cu 6.8, $x' \xrightarrow{\rho \vee \rho^*} x$. Folosind acum ipoteza ($x \xrightarrow{\rho \vee \rho^*} y$) şi 6.2, avem $x' \xrightarrow{\rho \vee \rho^*} y$; există deci n elemente $x''_1, \ldots, x''_n \in V$ astfel încît $P(x''_1 \ldots, x''_{i-1}, y, x''_i, \ldots, x''_n) = 1$ (în $\mathcal{M}$) şi $x''_j (\rho \vee \rho^*) x'_j$.

$\varphi_{\rho^*}:\mathcal{M}\to\mathcal{M}_{/\rho^*}$, deci $P(\rho^*(x_1''),\ldots,\rho^*(x_{i-1}''),\ \rho^*(y),\ \rho^*(x_i''),\ldots,\rho^*(x_n''))= =1$ în $\mathcal{M}_{/\rho^*}$. Dar $x_j\ \rho^*\ x_j'$, şi $x_j'(\rho\vee\rho^*)\,x_j''$, deci $x_j(\rho^*\vee\rho\vee\rho^*)\,x_j''$ (2.4.1) adică $x_j(\rho\vee\rho^*)\,x_j''$ $(1\leqslant j\leqslant n)$, relaţie echivalentă cu $\rho^*(x_j)\ \varphi_{\rho^*}(\rho\vee\rho^*$ $\rho^*(x_j'')$ (2.6.3).

Pornind de la egalitatea $P(\rho^*(x_1),\ldots,\rho^*(x),\ldots,\rho^*(x_n))=1$, an ajuns la $P(\rho^*(x_1''),\ldots,\rho^*(y),\ldots,\rho^*(x_n''))=1$, unde $\rho^*(x_j'')\ \varphi_{\rho^*}(\rho\vee\rho^*$ $\rho^*(x_j)$ $(j=1,2,\ldots,n)$.

Conform lui 6.1 rezultă $\rho^*(x)\xrightarrow{\varphi_{\rho^*}(\rho\vee\rho^*)}\rho^*(y)$ în $\mathcal{M}_{/\rho^*}$.

Presupunînd acum această relaţie valabilă să arătăm că $x\xrightarrow{\rho\vee\rho^*}y$ Fie $P\in\mathcal{P}$ (*deg* $P=n+1$) şi $x_1,\ldots,x_n\in V$ astfel încît $P(x_1,\ldots,x_{i-1}$ $x,\ x_i,\ldots,x_n)=1$ (în $\mathcal{M}$). Cu 4.1 avem $P(\rho^*(x_1),\ldots,\rho^*(x_{i-1}),\ \rho^*(x)$ $\rho^*(x_i),\ldots,\rho^*(x_n))=1$ în $\mathcal{M}_{/\rho^*}$, de unde, utilizînd ipoteza, rezultă $P(\rho^*(x_1'),\ldots,\rho^*(x_{i-1}'),\ \rho^*(y),\ \rho^*(x_i'),\ldots,\rho^*(x_n'))=1$, unde $x_1',\ldots,x_n'\in\in V$ şi $\rho^*(x_j')\ \varphi_{\rho^*}(\rho\vee\rho^*)\ \rho^*(x_j)$ $(1\leqslant j\leqslant n)$, adică $x_j'(\rho\vee\rho^*)\,x_j$ (2.6.3). Folosind definiţia 4.1, obţinem $x_j''\in\rho^*(x_j')$ $(j=1,\ldots,n)$ şi $y'\in\rho^*(y)$ astfel ca $P(x_1'',\ldots,x_{i-1}'',y',x_i'',\ldots,x_n'')=1$ în $\mathcal{M}$. Reţinem că $y'\overset{\rho}{\to}y$; rezultă (6.1) $x_1''',\ldots,x_n'''\in V$ cu proprietăţile $P(x_1''',\ldots,x_{i-1}''',\ y,\ x_i''',\ldots,x_n''')=1$ şi $x_j'''\ \rho\ x_j''$ $(1\leqslant j\leqslant n)$.

Deoarece $x_j'''\ \rho\ x_j''$, $x_j''\ \rho^*\ x_j'$ şi $x_j'(\rho\vee\rho^*)\ x_j$ $(j=1,\ldots,n)$, avem $x_j'''(\rho\vee\rho^*)\,x_j$, deci $x\xrightarrow{\rho\vee\rho^*}y$.

Conform definiţiei 6.3, relaţiile $x(\rho\vee\rho^*)^*y$ şi $\rho^*(x)\ \varphi_{\rho^*}(\rho\vee\rho^*)^*\rho^*(y)$ se implică reciproc. Prima dintre ele este însă echivalentă cu $\rho^*(x)\ \varphi_{\rho^*}((\rho\vee\rho^*)^*)\ \rho^*(y)$, deoarece $\rho^*\leqslant(\rho\vee\rho^*)^*$ (am aplicat 6.8 inegalităţii evidente $\rho\leqslant\rho\vee\rho^*$). Rezultă că $\rho^*(x)\ \varphi_{\rho^*}((\rho\vee\rho^*)^*)\ \rho^*(y)$ dacă şi numai dacă $\rho^*(x)\ \varphi_{\rho^*}(\rho\vee\rho^*)^*\ \rho^*(y)$, adică $\varphi_{\rho^*}((\rho\vee\rho^*)^*)= =\varphi_{\rho^*}(\rho\vee\rho^*)^*$.

6.24. PROPOZIŢIE. *Fie* $\mathcal{M}(V,\mathcal{P})$ *un model şi* $\rho\in E(V)$. *Atunci,* $\varphi_{(\rho\wedge\rho^*)}(\rho)^*=\varphi_{(\rho\wedge\rho^*)}(\rho^*)$.

Demonstraţie. Vom arăta întîi, ca şi mai sus, că $x\quad\rho\overset{\rho}{\to}y$ implică $(\rho\vee\rho^*)(x)\xrightarrow{\varphi_{(\rho\wedge\rho^*)}(\rho)}(\rho\wedge\rho^*)(y)$ şi reciproc. Să presupunem că $x\overset{\rho}{\to}y$ şi fie $P\in\mathcal{P}$ (*deg* $P=n+1$) şi $x_1,\ldots,x_n\in V$ astfel încît $P((\rho\wedge\rho^*)(x_1),\ldots$ $\ldots,(\rho\wedge\rho^*)(x_{i-1}),\ (\rho\wedge\rho^*)(x),\ (\rho\wedge\rho^*)(x_i),\ldots,(\rho\wedge\rho^*)(x_n))=1$ în $\mathcal{M}_{/(\rho\wedge\rho^*)}$.

Rezultă $x',\ x_1',\ldots,x_n'\in V$ astfel încît $P(x'_1,\ldots,x_{i-1}',\ x',\ x_i',\ldots$ $\ldots,x_n')=1$ (în $\mathcal{M}$), $x_j'(\rho\wedge\rho^*)\ x_j$ $(j=1,\ldots n)$ şi $x'\ (\rho\wedge\rho^*)\,x$ (4.1). Avem, în particular, $x_j'\ \rho\ x_j$ şi $x'\ \ \rho^*\ x$ (2.4.1), de unde $x'\overset{\rho}{\to}x$ (6.3); dar $x\overset{\rho}{\to}y$, de unde $x'\overset{\rho}{\to}y$ (6.2). Există deci $x_1'',\ldots,x_n''\in V$ astfel încît $P(x_1'',\ldots,x_{i-1}'',\ y)$ şi $x_i'',\ldots,x_n'')=1$ (în $\mathcal{M}$) şi $x_j''\ \rho\ x_j'$ $(j=1,\ldots,n)$. Cum $\varphi_{(\rho\wedge\rho^*)}:\mathcal{M}\to\mathcal{M}_{/(\rho\wedge\rho^*)}$, rezultă $P((\rho\wedge\rho^*)(x_1''),\ldots,(\rho\wedge\rho^*)(x_{i-1}''),$ $(\rho\wedge\rho^*)(y),\ (\rho\wedge\rho^*)(x_i''),\ldots,(\rho\wedge\rho^*)(x_n''))=1$ în $M_{/(\rho\wedge\rho^*)}$. În plus, $x_j''\ \rho x_j'$ şi $x_j'\ \rho\ x_j$ implică $x_j''\ \rho\ x_j$, relaţie echivalentă cu $\varphi_{(\rho\wedge\rho^*)}(x_j'')\varphi_{(\rho\wedge\rho^*)}(\rho)\varphi_{(\rho\wedge\rho^*)}(x_j)$ (2.6.3, $\rho\wedge\rho^*\leqslant\rho$), adică cu $(\rho\wedge\rho^*)(x_j'')\ \varphi_{(\rho\wedge\rho^*)}(\rho)\ (\rho\wedge\rho^*)(x_j)$ $(j=1,\ldots,n)$. Am obţinut deci $(\rho\wedge\rho^*)(x)\xrightarrow{\varphi_{(\rho\wedge\rho^*)}(\rho)}(\rho\wedge\rho^*)(y)$. Reciproc, să presupunem că această dominare are loc în $\mathcal{M}_{/(\rho \wedge \rho^*)}$ şi să arătăm că $x \overset{\rho}{\rightarrow} y$ în $\mathcal{M}$. Fie $P \in \mathcal{P}$ (*deg* $P = n+1$) şi $x_1, \ldots, x_n \in V$ astfel încît $P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_i, \ldots, x_n) = 1$ în $\mathcal{M}$. Rezultă $P((\rho \wedge \rho^*)(x_1), \ldots, (\rho \wedge \rho^*)(x_{i-1}) (\rho \wedge \rho^*)(x), (\rho \wedge \rho^*)(x_i), \ldots, (\rho \wedge \rho^*)(x_n)) = 1$ în $\mathcal{M}_{/(\rho \wedge \rho^*)}$. Folosind ipoteza, obţinem $x'_n, \ldots, x'_n \in V$ cu proprietăţile $P((\rho \wedge \rho^*)(x'_1), \ldots, (\rho \wedge \rho^*)(x'_{i-1}), (\rho \wedge \rho^*)(y), (\rho \wedge \rho^*)(x'_n), \ldots, (\rho \wedge \rho^*)(x'_n)) = 1$, unde $(\rho \wedge \rho^*)(x'_j)\ \varphi_{(\rho \wedge \rho^*)}(\rho)\ (\rho \wedge \rho^*)(x_j)$ adică $x'_j \rho\, x_j\ (1 \leqslant j \leqslant n)$. Aplicînd din nou 4.1, găsim $x''_j \in (\rho \wedge \rho^*)(x'_j)$ şi $y' \in (\rho \wedge \rho^*)(y)$ astfel încît $P(x''_1, \ldots, x''_{i-1}, y', x''_i, \ldots, x''_n) = 1$ (în $\mathcal{M}$); reţinem $x''_j\ \rho\ x'_j (j = 1, \ldots, n)$ şi $y'\ \rho^*\ y$, de unde $y' \overset{\rho}{\rightarrow} y$. Există deci $x'''_1, \ldots, x'''_n \in V$ astfel încît $P(x'''_1, \ldots, x'''_{i-1}, y, x'''_i, \ldots, x'''_n) = 1$ (6.1) şi $x'''_j\ \rho\ x''_j\ (1 \leqslant j \leqslant n)$. Observînd acum că $x'''_j\ \rho\ x''_j$, $x''_j\ \rho\ x'_j$ şi $x'_j\ \rho\ x_j$, deci că $x'''_j\ \rho\ x_j\ (j = 1, \ldots, n)$, putem conchide că $x \xrightarrow{\rho} y$ (6.1).

Acest prim pas încheiat, rezultă (6.3) că $x\ \rho^*\ y$ este echivalent cu $(\rho \wedge \rho^*)(x)\ \varphi_{(\rho \wedge \rho^*)}(\rho)^*\ (\rho \wedge \rho^*)(y)$. Dar $x\ \rho^*\ y$ este echivalent şi cu $(\rho \wedge \rho^*)(x)\ \varphi_{(\rho \wedge \rho^*)}(\rho^*)(\rho \wedge \rho^*)(y)$ (2.6.3, $\rho \wedge \rho^* \leqslant \rho^*$). Rezultă $\varphi_{(\rho \wedge \rho^*)}(\rho)^* = \varphi_{(\rho \wedge \rho^*)}(\rho^*)$.

7) MĂRIRE REGULATĂ. DERIVATA UNEI PARTIŢII

7.1. Definiţie. Fie $\mathcal{M}(V, \mathcal{P})$ un model şi $\rho_1, \rho_2 \in E(V)$. Vom spune că ρ_2 este o mărire regulată a lui ρ_1 (relativ la $\mathcal{M}$) dacă $\rho_1 \leqslant \rho_2$ şi dacă $\varphi_{\rho_1}(\rho_2)$ este o relaţie de congruenţă a modelului $\mathcal{M}_{/\rho_1}$. În concordanţă cu 6.4, ρ_2 este o mărire regulată a lui ρ_1 dacă şi numai dacă $\rho_1 \leqslant \rho_2$ şi $\varphi_{\rho_1}(\rho_2) \leqslant \leftrightarrow$ sau, ceea ce este acelaşi lucru (datorită lui 2.6.4), dacă şi numai dacă $\rho_1 \leqslant \rho_2 \leqslant \varphi_{\rho_1}^{-1}(\leftrightarrow)$, unde $\leftrightarrow$ este steaua partiţiei unitate a modelului $\mathcal{M}_{/\rho_1}$.

7.2. Definiţie. Fie $\mathcal{M}(V, \mathcal{P})$ un model şi $\rho \in E(V)$. Partiţia $\rho' = \varphi_\rho^{-1}(\leftrightarrow)$, unde $\leftrightarrow$ este 1^* în $\mathcal{M}_{/\rho}$, va fi numită derivata (în $\mathcal{M}$) a partiţiei ρ. Din 2.6.4 avem $\rho \leqslant \rho'$, de unde, cu 7.1, rezultă că ρ' este cea mai mare mărire regulată a lui ρ.

Astfel, ρ_2 este o mărire regulată a lui ρ_1 dacă şi numai dacă $\rho_1 \leqslant \rho_2 \leqslant \rho'_1$.

Deoarece $\varphi_1 : \mathcal{M} \stackrel{\sim}{\rightarrow} \mathcal{M}/1$, rezultă că $1' = \varphi_1^{-1}(1^*) = \varphi_1^{-1}(1)^* = 1^* = \leftrightarrow$. (6.20).

7.3. Propoziţie. *Partiţia* ρ *a modelului* $\mathcal{M}$ *este o congruenţă dacă şi numai dacă ea este o mărire regulată a partiţiei unitate.*

Demonstraţie. ρ este o mărire regulată a lui 1 dacă şi numai dacă $1 \leqslant \rho \leqslant 1'$, adică $1 \leqslant \rho \leqslant \leftrightarrow$ (7.2). Folosim acum 6.4.

7.4. Teoremă. *Fie* $\mathcal{M}(V, \mathcal{P})$, $\mathcal{M}'(V', \mathcal{P})$ *două modele asemenea şi* φ *un omomorfism tare al lui* $\mathcal{M}$ *pe* $\mathcal{M}'$. *Dacă* $\rho \in E_\varphi(V)$, *atunci* $\varphi(\varphi)' = \varphi(\rho')$.

Demonstraţie. Relaţia $\varphi(x)\ \varphi(\rho')\ \varphi(y)$ este echivalentă cu $x\ \rho'\ y$ (2.6.3, $\rho_\varphi \leqslant \rho \leqslant \rho'$). La rîndul său, $x \rho' y$, adică $x\ \varphi_\rho^{-1}(\leftrightarrow)\ y$, este echivalent cu $\varphi_\rho(x) \leftrightarrow \varphi_\rho(y)$ (2.3.2), adică cu $\rho(x) \leftrightarrow \rho(y)$. Conform lui 4.4 avem însă $\psi : \mathcal{M}_{/\rho} \stackrel{\sim}{\rightarrow} \mathcal{M}'_{/\varphi(\rho)}$, unde $\psi(\rho(x)) = \varphi(\rho)(\varphi(x))$. ψ fiind un omomorfism saturat (5.4), avem $\psi(\leftrightarrow) = \psi(1^*) = \psi(1)^* = 1^* = \leftrightarrow$ (am aplicat 6.19, ţinînd seama că $\rho_\psi = 1$). De aici rezultă că $\rho(x) \leftrightarrow \rho(y)$ dacă şi numai dacă $\psi(\rho(x)) \leftrightarrow \psi(\rho \leftrightarrow y))$ (2.6.3), sau $\varphi(\rho)(\varphi(x)) \leftrightarrow \varphi(\rho)(\varphi(y))$, ceea ce nu înseamnă altceva decît $\varphi(x)\ \varphi^{-1}_{\varphi(\rho)}(\leftrightarrow)\ \varphi(y)$, adică $\varphi(x)\ \varphi(\rho)'\ \varphi(y)$.

7.5. Corolar. *Fie $\mathscr{M}(V, \mathcal{P})$, $\mathscr{M}'(V')$, $\mathcal{P})$ două modele asemenea, $\varphi : \mathscr{M} \twoheadrightarrow \mathscr{M}'$ și $\rho_1 \in E_\varphi(V)$. Dacă ρ_2 este o mărire regulată a lui ρ_1 relativ la $\mathscr{M}$, atunci $\varphi(\rho_2)$ este o mărire regulată lui $\varphi(\rho_1)$ relativ la $\mathscr{M}'$.*

Demonstrație. Avem $\rho_1 \leqslant \rho_2 \leqslant \rho_1'$. Putem aplica $\varphi(\rho \leqslant \rho_2$ şi $\rho_\varphi \leqslant \rho_1')$; obţinem $\varphi(\rho_1) \leqslant \varphi(\rho_2) \leqslant \varphi(\rho_1')$ (2.3.3), adică $\varphi(\rho_1) \leqslant \varphi(\rho_2) \leqslant \varphi(\rho_1)'$ (7.4).

7.6. Teoremă. *Fie $\mathscr{M}(V, \mathcal{P})$ un model și $\rho \in E(V)$. Condiția necesară și suficientă pentru ca $\rho' = \rho^*$ este ca ρ să fie o partiție saturată a lui $\mathscr{M}$.*

Demonstrație. Avem $\rho \leqslant \rho'$ (7.2), deci dacă $\rho' = \rho^*$, obținem $\rho \leqslant \rho^*$; de aici rezultă cu 6.15 că ρ este saturată.

Reciproc, dacă ρ este saturată, avem $\varphi_\rho^{-1}(1)^* = \varphi_\rho^{-1}(1^*)$ (6.20); dar $\varphi_\rho^{-1}(1) = \rho$ şi $\varphi_\rho^{-1}(1^*) = \rho'$ (7.2), deci $\rho^* = \rho'$.

7.7. Propoziţie. *Fie $\mathscr{M}(V, \mathcal{P})$ un model și $x, y, u \in V$. Dacă $x \to y$ în $\mathscr{M}$, atunci $x \to y$ în $\mathscr{M}_u$.*

Demonstrație. Avem de arătat că $1_V : (\mathscr{M}_u)_x \to (\mathscr{M}_u)_y$, știind că $1_V : \mathscr{M}_x \to \mathscr{M}_y$. Fie $\mathcal{P}_{ij} \in \mathcal{P}^{**}$ (mulţimea simbolurilor predicative a lui $\mathscr{M}_u$ este, conform lui 5.2, $\mathcal{P}^*$, deci cea a lui $(\mathscr{M}_u)_x$ este $\mathcal{P}^{**}$) şi $x_1, \ldots, x_n \in V$ (*deg* $P = n+2$) astfel încît $P_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = 1$ în $(\mathscr{M}_u)_x$. Aceasta înseamnă că $P_i(x_1, \ldots, x_{j-1}, x, x_j, \ldots, x_n) = 1$ în $\mathscr{M}_u$, adică dacă $j \leqslant i-1$, $P(x_1, \ldots, x_{j-1}, x, \ldots, u, x_{i-1}, \ldots, x_n) = 1$ şi dacă $j \geqslant i$ $P(x_1, \ldots, x_{i-1}, u, \ldots, x, x_j, \ldots, x_n) = 1$ în $\mathscr{M}$. Deci, $j \leqslant i \leqslant -1$ implică $P_j(x_1, \ldots, x_{j-1}, \ldots, u, x_{i-1}, \ldots, x_n) = 1$ și $j \geqslant i$ implică $P_{j+1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, u, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = 1$ în $\mathscr{M}_x$. Dar $1_V : \mathscr{M}_x \to \mathscr{M}_y$, deci, după cum $j \leqslant i-1$ sau $j \geqslant i$, avem fie $P_j(x_1, \ldots, x_{i-2}, u, x_{i-1}, \ldots, x_n) = 1$ fie $P_{j+1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, u, x_i, \ldots, x_n) = 1$ în $\mathscr{M}_y$, adică fie $P(x_1, \ldots, x_{j-1}, y, \ldots, u, x_{i-1}, \ldots, x_n) = 1$ fie $P(x_1, \ldots, x_{i-1}, u, \ldots, y, x_j, \ldots, x_n) = 1$ în $\mathscr{M}$. În $\mathscr{M}_u$ această alternativă se traduce prin $P_i(x_1, \ldots, x_{j-1}, y, x_j, \ldots, x_n) = 1$; rezultă $P_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = 1$ în $(\mathscr{M}_u)\, y$.

7.8. Corolar. *Fie $\mathscr{M}(V. \mathcal{P})$ un model și $u \in V$. Dacă ρ este o congruenţă a lui $\mathscr{M}$, atunci ρ este și o congruenţă a lui $\mathscr{M}_u$.*

Demonstrație. Cu 6.4 avem $\rho \leqslant \leftrightarrow$ ($\leftrightarrow$ este 1^* în $\mathscr{M}$). Fie $x, y \in V$ astfel încît $x\, \rho\, y$. Rezultă $x \leftrightarrow y$, adică $x \to y$ și $y \to x$ în $\mathscr{M}$. Folosind 7.7, avem $x \to y$ şi $y \to x$ în $\mathscr{M}_u$, deci $x \leftrightarrow y$ (unde $\leftrightarrow$ este 1^* în $\mathscr{M}_u$). Rezultă $\rho \leqslant \leftrightarrow$ în $\mathscr{M}_u$, deci ρ este o congruență a modelului $\mathscr{M}_u$ (6.4).

7.9. Teoremă. *Fie $\mathscr{M}(V, \mathcal{P})$ un model și $\rho_1\ \rho_2 \in E(V)$ astfel încît ρ_2 este o mărire regulată a lui ρ_1. Atunci, $\rho_1(x) \to \rho_1(y)$ dacă și numai dacă $\rho_2(x) \to \rho_2(y)$.*

Demonstrație. Conform lui 4.3, aplicația ψ a lui V/ρ_1 pe V/ρ_2 definită prin $\psi(\rho_1(z)) = \rho_2(z)$ este un omomorfism tare al lui $\mathscr{M}/\rho_1$ pe $\mathscr{M}/\rho_2$. Are loc și egalitatea $\rho_\psi = \varphi_{\rho_1}(\rho_2)$; într-adevăr, relația $\rho_1(u)\ \varphi_{\rho_1}(\rho_2)\ \rho_1(v)$ este echivalentă cu $u\, \rho_2 v$ (2.6.3, $\rho_1 \leqslant \rho_2$), adică cu $\rho_2(u) = \rho_2(v)$, iar $\rho_1(u)\ \rho_\psi\ \rho_1(v)$ este același lucru cu $\psi(\rho_1(u)) = \psi(\rho_1(v))$, care nu înseamnă altceva decît $\rho_2(u) = \rho_2(v)$.

Deoarece $\rho_2 \leqslant \rho_1'$ (prin ipoteză), rezultă $\varphi_{\rho_1}(\rho_2) \leqslant \varphi_{\rho_1}(\rho_1')$ (2.3.3), adică $\rho_\psi \leqslant \varphi_{\rho_1}(\rho_1') = \varphi_{\rho_1}(\rho)' = 1' = \leftrightarrow$ (4.1,7.4, 7.2). ρ_ψ este deci o relaţie de congruenţă a lui $\mathscr{M}/\rho$ (6.4). De aici rezultă, pe de o parte, că $\rho_\psi \leqslant \rho_\psi^\circ$ (6.16, 6.15) şi deci că ψ este un omomorfism saturat al modelului

$\mathscr{M}/\rho_1$ pe $\mathscr{M}/\rho_2$, iar pe de altă parte că ρ_ψ este o congruenţă a modelului $(\mathscr{M}/\rho_1)_{\rho_1(y)}$ (7.8).

Să facem acum notaţiile $\mathscr{M}_1 = (\mathscr{M}/\rho_1)_{\rho^1(x)}$, $\mathscr{M}_2 = (\mathscr{M}/\rho_1)_{\rho_1(y)}$, $\mathscr{M}'_1 = (\mathscr{M}/\rho_2)_{\rho_2(x)}$, $\mathscr{M}'_2 = (\mathscr{M}/\rho_2)_{\rho_2(y)}$, $\varphi = 1_{V/\rho_1}$, $\varphi' = 1_{V/\rho_2}$ şi $\psi_1 = \psi_2 = \psi$.

Avem $\psi_1 : \mathscr{M}_1 \rightarrow\!\!\rightarrow \mathscr{M}'_1$ şi $\psi_2 : \mathscr{M}_2 \rightarrow\!\!\rightarrow \mathscr{M}'_2$, deoarece ψ este saturat (5.4) ; diagrama

$$\begin{tikzcd}
V/\rho_1 \arrow[r, "1_{V/\rho_1}"] \arrow[d, "\psi"'] & V/\rho_1 \arrow[d, "\psi"] \\
V/\rho_2 \arrow[r, "1_{V/\rho_1}"] & V/\rho_2
\end{tikzcd}$$

este evident comutativă, iar ρ_{ψ_2} este o relaţie de congruenţă a modelului $\mathscr{M}_2$.

Folosind teoremele 3.8 şi 4.7, deducem că $1_{V/\rho_1} : (\mathscr{M}/\rho_I)_{\rho_1(x)} \rightarrow (\mathscr{M}/\rho_1)_{\rho_1(y)}$, dacă şi numai dacă $1_{V/\rho_2} : (\mathscr{M}/\rho_2)_{\rho_2(x)} \rightarrow (\mathscr{M}/\rho_2)_{\rho_2(y)}$, adică $\rho_1(x) \rightarrow \rho_1(y)$ dacă şi numai dacă $\rho_2(x) \rightarrow \rho_2(y)$ (6.1)

7.10. COROLAR. *Dacă* ρ *este o relaţie de congruenţă, atunci* $x \rightarrow y$ *dacă şi numai dacă* $\rho(x) \rightarrow \rho(y)$.

Demonstraţie. ρ este o mărire regulată a lui 1 (7.3). Putem pune deci în 7.9 $\rho_1 = 1$ şi $\rho_2 = \rho$.

7.11. PROPOZIŢIE. *Fie* ρ_1, $\rho_2 \in E(V)$ *astfel încît* $\rho_1 \leqslant \rho_2$. *Atunci* ρ_2 *este o mărire regulată a lui* ρ_1 *dacă şi numai dacă* $\rho'_1 = \rho'_2$.

Demonstraţie. Dacă $\rho'_1 = \rho'_2$, atunci, ţinînd seama că $\rho_2 \leqslant \rho'_2$, rezultă $\rho_2 \leqslant \rho'_1$, ceea ce ne arată că ρ_2 este o mărire regulată a lui ρ_1 (avînd şi $\rho_1 \leqslant \rho_2$). Reciproc, să presupunem că ρ_2 este o mărire regulată a lui ρ_1. Relaţia $x \rho'_1 y$ este echivalentă cu $\rho_1(x) \leftrightarrow \rho_1(y)$ (2.3.2) ; la fel, $x \rho'_2 y$ nu înseamnă altceva decît $\rho_2(x) \leftrightarrow \rho_2(y)$. Noile relaţii sînt echivalente însă, în virtutea lui 7.9, deci $\rho'_1 = \rho'_2$.

7.12. COROLAR. ρ *este o relaţie de congruenţă a modelului* $\mathscr{M}$ *dacă şi numai dacă* $\rho' = \leftrightarrow$.

Demonstraţie. ρ este o congruenţă dacă şi numai dacă este o mărire regulată a lui 1 (7.3), şi în plus $1 \leqslant \rho$. ρ este, deci, o congruenţă dacă şi numai dacă $\rho' = 1'$. Din 7.2 avem însă $1' = \leftrightarrow$.

7.13. COROLAR. *Oricare ar fi partiţia* ρ *a modelului* $\mathscr{M}$, *avem* $\rho'' = \rho'$.

Demonstraţie. Avem $\rho \leqslant \rho' \leqslant \rho''$, deci ρ' este o mărire regulată a lui ρ (7.2). Cu 7.11 rezultă $(\rho')' = \rho'$.

7.14. PROPOZIŢIE. *Dacă* ρ *este o partiţie saturată a modelului* $\mathscr{M}$, *atunci* $\rho^{**} = \rho^*$.

Demonstraţie. Cu 7.6 deducem $\rho' = \rho^*$, de unde $\rho'' = \rho^{**}$; dar $\rho'' = \rho'$ (7.12), deci $\rho' = \rho^*$), de unde $\rho^* = \rho^*$). Propoziţia 6.17, arată că şi ρ^* este saturată, deci $\rho^{**} = \rho^*$) (7.6). Ultimele două egalităţi dau $\rho^* = \rho^{**}$.

7.15. PROPOZIŢIE. *Dacă* ρ_1 *este o partiţie saturată şi* ρ_2 *o mărire regulată a sa, atunci* ρ_2 *este de asemenea saturată.*

Demonstraţie. Ipoteza este $\rho_1 \leqslant \rho_2 \leqslant \rho'_1$; să observăm că $\rho'_1 \leqslant \rho^*_1$ (7.6), deci $\rho_1 \leqslant \rho_2 \leqslant \rho^*_1$. Folosind 6.8, obţinem $\rho^*_1 \leqslant \rho^*_2 \leqslant \rho^{**}_1$. Dar $\rho^{**}_1 = \rho^*_1$ (7.14), deci $\rho^*_1 \leqslant \rho^*_2 \leqslant \rho^*_1$. Rezultă $\rho^*_2 = \rho^*_1$, de unde $\rho_2 \leqslant \rho^*_2$.

8. ρ - DOMINARE ÎN LIMBAJE

8.1. DEFINIȚIE. Fie V o mulțime nevidă și finită numită vocabular și ale cărei elemente se numesc cuvinte. Printr-un limbaj (o limbă) pe vocabularul V vom înțelege un model $L\ (V,\mathcal{N})$ pentru care mulțimea simbolurilor predicative este mulțimea $\mathcal{N}$ a numerelor naturale împreună cu aplicația $deg = 1_{\mathcal{N}}$ (adică $deg\ n = n$ pentru orice $n \in \mathcal{N}$). În acest fel, oricare două limbaje sînt modele asemenea.

Dacă $n(x_1, \ldots, x_n) = 1$ ($x_i \in V$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$), atunci șirul (secvența) de cuvinte $x_1 \ldots x_n$ va fi numit(ă) o frază marcată (reperată, corectă) a limbii L; în caz contrar, despre fraza $x_1 \ldots x_n$ se spune că este nemarcată (nereperată). (După cum în L predicatul $0 \in \mathcal{N}$ este egal cu 1 sau cu 0, secvența vidă θ este marcată sau nu).

În cazul cînd $x_1 \ldots x_n$ este o frază corectă a limbii L, vom conveni să scriem $x_1 \ldots x_n \in L$; astfel, o limbă poate fi considerată ca o mulțime de șiruri finite de cuvinte (fraze). Reciproc, orice mulțime de fraze peste un vocabular V este un limbaj pe V; pentru aceasta este suficient să clasificăm frazele după lungime și să punem $n(x_1, \ldots, x_n) = 1$ dacă $x_1 \ldots \ldots x_n \in L$ iar $n(x_1, \ldots, x_n) = 0$ dacă $x_1, \ldots, x_n \notin L$; pentru orice $n \in N$ am definit astfel predicatul $n : V^n \to \{0,1\}$.

8.2. DEFINIȚIE. Să considerăm două limbaje L și L' pe vocabularele V și V' respectiv. O aplicație (surjectivă) $\varphi : V \to V'$ se numește omomorfism al lui L pe L' ($\varphi : L \to L'$ sau $L \overset{\varphi}{\to} L'$) dacă din $x_1 \ldots x_n \in L$ rezultă $\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n) \in L'$ (frazele marcate sînt duse în fraze marcate) (3.3).

Omomorfismul φ se zice tare ($\varphi : L \twoheadrightarrow L'$) dacă $\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n) \in L'$ implică existența cuvintelor $x'_1, \ldots, x'_n \in V$ astfel încît $x'_1 \ldots x'_n \in L$ și $\varphi(x'_i) = \varphi(x_i)$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$ (orice frază marcată a lui L' provine din cel puțin o frază marcată a lui L) (3.4) L și L' sînt izomorfe dacă există o aplicație bijectivă φ a lui V pe V' care este omomorfism în ambele sensuri. (În scris $\varphi : L \xrightarrow{\sim} L'$) (3.5.). Omomorfismul φ se numește saturat dacă pentru orice frază marcată $\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n) \in L'$ și pentru orice i există $n - 1$ cuvinte $x'_1, \ldots, x'_{i-1}, x'_{i+1}, \ldots, x'_n \in V$ cu proprietatea că $x'_1 \ldots x'_{i-1}\ x_i\, x'_{i+1} \ldots x'_n \in L$ și că $\varphi(x'_j) = \varphi(x_i)$ pentru $j = 1, \ldots \ldots i - 1, i + 1, \ldots, n$ (5.4.).

8.3. DEFINIȚIE. Fie L un limbaj pe vocabularul V și $\rho \in E(V)$. Vom numi limbă factor L/ρ limbajul pe vocabularul V/ρ pentru care $\rho(x_1) \ldots \rho(x_n) \in L/\rho$ dacă și numai dacă există $x'_i \in \rho\ (x_i)$ $(1 \leqslant \mathrm{i} \leqslant n)$ astfel încît $x'_1 \ldots x'_n \in L$ (4.1). Frazele limbajului factor vor fi numite ρ-structuri; ele pot fi marcate sau nu. O ρ-structură $\rho(x_1) \ldots \rho(x_n)$ se zice perfectă dacă pentru orice $x'_1, \ldots, x'_n \in V$ avînd proprietatea că $x'_i \in \rho(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, avem $x'_1 \ldots x'_n \in L$. Evident, o ρ-structură perfectă este marcată, adică aparține lui L/ρ.

O partiție $\rho \in E(V)$ este numită o congruență a limbii L dacă $x_1 \ldots x_n \in L$ $x'_i\, \rho\, x_i (i = 1, \ldots, n)$ implică $x'_1 \ldots x'_u \in L$ (4.6)

8.4. DEFINIȚIE. Fie L un limbaj peste V și $\rho \in E\ (V)$. ρ se numește o partiție saturată dacă $\varphi_\rho : L \twoheadrightarrow L/\rho$ este saturat, adică dacă pentru orice ρ-structură marcată $\rho(x_1), \ldots \rho(x_n)$ și pentru orice i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, există $x'_j \in \rho(x_j)$ $(j = 1, \ldots, i - 1, i + 1, \ldots, n)$ astfel încît $x'_1 \ldots x'_{i-1}$ $x_1\, x'_{i+1} \ldots x'_n \in L$ (5.7)

8.5. DEFINIȚIE. Fie L o limbă pe vocabularul V, $\rho \in E(V)$ şi $x, y \in V$. Vom spune că cuvîntul x ρ-domină cuvîntul y $(x \overset{\rho}{\to} y)$ dacă pentru orice frază marcată de forma $x_1 \ldots x_{i-1}\, x\, x_i \ldots x_n$ există $x'_1 \ldots, x'_n \in V$ astfel încît să avem $x'_j\, \rho\, x_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ şi fraza $x'_1 \ldots x'_{i-1}\, y\, x'_i \ldots x'_n$ să fie marcată. (În orice frază marcată, x poate fi înlocuit cu y modificînd contextul în limitele paradigmei ρ).

În continuare, vom nota cu S steaua partiției unitate ($S = 1^* = \leftrightarrow$) şi cu N steaua partiției improprii ($N = \infty\, ^*$).

Deoarece vocabularul V este finit, rezultă că numărul partiților lui L (şi cu atît mai mult al partițiilor sale saturate) este finit. Aplicînd de $n-1$ ori propoziția 6.18 (n este numărul partițiilor saturate), rezultă că există o cea mai mare partiție saturată a limbajului L; ea va fi notată în continuare cu Z.

8.6. PROPOZIȚIE. *Fie L o limbă pe vocabularul V. Atunci pentru orice $\rho \in E(V)$ avem $S \leqslant \rho^* \leqslant N$.*

Demonstrație. Aplicăm 6.8 relațiilor evidente $1 \leqslant \rho \leqslant \infty$ şi ținem seama de notațiile din 8.5.

8.7. COROLAR. *Avem $Z \leqslant N$.*

Demonstrație. Dacă ρ este o partiție saturată, atunci $\rho \leqslant \rho^*$ (6.15) şi cu 8.6 rezultă $\rho \leqslant N$. Z fiind o partiție saturată, avem $Z \leqslant N$.

8.8. PROPOZIȚIE. *Avem $S^* = S' = S$ și $Z^* = Z' = Z$.*

Demonstrație. Pentru primele egalități să observăm că S este o partiție saturată (6.16), deci $S^* = S'$ (7.6) şi că $S' = S$ (7.12).

Şi Z este o partiție saturată; avem deci $Z^* = Z'$ (7.6), iar pe de altă parte, Z^* fiind o partiție saturată (6.17), are loc relația $Z^* \leqslant Z$ (8.5). Inegalitatea contrară $Z \leqslant Z^*$ are loc în virtutea lui 6.15.

8.9. PROPOZIȚIE. *Avem $N' = N$ și $Z \leqslant N^* \leqslant N$.*

Demonstrație. Aplicăm 6.23 punînd $\rho = \infty \in E(V)$. Avem $\rho \vee \rho^* = \infty \vee N = \infty$, deci $\varphi_N(\infty)^* = \varphi_N(\infty^*)$. Dar $\varphi_N(\infty) = \infty$ (2.6.4) şi $\infty^* = N$, deci $N = \varphi_N(N) = 1$. Cum avem $S \leqslant N$, rezultă $S = N = 1$ (în L/N). Deci $N' = \overset{-1}{\varphi}_N(S) = \overset{-1}{\varphi}_N(1) = N$. Conform lui 8.6, avem şi $N^* \leqslant N$, iar din $Z \leqslant N$ (8.7), obținem prin stelare (6.8) $Z^* \leqslant N^*$, adică $Z \leqslant N^*$ (8.8).

8.10. TEOREMĂ. *Pentru orice limbaj L există un număr $n \in N$, astfel încît $Z = \infty^{n*}$.*

Demonstrație. Evident $\infty \geqslant \infty^*$. Aplicînd 6.8, obținem $\infty \geqslant \infty^* \geqslant \infty^{**}$. Continuînd, rezultă un şir descrescător de partiții $\infty \geqslant \infty^* \geqslant \infty^{**} \geqslant \ldots \geqslant \infty^{k*}\ \infty^{(k+1)*} \geqslant \ldots$ Mulțimea $E(V)$ fiind finită, există $n \in \mathcal{N}$ cu proprietatea că $\infty^{n*} = \infty^{(n+1)*}$. Partiția ∞^{n*} este deci saturată (6.15) şi definiția lui Z implică $\infty^{n*} \leqslant Z$. Inegalitatea contrară se verifică prin inducție: pentru $k = 0$ ea este banală ($Z \leqslant \infty$), iar dacă $Z \leqslant \infty^{k*}$, atunci, folosind 6.8, rezultă $Z^* \leqslant \infty^{(k+1)*}$, adică $Z \leqslant \infty^{(k+1)*}$ (8.8). Reunind cele două inegalități, avem $Z = \infty^{n*}$.

8.11. PROPOZIȚIE. *Fiind dat un limbaj L peste V și $x \in V$, să notăm cu N_x mulțimea tuturor perechilor ordonate de numere naturale (n, i) cu proprietatea că există o frază marcată $x_1 \ldots x_n$ astfel încît $x_i = x$. Atunci, egalitățile $N_x = N_y$ și $N(x) = N(y)$ sînt echivalente.*

Demonstrație. Deoarece $N(x) = N(y)$ nu înseamnă altceva decît xNy, iar $N = \infty^*$, va fi suficient să arătăm că $x \overset{\infty}{\rightarrow} y$ este echivalent cu $N_x \subseteq N_y$.

Să presupunem că $x \overset{\infty}{\rightarrow} y$ și fie $(n, i) \in N_x$; există deci $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n \in V$ astfel încît $x_1 \ldots x_{i-1}\, x\, x_{i+1} \ldots x_n \in L$. Dar $x \overset{\infty}{\rightarrow} y$, deci cu 8.5 rezultă existența unor cuvinte $x_1' \ldots, x_{i-1}', x_{i+1}' \ldots, x_n' \in V$ cu proprietatea că $x_1' \ldots x_{i-1}'\, y\, x_{i+1}' \ldots x_n' \in L$; aceasta înseamnă că $(n, i) \in N_y$.

Reciproc, să admitem că $N_x \subseteq N_y$ și fie $x_1 \ldots x_{i-1}\, x\, x_{i+1} \ldots x_n \in L$; avem deci $(n, i) \in N_x$, de unde $(n, i) \in N_y$. Prin urmare, există $x_1' \ldots, x_{i-1}', x_{i+1}' \ldots, x_n' \in V$ astfel încît $x_1' \ldots x_{i-1}'\, y\, x_{i+1}' \ldots x_n' \in L$. Am obținut, deci, $x \overset{\infty}{\rightarrow} y$, deoarece $x_j' \infty x_j$ pentru $j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$ (2.4.2, 8.5).

8.12. PROPOZIȚIE. *Din* $\rho_1 \leqslant \rho_2$ *și* $\rho_1^* = \rho_2^*$ *nu rezultă în mod necesar că* ρ_2 *este o mărire regulată a lui* ρ_1 *(chiar dacă* ρ_1 *este o partiție saturată).*

Demonstrație. Fie $V = \{a, b\}$, $L = \{ab\}$, $\rho_1 = 1$ și $\rho_2 = \infty$. Evident, $\rho_1 \leqslant \rho_2$ și ρ_1 este saturată (6.16). Conform lui 8.11, $N_a = \{(2,1)\}$ și $N_b = \{(2,2)\}$ deci $N_a \neq N_b$ și în consecință $N(a) = \{a\}$, $N(b) = \{b\}$, adică $\rho_2^* = 1$. Din 6.8 rezultă $\rho_1^* \leqslant \rho_2^*$, de unde $\rho_1^* = \rho_2^* = 1$. Totuși, ρ_2 nu este o mărire regulată a lui ρ_1, adică relația $\rho_2 \leqslant \rho_1'$ nu este valabilă; aceasta deoarece $\rho_1' = \rho_1^* = 1$ (7.6), în timp ce $\rho_2 = \infty$.

8.13. PROPOZIȚIE. *Fie* L *o limbă pe vocabularul* V *și* $\rho \in E(V)$. *Atunci,* $\rho \leqslant S$ *dacă și numai dacă orice* ρ*-structură marcată este perfectă. În particular, orice* S*-structură marcată este perfectă.*

Demonstrație. În concordanță cu 6.4, va fi suficient să arătăm că ρ este o congruență a lui L dacă și numai dacă orice ρ-structură marcată (în L/ρ) este perfectă. Să presupunem că ρ este o congruență și fie $\rho(x_1) \ldots \rho(x_n) \in L/\rho$. Aceasta înseamnă că există $x_i' \in \rho(x_i)\,(i = 1, \ldots, n)$ astfel încît $x_1' \ldots x_n' \in L$ (8.3). Fie $x_1'', \ldots, x_n'' \in V$ astfel ca $x_i'' = \rho(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ avem $x_i'' \rho\, x_i$ și $x_i \rho\, x_i'$, deci $x_i'' \rho\, x_i'$, de unde (ρ fiind congruență) $x_1'' \ldots x_n'' \in L$. Rezultă, cu 8.3, că $\rho(x_1) \ldots \rho(x_n)$ este o ρ-structură perfectă.

Reciproc, să presupunem că orice ρ-structură marcată este perfectă și fie $x_1, \ldots, x_n$, $x_1', \ldots, x_n' \in V$ astfel încît $x_1 \ldots x_n \in L$ și $x_i' \rho\, x_i$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$. Conform definiției 8.3, avem $\rho(x_1) \ldots \rho(x_n) \in L/\rho$ și în plus $x_i' \in \rho(x_i)$; rezultă $x_1' \ldots x_n' \in L$, adică ρ este o relație de congruență a lui L.

8.14. TEOREMĂ. *Fie* L *o limbă peste* V *și* $\rho \in E(V)$; *următoarele condiții sînt echivalente*:

(i) ρ *este o relație de congruență a lui* L.

(ii) *orice* ρ*-structură marcată este perfectă.*

(iii) $\rho \leqslant S$.

(iv) $\rho' = S$.

Demonstrație. Se folosesc 8.13, 6.4 și 7.12.

8.15. TEOREMĂ. *Fie* L *o limbă peste* V *și* $\rho_1, \rho_2 \in E(V)$ *astfel încît* ρ_2 *este o mărire regulată a lui* ρ_1. *Atunci. dacă* ρ_1 *este o partiție saturată, următoarele relații de dominare sînt echivalente*

(i) $x \overset{\rho_1}{\rightarrow} y$

(ii) $x \overset{\rho_2}{\rightarrow} y$

(iii) $\rho_1(x) \rightarrow \rho_1(y)$

(iv) $\rho_2(x) \rightarrow \rho_2(y)$.

Demonstraţie. Relaţiile (iii) şi (iv) sînt echivalente conform teoremei 7.9, iar (i) şi (iii) conform lui 6.12. Ţinînd seama de 7.15 şi de 6.12, rezultă şi echivalenţa dintre (ii) şi (iv).

8.16. COROLAR. *Dacă ρ este o congruenţă a limbajului L, atunci următoarele relaţii de dominare sînt echivalente:*

(i) $x \overset{\rho}{\rightarrow} y$

(ii) $\rho(x) \rightarrow \rho(y)$

(iii) $x \boldsymbol{\rightarrow} y$.

Demonstraţie. Punem $\rho_1 = 1$ şi $\rho_2 = \rho$ în 8.15. Partiţia unitate este saturată şi ρ este o mărire regulată a ei (7.3).

8.17. DEFINIŢIE. Un limbaj dotat cu o structură paradigmatică, adică un triplet de forma (V, ρ, L), unde L este un limbaj pe V şi $\rho \in E(V)$, se numeşte adecvat dacă $S \leqslant \rho'$.

8.18. PROPOZIŢIE. *Limbajul (V, ρ, L), în care paradiagma ρ este o partiţie saturată, este adecvat.*

Demonstraţie. Din 8.6 avem $S \leqslant \rho^*$. Dar ρ este saturată, deci $\rho^* = \rho'$. Am obţinut astfel $S \leqslant \rho'$.

8.19. TEOREMĂ. *Fie L şi L' două limbaje pe vocabularele V şi respectiv V', iar φ un omomorfism tare al lui L pe L', astfel încît $\rho_\varphi \leqslant S$. În aceste condiţii:*

1°. *Dacă $\rho \in E_\varphi(V)$ şi (V, ρ, L) este un limbaj adecvat, atunci $(V', \varphi(\rho), L')$ este de asemenea un limbaj adecvat.*

2°. *Dacă $\rho \in E(V')$ şi (V', ρ, L') este un limbaj adecvat, atunci limbajul $(V, \overset{-1}{\varphi}(\rho), L)$ este de asemenea adecvat.*

Demonstraţie. 1° Avem $S \leqslant \rho'$, adică $\rho'_\varphi \leqslant \rho'$ (deoarece ρ_φ este prin ipoteză o congruenţă). Rezultă $\varphi(\rho'_\varphi) \leqslant \varphi(\rho')$, adică $\varphi(\rho_\varphi)' \in \varphi(\rho)'$ $(\rho, \rho_\varphi \in E_\varphi(V))$. Dar $\varphi(\varphi_\varphi) = 1' = S$, deci $S \leqslant \varphi(\rho)'$.

2°. Relaţia $S \leqslant \rho'$ poate fi scrisă şi $1' \leqslant \rho'$; aplicîndu-i $\overset{-1}{\varphi}$, obţinem $\varphi^{-1}(1') \leqslant \overset{-1}{\varphi}(\rho')$, adică $\overset{-1}{\varphi}(1)' \leqslant \varphi^{-1}(\rho)'$; dar $\overset{-1}{\varphi}(1) = \rho_\varphi$ şi $\rho'_\varphi = S$, deci $S \leqslant \varphi^{-1}(\rho)'$. Aceasta exprimă faptul că $(V, \overset{-1}{\varphi}(\rho), L)$ este un limbaj adecvat.

9. OBSERVAŢII FINALE

9.1. După cum am mai constatat, clasa limbajelor este inclusă în cea a modelelor. Particularităţile unui limbaj în raport cu un model oarecare sînt:

(i) Vocabularul său este finit.

(ii) Mulţimea simbolurilor predicative este numărabilă.

(iii) Aplicaţia deg este bijectivă.

Deoarece prin operaţia de factorizare, care nu modifică decît vocabularul, aceste proprietăţi se păstrează, rezultă că clasa limbajelor este închisă faţă de această operaţie. Nu acelaşi lucru se poate spune despre operația de reducere care, modificînd mulțimea simbolurilor predicative, face ca aplicația *deg* să nu mai fie injectivă ($deg^* \, n_i = n - 1$ pentru $i=1,\ldots,n$); astfel, un limbaj redus este un model fără a mai rămîne un limbaj. De aceea, omomorfismul saturat nu admite o definiție directă fără a părăsi clasa limbajelor. El ar putea fi totuși definit folosind limbajele parțial reduse L_x^i, unde $x \in V$ și $i \in N$; prin definiție, $x_1 \ldots x_n \in L_x^i$ dacă și numai dacă $x_1 \ldots x_{i-1} \, x x_i \ldots x_n \in L$ (frazele marcate ale lui L_x^i se obțin prin eliminarea lui x de pe locul i în frazele marcate ale lui L). Utilizînd acest concept, vom spune că $\varphi: V \rightarrow V'$ este un omomorfism saturat al lui L pe L' dacă pentru orice $x \in V$ și $i \in N$ avem $\varphi: L_x^i \twoheadrightarrow L'^{i}_{\varphi(x)}$ (definiția este echivalentă cu 8.2 și 5.4).

9.2. În 8.4 am definit relația "x domină y", care exprimă faptul că în orice frază marcată, înlocuirea lui x (într-o apariție oarecare a sa) cu y conduce tot la o frază marcată, prin condiția $1_V: L_x^i \rightarrow L_y^i$ pentru orice $i \in N$. Condiția cu aplicația lui V care îl duce pe x în y lăsînd celelalte elemente neschimbate să fie un omomorfism al lui L pe L' arată că, prin substituirea cuvîntului x într-o frază marcată, peste tot unde apare, cu cuvîntul y, se obține tot o frază marcată; relația de dominare astfel definită este mai slabă decît prima, ne mai posedînd nici proprietatea de tranzitivitate.

9.3. În afară de operațiile de derivare și stelare, se mai pot introduce pentru o partiție oarecare ρ a modelului $\mathcal{M}(V, \mathcal{P})$ și alte tipuri de măriri ale sale, cu proprietăți interesante:

(i) $\overset{-1}{\varphi}_\rho(Z)$, unde Z este cea mai mare partiție saturată a lui $\mathcal{M}/\rho$.

(ii) $\overset{-1}{\varphi}_\rho(N)$, unde $N = \infty^*$ în $\mathcal{M}/\rho$.

(iii) $\overset{-1}{\varphi}_\rho(N^*)$, $\overset{-1}{\varphi}_\rho(N^{**})$ etc.

A doua dintre ele, de exemplu, pe care o vom nota cu $\bar{\rho}$, prezintă analogii pronunțate cu $\rho' = \overset{-1}{\varphi}_\rho(S)$. Astfel, dacă printr-o ∞ — mărire regulată a partiției $\rho_1 \in E(V)$ vom înțelege o partiție $\rho_2 \in E(V)$ astfel încît $\rho_1 \leqslant \rho_2 \leqslant \bar{\rho}_1$, atunci au loc următoarele teoreme:

1° Dacă ρ_2 este o ∞ — mărire regulată a lui ρ_1, atunci $\rho_1(x) \overset{\infty}{\rightarrow} \rho_1(y)$ este echivalent cu $\rho_2(x) \overset{\infty}{\rightarrow} \rho_2(y)$.

2°. Dacă $\rho_1 \leqslant \rho_2$, atunci $\bar{\rho}_1 = \bar{\rho}_2$ dacă și numai dacă ρ_2 este o ∞-mărire regulată a lui ρ_1.

3° $\bar{\bar{\rho}} = \bar{\rho}$ pentru orice $\rho \in E(V)$.

4° $\bar{\rho} = N$ dacă și numai dacă $\rho \leqslant N$; $\bar{S} = \bar{Z} = \bar{N} = N$.

9. 4. Omomorfismul în sensul lui Novotný [7] este definit prin condiția ca fraza $x_1 \ldots x_n$ să fie marcată în L dacă și numai dacă $\varphi(x_1) \ldots\ldots \varphi(x_n)$ este o frază marcată a lui L'. Rezultă că un astfel de omomorfism este echivalent cu un omomorfism tare φ cu proprietatea că ρ_φ este o relație de congruență în L (sau $\rho_\varphi \leqslant S$) fiind deci mai tare decît omomorfismul simplu, tare și saturat. Astfel, teorema 8.19 exprimă faptul că proprietatea unui limbaj de a fi adecvat este un invariant al omomorfismelor în sensul lui Novotný, ameliorînd un rezultat al lui Marcus ([5], propoziția 55, p. 65).

9.5. Relația lui Trybulec „x ρ — zamestimo na y" [12] este echivalentă, în notațiile noastre, cu $x \xrightarrow{\rho} y$ și $x \rho y$. În acest sens, corolarul 6.15 este o generalizare a teoremei 1 din [12]. Propoziția 6.18 și corolarul 8.7 coincid, respectiv, cu teoremele 2 și 3 din [12]. Tot în [12] este introdusă partiția Z. Propoziția (8.11) arată că partiția N a lui Trybulec [12] nu este altceva decît ∞^*.

În [13] se dau două definiții echivalente cu 6.3 pentru steaua unei partiții („operațiia*"), se arată că $1^* = 1' = S^* = S$ și se obține o parte a corolarului 6.8.

9.6. Noțiunile de ρ-structură, mărire regulată și derivată a unei partiții au fost introduse de Kulagina [2], căreia îi aparține și corolarul 7.13 ([2], teorema 1). Noțiunea de ρ — structură perfectă a fost introdusă de Revzin [9], iar cea de limbă adecvată de către Uspenskiĭ [14].

Teorema 7.9 și propoziția 7.11 aparțin lui Marcus ([5], teorema 1, p.16 ; [4], teorema 1, p. 136). Teorema 8.13 este datorată lui Marcus și Revzin [(5], teorema 4 și corolarul 5, p. 22—23).

*

Adresez mulțumirile mele respectuoase tovarășului profesor S. Marcus pentru îndrumare, continuă supraveghere și prețioase sfaturi.

Primită la redacție la 14 iunie 1968

Centrul de calcul economic
și cibernetică economică
Piața Romană nr. 6, București

ALGEBRAIC LINGUISTICS AND MODEL THEORY

(ABSTRACT)

In this study, the concept of language (Kulagina [2]) was included in that (more general one) of model (algebraic structure). Within the new framework, definitions and results of algebraic linguistics on partitions and domination relation were again reviewed and enriched.

In the first paragraphs, some results regarding the predicates and equivalence relations were recalled ; among them, the necessary and sufficient conditions of transportability of a paradigm (partition) by a mapping from a set to another is seen. Also, by means of model, factor model, homomorphism (simple and strong), isomorphism [8] and congruence relation [7] concepts, as well as those of reduced model and saturated homomorphism, some general theorems (expressed in diagram terms) involving the essence of many results concerning the domination relation were given. Further the ρ-domination relation (generalizing the domination relation of Dobrušin [1] and Sestier [11] and Trybulec's „ρ-zamestimo na" [12]) defined by the requirement that a certain mapping should fix a homomorphism between two reduced and then factorized models was studied ; it was proved to be an invariant of saturated homomorphisms.

The asterisk of a partition (ρ*), equivalent to „operatija*" of Trybulec [13] was defined by means of ρ-domination. (If φ is a saturated homomorphism, then $\varphi(\rho^*) = \varphi(\rho)^*$;

two more cases were examined, where this relation holds without φ being necessarily saturated).

Some operations performed on saturated partitions were then shown ; the following criterion was obtained : the necessary and sufficient condition for a partition ρ to be saturated is that $\rho \leqslant \rho^*$.

In connection with the derivative of a partition (Kulagina), some results of Kulagina, Marcus, Revzin and Novotný were found again and generalized. Besides, it was shown that the derivative and the asterisk of a partition coincide if and only if the partition is saturated ; if φ is a strong homomorphism, then $\varphi(\rho') = \varphi(\rho)'$.

In the last part of the study, a few more significant propositions proved for models were again considered and transposed to languages. It was then shown that the N partition of Trybulec [12] is nothing else but the asterisk of the improper partition (∞^*). The derivatives and asterisks of the most important partitions of a language were determined : thus, $N' = N$ and $Z^* = Z' = Z$ (Z being the greatest saturated partition of a language [12]).

At last, the concepts of adequate language (Uspenskii [14]) were briefly examined and a method (much more rapid than that of Trybulec [12]) was given, by which the partition Z can be reached in a finite number of steps (this number being a characteristic of each language) ; if n is this number, on the analogy of Kulagina's relation "regularly finer", n more types of enlargement of a partition were introduced.

BIBLIOGRAFIE

1. R. L. Dobrušin, *Matematiceskie metodi v lingvistike. Prilojenie.* Matematiceskoe prosveścenie, *6*, 52—59, 1961.
2. O. S. Kulagina, *Ob odnom sposobe opredelenija grammaticeskih ponjatii na baze teorii mnojestv.* Problemî kibernetiki, *1*, 203—214.
3. S. Marcus, *Asupra unui model logic al părţii de vorbire.* St. cerc. mat., **13**, *1*, 37—62 (1962).
4. S. Marcus, *Lingvistică matematică.* Bucureşti, 1966, ediţia a II-a.
5. S. Marcus, *Algebraic Linguistics ; Analytical Models.* Academic Press, New York, 1967.
6. L. Nebeský, *Language system.* Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées **13**, *3*, 401—405 (1968).
7. M. Novotný, *On some algebraic concepts of mathematical linguistics.* Prague Studies in Mathematical Linguistics, *1*, 125—140 (1966).
8. B. I. Plotkin, *Gruppî avtomorfizmov alghebraiceskih sistem.* Moskva, 1966.
9. I. I. Revzin, *Modelî jazîca.* Moskva, 1962.
10. I. I. Revzin, *Formalnîi i semanticeskii analiz sintaxiceskih svjazei v iazîke.* Prilojenija loghiki v nauke i tehnike, Moskva, 1960, p. 119.
11. A. Sestier, *Contribution à une théorie ensembliste des classifications linguistiques.* Actes du Premier Congrès de l'AFCAL, Grenoble 1960, Paris, 1961, p. 293—305.
12. A. Trybulec, *Ob adnom klase sintaxiceskih otnoşenii.* Naucino-tehniceskaja informaţija, *9*, 34—37 (1967).
13. A. Trybulec, *Razbienija slovnika v iazîkah s zadanîmi paradigmami* Naucino-tehniceskaja informaţija, *12*, 40—44 (1967).
14. V. A. Uspenskiĭ, *K opredelenija ceasti reci v teoretiko-mnojestvennoi sisteme jazîca.* Bjulleten Obedinenija po problemam maşinnogo perevoda, *5*, 22—26 (1957).

ω-BAZE ÎN SPAŢII HILBERT

DE

NICOLAE I. TIŢĂ,
(Braşov)

Folosind clasa operatorilor $\mathfrak{S}_{\omega}$ (Maţaev [2]) se defineşte un tip de bază în spaţii Hilbert, prin analogie cu p-bazele [1]. Se dau cîteva proprietăţi ale acestor baze şi o legătură a lor cu bazele p-apropiate de o bază ortonormală.

1. Vom considera spaţiul Hilbert separabil H şi $\mathcal{K}(H)$, algebra Banach a operatorilor liniari şi marginiţi ($A : H \rightarrow H$). În această algebră se consideră mai întîi idealul maximal $\mathfrak{S}_{\infty}$ al operatorilor complet continui şi idealele $\mathfrak{S}_p(A \in \mathfrak{S}_p$ dacă $A \in \mathfrak{S}_{\infty}$ şi $\sum\limits_{j=1}^{\infty} s_j^p(A) < \infty$, unde $s_j(A) = \lambda_j(AA^*)^{\frac{1}{2}}$).

În [1] se consideră spaţiul H şi se introduce noţiunea de p- bază în modul următor.

Fie $\{\varphi_j\}$ o bază ortonormală a lui H si $\{\psi_j\}$ un şir de elemente ω-liniar independent, iar T un operator din $\mathfrak{S}_p$. Dacă $\psi_j = (I + T)\varphi_j$, spunem că $\{\psi_j\}$ este o p-bază a lui H.

Se observă uşor că $\{\psi_j\}$ este o bază, deoarece este în primul rînd o bază Riesz ([1], [3]).

În cazul $T \in \mathfrak{S}_{\infty}$, prin extensiune de limbaj $\{\psi_j\}$ se va numi ∞ - bază.

În cele ce urmează vom considera operatorul $T \in \mathfrak{S}_{\infty}$ şi verificînd condiţia $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{s_j(T)}{2j-1} < \infty$.

Clasa operatorilor care verifică condiţia de mai sus, considerată pentru prima dată de Maţaev [2], în probleme de reprezentare triunghiulară a operatorilor liniari, formează un ideal simetric în algebra $\mathcal{K}(H)$. Această clasă de operatori o vom nota $\mathfrak{S}_{\omega}$

Prin analogie cu p-bazele, introducem aici noţiunea de ω-bază în modul următor :

Definiţie. *Şirul* $\{\psi_j\}$, *ω-liniar independent, se va numi ω - bază, dacă se poate reprezenta sub forma* $\psi_j = (I + T)\varphi_j$ ($j=1, 2, \ldots$), *unde* $T \in \mathfrak{S}\omega$ *iar* $\{\varphi_j\}$ *este o bază ortonormală.*

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 7, P. 1135–1139, BUCUREŞTI, 1969

Este mai întîi evident, ca și în cazul p - bazelor, că orice ω-bază este o bază Riesz, deoarece și aici $T \in \mathfrak{S}_\infty$.

2. În continuare se vor prezenta unele proprietăți ale acestor baze și legătura lor cu alte tipuri de baze.

TEOREMA 1. *Dacă* $\{\psi_j\}$ *este* ω-*bază a lui* H, *atunci și sistemul* $\{\chi_j\}$ *biortogonal cu* $\{\psi_j\}$ *este* ω-*bază a lui* H. [1])

Demonstrație. Considerăm

$$\psi_j = (I + T)\, \varphi_j, \text{ cu } T \in \mathfrak{S}_\omega \text{ și } (\varphi_j, \varphi_k) = \delta_{jk}.$$

Se obține:

$$\delta_{jk} = (\psi_j, \chi_k) = ((I + T)\, \varphi_j, \chi_k) = (\varphi_j, (I + T^*)\, \chi_k)$$

Deci

$$(I + T^*)\, \chi_k = \varphi_k \text{ sau } \chi_k = (I + T^*)^{-1}\, \varphi_k = (I + T_1)\, \varphi_k,$$

unde

$T_1 = - T^*(I + T^*)^{-1} \in \mathfrak{S}_\omega$, deoarece $\mathfrak{S}_\omega$ este ideal. În concluzie $\{\chi_k\}$ este ω-bază.

Vom stabili o legătură între bazele p apropiate de o bază ortonormală [2]) și ω-baze.

TEOREMA 2. *Orice bază* p-*apropiată de o bază ortonormală* $(1 < p \leqslant 2)$ *este* ω - *bază.*

Demonstrație. Observăm mai întîi că:

$$\Sigma \frac{s_j(A)}{2j-1} \leqslant \left(\Sigma \left(\frac{1}{2j-1}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} (\Sigma\, s_j^p(A))^{\frac{1}{p}} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

de unde se vede că orice operator din $\mathfrak{S}_p (p > 1)$ aparține și lui $\mathfrak{S}_\omega$ (în cazul nostru orice p-bază este și ω-bază $(p > 1)$).

Mai departe, ținînd seama că baza $\{\psi_j\}$ este p-apropiată de baza ortonormală $\{\varphi_j\}$, înseamnă că există un operator mărginit și inversabil care transformă baza $\{\varphi_j\}$ în $\{\psi_j\}$. Se va putea scrie deci $\psi_j = (I + T)\varphi_j$.

Dar

$$\Sigma \,|\, T\varphi_j \,|^p = \Sigma \,\|\varphi_j - \psi_j\|^p < \infty$$

cum însă [4]

$$\Sigma \,|\, T\varphi_j \,|^p > \Sigma\, s_j^p(T) \quad (p \leqslant 2)$$

rezultă că $T \in \mathfrak{S}_p$ $(1 < p \leqslant 2)$.

---

[1]) $\{\chi_j\}$ este biortogonal cu $\{\psi_k\}$ dacă $(\chi_j, \psi_k) = \delta_{jk}$.

[2]) Șirurile $\{\varphi_j\}$ și $\{\psi_j\}$ din H se numesc p-apropiate dacă $\sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi_j - \psi_j\|^p < \infty$.

Deci $T \in \mathfrak{S}_\omega$ şi $\{\psi_j\}$ este ω-bază.

O condiţie necesară şi suficientă de existenţă a unei ω-baze este dată de teorema următoare :

TEOREMA 3. *Pentru ca un sistem complet ω-liniar independent de elemente $\{\psi_j\}$ din spaţiul H să fie ω-bază, este necesar şi suficient ca matricea*

$$\| (\psi_j, \psi_k) - \delta_{jk} \|_{j,\, k=1}^{\infty}$$

să genereze în l_2 un operator de clasă $\mathfrak{S}_\omega$.

Demonstraţie. Fie $\psi_j = (I + T)\, \varphi_j$, unde $T \in \mathfrak{S}_\omega$ şi $(\varphi_j, \varphi_k) = \delta_{jk}$ se obţine

$$(\psi_j, \psi_k) - \delta_{jk} = ((I + T)\, \varphi_j, (I + T)\, \varphi_k) - \delta_{jh} =$$

$$= ((T + T^* + TT^*)\, \varphi_j, \varphi_k), \quad (1, k = 1, 2, \dots)$$

Cum $T \in \mathfrak{S}_\omega$ şi acesta este un ideal în $\mathcal{K}(H)$, rezultă că $T + T^* + TT^* \in \mathfrak{S}_\omega$ şi deci matricea considerată generează un operator de clasă $\mathfrak{S}_\omega$.

Pentru partea a doua se consideră baza ortonormală $\{\varphi_j\}$ şi se defineşte operatorul autoadjunct A care generează în baza $\{\varphi_j\}$ matricea din enunţ. $((I + A)\, \varphi_j, \varphi_k) = (\psi_j, \psi_k)$, $A \in \mathfrak{S}_\omega$.

Pe învelişul liniar G al lui $\{\varphi_j\}$ se defineşte operatorul B astfel :

$$B \sum_{j=1}^{n} C_j \varphi_j = \sum_{j=1}^{n} C_j \psi_j (n = 1, 2, \dots), \text{ pentru orice } f = \sum_{j=1}^{n} C_j \varphi_j \in G$$

$$\| Bf \|^2 = \sum_{j,k}^{n} C_j \overline{C}_k (\psi_j, \psi_k) = ((I + A) f, f) \leqslant \| I + A \| \cdot \| f \|^2.$$

Deci B se poate prelungi prin continuitate la întreg $\overline{G} = H$ şi urmează că :

(1) $$\| Bf \|^2 = ((I + A)\, f, f) \text{ pentru orice } f \in H.$$

Rezultă că

$((I + A)\, f, f) \geqslant 0$[3]).

Considerăm operatorul $C = \sqrt{I + A} - I \in \mathfrak{S}_\infty$ şi vom arăta că $C \in \mathfrak{S}_\infty$. Cum A este autoadjunct, rezultă că pentru un sistem complet $\{\chi_j\}$ de vectori proprii ortonormali, valorile proprii corespunzătoare satisfac relaţia

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\lambda_j(A)|}{2j - 1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{s_j(A)}{2j - 1} < \infty \text{ deoarece } A \in \mathfrak{S}_\omega.$$

---

[3]) $((I + A)\, f, f) = 0$ numai dacă $f = 0$ şi deci $I + A$ este inversabil.

Este evident că

$$s_j(C) = |\sqrt{1+\lambda_j(A)} - 1| \leqslant |\lambda_j(A)|.$$

Deci

$$\Sigma \frac{s_j(C)}{2j-1} = \Sigma \frac{|\sqrt{1+\lambda_j(A)}-1|}{2j-1} \leqslant \Sigma \frac{|\lambda_j(A)|}{2j-1} < \infty.$$

Cum $I + C = (I + A)^{\frac{1}{2}} > 0$, rezultă $I + C$ inversabil.

Relația notată cu (1) se mai scrie :

$$\|Bf\|^2 = \|(I + C)f\|^2$$

Valorile lui f formînd un sistem complet în H $(B\varphi_j = \psi_j)$, relația

$$U B \varphi_j = (I + C)\varphi_j.$$

definește un operator izometric. Dar cum $I + C$ este inversabil, rezultă U unitar.

Din relația de mai sus se obține

$$U B \varphi_j = (I + C)\varphi_j = U \psi_j.$$

Deci $\{U \psi_j\}$ este ω-bază. Atunci $\psi_j = (I + U^* C U) g_j$[4]. Rezultă $\{\psi_j\}$ ω-bază.

TEOREMA 4. *Fie $\{g_j\}$ un sistem de elemente din H astfel ca matricea Gram $\|(g_j, g_k)\|$ să genereze un operator din $\mathfrak{S}_{2p}$ $(p > 1)$ și fie $\{\psi_j\}$ o ω-bază a lui H.*

Dacă șirul $\{\chi_j\}$ este ω-liniar independent și se reprezintă sub forma $\chi_j = \psi_j + g_j$, atunci el este ω-bază.

Demonstrație. $\psi_j = (I + T)\varphi_j$, unde $T \in \mathfrak{S}_\omega$ și $(\varphi_j, \varphi_k) = \delta_{jk}$. Se definește operatorul A astfel ca $A\varphi_j = g_j$, și în baza enunțului se obține :

$$(g_j, g_k) = (A\varphi_j, A\varphi_k) = (A^*A\varphi_j, \varphi_k).$$

Deci

$$A^*A \in \mathfrak{S}_{2p} \quad \text{sau} \quad A \in \mathfrak{S}_p \quad (p > 1).$$

De aici rezultă că $A \in \mathfrak{S}_\omega$. Așadar

$$\chi_j = (I + T + A)\varphi_j \quad \text{cu} \quad T + A \in \mathfrak{S}_\omega.$$

Deci $\{\chi_j\}$ este ω-bază.

Primită la redacție la 23 septembrie 1968

Institutul politehnic Brașov

---

[4] $g_j = U^* \varphi_j$

ω-BASES DANS LES ESPACES HILBERT

(RÉSUMÉ)

En utilisant la classe d'opérateurs $\mathfrak{S}_\omega$ (Maţaev [2]), l'A. présente un type de base dans les espaces Hilbert, par analogie avec les p-bases [I]. Quelques propriétés de ces bases et une relation avec les bases p-approchées d'une base orthonormale sont également données.

BIBLIOGRAFIE

1. V. A. PRIGORSKII, *O necotorih classah bazisov Gilbertova prostranstva.* U.M.N., *5* (1965).
2. I. V. MAŢAEV, *Ob odnom classe vpolne neprerivnih operatorov.* D.A.N., **139**, *3* (1961).
3. N. TIŢA, *Asupra bazelor p-apropiate de o bază ortonormală în spaţii Hilbert.* St. cerc. mat., **21**, *2* (1969).
4. I. T. GOHBERG, A. S. MARCUS, *O necotorih noravenstvah mejdu sobstvenimi cislami i matricinimi elementami lineinih operatorov.* Izv. A.N. M.S.S.R., *5* (1962).

RECENZIE

PETRE MIRESCU, ALEXANDRU AL. ROŞU, *Teoria grafelor*, Ed. Militară, Bucureşti, 1968, 273 p.

Această lucrare îşi propune să prezinte elementele de bază ale teoriei grafelor şi să indice cît mai multe posibilităţi de aplicare a acestei teorii. Este binecunoscut faptul că fluxurile tehnologige, reţelele de transport, reţelele electrice, telefonice, telegrafice, programele de activitate, proiectele, ierarhiile structurale, arborii genealogici etc. se pretează a fi reprezentaţi şi analizaţi cu ajutorul grafelor. În domeniul militar, cîteva exemple de activităţi ce pot fi studiate pe baza teoriei grafelor sînt următoarele : concentrarea într-o anumită zonă a unei mari unităţi, pregătirea acţiunilor de bază, stabilirea obiectivelor prin distrugerea cărora se paralizează aprovizionarea unităţilor inamice, organizarea controlului unităţilor dislocate în mai multe localităţi, determinarea numărului minim de posturi de observare aeriană sau terestră, organizarea mobilizării, rezolvarea unor probleme legate de forţarea cursurilor de apă.

Cartea este împărţită în opt capitole.

Capitolul 1 conţine noţiunile de bază ale teoriei. Capitolul 2 este dedicat studiului drumurilor optime într-un graf. Relaţiile de preordine în grafe fac obiectul capitolului 3. Reţelele de transport sînt studiate în capitolul 4, iar matricile asociate multigrafelor în capitolul 5. Capitolul 6 este consacrat studiului drumurilor hamiltoniene.

În capitolul 7 se studiază noţiunea de arbore (graf finit conex şi fără cicluri) iar capitolul final este dedicat metodei drumului critic.

Autorii pun în evidenţă în mod sistematic diversele contribuţii româneşti la această teorie.

Expunerea este clară şi concisă, cartea fiind accesibilă unui cititor cu pregătire matematică medie.

Considerăm că această lucrare va fi foarte utilă în special acelora care îşi vor propune rezolvarea efectivă a unor probleme practice concrete.

M. Iosifescu

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date din text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa Comitetului de redacţie, Calea Griviţei nr. 21, Bucureşti 12.

1969 SEP 3

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, A. DELEANU, M. JURCHESCU, **Topologie, Categorii, Suprafeţe riemanniene**, 1967, 394 p., 21,50 lei.

I. COLOJOARĂ, **Elemente de teorie spectrală**, 1968, 311 p., 19,50 lei.

ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.

I. CUCULESCU, **Procese Markov şi funcţii excesive**, 1968, 356 p., 19 lei.

L. DRAGOŞ, **Magnetodinamica fluidelor**, 1969, 476 p., 27 lei.

ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, **Introducere în hidrodinamica corpurilor poroase**, 1969, 210, p., 8 lei.

ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, **Metode matematice în hidrogazodinamica subterană**, 1966, 582 p., 31 lei.

AL. GHIKA, **Analiza funcţională**, 1967, 594, p., 31 lei.

ALEXANDRU GHIKA, **Opera matematică**, 1968, 955 p., 50 lei.

S. GUIAŞU şi R. THEODORESCU, **Teoria matematică a informaţiei**, 1966, 227 p., 8,25 lei.

S. GUIAŞU, **Aplicaţii ale teoriei informaţiei. (Sisteme dinamice – Sisteme cibernetice)**, 1968, 350 p., 17 lei.

A. HALANAY, D. WEXLER, **Teoria calitativă a sistemelor cu impulsuri**, 1968, 313 p., 13 lei.

M. IOSIFESCU şi P. TĂUTU, **Procese stohastice şi aplicaţii în biologie şi medicină**, 1968, 345 p., 22 lei.

MANEA MĂNESCU, ANATOL MĂCRIŞ, VINCENŢIU DUMITRU, **Metode matematice moderne aplicate în organizarea şi planificarea lucrărilor de construcţie şi montaje**, 1969, 256 p, 14 lei

T. MOROZAN, **Stabilitatea sistemelor cu parametrii aleatori**, 1969, 242 p. 8,50 lei.

N. RADU, **Inele locale**, vol. I, 1968, 378 p., 19 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, vol. II, 1966, 669 p., 38 lei.

IVAN SINGER, **Cea mai bună aproximare în spaţii vectoriale normate prin elemente din subspaţii vectoriale**, 1967, 386 p., 23 lei.

MARIUS I. STOKA, **Geometrie integrală**, 1967, 240 p., 9,70 lei.

SIMION SANIELEVICI, **Opera matematică**, 1968, 298 p., 15,50 lei.

ION SUCIU, **Algebre de funcţii**, 1969, 240 p. 7 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 7, P. 973–1142, BUCUREŞTI, 1969

I.P. „Informaţia" – c. 3390

43831 Lei 20.—

762

02-0011

STUDII ȘI CERCETĀRI MATEMATICE

8

TOMUL 21

1969

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție.

La revue „STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE" paraît 10 fois par an. Le prix d'un abonnement annuel est de \$ 10. — ; £ 4.4.0; F.F.49. — ; D.M.40. —.
Toute commande de l'étranger sera adressée à CARTIMEX, Boite postale 134—135, Roumanie, ou à ses représentants à l'étranger. En Roumanie, vous pourrez vous abonner par les bureaux de poste au chez votre facteur.
În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție al revistei pe adresa: Calea Griviței nr. 21, București 12.

TOM. 21, Nr. 8
1969

STUDII ŞI CERCETARI
MATEMATICE

SUMAR

Pag.

A. BARSONY-NAGY, Asupra problemei lui Volterra cu singularităţi date pentru exteriorul cercului 1145

GH. TH. GHEORGHIU, O clasă particulară de spaţii cu conexiune afină 1157

EUGEN MĂRGĂRITESCU, Asupra comparării mediilor unor populaţii unidimensionale 1169

IONEL ŢEVY, Asupra unei teoreme a lui Florin Vasilescu . . . 1173

F.-H. VASILESCU, Operatori rezidual decompozabili în spaţii Fréchet 1181

G. VRACIU, GEZA KLINCSEK şi IULIA KLINCSEK, Metode de rezolvare numerică a problemei de programare pătratică 1249

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 8, P. 1143–1262, BUCUREŞTI, 1969

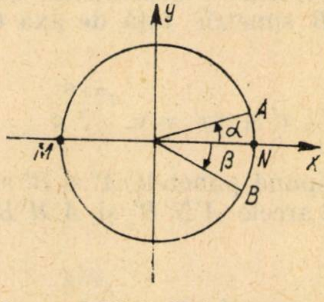
ASUPRA PROBLEMEI LUI VOLTERRA CU SINGULARITĂŢI DATE PENTRU EXTERIORUL CERCULUI

DE

A. BARSONY-NAGY

Se caută o funcţie analitică regulată în exteriorul unui cerc, în afara unui punct unde funcţia are o singularitate de formă dată şi satisfăcînd pe cerc condiţii la limită de tip Volterra omogene. Derivata funcţiei se presupune a fi uniformă în domeniul considerat şi integrabilă pe cerc. Se găseşte o familie de funcţii satisfăcînd condiţiile la limită depinzînd de două funcţii care se determină astfel ca soluţia să aibă singularităţile date. Se aplică metoda la două exemple cu interpretare mecanică.

Se consideră domeniul D exteriorul unui cerc C, de rază a, cu centrul în origine. Unghiul la centru se notează cu σ. Fie punctele A şi B de afix $a\,e^{i\alpha}$ şi $a\,e^{i\beta}$



Se caută o funcţie analitică $F(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ definită şi regulată în domeniul D în afara unui punct z_0 cu $|z_0| > a$, z_0 putînd fi şi la infinit unde funcţia $F(z)$ are o singularitate de forma

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(z - z_0)^k} + A_0 \ln(z - z_0)$ dacă z_0 e un punct la distanţă finită;

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k z^k + A_0 \ln z$ dacă z_0 e la infinit.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 8, P. 1145–1156, BUCUREŞTI, 1969

Funcţia $F(z)$ verifică pe cerc condiţiile la limită

$$\mathrm{Re}\,\{F(z)\} = 0 \text{ pe } ANB \tag{3}$$

$$\mathrm{Im}\,\{F(z)\} = 0 \text{ pe } AMB. \tag{4}$$

În plus funcţia $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}$ e uniformă, nu are singularităţi pe arcele deschise AMB şi ANB şi

$$\oint_c \left|\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right| \mathrm{d}\sigma < \infty. \tag{5}$$

Vom determina condiţiile în care avem

$$\oint \left|\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right|^2 \mathrm{d}\sigma < \infty. \tag{6}$$

Se ştie că soluţia problemei formulate de condiţiile (1) sau (2), (3), (4), (5) sau (6) este unică. Relaţia (6) are o interpretare mecanică. Dacă considerăm $F(z)$ ca potenţialul unei mişcări permanente irotaţionale plane a unui fluid perfect şi incompresibil, în domeniul D avînd o singularitate în punctul z_0 şi C fiind impermeabil pe porţiunea AMB şi emiţînd un jet normal pe porţiunea ANB, atunci condiţia (6) permite aplicarea unei teoreme de tip Kutta-Jukovski pentru calculul rezultantei forţelor aerodinamice.

Să observăm că problema e echivalentă cu o problemă de acelaşi tip însă cu cercul ANB simetric faţă de axa Ox. Într-adevăr, făcînd transformarea conformă

$$z' = x' + iy' = \mathrm{e}^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}} z \tag{7}$$

punctelor A şi B le corespund punctele A' şi B' simetrice faţă de axa Ox. Funcţia $F(z')$ verifică pe arcele $A'N'B'$ şi $A'M'B'$ condiţiile (3) şi (4) şi în punctul

$$z_0' = z_0\, \mathrm{e}^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}} \tag{8}$$

are singularităţi de forma (1) sau (2) ale cărui coeficienţi A_k' ($k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n$) sînt legate de coeficienţii A_k prin relaţiile

$$A_k' = A_k\, \mathrm{e}^{-ik\frac{\alpha+\beta}{2}} \quad \text{pentru } z_0 \text{ la distanţă finită} \tag{9}$$

$$A' = A_k\, \mathrm{e}^{ik\frac{\alpha+\beta}{2}} \quad \text{pentru } z_0 \text{ la infinit.} \tag{10}$$

Pentru simplificarea calculelor vom putea considera numai cazul $\alpha = -\beta$.

Condiţiile (3) şi (4) sînt echivalente cu condiţiile

$$\arg\left\{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right\} = -\sigma \pmod{\pi} \text{ pe } ANB \tag{11}$$

$$\arg\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = -\sigma + \frac{\Pi}{2} \pmod{\pi} \text{ pe } AMB \tag{12}$$

$$\varphi(1, 0) = \psi(-1, 0) = 0. \tag{13}$$

Într-adevăr, condiţiile (11) şi (12) sînt echivalente cu $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = 0$ pe ANB şi $\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s} = 0$ pe AMB.

Să construim funcţiile $f_1(z)$ şi $f_2(z)$, analitice în D, satisfăcînd condiţiile

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,\{f_1(z)\} = 0 \text{ pe } ANB \\ \mathrm{Im}\,\{f_1(z)\} = 0 \text{ pe } AMB \\ \lim\limits_{z\to\infty} f_1(z) = 1 \end{cases} \tag{14}$$

şi

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,\{f_2(z)\} = 0 \text{ pe } AMB \\ \mathrm{Im}\,\{f_2(z)\} = 0 \text{ pe } ANB \\ \lim\limits_{z\to\infty} f_2(z) = 1. \end{cases} \tag{15}$$

Pentru găsirea acestor funcţii se caută funcţiile $f_1(z) - 1$ şi $f_2(z) - 1$ analitice şi regulate în domeniul D şi la infinit satisfăcînd condiţii neomogene pe C. Din cauza simetriei figurii, problema se reduce printr-o transformare Jukovski la o problemă mixtă pentru semiplan care se rezolvă cu metoda din lucrarea [1]. Se găseşte

$$f_1(z) = \frac{z - a}{\sqrt{(z - a\,\mathrm{e}^{i\alpha})\,(z - a\,\mathrm{e}^{-i\alpha})}} \tag{16}$$

$$f_2(z) = \frac{z - a}{\sqrt{(z - a\,\mathrm{e}^{i\alpha})\,(z - a\,\mathrm{e}^{-i\alpha})}} \tag{17}$$

cu determinarea radicalului, reală şi pozitivă pentru z real şi mai mare ca a.

Funcţiile $f_1(z)$ şi $f_2(z)$ au interpretare mecanică. Ele reprezintă potenţialele complexe a două mişcări în jurul conturului C în absenţa oricărei singularităţi, pentru prima arcul *AMB* fiind impermeabil şi emiţîndu-se un jet normal pe arcul *ANB*, iar pentru a doua arcul *ANB* fiind impermeabil, jetul emiţîndu-se normal pe arcul *AMB*.

Fie acum două funcţii analitice $G_1(z)$ şi $G_2(z)$ în domeniul D în afara punctului z_0 şi ∞, satisfăcînd condiţiile

$$\text{Im}\,\{G_1(z)\} = 0 \text{ pe } C \text{ adică} \tag{18}$$

$$\arg\left\{\frac{\mathrm{d}G_1}{\mathrm{d}z}\right\} = -\sigma + \frac{\pi}{2}\,(\text{mod } \pi) \text{ pe } C \tag{18'}$$

şi

$$\text{Re}\,\{G_2(z)\} = 0 \text{ pe } C \text{ adică} \tag{19}$$

$$\arg\left\{\frac{\mathrm{d}G_2}{\mathrm{d}z}\right\} = -\sigma\,(\text{mod } \pi) \text{ pe } C. \tag{19'}$$

Avem deci

$$\begin{aligned}\arg\left\{\frac{\mathrm{d}G_1}{\mathrm{d}z}\cdot f_1(z)\right\} &= \arg\left\{\frac{\mathrm{d}G_1}{\mathrm{d}z}\right\} + \arg\,\{f_1(z)\} = \\ &= \begin{cases} -\sigma\,(\text{mod } \pi) \text{ pe } ANB \\ -\sigma + \dfrac{\pi}{2}\,(\text{mod } \pi) \text{ pe } AMB \end{cases}\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\arg\left\{\frac{\mathrm{d}G_2}{\mathrm{d}z}\,f_2(z)\right\} &= \arg\left\{\frac{\mathrm{d}G_2}{\mathrm{d}z}\right\} + \arg\,\{f_2(z)\} = \\ &= \begin{cases} -\sigma\,(\text{mod } \pi) \text{ pe } ANB \\ -\sigma + \dfrac{\pi}{2}\,(\text{mod } \pi) \text{ pe } AMB. \end{cases}\end{aligned} \tag{21}$$

Prin urmare pe baza relaţiilor (11) şi (12) funcţiile

$$F_1(z) = \int_{z_1}^{z} \frac{\mathrm{d}G_1}{\mathrm{d}z}\,f_1(z)\mathrm{d}z + K_1 \qquad z_1 \in D - z_0 \tag{22}$$

$$F_2(z) = \int_{z_1}^{z} \frac{\mathrm{d}G_2}{\mathrm{d}z}\,f_2(z)\,\mathrm{d}z + K_2, \tag{23}$$

unde K_1 şi K_2 sînt două constante alese convenabil, satisfac condiţiile (11) şi (12) şi (13) şi deci condiţiile (3) şi (4). În plus, dacă $\frac{\mathrm{d}G_1}{\mathrm{d}z}$ şi $\frac{\mathrm{d}G_2}{\mathrm{d}z}$ sînt uniforme, atunci şi $\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}z}$ şi $\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}z}$ sînt uniforme.

Vom căuta funcţia $F(z)$ sub forma

$$F(z)=\int_{z_1}^{z}\left(\frac{\mathrm{d}G_1}{\mathrm{d}z}f_1(z)+\frac{\mathrm{d}G_2}{\mathrm{d}z}f_2(z)\right)\mathrm{d}z+K, \tag{24}$$

unde $G_1(z)$ şi $G_2(z)$ au derivate uniforme în $D-z_0$ şi se determină astfel ca $F(z)$ să satisfacă condiţia (1) sau (2).

Considerăm cazul z_0 la distanţă finită. Presupunem că $G_1(z)$ şi $G_2(z)$ au singularităţi în punctul z_0 de forme

$$G_{01}(z)=\sum_{k=1}^{m}B_{-k}(z-z_0)^{-k}+B_0\ln(z-z_0), \tag{25}$$

$$G_{02}(z)=\sum_{k=1}^{m}C_{-k}(z-z_0)^{-k}+C_0\ln(z-z_0). \tag{26}$$

În acest caz vom pune

$$G_1(z)=G_{01}(z)+\overline{G_{01}\left(\frac{a^2}{\bar z}\right)}+\frac{\Gamma-\overline{\Gamma}}{2}\ln\frac{z}{a} \tag{27}$$

$$G_2(z)=G_{02}(z)-\overline{G_{02}\left(\frac{a^2}{\bar z}\right)}+\frac{\Gamma+\overline{\Gamma}}{2}\ln\frac{z}{a}, \tag{28}$$

unde Γ e o constantă complexă. Folosind relaţiile (16), (17), (27), (28), relaţia (24) devine

$$F(z)=\int_{z_1}^{z}\left[\frac{P_0(z-z_0)^{m+1}+P_1(z-z_0)^{m}+\ldots+P_m(z-z_0)+P_{m+1}}{(z-z_0)^{m+1}}+\right. \tag{29}$$

$$\left.+\frac{\overline{P}_0\left(\frac{a^2}{z}-\bar z_0\right)^{m+1}+\overline{P}_1\left(\frac{a^2}{z}-\bar z_0\right)^{m}+\ldots+\overline{P}_{m+1}}{\left(\frac{a^2}{z}-\bar z_0\right)^{m+1}}\,\frac{a}{z}\right]\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(z-a\,\mathrm{e}^{i\alpha})(z-a\,\mathrm{e}^{-i\alpha})}}+K,$$

unde constantele $P_0, P_1, \ldots, P_{m+1}$ sînt legate de constantele $B_0, B_1, \ldots, B_m, C_0, C_1 \ldots C_m, \Gamma$, prin relaţiile

$$
(30)\quad \begin{cases}
P_0 = \Gamma + B_0 + C_0 \\
P_1 = -B_1 - C_1 + B_0(z_0 - a) + C_0(z_0 + a) \\
P_k = -K(B_{-k} + C_{-k}) - (K-1)[B_{-k+1}(z_0 - a) + C_{-k+1}(z_0 + a)] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad k = (2, 3, \ldots, m) \\
P_{m+1} = -m\,[B_{-m}(z_0 - a) + C_{-m}(z_0 + a)].
\end{cases}
$$

Dezvoltînd pe $\dfrac{1}{\sqrt{(z - a\mathrm{e}^{i\alpha})(z - a\mathrm{e}^{-i\alpha})}}$ în serie Taylor în jurul punctului z_0, obţinem

$$
(31)\qquad \frac{1}{\sqrt{(z - a\mathrm{e}^{i\alpha})(z - a\mathrm{e}^{-i\alpha})}} = \sum_{j=0}^{\infty} D_j (z - z_0)^j \quad (D_0 \neq 0).
$$

Rezultă că partea principală în jurul punctului z_0 a funcţiei de integrat este

$$
(32)\qquad \sum_{l=1}^{m+1} \left(\sum_{k-j=l} P_k D_j \right) (z - z_0)^{-l}
$$

şi deci singularitatea lui $F(z)$ în punctul z_0 este de forma

$$
(33)\qquad \sum_{l=1}^{m} l \left(\sum_{k-j=l+1} P_k D_j \right) (z - z_0)^{-l} + \sum_{k-j=1} P_k D_j \ln (z - z_0).
$$

Ca această singularitate să fie chiar cea dată de relaţia (1), trebuie să avem $m \geqslant n$ şi

$$
(34)\qquad \begin{cases}
\displaystyle\sum_{k-j=l+1} P_k D_j = \begin{cases} 0 & n < l \leqslant m \\ -\dfrac{Al}{l} & 1 \leqslant l \leqslant n \end{cases} \\
\displaystyle\sum_{k-j=1} P_k D_j = A_0.
\end{cases}
$$

Relaţiile (34) reprezintă un sistem liniar diagonal de $m + 1$ ecuaţii în $m + 1$ necunoscute $P_1, P_2, \ldots, P_{m+1}$ (P_0 nu intervine). Cum $D_0 \neq 0$, acest sistem este compatibil şi determinat. În plus alegerea lui m arbitrară nu influenţează cu nimic, fiindcă $P_k = 0$ pentru $k > n + 1$.

Dezvoltînd în jurul punctului de la infinit funcţia de integrat din relaţia (29), se obţine că ea are comportamentul ca

$$
(35)\qquad \frac{P_0}{z} + o\left(\frac{1}{z^2}\right).
$$

Deci ca să nu apară o singularitate logaritmică la infinit trebuie ca

$$P_0 = 0. \tag{36}$$

Relaţiile (34) şi (36) se determină pe $P_0, P_1, \ldots, P_{m+1}$. Introducînd aceste valori în relaţiile (30), se obţine un sistem liniar de $m+2$ ecuaţii cu $2m+3$ necunoscute $B_0, B_1, \ldots, B_m, C_0, C_1, \ldots C_m, \Gamma$. Fixînd în mod arbitrar pe $B_0, B_1, \ldots B_m$, sistemul devine diagonal în $C_0, C_1, \ldots C_m$; Γ, care astfel se pot totdeauna determina. Alegerea arbitrară a lui $B_0, B_1, \ldots, B_m$ nu influenţează forma funcţiei $F(z)$.

Am obţinut astfel soluţia problemei formulate de condiţiile (1), (3), (4) şi (5), fiindcă

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = \frac{R(z)}{\sqrt{(z - a\mathrm{e}^{i\alpha})(z - a\mathrm{e}^{-i\alpha})}} \tag{37}$$

satisface condiţia (5), unde cu $R(z)$ s-a notat

$$R(z) = \frac{P_0(z - z_0)^{m+1} + P_1(z - z_0)^m + \ldots + P_{m+1}}{(z - z_0)^{m+1}} + \tag{38}$$

$$+ \frac{\overline{P}_0\left(\frac{a^2}{z} - \overline{z}_0\right)^{m+1} + \overline{P}_1\left(\frac{a^2}{z} - \overline{z}_0\right) + \ldots + \overline{P_{m+1}}}{\left(\frac{a^2}{z} - \overline{z}_0\right)^{m+1}} \, \frac{a}{z}.$$

Ca să fie satisfăcută condiţia (6), trebuie ca

$$R(a\mathrm{e}^{i\alpha}) = R(a\mathrm{e}^{-i\alpha}) = 0. \tag{39}$$

Dar pentru $|z| = a$ avem

$$R(z) = \left[\frac{P_0(z - z_0)^{m+1} + P_1(z - z_0)^m + \ldots + P_{m+1}}{(z - z_0)^{m+1}\sqrt{\overline{z}}} + \right. \tag{40}$$

$$\left. + \frac{\overline{P}_0(\overline{z} - \overline{z}_0)^{m+1} + \overline{P}_1(\overline{z} - \overline{z}_0)^m + \ldots + \overline{P_{m+1}}}{(\overline{z} - \overline{z}_0)^{m+1}\sqrt{z}}\right]\sqrt{\overline{z}}$$

şi deci relaţiile (39) sînt echivalente cu

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{P_0(z - z_0)^{m+1} + P_1(z - z_0)^m + \ldots + P_{m+1}}{(z - z_0)^{m+1}\sqrt{\overline{z}}}\right\} = 0 \text{ pentru } z = a\mathrm{e}^{i\alpha} \tag{41}$$

$$\text{şi } z = a\mathrm{e}^{-i\alpha}.$$

Relațiile (41) reprezintă două relații liniare reale în P_0, $P_1 \ldots P_{m+1}$ și deci sînt echivalente cu o relație liniară complexă în $P_0, \ldots P_{m+1}$ și deci cu o relație liniară între $A_0, A_1, \ldots A_n$. Prin urmare ambele condiții (39) se reduc la o singură condiție liniară pentru $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

Să considerăm cazul z_0 la infinit. Luăm pe $G_1(z)$ și $G_2(z)$ de forma

$$G_1(z) = \sum_{k=1}^{m} B_k z^k + \sum_{k=1}^{m} \overline{B}_k \left(\frac{a^2}{z}\right)^k + \frac{\Gamma - \overline{\Gamma}}{2} \ln z \tag{42}$$

$$G_2(z) = \sum_{k=1}^{m} C_k z^k - \sum_{k=1}^{m} \overline{C}_k \left(\frac{a^2}{z}\right)^k + \frac{\Gamma + \overline{\Gamma}}{2} \ln z. \tag{43}$$

Înlocuind pe $G_1(z)$ și $G_2(z)$ date de relațiile (42) și (43) în (24) și ținînd cont de relațiile (16) și (17), se obține

$$F(z) = \int_{z_1}^{z} \left[P_0 z^m + P_1 z^{m-1} + \ldots + P_m + \left(\overline{P}_0 \left(\frac{a^2}{z}\right)^m + \overline{P}_1 \left(\frac{a^2}{z}\right)^{m-1} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \ldots + \overline{P}_m \right) \frac{a}{z} \right] \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(z - a\,\mathrm{e}^{i\alpha})(z - a\,\mathrm{e}^{-i\alpha})}} + K, \tag{44}$$

unde $P_0, P_1, \ldots P_m$ sînt legate de constantele $B_0, B_1, \ldots B_m$, $C_0, C_1, \ldots, C_m$ prin relațiile

$$\begin{cases} P_0 = B_n + C_n \\ P_{m-k} = k(B_k + C_k) + a(k+1)(B_{k+1} - C_{k+1}) \quad (k = 1, \ldots, m-1) \\ P_m = a(B_1 + C_1) + \Gamma. \end{cases} \tag{45}$$

Cum dezvoltarea în jurul punctului de la infinit al funcției $\dfrac{1}{\sqrt{(z - a\,\mathrm{e}^{i\alpha})(z - a\,\mathrm{e}^{-i\alpha})}}$ este

$$\frac{1}{\sqrt{(z - a\,\mathrm{e}^{i\alpha})(z - a\,\mathrm{e}^{-i\alpha})}} = \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{E_j}{z^j} \qquad (E_0 = 1) \tag{46}$$

singularitatea în jurul punctului de la infinit al funcției de integrat din relația (44) este

$$\sum_{l=-1}^{m-1} \left(\sum_{k+j=m-l-1} P_k E_j \right) z^l \tag{47}$$

şi deci singularitatea în punctul de la infinit al funcţiei $F(z)$ este

$$\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l}\left(\sum_{k+j=m-l} P_k E_j\right) z^l + \left(\sum_{k+j=m} P_k E_j\right) \ln z. \tag{48}$$

Ca aceste singularităţi să fie chiar cele date de relaţia (2) trebuie ca $m \geqslant n$ şi

$$\begin{cases} \sum\limits_{k+j=m-l} P_k E_j = \begin{cases} 0 & n < l \leqslant m \\ \dfrac{Al}{l} & 1 \leqslant l \leqslant n \end{cases} \\ \sum\limits_{k+j=m} P_k E_j = A_0. \end{cases} \tag{49}$$

Relaţiile (49) reprezintă un sistem liniar diagonal de $m + 1$ relaţii cu $m + 1$ necunoscute $P_0, P_1, \ldots, P_m$ compatibil şi determinat, fiindcă $E_0 = 1 \neq 0$. Alegerea lui m din nou nu e esenţială fiindcă $P_k = 0$ pentru $k > m - n$ deci avem în total $n + 1$ constante P. Introducînd pe P astfel determinaţi în relaţiile (45), se obţine un sistem liniar de $n + 1$ ecuaţii cu $2n + 1$ necunoscute $B_1, \ldots B_m, C_1, \ldots, C_m, \Gamma$. Alegînd în mod arbitrar pe $B_1, \ldots B_m$ se obţine un sistem diagonal compatibil şi determinat pentru $C_1, \ldots C_m, \Gamma$ şi $F(z)$ nu depinde de alegerea constantelor $B_j (j = 1, \ldots, n)$.

Avem

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = \frac{R(z)}{\sqrt{(z - a\,\mathrm{e}^{i\alpha})(z - a\,\mathrm{e}^{-i\alpha})}}, \tag{50}$$

unde

$$R(z) = P_0 z^m + P_1 z^{m-1} + \ldots + P_m + \left[\overline{P}_0\left(\frac{a^2}{z}\right)^m + \overline{P}_1\left(\frac{a^2}{z}\right)^{m-1} + \ldots + \overline{P}_m\right]\frac{a}{z}, \tag{51}$$

deci condiţia (5) e satisfăcută. Ca să fie satisfăcută condiţia (6), trebuie să avem

$$R(a\,\mathrm{e}^{i\alpha}) = R(a\,\mathrm{e}^{-i\alpha}) = 0 \tag{52}$$

care de data asta este echivalentă cu

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{P_0 z^m + P_1 z^{m-1} + \ldots + P_m}{\sqrt{z}}\right\} = 0 \text{ pentru } z = a\,\mathrm{e}^{i\alpha} \text{ şi } z = a\,\mathrm{e}^{-i\alpha} \tag{53}$$

care e din nou echivalentă cu o singură relaţie liniară complexă între $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

Aplicații. a) *Problema aripii circulare cu jet în prezența unui curent uniform la mare distanță.* Se caută o funcție regulată în tot domeniul D satisfăcînd condițiile (3), (4) și (6) astfel ca

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = V_\infty\,\mathrm{e}^{-i\gamma}\;(V_\infty \text{ real}). \tag{54}$$

Din (54) rezultă că $F(z)$ are la mari distanțe compartamentul

$$V_\infty\,\mathrm{e}^{-i\gamma}\,z + A_0 \ln z, \tag{55}$$

unde de data asta constanta A_0 nu e dată anterior. Luăm $m = 1$, și sistemul (49) se reduce la

$$\begin{cases} P_0E_0 = V_\infty\,\mathrm{e}^{-i\gamma} \\ P_1E_0 + P_0E_1 = A_0 \end{cases} \tag{56}$$

cum

$$\begin{cases} E_0 = 1 \\ E_1 = a\cos\alpha. \end{cases} \tag{57}$$

Avem

$$\begin{cases} P_0 = V_\infty\,\mathrm{e}^{-i\gamma} \\ P = A_0 - a\cos\alpha\,V_\infty\,\mathrm{e}^{-i\gamma}. \end{cases} \tag{58}$$

Introducînd aceste constante în relația (44) se obține

$$F(z) = \int_{z_1}^{z} \cos\alpha\,V_\infty\,\mathrm{e}^{-i\gamma}\,z^3 + (A_0 - a\cos\alpha\,V_\infty\,\mathrm{e}^{-i\gamma})\,z^2 + \tag{59}$$

$$+\,a(\overline{A}_0 - a\cos\alpha\,V_\infty\,\mathrm{e}^{i\gamma})\,z + a^3\cos\alpha\,V_\infty\,\mathrm{e}^{i\gamma}]\,\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(z - a\,\mathrm{e}^{i\alpha})\,(z - a\,\mathrm{e}^{-i\alpha})\,z^2}} + K.$$

Pentru ca relația (52) să fie satisfăcută, trebuie ca polinomul de la numărătorul funcției de integrat să aibă rădăcinile $a\,\mathrm{e}^{i\alpha}$ și $a\,\mathrm{e}^{-i\alpha}$ și deci și rădăcina $-a\,\mathrm{e}^{2i\gamma}$. Relațiile dintre rădăcini și coeficienți, care din cauza considerațiilor anterioare știm că se reduc la o singură relație, ne dau

$$A_0 - a\cos\alpha\,V_\infty\,\mathrm{e}^{-i\gamma} = V_\infty\cos\alpha\,a(\mathrm{e}^{i\gamma} - 2\cos\alpha\,\mathrm{e}^{-i\gamma}) \tag{60}$$

și deci

$$A_0 = a\,V_\infty\cos\alpha(\mathrm{e}^{i\gamma} - \cos\alpha\,\mathrm{e}^{-i\gamma}). \tag{61}$$

Soluţia dată de relaţia (59) cu A_0 determinat din (61) se găseşte în lucrarea [3].

b) *Mişcarea într-un mediu poros în prezenţa unei cavităţi parţial obturate şi un izvor punctual.* Se caută o funcţie $F(z)$ olomorfă în $D-z_0$ satisfăcînd condiţiile (3), (4) şi (5) şi avînd în z_0 singularitatea

$$\frac{q}{2\pi}\ln(z-z_0) \qquad (q \text{ real}). \tag{62}$$

În acest caz luăm pe $m = 0$ şi sistemul (34) şi (36) devine

$$\begin{aligned} &P_0 = 0 \\ &P_1 D_0 = \frac{q}{2\pi} \qquad D_0 = \frac{1}{\sqrt{(z_0 - a\,\mathrm{e}^{i\alpha})(z_0 - a\,\mathrm{e}^{-i\alpha})}}. \end{aligned} \tag{63}$$

Înlocuindu-le în relaţia (29) se obţine

$$F(z) = \frac{q}{2\pi}\int_{z_1}^{z} \frac{z\left(\dfrac{a}{D_0} - \dfrac{\bar{z}_0}{\bar{D}_0}\right) + \dfrac{a^2}{D_0} - \dfrac{z_0 a}{D_0}}{(z-z_0)(a^2 - z\bar{z}_0)\sqrt{(z - a\,\mathrm{e}^{i\alpha})(z - a\,\mathrm{e}^{-i\alpha})}}\,\mathrm{d}z + K. \tag{64}$$

Dacă nu-l presupunem pe $P_0 = 0$ (adică admitem şi o singularitate la infinit), putem să-l determinăm în aşa fel încît condiţiile (39) să fie satisfăcute.

Primită la redacţie la 20 ianuarie 1969

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
Calea Griviţei nr. 21, Bucureşti 12

SUR LE PROBLÈME DE VOLTERRA À SINGULARITÉS DONNÉES POUR L'EXTÉRIEUR DU CERCLE

(RÉSUMÉ)

On cherche une fonction $F(z)$, analytique à l'extérieur d'un cercle sauf un point z_0 où il a une singularité de la forme $\sum_{k=1}^{n} A_k(z-z)^{-k} + A_0 \ln(z-z_0)$, et *satisfait sur le* cercle de condition mixtes homogènes. La derivée de $F(z)$ doit être uniforme et intégrable sur le cercle. On obtient pour $F(z)$ une représentation de la forme $F(z) = \int_{z_1}^{z}\left(\frac{\mathrm{d}G_1}{\mathrm{d}z} f_1(z) +\right.$

$+ \dfrac{\mathrm{d}G_2}{\mathrm{d}z} f_2(z)\Bigg) \mathrm{d}z$, où $f_1(z)$ et $f_2(z)$ sont des fonctions données et $G_1(z)$ et $G_2(z)$ se déterminent de manière à ce que $F(z)$ aient les singularités données. On applique la méthode à deux exemples à interprétation mécanique.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Iacob, *Introduction Mathématique a la Mécanique des fluides*. Ed. Academiei R.P.R. — Gauthies-Villars, Bucarest — Paris, 1959.
2. V. Vâlcovici, *Sur un problème mixte*. C.R. Acad. Sci. Paris, **190**, 1264—1267 (1930) :
3. A. Barsony-Nagy, *Asupra problemei mixte din teoria aripii circulare cu jet*. St. cerc. mat., **21** (1969).

O CLASĂ PARTICULARĂ DE SPAȚII CU CONEXIUNE AFINĂ

DE

GH. TH. GHEORGHIU

În prima parte a lucrării se găsesc condițiile necesare şi suficiente ca un spaţiu cu conexiune afină A_{n-1} să poată fi scufundat într-un spațiu euclidian centroafin. În partea a doua se introduce o nouă clasă de spații cu conexiune afină care au drept caz particular hipersuprafețele Țițeica.

În 1907 [11], cu nouă ani înainte ca G. Pick[1]) să înceapă introducerea de elemente afine, prin care se iniția construcția organizată a Geometriei diferențiale afine, geometrul român G. Țițeica a introdus o clasă de suprafețe în E_3 definite prin proprietatea de a avea raportul

$$\frac{K}{d^4} \tag{1}$$

constant, unde K este curbura metrică iar d distanța de la origine la planul tangent în punctul curent al suprafeței. Aceste suprafețe, care sînt definite cu elemente metrice, au un caracter centroafin şi se numesc astăzi *suprafețe Țițeica*. Cu ele s-a ocupat mai tîrziu W. Blaschke [1] numindu-le *sfere afine* şi apoi E. S. Wilczynski [14] considerîndu-le ca *sfere proiective*[2]).

---

[1]) W. Blaschke [1, introducere] consideră data de 1916 ca data înființării geometriei diferențiale afine; la această dată a apărut un articol în ,,Leipziger Berichte", **69**, 217, (1916), intitulat: *Über affine Geometrie I: Isoperimetrische Eigenschaften von Ellipse und Elipsoid*, care a fost primul dintr-o serie de articole şi care au avut de scop fundamentarea acestei geometrii. Geometrul G. Pick a fost unul din precursorii ei, dar bineînțeles că animatorul ei a fost W. Blaschke. Prin considerarea suprafețelor (1) trebuie considerat G. Țițeica ca fondatorul *Geometriei centroafine diferențiale* în 1907. Cu această geometrie s-au ocupat mulți geometri români, printre care țin să menționez pe O. Mayer [9].

[2]) Pentru mai multe detalii a se vedea [5].

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 8, P. 1157-1168, BUCUREȘTI, 1969

Extinderea acestor suprafeţe la cazul hipersuprafeţelor dintr-un E_n a fost începută de însuşi Ţiţeica, care a arătat că o hipercuadrică cu centrul în origine se bucură de proprietatea de a avea în fiecare din punctele sale raportul

$$\frac{K}{d^{n+1}} \tag{2}$$

constant [12]. Notaţiile sînt aceleaşi cu cele folosite în (1). Mai tîrziu, în 1959, m-am ocupat cu unele proprietăţi ale hipersuprafeţelor ce se bucură de această proprietate numindu-le *hipersuprafeţe Ţiţeica*. Cu aceste hipersuprafeţe s-a ocupat de asemenea A. Dobrescu [2].

În această lucrare îmi propun să găsesc o proprietate intrinsecă a acestor hipersuprafeţe care-mi va permite să introduc o clasă nouă de spaţii cu conexiune afină. Pentru a ajunge la acest rezultat, a fost nevoie în prealabil să exprim coeficienţii sistemului (6), care defineşte centroafin hipersuprafaţa cu elemente intriseci ale ei; aceasta înseamnă cu conexiunea indusă pe hipersuprafaţă, considerată cu un spaţiu independent şi de un vector considerat ca pseudonormal acestuia.

I

1. Să considerăm un spaţiu euclidian E_n, raportat la un sistem de coordonate carteziene x^i (peste tot indicii latini vor lua valori de la 1 la n) şi o hipersuprafaţă definită prin ecuaţiile parametrice

$$x^i = \varphi^i (u^1,..., u^{n-1}) = \varphi^i (u^\lambda) \tag{3}$$

(peste tot indicii greci vor lua valori de la 1 la $n-1$). Vom presupune că matricea

$$\left[\frac{\partial \varphi^i}{\partial u^\lambda}\right] = [\partial_\lambda \varphi^i] \tag{3'}$$

este presupusă de rangul $n-1$. Vom presupune ceva mai mult, că determinantul

$$\Delta = |\varphi^i, \partial_1 \varphi^i ,..., \partial_{n-1} \varphi^i| \not\equiv 0. \tag{3''}$$

Faptul că acest determinant ar fi nul, ar însemna că în spaţiul E_n, hipersuprafaţa s-ar reduce la o hipersuprafaţă conică.

Metrica spaţiului ambiant va fi definită printr-un tensor ale cărei componente sînt constante în tot spaţiul. Această proprietate se menţine printr-o transformare centroafină

4) $$x'^i = a^i_j x^j,$$

unde a^i_j sînt n^2 constante al căror determinant este diferit de zero. În toate punctele acestui spaţiu, vom avea

$$\Gamma^i_{hk} = -\left\{ {i \atop hk} \right\} = 0, \quad \Gamma^i_{jhk} = 0, \tag{5}$$

unde Γ^i_{hk} este conexiunea afină a spaţiului ambiant exprimată în coordonate carteziene, iar Γ^i_{jhk} componentele tensorului de curbură calculat cu această conexiune. Aceste ecuaţii sînt invariante faţă de o transformare de forma (4). În ipoteza definirii unei metrici în E_n care induce o metrică pe hipersuprafaţă, aceasta devine un spaţiu riemannian V_{n-1}.

Proprietăţile centroafine ale hipersuprafeţei vor fi caracterizate prin sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^\mu \partial u^\lambda} + a^\nu_{\mu\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial u^\nu} + a^n_{\mu\lambda} \theta = 0 \tag{6}$$

deoarece soluţiile unui asemenea sistem sînt invariante faţă de o transformare de forma (4). Hipersuprafaţa definită prin sistemul precedent defineşte un spaţiu cu conexiune afină pe care-l vom nota cu A_{n-1}.

2. Să presupunem că introducem în calcule o variabilă nouă u^n care împreună cu variabilele u^λ să definească un sistem nou de coordonate (u^λ, u^n) în E_n, adică

$$\left| \frac{\partial x^i}{\partial u^h} \right| \not\equiv 0. \tag{7}$$

Vom presupune că cele două sisteme de coordonate sînt legate între ele prin ecuaţii de forma

$$x^i = \varphi^i(u^\lambda) + x^i_1(u^\lambda) u^n + \ldots \tag{8}$$

care pentru $u^n = 0$ se reduc la (3); cu alte cuvinte, în sistemul de coordonate (u^λ, u^n), hipersuprafaţa considerată va fi reprezentată prin ecuaţia

$$u^n = 0. \tag{8'}$$

Pentru ca printr-o schimbare a noilor coordonate, hipersuprafaţa considerată să fie mereu reprezentată prin (8′), aceste coordonate trebuie supuse la transformări de forma

$$\begin{aligned} u'^\lambda &= \varphi^\lambda(u^\mu) + \varphi^\lambda_1(u^\mu) u^n + \varphi^\lambda_2(u^\mu)(u^n)^2 + \ldots \\ u'^n &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad u^n + \varphi^n_2(u^\mu)(u^n)^2 + \ldots \end{aligned} \tag{9}$$

În vecinătatea fiecărui punct M_0 al hipersuprafeţei, considerată ca un spaţiu A_{n-1}, vom defini în E_n două baze pentru vectorii covarianţi şi contravarianţi ataşaţi acestui punct în felul următor [3, p. 137; 13, p. 181]. Prin $M_0(u^h = 0)$ al spaţiului A_{n-1} trec în E_n, n hipersuprafeţe care sînt definite prin ecuaţiile

$$u^1 = 0, \ldots, u^{n-1} = 0, u^n = 0, \tag{10}$$

ultima fiind hipersuprafaţa A_{n-1} Considerînd variabilele (u^λ, u^n) exprimate cu ajutorul variabilelor (x^i), gradienţii

$$(\nabla u^\lambda)_0, (\nabla u^n)_0 \tag{11}$$

ale căror componente sînt

$$\overset{\lambda}{t}_i = \left(\frac{\partial u^\lambda}{\partial x^i}\right)_0, \quad \overset{n}{t}_i = \left(\frac{\partial u^n}{\partial x^i}\right)_0 \tag{11'}$$

definesc în M_0 o bază covariantă. De asemenea prin M_0 trec n curbe

$$(u^\lambda), (u^n) \tag{12}$$

ale căror tangente definesc n vectori contravarianţi

$$\underset{\lambda}{n}^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda}\right)_0, \quad \underset{n}{n}^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^n}\right)_0 \tag{12'}$$

care definesc în M_0 o bază contravariantă. Vom determina variabila auxiliară u^n luînd pentru $\underset{n}{n}^i$ vectorul OM_0, care faţă de grupul (4) este contravariant (O este originea coordonatelor în spaţiul iniţial, punct invariant faţă de acest grup), cu alte cuvinte vom lua

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^n} = x^i. \tag{13}$$

Vectorul $\overset{n}{t}_i$ va fi legat de vectorul precedent prin ecuaţia

$$x^i \overset{n}{t}_i = 1 \tag{14}$$

care în fond este o ecuaţie cu derivate parţiale în componentele lui $\overset{n}{t}_i$. Din (13) rezultă pentru tot spaţiul E_n reprezentarea parametrică

$$x^i = \varphi^i (u^1, \ldots u^{n-1}) e^{u^n}, \tag{13'}$$

unde φ^i sînt coordonatele punctului curent al hipersuprafeţei A_{n-1} şi deci soluţii ale ecuaţiei (6). Din această reprezentare rezultă că toate hipersuprafeţele $u^n = \text{const.}$, sînt transformate centroafine ale hipersuprafeţei iniţiale.

3. Noile coordonate (u^λ, u^n) vor defini în E_n un nou rînd de coeficienţi de conexiune $\bar{\Gamma}^l_{kh}$ care vor putea fi definiţi cu ajutorul celor vechi folosind formulele clasice care leagă între ei două rînduri de asemenea coeficienţi. În cazul nostru, în baza formulelor (5_1), vom avea

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^k \, \partial u^h} + \bar{\Gamma}^l_{kh} \frac{\partial x^i}{\partial u^l} = 0 \tag{15}$$

noii coeficienţi fiind simetrici în raport cu indicii inferiori. Bineînţeles că şi pentru noii coeficienţi, formulele (5_2) rămîn valabile. Cu ajutorul noilor coeficienţi, se poate induce pe varietatea A_{n-1} o conexiune definită prin coeficienţii $\bar{\Gamma}^\nu_{\mu\lambda}$ în care înlocuim peste tot $u^n = 0$.

Formulele (15) se scriu diferenţiat după următoarele tipuri

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\mu \, \partial u^\lambda} + \bar{\Gamma}^\nu_{\mu\lambda} \frac{\partial x^i}{\partial u^\nu} + \bar{\Gamma}^n_{\mu\lambda} \frac{\partial x^i}{\partial u^n} = 0, \tag{15'}$$

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^n \, \partial u^\lambda} + \bar{\Gamma}^\nu_{n\lambda} \frac{\partial x^i}{\partial u^\nu} + \bar{\Gamma}^n_{n\lambda} \frac{\partial x^i}{\partial u^n} = 0, \tag{15''}$$

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^n \, \partial u^n} + \bar{\Gamma}^\nu_{nn} \frac{\partial x^i}{\partial u^\nu} + \bar{\Gamma}^n_{nn} \frac{\partial x^i}{\partial u^n} = 0. \tag{15'''}$$

Ţinînd seamă de (13), ultimele două relaţii se scriu sub forma

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda} + \bar{\Gamma}^\nu_{n\lambda} \frac{\partial x^i}{\partial u^\nu} + \bar{\Gamma}^n_{n\lambda} \frac{\partial x^i}{\partial u^n} = 0,$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^n} + \bar{\Gamma}^\nu_{nn} \frac{\partial x^i}{\partial u^\nu} + \bar{\Gamma}^n_{nn} \frac{\partial x^i}{\partial u^n} = 0,$$

care în baza lui (7) conduc la

$$\bar{\Gamma}^\nu_{n\lambda} = 0 \quad (\nu \neq \lambda), \quad \bar{\Gamma}^\lambda_{n\lambda} = -1, \quad \bar{\Gamma}^n_{n\lambda} = 0,$$

$$\bar{\Gamma}^\nu_{nn} = 0, \qquad \bar{\Gamma}^n_{nn} = -1$$

sau încă

$$\bar{\Gamma}^h_{nh} = -1, \qquad \bar{\Gamma}^h_{nk} = 0 \qquad (h \neq k). \tag{16}$$

În ceea ce priveşte prima ecuaţie (15′), comparată cu (6) şi în baza lui (13), conduce la valorile

$$a^{\nu}_{\mu\lambda} = \overline{\Gamma}^{\nu}_{\mu\lambda}, \quad a^{n}_{\mu\lambda} = \overline{\Gamma}^{n}_{\mu\lambda}. \tag{17}$$

Folosind derivata covariantă în raport cu conexiunea indusă, sistemul (6) se poate scrie sub forma

$$\theta_{\mu,\lambda} + \overline{\Gamma}^{n}_{\mu\lambda}\,\theta = 0, \tag{6′}$$

de unde se vede că pentru A_{n-1}, $\overline{\Gamma}^{n}_{\mu\lambda}$ sînt componentele unui tensor de două ori covariant.

Condiţiile de integrabilitate ale acestui sistem se obţin luînd din nou derivata covariantă a lui (6′) în raport cu un indice ν şi aplicînd operaţia de antisimetrizare. Ţinînd seamă că

$$\theta_{\mu,[\lambda\nu]} = \frac{1}{2}\,\overline{\Gamma}^{\omega}_{\mu\lambda\nu}\,\theta_{\omega}$$

se obţin condiţiile

$$\overline{\Gamma}^{\omega}_{\nu\mu\lambda} = 0 \quad \text{dacă } \omega \text{ este diferit în acelaşi timp de } \lambda,\ \mu, \tag{18}$$

$$\overline{\Gamma}^{\omega}_{\nu\omega\mu} = \overline{\Gamma}_{\nu\mu} = \overline{\Gamma}^{n}_{\nu\mu} \tag{18′}$$

$$\overline{\Gamma}_{\nu[\mu,\lambda]} = 0 \tag{18″}$$

unde $\overline{\Gamma}_{\nu\mu}$ este tensorul lui Ricci referitor la conexiunea indusă. Ecuaţia (6) se va scrie deci sub forma definitivă

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^{\mu}\,\partial u^{\lambda}} + \overline{\Gamma}^{\nu}_{\mu\lambda}\frac{\partial\theta}{\partial u^{\nu}} + \overline{\Gamma}_{\mu\lambda}\,\theta = 0 \quad \text{sau} \quad \theta_{\mu,\lambda} + \overline{\Gamma}_{\mu\lambda}\,\theta = 0. \tag{6″}$$

4. Reciproc, să considerăm un spaţiu A_{n-1} raportat la un sistem de coordonate u^{λ} avînd coeficienţii de conexiune $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}$, care prin ipoteză satisfac condiţiilor (18), (18″). Ne propunem să demonstrăm că în acest caz *spaţiul considerat poate fi scufundat într-un spaţiu afin E_n*. Începem prin a demonstra că condiţia (18) are un caracter tensorial, proprietate care este manifest adevărată pentru (18″). În adevăr, să considerăm un nou sistem de coordonate $(u^{\lambda'})$; vom avea

$$\Gamma^{\omega'}_{\nu'\mu'\lambda'} = \frac{\partial u^{\omega'}}{\partial u^{\omega}}\,\frac{\partial u^{\nu}}{\partial u^{\nu'}}\,\frac{\partial u^{\mu}}{\partial u^{\mu'}}\,\frac{\partial u^{\lambda}}{\partial u^{\lambda'}}\,\Gamma^{\omega}_{\nu\mu\lambda}.$$

Eliminînd din dreapta toți termenii nuli grație ipotezei (18), ne rămîne

$$\Gamma^{\omega'}_{\nu'\mu'\lambda'}\,\delta^{\omega'}_{\mu'}\,\frac{\partial u^{\nu}}{\partial u^{\nu'}}\,\frac{\partial u^{\lambda}}{\partial u^{\lambda'}}\,\Gamma^{\omega}_{\nu\omega\lambda}+\delta^{\omega'}_{\lambda'}\,\frac{\partial u^{\nu}}{\partial u^{\nu'}}\,\frac{\partial u^{\mu}}{\partial u^{\mu'}}\,\Gamma^{\omega}_{\nu\mu\omega}.$$

De pe această formulă se citește că dacă vom avea în același timp $\omega' \neq \mu'$ și $\omega' \neq \lambda'$, atunci

$$\Gamma^{\omega'}_{\nu'\mu'\lambda'} = 0$$

ceea ce urmăream să demonstrăm.

Să presupunem acum că cu ajutorul conexiunii $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}(u^{\omega})$ construim tensorul lui Ricci și apoi sistemul de ecuații cu derivate parțiale (15′), care în ipotezele făcute este complet integrabil. Alegînd n funcții care verifică acest sistem, determinate abstracție făcînd de o transformare liniară omogenă, ele pot fi alese drept coordonate carteziene unui punct curent dintr-un spațiu euclidian afin tocmai pentru că aceste coordonate au un caracter invariant față de transformările grupului liniar. Spațiul ambiant va fi definit printr-o reprezentare în coordonate curbilinii prin formule de tipul (13′). Avem deci următorul rezultat:

Se consideră un spațiu A_{n-1} cu conexiune afină $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}(u^{\omega})$ care prin ipoteză satisface condițiilor (18) și (18″). Cu ajutorul acestei conexiuni se formează tensorul lui Ricci care se notează cu $\Gamma_{\mu\lambda}$ și se integrează sistemul (6′₁′), unde coeficienții au valorile (17). Acest sistem este complet integrabil și admite ca soluții n funcții $\varphi^{i}(u^{\lambda})$ independente. Aceste funcții definesc o hipersuprafață A_{n-1} prin ecuațiile (3) scufundată într-un spațiu euclidian centroafin avînd reprezentarea parametrică (13′).

Ne propunem să demonstrăm acum, că față de acest sistem de coordonate, conexiunea afină a spațiului ambiant are coeficienți $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}(u^{\omega})$ completați cu valorile (16). Facem ipoteza că condiția (3″) este îndeplinită pe varietatea A_{n-1} și presupunem că în A_{n} avem dezvoltările

$$\begin{aligned}
(19)\qquad \Gamma^{h}_{nh} &= -1+\Gamma^{h}_{nh\,|\,1}\,u^{n}+\Gamma^{h}_{nh\,|\,2}(u^{n})^{2}+\dots,\\
\Gamma^{h}_{nk} &= \Gamma^{h}_{nk\,|\,1}\,u^{n}+\Gamma^{h}_{nk\,|\,2}(u^{n})^{2}+\dots, \qquad (h \neq k)\\
\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} &= \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda\,|\,0}+\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda\,|\,1}\,u^{n}+\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda\,|\,2}(u^{n})^{2}+\dots,\\
\Gamma^{n}_{\mu\lambda} &= \Gamma^{n}_{\mu\lambda\,|\,0}+\Gamma^{n}_{\mu\lambda\,|\,1}\,u^{n}+\Gamma^{n}_{\mu\lambda\,|\,2}(u^{n})^{2}+\dots,
\end{aligned}$$

unde coeficienții ultimei dezvoltări se pot exprima cu coeficienții penultimei, avînd în vedere că sînt componentele tensorului lui Ricci. Cum presupunem că x^{i} sînt coordonate carteziene, componentele tensorului lui Ricci corespunzători sînt nuli iar cei care se referă la coordonatele u^{h} vor verifica relațiile (15) care scrise dezvoltat apar din nou sub forma (15′), (15″), (15‴) și care vor trebui să fie valabile oricare ar fi u. Folosind pe (13′), formula (15‴) în care înlocuim coeficienții de conexiune prin dezvoltările (19) și scriem că coeficienții diferitelor puteri ale lui u^n sînt nuli, conduce la relații de forma

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial u^\nu}\, \Gamma^\nu_{nn\,|\,p} + \varphi^i\, \Gamma^n_{nn\,|\,p} = 0\,;$$

cum prin ipoteză avem (3″), rezultă

$$\Gamma^\nu_{nn\,|\,p} = \Gamma^n_{nn\,|\,p} = 0\,.$$

Analog, folosind pe (15″) și (15′), rezultă pe rînd că toți coeficienții dezvoltărilor (19) sînt nuli, afară de $\Gamma^h_{\mu\lambda\,|\,0}$ care sînt diferiți de zero și formează în fond coeficienții de conexiune dați pe A_{n-1} iar componentele tensorului lui Ricci calculați cu aceștia.

Rezultă deci că spațiul euclidian, reprezentat parametric prin ecuațiile (13′), va avea ca coeficienți de conexiune afină în această reprezentare, coeficienții $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}(u^\omega)$ completați cu valorile (16).

II

5. Să considerăm pentru început, în scopul de a avea o anumită interpretare geometrică, spațiul euclidian E_n înzestrat cu o metrică

$$ds^2 = g_{hk}\, dx^h\, dx^k, \tag{20}$$

ai cărei coeficienți sînt constanți și care în sistemul de coordonate curbilinii u^h va avea ca expresie

$$ds^2 = g'_{hk}\, du^h\, du^k, \tag{21}$$

bineînțeles că de data aceasta noile componente ale tensorului fundamental vor fi funcții de noile variabile $u^1,\ldots, u^n$. Pe hipersuprafața $u^n = 0$, care este un spațiu V_{n-1}, acești coeficienți vor avea valorile $(g'_{hk})_0$. Curbura lui Gauss a acestei hipersuprafețe va avea ca expresie [4]

$$K = \frac{|\Delta_{\mu\lambda}|}{\sqrt{|(g_{\mu\lambda})_0|^{n+1}}}, \tag{22}$$

unde determinantul de la numitor este determinantul format cu coeficienții metricii induse pe V_{n-1}, iar elementele determinantului de la numărător sînt ele însăși determinanți, și anume

$$\Delta_{\nu\mu} = \left| \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial u^\nu\, \partial u^\mu},\ \frac{\partial \varphi^i}{\partial u^1},\ldots, \frac{\partial \varphi^i}{\partial u^{n-1}} \right|. \tag{23}$$

Pe de altă parte, distanţa de la origine la planul tangent are o expresie analogă cu cea cunoscută din E_3 şi anume

$$d = \frac{\Delta}{\sqrt{|(g_{\mu\lambda})_0|}}, \tag{24}$$

unde Δ este determinantul $(3'')$. Cu ajutorul lui $(6_1'')$, determinanţii (23) devin

$$\Delta_{\nu\mu} = \Delta\,\overline{\Gamma}_{\nu\mu}$$

încît se obţine expresia

$$\frac{K}{d^{n+1}} = \frac{|\overline{\Gamma}_{\nu\mu}|}{\Delta^2}. \tag{25}$$

Acest rezultat este interesant prin faptul că nu depinde de forma pătratică (20), respectiv (21), cu ajutorul căreia am calculat expresia geometrică care figurează în prima parte a lui (25). Asta înseamnă că această expresie este un invariant afin independent de această metrică şi deci poate fi definit cu ajutorul unei conexiuni afine definită în E_n. Hipersuprafaţa V_{n-1} poate fi considerată ca un spaţiu A_{n-1}.

6. O hipersuprafaţă Ţiţeica va fi caracterizată în spaţiul E_n ca un subspaţiu A_{n-1} de-a lungul căruia avem

$$|\overline{\Gamma}_{\nu\mu}| = k\Delta^2, \tag{26}$$

unde k este o constantă absolută. Să arătăm că din această proprietate, care are un caracter rigid, se poate deduce o proprietate intrinsecă. Natura rigidă a expresiei este caracterizată prin prezenţa lui Δ pe care dorim să-l eliminăm din consideraţiile noastre. Astfel, în baza lui $(6_1'')$,

$$\frac{\partial \Delta}{\partial u^p} + \Delta\,\overline{\Gamma}^{\lambda}_{\lambda p} = 0. \tag{27}$$

Derivînd pe (26), rezultă

$$\frac{\partial\,|\overline{\Gamma}_{\nu\mu}|}{\partial u^p} + 2\,|\overline{\Gamma}_{\nu\mu}|\,\overline{\Gamma}^{\lambda}_{\lambda p} = 0. \tag{28}$$

Pe de altă parte, cum $\overline{\Gamma}_{\mu\nu}$ sînt componentele de două ori covariante ale unui tensor, determinantul $\overline{|\Gamma_{\mu\nu}|}$ este o densitate de pondere 2 şi se ştie că pentru o asemenea densitate avem

$$|\overline{\Gamma}_{\nu\mu}|_{,\,\rho} = \partial_\rho\,|\overline{\Gamma}_{\nu\mu}| + 2\,|\overline{\Gamma}_{\nu\mu}|\,\overline{\Gamma}^{\lambda}_{\lambda\rho}$$

încît relaţia (28) se mai poate scrie sub forma simplă

$$(28') \qquad |\bar{\Gamma}_{\nu\mu}|_{,\rho} = 0$$

care are avantajul asupra lui (26) că este o relaţie tensorială intrinsecă.

În concluzie, o hipersuprafaţă Ţiţeica scufundată într-un spaţiu centroafin E_n este caracterizată prin relaţiile (18), (18″) şi (28′).

7. Folosind ultima proprietate a hipersuprafeţelor Ţiţeica, se poate introduce o nouă clasă de spaţii cu conexiune afină, pe care le vom nota cu A_n^0 cu ajutorul proprietăţii de a avea în fiecare punct al lor,

$$(29) \qquad |\Gamma_{jk}|_{,i} = 0,$$

unde Γ_{kh} sînt componentele tensorului lui Ricci, calculul derivatei covariante făcîndu-se în raport cu conexiunea spaţiului. Dacă pe lîngă (29) vom avea satisfăcute şi condiţiile (18), (18″), spaţiul se va putea scufunda într-un E_n în care va reprezenta o hipersuprafaţă Ţiţeica.

8. Ne propunem să arătăm că în coordonate mixte [6], [7], [8] o varietate A_n^0 se exprimă printr-o ecuaţie de aceeaşi formă cu (29) dar scrisă în coordonate neolonome.

Introducem alături de variabilele olonome x^i n variabile neolonome s^a cu ajutorul formulelor

$$(30) \qquad ds^a = \lambda_i^a \, dx^i, \quad dx^i = \lambda_a^i \, ds^a,$$

unde

$$(30') \qquad \lambda_i^a \lambda_a^j = \delta_i^j, \quad \lambda_i^a \lambda_b^i = \delta_b^a.$$

În noile variabile, tensorul lui Ricci va avea componentele Γ_{ba} definite prin relaţiile

$$\Gamma_{kh} = \lambda_k^b \lambda_h^a \Gamma_{ba}$$

încît

$$(31) \qquad |\Gamma_{kh}| = |\lambda_i^c|^2 |\Gamma_{ba}|.$$

Pentru a calcula $\partial_k |\lambda_i^c|$, va trebui să ţinem seama de formula [7]

$$(32) \qquad \partial_k \lambda_i^c = \gamma_{ba}^c \lambda_i^b \lambda_k^a - \Gamma_{ik}^j \lambda_j^c.$$

Avem succesiv

$$\partial_k |\lambda_i^c| = \sum |\lambda_1^c \dots \lambda_{i-1}^c \partial_k \lambda_i^c \lambda_{i+1}^c \dots \lambda_n^c| = \sum \lambda_k^a |\lambda_1^c \dots \lambda_{i-1}^c \lambda_i^b \gamma_{ba}^c \lambda_{i+1}^c \dots \lambda_n^c| -$$

$$- \sum \Gamma_{ik}^j |\lambda_1^c \dots \lambda_{i-1}^c \lambda_j^c \lambda_{i+1}^c \dots \lambda_n^c|$$

şi în definitiv

$$(33) \qquad \partial_k |\lambda_i^c| = \gamma_{da}^d \lambda_k^a |\lambda_i^c| - \Gamma_{jk}^j |\lambda_i^c|.$$

În baza acestei relaţii, vom avea succesiv,

$$|\Gamma_{kh}|_{,i} = \partial_i |\Gamma_{kh}| + 2|\Gamma_{kh}|\Gamma^j_{ji} = \partial_i [|\lambda^e_l|^2 |\Gamma_{ba}|] + 2|\lambda^e_l|^2 |\Gamma_{ba}|\Gamma^j_{ji} =$$

$$= 2|\lambda^e_l|^2 |\Gamma_{ba}|(\gamma^d_{dc}\lambda^c_i - \Gamma^j_{ji}) + |\lambda^e_l|^2 \lambda^c_i \partial_c |\Gamma_{ba}| + 2\,|\lambda^e_l|^2 |\Gamma_{ba}|\Gamma^j_{ji} =$$

$$= |\lambda^e_l|^2 \lambda^c_i [\partial_c |\Gamma_{ba}| + 2\gamma^d_{dc} |\Gamma_{ba}|],$$

şi dacă considerăm determinantul $|\Gamma_{ba}|$ ca o pondere neolonomă de greutate 2, relaţia (29) se înlocuieşte cu

$$|\Gamma_{ba}|_{.c} = 0. \tag{29'}$$

9. Vom încheia această notă punînd în evidenţă cîteva cazuri particulare de spaţii A^0_n.

a) Un spaţiu Ricci [10, p. 148] este definit prin relaţiile

$$\Gamma_{kh,i} = 0 \tag{34}$$

ceea ce înseamnă că *spaţiile Ricci sînt întotdeauna* A^0_n.

b) Să presupunem în continuare că spaţiul A^0_n este în acelaşi timp şi spaţiu riemannian definit prin tensorul fundamental g_{kh}. În acest caz, proprietatea de mai sus se menţine; în consecinţă, spaţiile Einstein ($n > 2$), care sînt un caz particular al spaţiilor Ricci, vor fi de asemenea spaţii A^0_n.

Primiă la redacţie la 1 septembrie 1968

Institutul Politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej", Bucureşti,
Str. Polizu nr. 1
Seminarul de Geometrie Diferenţială

UNE CLASSE PARTICULÈRE D'ESPACES À CONNEXION AFFINE

(RÉSUMÉ)

Dans la première partie de la note, on trouve les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une variété A_{n-1} soit immergée dans un espace E_n centro-affine. On suppose donnés les coefficients de connexion $\overline{\Gamma}^{\nu}_{\mu\lambda}(u^{\omega})$ ($\lambda, \mu, \nu, \omega = 1,\ldots, n-1$) de la variété avec lesquels on construit les composantes du tenseur de Riemann $\overline{\Gamma}^{\omega}_{\nu\mu\lambda}$ et les composantes du tenseur de Ricci $\overline{\Gamma}_{\mu\lambda}$. Les conditions cherchées sont exprimées par (18), (18'') et à l'aide de n solutions indépendantes de l'équation (6'') on a la représentation de A_{n-1} en E_n centro-affine. Dans la deuxième partie, on exprime par (25) la condition qui caractérise une hypersurface pour

être une hypersurface de Ţiţeica qui a dans tous ses points le rapport (2) constant. Cette condition peut être écrite sous la forme (28′) qui a un caractère intrinsèque. Par cette relation, on définit une nouvelle classe $\overset{0}{A}_n$ d'espaces à connexion affine. Comme exemple on évoquer les espaces de Ricci.

BIBLIOGRAFIE

1. W. Blaschke, *Über affine Geometrie V; Kennzeichnende Eigenschaften des Ellipsoids.* Leipziger Berichte, **69**, 166 (1917).
2. A. Dobrescu, *Sur les variétés V_n immergées dans E_{n+1}.* Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées, **XII**, 829–841 (1967).
3. L. P. Eisenhart, *Non riemannian geometry.* American Mathematical Society, Colloquium Publications, **VIII**, New York, 1927.
4. Gh. Th. Gheorghiu, *Hipersuprafeţe Ţiţeica.* Lucrările Ştiinţifice ale Institutului Pedagogic Timişoara, p. 45–60, 1959.
5. Gh. Th. Gheorghiu, *Suprafeţele şi curbele Ţiţeica.* Analele Universităţii din Timişoara, **IV**, 133–154 (1966).
6. Gh. Th. Gheorghiu, *Sur un calcul tensoriel mixte.* Atti della Acc. Sci. di Bologna, Rendiconti, serie XII, **iii**, 49–69 (1965–66).
7. Gh. Th. Gheorghiu, *Des coordonnées normales dans un calcul absolut mixte relativement à un espace riemannien.* Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, **XIII**, 451–468 (1968).
8. Gh. Th. Gheorghiu, *Des coordonnées normales mixtes dans un espace à connexion affine.* Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, **XXXVIII** (1968).
9. O. Mayer, *Géométrie centro-affine différentielle des surfaces,* Annales scientifiques de l'Université de Jassy, **XXI**, 40 (1935).
10. J. A. Schouten, *Ricci-Calculus,* second edition, Springer-Verlag, Berlin, 1954.
11. G. Ţiţeica, *Sur une nouvelle classe de surfaces.* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, **144**, 1257–1259 (1907).
12. G. Ţiţeica, *Sur quelques propriétés affines.* Bull. de Math. et de Physique de l'Ec. Polit. Bucarest, **VI**, 8–10 (1936).
13. Gh. Vrănceanu, *Lecţii de Geometrie Diferenţială,* vol. II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1964.
14. E. S. Wilczynski, *Über Flächen mit unbestimmten Directrixcurven,* Mathematische Annalen, Leipziger, **76**, 129 (1915).

ASUPRA COMPARĂRII MEDIILOR UNOR POPULAŢII UNIDIMENSIONALE

DE

EUGEN MĂRGĂRITESCU

În lucrare se foloseşte testul F pentru verificarea ipotezei egalităţii mediilor populaţiilor unor mulţimi aparţinînd unei clase de populaţii unidimensionale date.

Considerăm I populaţii unidimensionale repartizate normal cu mediile $\beta_1, \ldots, \beta_I$ şi avînd aceeaşi dispersie σ^2. Se efectuează selecţii independente de volume $J_1, \ldots, J_I$ din aceste populaţii. Dacă $\{y_{i1}, \ldots, y_{iJ_i}\}$ reprezintă selecţia din a i-a populaţie, atunci ipotezele fundamentale pe care le facem sînt următoarele:

$$\Omega : \begin{cases} y_{ij} = \beta_i + e_{ij} \quad (j = 1, \ldots, J_i;\ i = 1, \ldots, I), \\ \{e_{ij}\} \text{ sînt independente şi repartizate } N(0, \sigma^2). \end{cases}$$

Fie

$$H_k : \beta_{n_{k+1}+1} = \ldots = \beta_{n_k} \quad (k = 1, \ldots, p;\ 0 = n_0 < n_1 < \ldots < n_p \leqslant I)$$

o mulţime de ipoteze asupra mediilor $\{\beta_i\}$ şi

$$H = \bigcap_{k=1}^{p} H_k$$

ipoteza pe care vrem s-o verificăm.

Pentru aceasta, considerăm sumele de pătrate:

$$\mathcal{S}(y, \beta) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J_i} (y_{ij} - \beta_i)^2,$$

$$\mathcal{S}'(y, \beta) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \sum_{j=1}^{J_i} (y_{ij} - \beta_{(k)})^2 + \sum_{i=n_p+1}^{I} \sum_{j=1}^{J_i} (y_{ij} - \beta_i)^2$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 8, P. 1169–1172, BUCUREŞTI, 1969

care trebuie minimizate în condiţiile Ω şi $\omega = \Omega \cap H$ respectiv. Aici prin $\beta_{(k)}$ s-a notat valoarea comună a parametrilor egali din ipoteza H_k.

Se ştie [1] că valorile parametrilor $\{\beta_i\}$ care minimizează sumele de pătrate precedente sînt p-estimaţiile acestor parametri şi deci satisfac sistemele ecuaţiilor normale corespunzătoare :

$$\frac{\partial \mathcal{S}(y, \beta)}{\partial \beta_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, I) \tag{1}$$

şi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{S}'(y, \beta)}{\partial \beta_{(k)}} = 0 & (k = 1, \ldots, p), \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{S}'(y, \beta)}{\partial \beta_i} = 0 & (i = n_p + 1, \ldots, I). \end{cases} \tag{2}$$

Sistemul (1) are forma explicită

$$-2 \sum_{j=1}^{J_i} (y_{ij} - \beta_i) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, I)$$

şi admite soluţia

$$\hat{\beta}_{i,\Omega} = \frac{1}{J_i} \sum_{j=1}^{J_i} y_{ij} = y_{i\cdot} \qquad (i = 1, \ldots, I). \tag{1'}$$

Sistemul (2) ne conduce, de asemenea, la un sistem liniar :

$$\begin{cases} -2 \displaystyle\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \sum_{j=1}^{J_i} (y_{ij} - \beta_{(k)}) = 0 & (k = 1, \ldots, p), \\[2ex] -2 \displaystyle\sum_{j=1}^{J_i} (y_{ij} - \beta_i) = 0 & (i = n_p + 1, \ldots, I), \end{cases}$$

iar soluţia sa este

$$\hat{\beta}_{(k),\omega} = y_k \ (k = 1, \ldots, p), \ \hat{\beta}_{i,\omega} = y_{i0} \quad (i = n_p + 1, \ldots, I) \tag{2'}$$

unde, pentru simplificarea scrierii, s-a introdus notaţia

$$\overline{y}_k = \left(\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \right)^{-1} \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \sum_{j=1}^{J_i} y_{ij} = \left(\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} J_i \right)^{-1} \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} J_i y_{i\cdot} \,.$$

Statisticile

$$SS_e = \mathcal{S}_\Omega = \min_\beta \mathcal{S}(y, \beta), \quad \mathcal{S}_\omega = \min_\beta \mathcal{S}'(y, \beta)$$

şi

$$SS_H = \mathcal{S}_\omega - \mathcal{S}_\Omega$$

se pot calcula cu ajutorul formulelor

$$(3)\qquad \mathcal{S}_\Omega = \|y - \hat\eta_\Omega\|^2, \quad \mathcal{S}_\omega = \|y - \hat\eta_\omega\|^2, \quad SS_H = \|\hat\eta_\Omega - \hat\eta_\omega\|^2,$$

unde $\eta = M(y)$.

Ţinînd seama de (1′) şi (2′) găsim :

$$\hat\eta_{ij,\Omega} = \hat\beta_{i,\Omega} = y_{i\cdot} \qquad (t = 1, \ldots, I)$$

şi

$$\hat\eta_{ij,\omega}\begin{cases}\hat\beta_{(k),\omega} = \overline{y}_k & \text{pentru } n_{k-1} + 1 \leqslant i \leqslant n_k \qquad (k = 1, \ldots, p),\\ \hat\beta_{i,\Omega} = y_{i\cdot} & \text{pentru } n_p + 1 \leqslant i \leqslant I.\end{cases}$$

Aşadar, după formulele (3) obţinem :

$$\mathcal{S}_\Omega = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}(y_{ij} - y_{i\cdot})^2$$

şi

$$SS_H = \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k}\sum_{j=1}^{J_i}(y_{i\cdot} - \overline{y}_k)^2 = \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} J_i(y_{i\cdot} - \overline{y}_k)^2.$$

Notînd cu ν_e şi ν_H numerele gradelor de libertate ale statisticilor SS_e şi SS_H respectiv, găsim fără nici o dificultate :

$$\nu_e = \sum_{i=1}^{I}(J_i - 1), \qquad \nu_H = (n_p - p).$$

Conform teoriei generale [2], variabila $\sigma^{-2}SS_e$ are repartiţia $\chi^2_{\nu_e}$ şi este independentă de SS_H. Pe de altă parte, în condiţiile Ω, variabila $\sigma^{-2}SS_H$ are repartiţia $\chi'^2_{\nu_H;\delta}$, unde parametrul de necentricitate al repartiţiei are expresia :

$$(4)\qquad \delta = \sigma^{-1}\,\|M(\hat\eta_\Omega) - M(\hat\eta_\omega)\|.$$

Aşadar variabila

$$\mathcal{F} = \frac{SS_H/\nu_H}{SS_e/\nu_e} = \frac{\sum_{i=1}^{I}(J_i - 1)}{(n_p - p)}\;\frac{\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} J_i(y_{i\cdot} - \overline{y}_k)^2}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}(y_{ij} - y_{i\cdot})^2}$$

are repartiţia $F'_{\nu_H,\nu_e;\delta}$.

În particular, pentru condiţiile ω, parametrul $\delta = 0$ şi deci $\mathcal{F}$ are repartiţia F_{ν_H,ν_e}. Astfel s-a obţinut următoarea

TEOREMĂ. *Testul F pentru verificarea ipotezei H respinge această ipoteză, cu pragul de semnificaţie* α, *dacă şi numai dacă* $\mathcal{F} > F_{\alpha;\nu_H,\nu_e}$.

Puterea testului este egală cu

$$P(F'_{\nu_H,\nu_e;\delta} > F_{\alpha;\nu_H,\nu_e}),$$

unde δ este dat de (4).

În cazul în care $n_1 = I$, statistica $\mathcal{F}$ are expresia :

$$\mathcal{F} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{I}(J_i - 1)}{I - 1}\;\frac{\sum\limits_{i=1}^{I} J_i(y_{i\cdot} - \bar{y})^2}{\sum\limits_{i=1}^{I}\sum\limits_{j=1}^{J_i}(y_{ij} - y_{i\cdot})^2},$$

unde

$$\bar{y} = \left(\sum_{i=1}^{I} J_i\right)^{-1}\sum_{i=1}^{I} J_i y_{i\cdot}\,.$$

Această statistică se foloseşte în analiza dispersională pentru verificarea egalităţii mediilor unor populaţii unidimensionale.

Primită la redacţie la 12 decembrie 1968

Centrul de statistică matematică al
Academiei Republicii Socialiste România,
Calea Griviţei nr. 21, Bucureşti 12.

SUR LA COMPARAISON DES MOYENNES DE QUELQUES POPULATIONS À UNE DIMENSION

(RÉSUMÉ)

Dans cet ouvrage on emploie le test F pour vérifier l'hypothèse de l'égalité des moyennes des populations de quelques ensembles appartenant à une classe donnée de populations à une dimension.

Le cas étudié résout notamment le problème de la vérification de l'égalité des moyennes de quelques populations à une dimension.

BIBLIOGRAFIE

1. D. Dugué et M. Girault, *Analyse de variance et plans d'expérience*. Paris, 1959.
2. H. Scheffé, *Analysis of variance*. New York, 1959.

ASUPRA UNEI TEOREME A LUI FLORIN VASILESCU

DE

IONEL ŢEVY

Se dă o demonstraţie directă, fără a folosi teoria funcţiilor multiforme, unei teoreme a lui Florin Vasilescu privind funcţiile reale de o variabilă reală şi se generalizează apoi această teoremă pentru funcţiile aproximativ continue (în sensul lui Denjoy) şi cele calitativ continue în sensul din [5]. Problema ne-a fost propusă de către prof. univ. S. Marcus.

În nota sa [1], Fl. Vasilescu demonstrează pe baza teoriei funcţiilor multiforme, dezvoltată în [2], următoarea

TEOREMĂ. *Fiind dată o funcţie reală de o variabilă reală* f, *există un şir* $\{f_n\}$ *de funcţii continue, care converge către* f *în orice punct în care aceasta din urmă este continuă.*

Fiind un rezultat de analiză clasică, se pune problema unei demonstraţii ce nu foloseşte teoria funcţiilor multiforme. Această problemă, precum şi generalizări ale teoremei menţionate, ne-au fost propuse de prof. univ. Solomon Marcus. În cele ce urmează vom da o astfel de demonstraţie. În continuare vom generaliza teorema lui Fl. Vasilescu pentru funcţiile boreliene, funcţiile aproximativ continue şi funcţiile calitativ continue în sensul din [5].

§ 1. În tot acest paragraf vom considera, cînd nu se specifică contrariul, X un spaţiu metric separabil şi Y un spaţiu metric separabil complet.

Fie o funcţie $f: X \to Y$.

DEFINIŢIA 1. Vom spune că funcţia f este boreliană de clasă α în punctul $x_0 \in X$, dacă pentru orice vecinătate deschisă G a lui $f(x_0)$, $f^{-1}(G)$ este de clasă α aditivă în punctul x_0, adică există o vecinătate deschisă V a lui x_0 astfel încît $V \cap f^{-1}(G)$ să fie de clasă α aditivă în X.

Evident, dacă $\alpha = 0$, se regăseşte definiţia continuităţii într-un punct. Are loc de asemenea

PROPOZIŢIA 1. *O funcţie* $f: X \to Y$ *este de clasă* α, *dacă şi numai dacă este de clasă* α *în orice punct din* X.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 8, P. 1173–1180, BUCUREŞTI, 1969

Demonstraţie. Vom demonstra numai suficienţa condiţiei căci necesitatea este evidentă.

Fie, deci, G o mulţime deschisă în Y. Deoarece f este de clasă α în orice punct din X, rezultă că $f^{-1}(G)$ este boreliană de clasă α aditivă în toate punctele sale şi deci, în baza unei propoziţii din [3] [1], $f^{-1}(G)$ este o mulţime de clasă α aditivă, adică f este de clasă α.

Fie aplicaţia $f: X \rightarrow Y$ şi să notăm cu $B_\alpha(f)$ mulţimea punctelor din X în care f este de clasă α. Are loc

PROPOZIŢIA 2. *Restricţia aplicaţiei f la mulţimea $B_\alpha(f)$ este o funcţie boreliană de clasă α.*

Demonstraţie. Să remarcăm mai întîi că $B_\alpha(f)$ în topologia indusă este de asemenea un spaţiu separabil.

Fie G o mulţime deschisă în Y. Vom arăta că $f^{-1}(G) \cap B_\alpha(f)$ este boreliană de clasă α aditivă în $B_\alpha(f)$.

În adevăr, fie $x \in f^{-1}(G) \cap B_\alpha(f)$. Deoarece f este de clasă α în x, există o vecinătate deschisă V a lui x astfel încît $V \cap f^{-1}(G)$ să fie de clasă α aditivă în X. Atunci avem

$$(V \cap B_\alpha(f)) \cap f^{-1}(G) = (V \cap f^{-1}(G)) \cap B_\alpha(f),$$

însă $V \cap B_\alpha(f)$ este o vecinătate a lui x în $B_\alpha(f)$, iar membrul drept al egalităţii este o mulţime de clasă α aditivă în $B_\alpha(f)$. Deci $f^{-1}(G) \cap B_\alpha(f)$ este de clasă α aditivă în toate punctele sale şi, $B_\alpha(f)$ fiind separabil, rezultă, în baza aceleeaşi propoziţii din [3], că $f^{-1}(G) \cap B_\alpha(f)$ este o mulţime de clasă α aditivă în $B_\alpha(f)$ şi propoziţia este demonstrată.

Cu aceasta putem enunţa următoarea generalizare a teoremei lui Fl. Vasilescu.

TEOREMA 1. *Fie o funcţie $f: X \rightarrow Y$. Atunci pentru orice $\alpha > 0$ există un şir $\{f_n\}$ de funcţii boreliene de clasă $\leqslant \alpha$ care converge către f în orice punct din $B_\alpha(f)$.*

În particular, dacă $Y = R^m$ $(m \leqslant \aleph_0)$, sau dim $X = 0$, *atunci enunţul de mai sus este adevărat şi pentru $\alpha = 0$.*

Demonstraţie. Deoarece restricţia aplicaţiei f la $B_\alpha(f)$ este o funcţie de clasă α, din teorema de prelungire a funcţiilor boreliene [3] [2], rezultă că există o funcţie $g: X \rightarrow Y$ de clasă $\alpha + 1$, egală cu f în orice punct din $B_\alpha(f)$. Deoarece $\alpha + 1 > 1$, funcţia g este limita unui şir $\{f_n\}$ de funcţii de clasă $\leqslant \alpha$, teorema fiind demonstrată.

În cazurile particulare menţionate, funcţiile de clasă 1 fiind limite de funcţii continue, teorema are loc şi pentru $\alpha = 0$.

Dacă $X = Y = R$, obţinem tocmai teorema lui Fl. Vasilescu.

În acest ultim caz obţinem dintr-o teoremă a lui H. Blumberg, enunţată în [4], şi

COROLARUL 1. *Fiind dată o funcţie reală f definită pe un interval $[a, b]$, există un şir $\{f_n\}$ de funcţii continue, care converge către f pe o mulţime de puncte densă în $[a, b]$.*

---

[1] § 26, X, 1, pag. 264.

[2] § 31, VI, pag. 341.

§ 2. Pentru a generaliza teorema precedentă la funcţiile calitativ continue, vom demonstra o proprietate de prelungire a funcţiilor măsurabile faţă de un clan borelian $\mathcal{C}$, urmărind două rezultate asemănătoare din [3]. Vom considera un spaţiu amorf T şi $\mathcal{C}$ un clan borelian de părţi ale lui T.

PROPOZIŢIA 3. *Fiind dată o mulţime* $A \subset T$ *şi un sistem de mulţimi* $B_{i_1 \dots i_n}$ *($\mathcal{C}$)-măsurabile în raport cu* A, *astfel încît* :

$$B_{i_1 \dots i_n} \cap B_{j_1 \dots j_k} = \emptyset \text{ pentru } (i_1 \dots i_k) \neq (j_1 \dots j_k) \text{ şi } k \leqslant n,$$

există un sistem de mulţimi $C_{i_1 \dots i_n}$, *($\mathcal{C}$)-măsurabile în raport cu mulţimea* $A_n = \bigcup C_{i_1 \dots i_n}$ *(unde reuniunea este extinsă la toate sistemele de* n *indici), astfel încît* :

1°. A_n *este ($\mathcal{C}$)-măsurabilă*,

2°. $A \cap C_{i_1 \dots i_n} = B_{i_1 \dots i_n}$,

3°. $C_{i_1 \dots i_n} \cap C_{j_1 \dots j_k} = \emptyset$,

4°. $C_{i_1 \dots i_n} = \emptyset$, dacă $B_{i_1 \dots i_n} = \emptyset$.

În particular, mulţimile $C_{i_1 \dots i_n}$ *sînt ($\mathcal{C}$)-măsurabile.*

Demonstraţie. Există, prin ipoteză, un sistem de mulţimi $D_{i_1 \dots i_n}$, ($\mathcal{C}$)-măsurabile, astfel încît $A \cap D_{i_1 \dots i_n} = B_{i_1 \dots i_n}$ şi $D_{i_1 \dots i_n} = \emptyset$, dacă $B_{i_1 \dots i_n} = \emptyset$.

Să notăm cu V_n reuniunea tuturor intersecţiilor de forma $D_{i_1 \dots i_n} \cap D_{j_1 \dots j_k}$ şi să punem $C_{i_1 \dots i_n} = D_{i_1 \dots i_n} - V_n$, $A_n = \bigcup C_{i_1 \dots i_n} = \bigcup D_{i_1 \dots i_n} - V_n$. Mulţimile A_n şi $C_{i_1 \dots i_n}$ sînt ($\mathcal{C}$)-măsurabile şi avem evident $A_n \cap D_{i_1 \dots i_n} = D_{i_1 \dots i_n} - V_n = C_{i_1 \dots i_n}$ şi apoi $C_{i_1 \dots i_n} \cap C_{j_1 \dots j_k} = D_{i_1 \dots i_n} \cap D_{j_1 \dots j_k} - V_n = \emptyset$.

În sfîrşit, $A \cap C_{i_1 \dots i_n} = A \cap D_{i_1 \dots i_n} - A \cap V_n = B_{i_1 \dots i_n}$, deoarece egalitatea $A \cap D_{i_1 \dots i_n} \cap D_{j_1 \dots j_k} = B_{i_1 \dots i_n} \cap B_{j_1 \dots j_k} = \emptyset$, implică $A \cap V_n = \emptyset$.

Cu ajutorul acestui rezultat putem demonstra următoarea teoremă de prelungire a funcţiilor măsurabile.

PROPOZIŢIA 4. *Fie* T *mulţimea precedentă,* Y *un spaţiu complet separabil şi* A *o submulţime a lui* T. *Orice funcţie* $f : A \rightarrow Y$, *($\mathcal{C}$)-măsurabilă relativ la* A *se prelungeşte, pe o mulţime măsurabilă* A^*, *la o funcţie* f^*, *($\mathcal{C}$)-măsurabilă în raport cu* A^*.

Demonstraţie. Aplicaţia f fiind măsurabilă relativ la A, există un şir $\{f_n\}$ de funcţii ($\mathcal{C}$)-etajate relativ la A care converge către f. Avem, deci, $\mathrm{d}(f_n(x), f_k(x)) < \varepsilon$ pentru $N(x, \varepsilon) < k \leqslant n$ şi $f_n(A) = \{y_n^1, y_n^2, \dots, y_n^i, \dots\}$.

Să notăm $B_{i_1 \dots i_n} = f_1^{-1}(y_1^{i_1}) \cap \dots \cap f_n^{-1}(y_n^{i_n})$. Evident mulţimile $B_{i_1 \dots i_n}$ sînt ($\mathcal{C}$)-măsurabile relativ la A şi ipotezele propoziţiei 3 sînt verificate.

Deci, pentru orice n, există mulţimile ($\mathcal{C}$)-măsurabile A_n şi $C_{i_1 \dots i_n}$ astfel încît :

1°. $C_{i_1 \dots i_n} \cap C_{j_1 \dots j_k} = \emptyset$ pentru $(i_1 \dots i_k) \neq (j_1 \dots j_k)$ şi $k \leqslant n$;

2°. $A_n = \bigcup C_{i_1 \dots i_n}$;

3°. $A \cap C_{i_1 \dots i_n} = B_{i_1 \dots i_n}$;

4°. dacă $B_{i_1 \dots i_n} = \emptyset$, atunci $C_{i_1 \dots i_n} = \emptyset$.

Să considerăm mulțimea măsurabilă $A^* = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Vom prelungi fiecare funcție f_n pe mulțimea A_n punînd $f_n(x) = y_n^{i_n}$ dacă $x \in C_{i_1 \ldots i_n}$. Mulțimea valorilor funcției astfel definite este numărabilă și f_n este $(\mathcal{C})$-măsurabilă relativ la A_n deoarece $f_n^{-1}(y_n^i)$ este egală cu $\bigcup C_{i_1 \ldots i_{n-1} i}$, reuniunea fiind extinsă la toate sistemele de $n - 1$ indici.

Vom arăta că șirul $\{f_n\}$ de funcții astfel prelungite converge pe A^*.

Fie $x_0 \in A^*$; atunci $x_0 \in C_{i_1 \ldots i_n}$. Dacă $x_0 \in C_{j_1 \ldots j_k}$ și $k \leqslant n$, atunci, după 1°, $j_1 = i_1, \ldots, j_k = i_k$. Fie $x \in B_{i_1 \ldots i_n}$; atunci $f_n(x) = y_n^{i_n} = f_n(x_0)$. Deoarece $i_k = j_k$ rezultă de asemenea $f_k(x) = y_k^{i_k} = f_k(x_0)$ și atunci avem $d(f_n(x_0), f_k(x_0)) = d(f_n(x), f_k(x)) \leqslant \varepsilon$ pentru $N(x, \varepsilon) < k \leqslant n$, deoarece $x \in A$, adică $f_n(x_0)$ este un șir Cauchy în Y și deci convergent.

Vom nota $f^*(x) = \lim f_n(x)$ pentru orice $x \in A^*$, și aceasta este o funcție măsurabilă, ca limită de funcții măsurabile, ce prelungește pe f.

COROLARUL 2. *În condițiile teoremei precedente, funcția f se prelungește la o funcție $(\mathcal{C})$-măsurabilă pe T.*

Demonstrație. Evident, deoarece A^* este măsurabilă, putem prelungi funcția precedentă f^* la o funcție ce este constantă pe $\complement A^*$, noua funcție fiind $(\mathcal{C})$-măsurabilă pe T.

§ 3. Fie X un spațiu Hausdorff în care mulțimile deschise sînt de categoria a II-a și în care există o bază $\{B_i\}_{i \in I}$ astfel încît Card $I \leqslant \mathfrak{c}$.

DEFINIȚIA 2. Fie A o submulțime a lui X. Punctul $x_0 \in A$ se numește punct rezidual pentru A, dacă există o vecinătate deschisă V a lui x_0, astfel încît $V - A$ este o mulțime de categoria I-a în X.

Vom numi mulțime calitativ omogenă o mulțime A ale cărei puncte sînt puncte reziduale pentru A.

LEMA 1. *Fie $x_0 \in A$ un punct rezidual pentru A. Dacă $A \subseteq B$, atunci x_0 este punct rezidual și pentru B.*

Demonstrație. În adevăr, x_0 fiind punct rezidual pentru A, există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît $V - A$ să fie de categoria I-a; însă $V - B \subseteq V - A$ și deci $V - B$ este o mulțime de categoria I-a, adică x_0 este un punct rezidual pentru B.

PROPOZIȚIA 5. *Familia mulțimilor calitativ omogene împreună cu mulțimea vidă formează o topologie pe X, mai fină decît topologia inițială.*

Demonstrație. Fie $\{A_\iota\}_{\iota \in J}$ o familie de mulțimi calitativ omogene și $A = \bigcup\limits_{\iota \in J} A_\iota$. Vom arăta că orice punct din A este punct rezidual pentru A.

În adevăr, fie $x \in A$; atunci x aparține unei mulțimi A_ι. Însă x este punct rezidual pentru A_ι și din lema 1 rezultă că este punct rezidual și pentru A.

Fie A_1 și A_2 două mulțimi calitativ omogene. Vom arăta că $A_1 \cap A_2$ este încă o mulțime calitativ omogenă.

Să observăm că dacă pentru o vecinătate V a lui x, $V - A$ este de prima categorie, atunci orice subvecinătate a punctului x are această proprietate.

Fie atunci $x \in A_1 \cap A_2$. Există deci două vecinătăţi V_1 şi V_2 ale lui x astfel încît $V_1 - A_1$ şi $V_2 - A_2$ să fie mulţimi de categoria I-a. Avem, notînd $V = V_1 \cap V_2$:

$$V - (A_1 \cap A_2) = V \cap (\complement A_1 \cup \complement A_2) = (V - A_1) \cup (V - A_2).$$

Însă $V - A_1$ şi $V - A_2$ sînt mulţimi de prima categorie şi deci x este punct rezidual pentru $A_1 \cap A_2$.

În baza celor de mai sus, familia mulţimilor calitativ omogene formează o topologie pe X, topologie mai fină decît topologia iniţială, căci orice mulţime deschisă este o mulţime calitativ omogenă. Vom nota această topologie cu $\mathcal{R}_X$ şi o vom numi topologia rezidualilor pe X. Dacă Y este un spaţiu topologic, o funcţie $f : X \to Y$ se va numi calitativ continuă dacă este continuă în topologia $\mathcal{R}_X$. Dacă $X = Y = R$, atunci această definiţie este echivalentă cu definiţia funcţiilor calitativ continue din [5].

PROPOZIŢIA 6. *Orice mulţime calitativ omogenă are proprietatea lui Baire.*

Demonstraţie. Fie A o mulţime calitativ omogenă şi $x \in A$. Atunci există o mulţime deschisă B_i, din baza spaţiului, care conţine punctul x şi pentru care $B_i - A$ este o mulţime de prima categorie. Rezultă că $B_i \cap A$ este o mulţime cu proprietatea lui Baire.

Deoarece baza spaţiului are cel mult puterea continuului, fie $z = [z_1, z_2, \dots, z_n, \dots]$ numărul iraţional, dezvoltat în fracţie continuă, care corespunde mulţimii B_i. Vom nota $B_{z_1} = B_{z_1 z_2} = \dots = B_{z_1 \dots z_n} = \dots = B_i \cap A$, dacă $B_i - A$ este o mulţime de prima categorie şi $B_{z_1} = B_{z_1 z_2} = \dots = \emptyset$ în situaţia contrară.

Avem evident $A = \bigcup\limits_{z \in \mathcal{N}} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_{z_1 \dots z_n}$, unde am notat cu $\mathcal{N}$ mulţimea numerelor iraţionale din intervalul $[0, 1]$. Deoarece mulţimile $B_{z_1 \dots z_n}$ au proprietatea lui Baire, rezultă că A are de asemenea această proprietate, căci proprietatea lui Baire este invariantă faţă de operaţia ($\mathcal{A}$) a lui Suslin şi Luzin. [3].

COROLARUL 3. *Familia mulţimilor boreliene ale topologiei $\mathcal{R}_X$ este identică cu familia mulţimilor ce au proprietatea lui Baire în topologia iniţială a spaţiului X.*

Demonstraţie. Deoarece mulţimile calitativ omogene au proprietatea lui Baire şi deoarece mulţimile cu această proprietate formează un clan borelian, rezultă că mulţimile boreliene ale topologiei $\mathcal{R}_X$ vor avea proprietatea lui Baire.

Reciproc, dacă E este o mulţime cu proprietatea lui Baire, atunci $E = (G \cap A) \cup P$, unde G este o mulţime deschisă, A un rezidual şi P o mulţime de prima categorie. Deci în topologia $\mathcal{R}_X$, E este reuniunea unei mulţimi deschise, $G \cap A$, cu o mulţime închisă P, adică o mulţime boreliană.

(q.e.d.)

Observaţie. Demonstraţia corolarului precedent arată că orice mulţime cu proprietatea lui Baire diferă de o mulţime calitativ omogenă printr-o mulţime de categoria I-a.

LEMA 2. *Orice funcție ($\mathcal{B}$)-etajată este calitativ continuă în orice punct din X cu excepția unei mulțimi de prima categorie. (Prin $\mathcal{B}$ am notat familia mulțimilor avînd proprietatea lui Baire).*

Demonstrație. Fie funcția $f: X \to Y$, astfel încît $f(X) = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}$, unde $\{y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$ este o mulțime de puncte izolate. Deoarece $f^{-1}(y_1)$ are proprietatea lui Baire, avem pentru orice i, $f^{-1}(y_i) = G_i \cup P_i$, unde G_i este o mulțime calitativ omogenă, iar P_i de prima categorie. Să notăm $P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$. Evident, P este o mulțime de prima categorie și vom arăta că f este calitativ continuă în orice punct din $X - P$.

În adevăr, fie $x_0 \in X - P$ și $y_0 = f(x_0)$. Deoarece x_0 este punct rezidual pentru $f^{-1}(y_0)$, rezultă că există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît $V - f^{-1}(y_0)$ să fie o mulțime de prima categorie. Deci $V \cap f^{-1}(y_0)$ este o mulțime calitativ omogenă, adică o vecinătate a punctului x_0 în topologia $\mathcal{R}_X$ și deci f este calitativ continuă în x_0, lema fiind astfel demonstrată.

Fie Y un spațiu metric complet separabil, o aplicație $f: X \to Y$ și $\mathcal{R}(f)$ mulțimea punctelor din X în care f este calitativ continuă.

TEOREMA 2. *Fiind dată o funcție $f: X \to Y$, există un șir $\{f_n\}$ de funcții calitativ continue pe X cu excepția unei mulțimi de prima categorie, care converge către f în orice punct din $\mathcal{R}(f)$.*

Demonstrație. Mulțimea $\mathcal{R}(f)$, fiind un G_δ în topologia $\mathcal{R}_X$, are proprietatea lui Baire. Vom arăta că restricția aplicației f la $\mathcal{R}(f)$ este o funcție cu proprietatea lui Baire.

Fie G o mulțime deschisă în Y și $x \in f^{-1}(G) \cap \mathcal{R}(f)$. Atunci există o vecinătate V a lui x astfel încît $f^{-1}(G) \cap V$ este o mulțime calitativ omogenă. Însă, $(V \cap \mathcal{R}(f)) \cap (f^{-1}(G) \cap \mathcal{R}(f)) = (V \cap f^{-1}(G)) \cap \mathcal{R}(f)$, deci restricția lui f la $\mathcal{R}(f)$ este calitativ continuă în orice punct din $\mathcal{R}(f)$ și cu atît mai mult are proprietatea lui Baire.

Atunci, în baza corolarului 2, există o funcție $g: X \to Y$, avînd proprietatea lui Baire, egală cu f în orice punct din $\mathcal{R}(f)$. Însă g este limita unui șir $\{f_n\}$ de funcții ($\mathcal{B}$)-etajate și aplicînd lema 2, teorema este demonstrată.

Dacă X este un spațiu metric separabil și $Y = R^m$ ($m \leqslant \aleph_0$) are loc

TEOREMA 3. *Fiind dată o funcție $f: X \to Y$, există un șir $\{f_n\}$ de funcții continue care converge către f în orice punct din $\mathcal{R}(f)$ cu excepția unei mulțimi de categoria I-a.*

Demonstrație. Din demonstrația teoremei precedente, există o funcție $g: X \to Y$, avînd proprietatea lui Baire, egală cu f în orice punct din $\mathcal{R}(f)$. Atunci, [3], există o mulțime P de prima categorie astfel încît $g \mid (X - P)$ este o funcție continuă și deci, aplicînd teorema de prelungire a funcțiilor boreliene din [3], există un șir $\{f_n\}$ de funcții continue care converge către g în orice punct din $X - P$; rezultă că șirul $\{f_n\}$ converge către f în orice punct din $\mathcal{R}(f) - P$.

§ 4. În acest ultim paragraf vom considera spațiul R^n, în care prin măsurabilitate vom înțelege măsurabilitatea Lebesgue și vom nota prin τ topologia densității, adică topologia dată de mulțimile omogene în sensul derivatei măsurii ca funcție de mulțime. Atunci cînd nu vom face alte specificări, proprietățile topologice vor fi date în sensul topologiei obișnuite din R^n.

Conform unui rezultat stabilit de prof. S. Marcus (comunicare orală), mulţimile omogene sînt măsurabile şi deoarece, [6], orice mulţime măsurabilă este reuniunea dintre o mulţime de tip F_σ şi o mulţime de măsură nulă, acestea din urmă fiind închise în topologia τ, rezultă că familia mulţimilor boreliene ale topologiei τ coincide cu familia mulţimilor măsurabile şi, în plus, R^n — în topologia densităţii este un spaţiu de tip σ, adică un spaţiu topologic în care orice mulţime de tip F_σ este în acelaşi timp o mulţime de tip G_δ, acestea fiind şi singurele mulţimi boreliene ale topologiei respective.

Fie o aplicaţie $f : R^n \to \overline{R}$. Vom nota prin $\tau(f)$ mulţimea punctelor din R^n în care f este aproximativ continuă, adică continuă în topologia τ. Printr-un raţionament identic cu cel al teoremei 2, rezultă că $f|\tau(f)$ este măsurabilă şi atunci conform corolarului 2 va exista o funcţie $g : R^n \to \overline{R}$, măsurabilă şi egală cu f în orice punct din $\tau(f)$. Rezultă deci

PROPOZIŢIA 7. *Fiind dată funcţia* $f : R^n \to \overline{R}$, *există un şir* $\{f_n\}$ *de funcţii aproximativ continue a.p.t., care converge către* f *în orice punct din* $\tau(f)$.

Demonstraţie. În adevăr, funcţia măsurabilă g, considerată mai sus, este limita unui şir $\{f_n\}$ de funcţii etajate finite, iar orice funcţie etajată finită este aproximativ continuă a.p.t. Deoarece $g(x) = f(x)$ pentru orice punct $x \in \tau(f)$, propoziţia este demonstrată.

Are loc de asemenea

PROPOZIŢIA 8. *Fiind dată funcţia* $f : R^n \to \overline{R}$, *există un şir* $\{f_n\}$ *de funcţii continue, definite pe* R^n, *care converge către* f *a.p.t. pe* $\tau(f)$.

Demonstraţie. Vom considera funcţia anterioară g. Deoarece g este măsurabilă, conform unei teoreme a lui Luzin [6], pentru orice $\varepsilon > 0$, există o mulţime închisă F_ε astfel încît g este continuă pe F_ε şi $\mu(\complement F_\varepsilon) < \varepsilon$. Evident, pentru $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2$ putem considera $F_{\varepsilon_1} \subseteq F_{\varepsilon_2}$, căci mulţimea închisă $F_{\varepsilon_1} \cup F_{\varepsilon_2}$ satisface enunţului anterior pentru ε_2.

Pentru $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, obţinem şirul de mulţimi închise $F_1, F_2, \ldots F_n, \ldots$ cu $\mu(\complement F_n) < \frac{1}{n}$, iar g este continuă pe fiecare F_n. Vom prelungi funcţia g, conform teoremei lui Tietze, prin continuitate de la fiecare mulţime F_n la R^n. Fie f_n această prelungire; obţinem un şir $\{f_n\}$ de funcţii continue pe R^n care converge către g în orice punct din mulţimea $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Însă

$$\mu(\complement F) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \complement F_n\right) \leqslant \mu(\complement F_n) < \frac{1}{n}$$

oricare ar fi numărul natural n. Rezultă că $\mu(\complement F) = 0$ şi deci şirul $\{f_n\}$ converge către g a.p.t., adică $\{f_n\}$ converge către f a.p.t. pe $\tau(f)$.

Primită la redacţie la 18 februarie 1969

Universitatea din Bucureşti
Facultatea de matematică şi mecanică
str. Academiei nr. 14

SUR UN THÉORÈME DE FLORIN VASILESCU

(RÉSUMÉ)

En utilisant sa théorie des fonctions multiformes [2], Fl. Vasilescu a démontré dans [1] le théorème suivant : Etant donnée une fonction réelle f d'une variable réelle, il existe une suite $\{f_n\}$ de fonctions continues, qui converge vers f en chaque point où f est continue. S. Marcus a posé le problème de trouver pour ce théorème une démonstration directe qui n'utilisât pas la théorie des fonctions multiformes, et d'établir si le théorème reste en vigueur si, dans son énoncé, la continuité est remplacée par la continuité approximative (dans le sens de Denjoy), respectivement par la continuité qualitative (dans le sens de [5]). C'est la réponse à ces questions qui constitue l'objet du présent article.

BIBLIOGRAFIE

1. Vasilescu Florin, *Funcţiunile multiforme de variabile reale şi analiza clasică.* Bull. mathém. de la Soc. Roum. de Sci. **XXX**, *2*, 110–112 (1927).
2. Vasilescu Florin, *Essai sur les fonctions multiformes de variables réelles.* (Teză), Gauthier – Villars, Paris, 1925.
3. Kuratowski Casimir, *Topologie,* vol. I, ed. 4, P.W.N., Varşovia, 1958.
4. Marcus Solomon, *Noţiuni de analiză matematică.* Ed. ştiinţifică, Bucureşti, 1967.
5. Marcus Solomon, *Contribuţii la o analiză a funcţiilor reale bazată pe noţiunea de categorie (în sensul lui Baire).* St. cerc. mat., **7**, *3–4*, 251–272 (1956).
6. Nicolescu Miron, *Funcţii reale şi elemente de analiză funcţională.* Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1962.

OPERATORI REZIDUAL DECOMPOZABILI ÎN SPAȚII FRÉCHET

DE

F.-H. VASILESCU

În lucrare autorul înfățișează un model de decompozabilitate spectrală pentru operatorii închiși pe un spațiu Fréchet, luînd în considerație și eventuale părți reziduale ale spectrului în afara cărora se obțin comportări acceptabile.

INTRODUCERE

Teoria operatorilor liniari care admit descompuneri spectrale s-a impus ca un important capitol de teoria operatorilor, prin bogăția de rezultate larg aplicabile și prin estetica metodelor folosite.

Pentru operatorii normali pe un spațiu Hilbert se poate face o teorie spectrală complet constructivă în sensul că *a priori* nu este necesară decît existența operatorului luat în studiu, existența unei rezoluții a identității apărînd în mod natural. Aici normalitatea și proprietățile speciale ale spațiului Hilbert joacă un rol considerabil.

Pe spațiile Banach situația nu se mai prezintă de loc în acest mod. Noțiunea de operator normal își pierde sensul și se impune considerarea apriorică a unor proprietăți suplimentare, de exemplu existența rezoluției identității. Este meritul lui N. Dunford de a fi întrevăzut rolul acesteia în definirea și studierea unor operatori pe spații Banach care admit descompuneri spectrale convenabile, [13], [14], [4]. Dar noțiunea de rezoluție a identității nu a putut să înglobeze chiar exemple simple de operatori care posedă totuși descompuneri spectrale într-un sens mai general. Au apărut lucrări care s-au ocupat de astfel de exemple, pentru care rezoluția identității s-a dovedit insuficientă (G. L. Krabbe [22], F. Wolf [40] etc.)

O noțiune care a înglobat o clasă mai largă de operatori cu descompunere spectrală și care și-a dovedit eficacitatea în tratarea exemplelor rebele a fost aceea de distribuție spectrală introdusă de C. Foiaș [16]. Introducerea acestei noțiuni a impulsionat unele lărgiri (I. Colojoară [9]) și generalizări ale ei, permițînd atașarea unui calcul operațional pentru

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 8, P. 1181–1243, BUCUREȘTI, 1969

clase foarte largi de funcții (F.-Y. Maeda [24], S. Kantorovitz [21],Tillmann [29] etc.).

De altfel, unele încercări au părăsit și noțiunea de spațiu Banach ca „spațiu suport" al teoriei și au trecut la unele clase speciale de spații local convexe (C. T. Ionescu Tulcea [20], F.-Y. Maeda [24], Berruyer [6]).

Un studiu atent al principalelor încercări enumerate pînă acum scoate la iveală concluzia că pe măsură ce gradul de generalitate al unei teorii spectrale crește, rolul calculului operatorial în descrierea proprietăților celor mai generale ale operatorului se diminuează. Crește în schimb rolul varietăților liniare care rămîn stabile prin acțiunea operatorului precum și rolul localizării spectrale, adică al noțiunii de spectru atașat elementelor spațiului considerat, legat de operatorul luat în discuție. De asemenea crește rolul funcțiilor analitice cu valori vectoriale, iar calculul cu astfel de funcții se dovedește a fi un puternic instrument de investigare.

Astfel s-a dovedit necesară apariția (de altfel anterioară sau cel mult contemporană cu o parte din lucrările citate) unor încercări caracterizate printr-un grad înalt de axiomatizare (E. Bishop [8], C. Foiaș [7]) dintre care cea mai elaborată este azi teoria operatorilor decompozabili a lui C. Foiaș [12], [11], [2], [6], [33] etc.

Axiomatizarea, pe lîngă rolul de sistematizare a unui domeniu oarecare al matematicii, scoate adesea la iveală aspecte inedite pe care procedeul de acțiune „dinspre obiect" le evidențiază mai greu. Este cazul echivalenței cvasinilpotente a operatorilor, care permite „transportul" multor proprietăți spectrale între operatorii aflați în această relație [11], [12].

Folosind tot o cale axiomatică, vom încerca în cele ce urmează să definim și să studiem cîteva clase de operatori pe un spațiu Fréchet oarecare, operatori care posedă o comportare convenabilă pe o parte a spectrului lor, dar pentru care trebuie luate în considerație și părți reziduale ale spectrului, ce nu oferă în general informații despre structura intimă a operatorului studiat, cel puțin din punctul de vedere al teoriei noastre. Vom încerca în acest mod să cuprindem operatorii mărginiți sau nu și care posedă un calcul funcțional pe întreg spectrul lor sau pe o parte a sa [13], [4], [16], [20], [6], [24] etc. Vom îngloba de asemenea teoria operatorilor decompozabili al căror model, sintetizat în monografia [12], ne conduce permanent în cursul acestei încercări.

În cele ce urmează vom înfățișa pe scurt conținutul lucrării pe care o prezentăm și care e compusă din șapte paragrafe.

Primul paragraf are un caracter introductiv în care, pe lîngă prezentarea materialului care stă la baza acestei lucrări, se schițează un mod de construcție a unui calcul funcțional pentru algebre local convexe foarte generale, obținînd și teorema de aplicare a spectrului. Se mai obțin de asemenea cîteva rezultate speciale.

În paragraful următor ne ocupăm de prelungibilitatea analitică unică. Definiția noastră ține cont de eventuala existență a unui reziduu și orice operator închis posedă un astfel de reziduu minimal unic. Definim apoi două tipuri de spectre locale pentru care obținem relații de incluziune. Pe lîngă afirmații care extind rezultate din teoria operatorilor cu prelungibilitate unică [12], obţinem unele proprietăţi specifice (ex. propoziţia 2.8) şi o serie de fapte complet noi (ex. propoziţia 2.9, teorema 2.1). Al treilea paragraf se ocupă de spaţiile maximal invariante ale unui operator, noţiune care extinde în mod natural pe aceea de spaţiu maximal spectral [17]. După o caracterizare a lor, obţinem extensia unui rezultat important din teoria spaţiilor maximal spectrale (propoziţia 3.3) căruia i-am dat şi o formulare mai generală. Demonstrăm apoi un rezultat privind intersecţia familiilor filtrante de spaţii maximal invariante, un altul de invarianţă şi încheiem cu cîteva observaţii care fac legătura cu paragraful precedent.

Al patrulea paragraf e consacrat studiului operatorilor rezidual decompozabili. Aici obţinem mai întîi un criteriu de continuitate pentru operatorii cu reziduu spectral compact şi facem apropierea de teoria de pe spaţiile Banach. Prin rafinarea şi simplificarea unor metode din teoria operatorilor decompozabili obţinem legătura operatorilor rezidual decompozabili cu prelungibilitatea analitică unică reziduală. Obţinem apoi generalizarea teoremei de structură a spaţiilor maximal invariante [17], precum şi o teoremă de structură pentru spaţii specifice teoriei noastre. Pornind de la o idee a lui C. Apostol [2], introducem, pe o cale cu totul diferită, operatori tare rezidual decompozabili şi demonstrăm pentru aceştia o teoremă de existenţă şi unicitate a reziduului minimal, rezultat care apare aici pentru prima oară (teorema 4.3). Paragraful se încheie cu consideraţii de acest tip pentru restricţii de operatori şi pentru operatori induşi pe spaţii cît.

Paragraful 5 e consacrat studiului transmiterii proprietăţilor reziduale prin funcţii analitice. Se obţin generalizări ale unor rezultate privind operatorii cu prelungibilitate analitică unică sau decompozabili şi de asemenea, se studiază aici pentru prima dată transmiterea de proprietăţi reziduale pentru polinoame de operatori închişi.

Paragraful 6 reia şi generalizează lejer nişte cercetări mai vechi ale autorului [30], [31], [32] legate de anumite ,,distanţe'' spectrale, cercetări pornite la rîndul lor de la rezultatele privind cvasinilpotent echivalenţa operatorilor [11]. În centrul atenţiei poate fi situată formula ,,distanţei'' spectrale (teorema 6.4, corolarul 1).

În sfîrşit, în ultimul paragraf se tratează cîteva exemple care par mai semnificative.

În încheiere, doresc să exprim recunoştinţa mea prof. dr. doc. C. Foaiş, conducătorul ştiinţific al lucrării, pentru contribuţia avută în orientarea mea matematică. De asemenea ţin să mulţumesc dr. C. Apostol pentru discuţiile utile purtate împreună.

1. PRELIMINARII

La începutul acestui paragraf vom face o sumară trecere în revistă a noţiunilor de teorie spectrală pe care intenţionăm să le redefinim într-un cadru mai general.

Vom nota cu $\mathfrak{X}$ spaţiul ,,suport'' al teoriei pe care-l vom presupune, pentru început, spaţiu Banach arbitrar. Fie B ($\mathfrak{X}$) algebra operatorilor liniari şi mărginiţi ai lui $\mathfrak{X}$.

Reamintim că un operator $T \in B(\mathfrak{X})$ are *prelungire analitică unică* dacă orice funcție analitică $f(\lambda)$ cu valori în $\mathfrak{X}$, soluție a ecuației

$$(\lambda I - T) f(\lambda) \equiv 0 \text{ pentru } \lambda \in \omega$$

(unde ω e o mulțime deschisă din planul complex) este neapărat identic nulă [13], [14].

Există exemple simple de operatori care nu au această proprietate [12], [13]. Considerînd sume directe de operatori care au și care nu au această proprietate, se pot obține exemple de operatori care posedă proprietatea numai pe o parte a spectrului lor (aceasta este o primă cale de extindere a ei).

Prelungibilitatea analitică unică este strîns legată de ideea de a localiza spectrul unui operator dat, adică de a atașa fiecărui element al spațiului o mulțime din planul complex în afara căreia comportarea unor entități definite de operator devine controlabilă. Un punct λ_0 aparține *rezolvantei locale* $\rho_T(x)$ a lui $x \in \mathfrak{X}$ dacă în vecinătatea sa există o funcție analitică $x(\lambda)$ (unică în virtutea proprietății de prelungire analitică) care verifică identitatea

$$(\lambda I - T) x(\lambda) \equiv x.$$

Se notează $\sigma_T(x) = \complement \rho_T(x)$ iar această mulțime se numește *spectrul* lui x [13], [14]. Evident, avem $\rho_T(x) \supseteq \rho(T)$, deci $\sigma_T(x) \subseteq \sigma(T)$, unde $\rho(T)$, respectiv $\sigma(T)$, sînt mulțimea rezolvantă, respectiv spectrul operatorului considerat.

Această localizare se face mai ales pentru studiul varietăților liniare, invariante la T, de forma :

$$\mathfrak{X}_T(F) = \{x \in \mathfrak{X};\ \sigma_T(x) \subseteq F\}$$

unde F este o mulțime oarecare din plan. Cînd o astfel de varietate liniară e și închisă, atunci ea posedă o proprietate de maximalitate spectrală și anume simpla incluziune a spectrului operatorului restrîns la un subspațiu invariant atrage incluziunea acestui subspațiu în spațiul considerat. Spațiile cu această proprietate se numesc *maximal spectrale* [17].

Localizarea spectrului pe care am amintit-o mai sus nu este singura cu putință. Noi vom defini două tipuri de spectru local și ambele vor avea rolul lor în teoria pe care vom încerca să o dezvoltăm.

Un operator $T \in B(\mathfrak{X})$ se numește *decompozabil* [17] dacă pentru orice acoperire finită $\{G_j\}_{j=1}^n$ cu mulțimi deschise din planul complex a spectrului său $\sigma(T)$, există spațiile maximal spectrale $\{\mathfrak{X}_j\}_{j=1}^n$ astfel încît $\sigma(T \mid \mathfrak{X}_j) \subseteq G_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ și $x = x_1 + \ldots + x_n$ $(x_j \in \mathfrak{X}_j\ j = 1, \ldots, n;$ $x \in \mathfrak{X})$.

Definiția noastră va încerca să cuprindă atît operatorii mărginiți, cît și cei nemărginiți. De asemenea vom accepta existența unui „reziduu spectral" numai în afara căruia va exista o anume decompozabilitate.

Acestea sînt principalele noțiuni pe care le vom redefini într-un cadru mult mai larg și cu care vom opera în decursul acestei lucrări.

În cele ce urmează $\mathfrak{X}$ va fi un spațiu Fréchet în sensul lui Bourbaki [7], deci $\mathfrak{X}$ va fi un spațiu liniar topologic local convex separat, în care topologia va fi dată de o familie numărabilă de seminorme $\{|x|_n\}_{n\in\mathbf{N}}$; în plus, spațiul este presupus complet pentru această topologie. Se știe că un astfel de obiect are structură de spațiu metric, cu metrica astfel definită :

$$\tau(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x-y|_n}{1+|x-y|_n}$$

și că topologia este determinată prin oricare din aceste două căi.

Exemplele avute în vedere sînt în special spații de tipul $C^m(\Omega)$ adică spații de funcții derivabile pînă la ordinul m inclusiv ($0 \leq m \leq \infty$) pe $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ deschisă, iar ca operatori cei de înmulțire cu diverse funcții (avînd eventual singularități în Ω). Alte exemple pe care le vizăm sînt spațiile de funcții cu creștere temperată, notate de obicei $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, iar operatorii interesanți și din punctul nostru de vedere sînt cei definiți de polinoame diferențiale.

Multe din considerațiile noastre vor fi valabile în spații mai generale decît Fréchet. Motivul principal care ne-a făcut să ne oprim asupra acestei categorii de spații este încercarea de a imprima lucrării un caracter mai unitar, folosind totuși raționamente specifice spațiilor local convexe. Avem nevoie ca spațiul suport să fie metrizabi și complet datorită aplicării în permanență a teoremei graficului închis [15], [18], [41].

În ceea ce privește convexitatea locală, aceasta este necesară pentru definirea noțiunii de spectru în sensul lui Waelbrock și pentru calculul funcțional cu funcții analitice în vecinătatea spectrului [38], [39]. Mai mult, se vor ivi cazuri cînd aplicarea faptului că există o familie numărabilă de seminorme va deveni efectivă. De asemenea, vor fi și situații, nu lipsite de importanță, care vor putea fi studiate numai în cadrul spațiilor Banach.

Vom nota în cele ce urmează cu $B(\mathfrak{X})$ mulțimea aplicațiilor liniare și continue ale lui $\mathfrak{X}$ în el însuși, iar cu $C(\mathfrak{X})$ mulțimea aplicațiilor liniare, definite pe varietăți liniare ale lui $\mathfrak{X}$, cu valori în $\mathfrak{X}$ și închise. Pentru orice $T \in C(\mathfrak{X})$ vom nota $\mathfrak{D}_T$ domeniul său de definiție.

Ne vom ocupa acum de operatorii din $B(\mathfrak{X})$. Pe $B(\mathfrak{X})$ se poate introduce o topologie de spațiu local convex separat cu ajutorul seminormelor :

$$|T|_{n,\mathfrak{B}} = \sup_{x\in\mathfrak{B}} |Tx|_n,$$

unde $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{X}$ este o mulțime mărginită arbitrară (topologia convergenței uniforme pe mulțimile mărginite). Cu această topologie, $B(\mathfrak{X})$ devine un spațiu complet. Mai mult, pentru orice $V \in B(\mathfrak{X})$ fixat, aplicația $T \to TV$ e continuă deoarece

$$|(T_1 - T_2)V|_{n,\mathfrak{B}} = \sup_{x\in\mathfrak{B}} |(T_1 - T_2)Vx|_n = \\ = \sup_{y\in V\mathfrak{B}} |(T_1 - T_2)y|_n = |T_1 - T_2|_{n,V\mathfrak{B}}$$

căci V fiind continuu, $V\mathfrak{B}$ e mărginită.

Acum, dacă $T \in B(\mathfrak{X})$, să notăm cu $\mathfrak{A}_T$ cea mai mică algebră comutativă cu unitate, închisă în $B(\mathfrak{X})$, ce conține operatorii $(\lambda I - T)^{-1}$, ori de cîte ori aceştia există în $B(\mathfrak{X})$, pentru valori $\lambda \in \mathbf{C}$. Algebra $\mathfrak{A}_T$ are structură de spaţiu topologic local convex complet şi de algebră comutativă cu unitate, pentru care aplicaţia $(T_1, T_2) \to T_1 T_2$ e continuă în fiecare argument, conform observaţiei de mai sus.

Pentru a defini spectrul unui operator în sensul lui Waelbroeck să precizăm că vom lucra numai cu puncte din planul complex compactificat $\mathbf{C}_\infty = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

Fie $T \in C(\mathfrak{X})$. Vom spune, după Waelbroeck, că $\lambda \in \rho(T)$ (*mulţimea rezolvantă* a lui T) dacă există o vecinătate V_λ a lui λ cu proprietăţile

1° $R(\mu; T) \,\mathbf{def}\, (\mu I - T)^{-1} \in B(\mathfrak{X})$ pentru orice $\mu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}$;

2° mulţimea $\{R(\mu; T); \mu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}\}$ e mărginită în $B(\mathfrak{X})$.

Vom nota $\sigma(T) = \complement \rho(T)$. În ceea ce priveşte condiţia 2° din definiţia de mai sus, verificarea ei va fi considerabil uşurată pe spaţiile pe care lucrăm datorită aplicării principiului mărginirii uniforme [15].

Fără îndoială că această definiţie se poate extinde pentru elementele unei algebre local convexe oarecare, prin algebră local convexă înţelegînd un spaţiu local convex (separat) dotat cu produs continuu în fiecare argument.

Pentru a prezenta calculul simbolic al lui Waelbroeck şi pentru a da o completare a sa, ne vom situa în această din urmă ipoteză. Fie deci $\mathfrak{A}$ o algebră local convexă cu unitatea e. Pentru orice $x \in \mathfrak{A}$ şi orice $\Gamma \subseteq \rho(x) \cap \mathbf{C}$ compactă, vom nota $\mathfrak{A}_x(\Gamma)$ algebra închisă generată în $\mathfrak{A}$ de mulţimea

$$\{R(\lambda; x);\ \lambda \in \Gamma\} \cup \{e\}.$$

Ipoteza pe care o facem asupra algebrei $\mathfrak{A}$ este că pentru orice pereche (x, Γ), algebra $\mathfrak{A}(\Gamma)$, definită mai sus, este cvasicompletă (completă cu şiruri generalizate Cauchy, mărginite). Ipoteza noastră este mai slabă decît cea utilizată de Allan [1] iar calculul simbolic care se poate construi pleacă de la o definiţie a spectrului mai cuprinzătoare decît a sa.

Acum, considerînd un element $x \in \mathfrak{A}$ cu $\rho(x) \neq \emptyset$ şi notînd cu $\mathcal{F}(x)$ mulţimea funcţiilor cu valori complexe, analitice într-o vecinătate a lui $\sigma(x)$, atunci pentru orice sistem de curbe Γ, convenabil pentru calculul integral, aflat în domeniul de definiţie al unei funcţii $f \in \mathcal{F}(x)$ şi în $\rho(x)$, integrala

$$\int_\Gamma f(\lambda)\, R(\lambda; x)\, d\lambda$$

există datorită ipotezei făcute asupra algebrei $\mathfrak{A}_x(\Gamma)$.

Dacă sistemul de curbe Γ „înconjoară” pe $\sigma(x)$ în sensul uzual al acestei expresii, atunci se pune :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\Gamma f(\lambda)\, R(\lambda; x)\, d\lambda; & \sigma(x) \not\ni \infty \\[2ex] f(\infty) e + \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\Gamma f(\lambda)\, R(\lambda; x)\, d\lambda; & \sigma(x) \ni \infty. \end{cases}$$

Aplicaţia $f \to f(x)$ $(\mathcal{F}_U(x) \to \mathfrak{A}_x(\Gamma))$ este un homomorfism de algebre cu unitate, unde $\mathcal{F}_U(x) \subseteq \mathcal{F}(x)$ este algebra funcţiilor analitice într-o vecinătate U a lui $\sigma(x)$ iar $\Gamma \subseteq U$, $\Gamma \cap \sigma(x) = \emptyset$ e un sistem convenabil de curbe, altfel arbitrar.

Demonstraţia acestui fapt, mai ales a multiplicativităţii, nu este imediată, dar în virtutea faptului că integralele există, se poate obţine, urmînd pas cu pas demonstraţia din cazul algebrelor Banach [15], [18].

Ceea ce ne interesează în mod deosebit este obţinerea unei teoreme de aplicare a spectrului (Dunford) care să fie valabilă şi pentru cazul în care se utilizează operatori închişi pe un spaţiu Fréchet şi vom urma o cale adecvată [15].

Dacă $\sigma(x) \not\ni \infty$, atunci pentru orice $f \in \mathcal{F}(x)$ are loc relaţia $f(\sigma(x)) = \sigma)f(x))$ şi demonstraţia se poate face de pildă ca în [15].

Vom relua pentru ceea ce urmează o parte din demonstraţie. Vom arăta relaţia $\sigma(f(x)) \subseteq f(\sigma(x))$. În adevăr, dacă $\mu \notin f(\sigma(x))$, atunci $[\mu - f(\lambda)]^{-1} \in \mathcal{F}(x)$ şi $[\mu - f(.)]^{-1}(x) = [\mu e - f(x)]^{-1}$, deci $\mu \in \rho(f(x))$. Această relaţie ne permite să remarcăm că pentru orice $f \in \mathcal{F}(x)$ mulţimea $\sigma(f(x))$ este compactă în $\mathbf{C}$.

Fie acum $\lambda_0 \in \rho(x)$ $(\neq \emptyset$ prin ipoteză). Vom considera elementul $a = -R(\lambda_0, x)$ şi aplicaţia

$$\Phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{-1}.$$

LEMA 1.1. *Dacă* $\sigma(x) \ni \infty$, *atunci are loc egalitatea* $\Phi(\sigma(x)) = \sigma(a)$.

În adevăr, dacă $\lambda \in \rho(x)$, atunci $\lambda \neq \infty$ şi dacă punem, pentru $\lambda \neq \lambda_0$, $\mu = (\lambda - \lambda_0)^{-1}$, avem

$$R(\mu; a) = \frac{1}{\mu^2}[R(\lambda; x) + \mu e].$$

E uşor de văzut că dacă V_λ este o vecinătate a lui λ în care $\{R(\lambda', x); \lambda' \in V_\lambda\}$ e mărginită, atunci $W_\mu = \Phi(V_\lambda)$ o vecinătate a lui μ în care $\{R(\mu', a); \mu' \in W_\mu\}$ este mărginită. Acest lucru are loc şi pentru $\lambda = \lambda_0$. Invers, dacă $\mu \in \rho(a)$, atunci $R(\lambda; x) = -\mu R(\mu; a)\, a$. Nu avem $0 \in \rho(a)$ căci atunci am avea $R(\lambda; x)$ definit şi mărginit într-o vecinătate a lui ∞, deci $\infty \in \rho(x)$. Consideraţiile de mărginire se menţin datorită continuităţii parţiale a produsului.

TEOREMA 1.1. *Fie* $x \in \mathfrak{A}$ *cu* $\sigma(x) \ni \infty$ *şi* $\rho(x) \neq \emptyset$. *Atunci pentru orice* $f \in \mathcal{F}(x)$ *are loc relaţia* $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$.

Demonstraţie. Vom pune pentru fiecare $f \in \mathcal{F}(x)$,

$$\tilde{f}(\mu) = f(\Phi^{-1}(\mu)) = f\left(\frac{1}{\mu} + \lambda_0\right) \in \mathcal{F}(a)$$

(conform propoziţiei precedente). Fie Γ un contur ce înconjură $\sigma(x)$. Putem presupune că λ_0 e „în afara" domeniului delimitat de curba Γ. Să probăm atunci că $f(x) = \widetilde{f}(a)$. În adevăr,

$$f(x) = f(\infty)\,e + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\lambda)\,R(\lambda;\,x)\,\mathrm{d}\lambda = f(\infty)\,e + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \widetilde{f}(\mu)\left[-\frac{1}{\mu}e + \right.$$

$$\left. + R(\mu;\,a)\right]\mathrm{d}\mu = f(\infty)\,e + \widetilde{f}(a) - \widetilde{f}(0)\,e = \widetilde{f}(a)$$

căci $\gamma = \Phi(\Gamma)$ înconjoară pe $\sigma(a)$, care e compact în $\mathbf{C}$. Prin urmare vom avea:

$$\sigma(f(x)) = \sigma(\widetilde{f}(a)) = \widetilde{f}(\sigma(a)) = f(\Phi^{-1}(\sigma(a)) = f(\sigma(x)).$$

Aşadar teorema de aplicare a spectrului are loc indiferent de poziţia faţă de spectru a punctului de la infinit. Menţionăm că această construcţie, spre deosebire de cea utilizată de Allan, nu apelează la efectivitatea apartenenţei lui x la algebra considerată, deci este aplicabilă pentru operatori închişi, nu neapărat continui, pe un spaţiu local convex dotat cu o completitudine convenabilă. În particular, toate aceste consideraţii se pot aplica algebrei $\mathfrak{U}_T$ introdusă mai sus pentru un $T \in C(\mathfrak{X})$, şi le vom utiliza şi noi la momentul potrivit.

Pentru operatorii pe spaţii local convexe nu există certitudine în ceea ce priveşte apartenenţa punctului de la infinit la spectru, dependentă de continuitate. Se poate da totuşi un răspuns cert pentru o anumită clasă de operatori, prin extensia unui rezultat cunoscut la operatori pe spaţii Banach [18], rezultat cu care vom încheia acest paragraf preliminar.

PROPOZIŢIA 1.1. *Dacă* $T \in C(\mathfrak{X}) \setminus B(\mathfrak{X})$, *atunci* $\sigma(T) \ni \infty$.

Demonstraţie. Evident, putem presupune de la început $\rho(T) \neq \emptyset$. Să presupunem că $\infty \in \sigma(T)$. Există atunci o vecinătate a sa V_∞ cu proprietatea că $(\lambda I - T)^{-1} \in B(\mathfrak{X})$ pentru $\lambda \in V_\infty \cap \mathbf{C}$ şi $\{(\lambda I - T)^{-1};\ \lambda \in V_\infty \cap \mathbf{C}\}$ e mărginită în $B(\mathfrak{X})$. E uşor de văzut atunci că $\lambda \rightarrow R(\lambda;\,T)$ e analitică în vecinătatea punctului de la infinit, deci că are o dezvoltare de forma:

$$R(\lambda;\,T) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \lambda^{-n}, \quad A_n \in \mathfrak{A}_T. \tag{1}$$

Dar $R(\lambda;\,T)$ verifică ecuaţia

$$R^2(\lambda) = -R'(\lambda) \tag{2}$$

deci substituind (1) în (2), obţinem relaţiile:

$$A_0^2 = 0, \qquad A_0 A_n = 0 \text{ pentru orice } n,$$

$$A_1^2 = A_1, \qquad A_n = A_{n-k}\ A_{k+1} \text{ pentru } n > 1.$$

Ultima relaţie ne dă $A_n = (A_2)^{n-1}$ $(n > 1)$, deci punînd $A_0 = N$, $A_1 = E$, $A_2 = A$, obţinem :

$$R(\lambda; T) = N + E\,R(\lambda; A), \text{ cu } A \in B(\mathfrak{X}).$$

Avem $E \neq I$ căci $E = I$ atrage $N = 0$, deci $T = A \in B(\mathfrak{X})$ ceea ce nu se poate.

Există deci $x \in \mathfrak{X}$, $x \neq 0$ cu $E\,x = 0$. Se obţine atunci $R(\lambda; T)[R(\lambda; T)\,x] = 0$ ceea ce nu este posibil. Aşadar neapărat $\infty \in \sigma(T)$.

2. PRELUNGIBILITATE ANALITICĂ UNICĂ REZIDUALĂ

Rezultatele cuprinse în acest paragraf şi în următoarele sînt prezentate în articolele [34], [35], [36], [37] în care apar uneori redactate la nivelul spaţiilor Banach. Pentru noi însă $\mathfrak{X}$, $B(\mathfrak{X})$, $C(\mathfrak{X})$ etc., vor avea sensul din § 1 şi numai o menţionare expresă va conferi alt sens.

Prelungibilitatea analitică unică este o noţiune datorată lui Dunford [13], [14], apărută în studiul operatorilor spectrali. Ea apare într-un număr considerabil de lucrări dar a fost studiată sistematic îndeosebi în [12].

Generalizarea acestei proprietăţi se poate face în două sensuri şi anume mergînd pe calea lărgirii clasei de operatori şi de spaţii pe care aceştia acţionează, iar pe de altă parte, considerîndu-se anumite părţi ale spectrului, rebele faţă de acest fenomen. Vom adopta o definiţie care să ţină cont de aceste două posibilităţi.

Fie $\Omega \subseteq \mathbf{C}_\infty$ o mulţime deschisă şi $T \in C(\mathfrak{X})$.

DEFINIŢIA 2.1. O funcţie analitică $f : \Omega \to \mathfrak{X}$ se numeşte *T-analitică* dacă $f(\lambda) \in \mathfrak{D}_T$ pentru $\lambda \in \Omega$ (cu $\mathfrak{D}_T$ am notat domeniul de definiţie al operatorului T) şi $T f(\lambda)$ e analitică.

LEMA 2.1. *Dacă* $T \in C(\mathfrak{X})$ şi $f : \Omega \to \mathfrak{X}$ *este T-analitică, atunci* $f^{(k)}(\lambda)$ *este T-analitică pentru* $k \geqq 0$ *şi*

$$[Tf(\cdot)]^{(k)}(\lambda) = Tf^{(k)}(\lambda).$$

Deoarece T e închis, demonstraţia e imediată.

LEMA 2.2. *Dacă* $T \in C(\mathfrak{X})$ $(\rho(T) \neq \emptyset)$, *atunci pentru orice* $x \in \mathfrak{X}$ *funcţia* $R(\lambda, T)\,x$ *este T-analitică în* $\rho(T)$.

În adevăr avem identitatea :

$$T\,R(\lambda, T)\,x = [\lambda R(\lambda, T) - I]\,x$$

şi afirmaţia devine evidentă.

DEFINIŢIA 2.2. O mulţime deschisă $\Omega \subseteq \mathbf{C}_\infty$ se numeşte *de unicitate analitică* (în raport cu T) dacă pentru orice $\omega \subseteq \Omega$ deschisă şi pentru orice $f_0 : \omega \to \mathfrak{D}_T$ analitică verificînd ecuaţia $(\lambda I - T) f_0(\lambda) = 0$ pentru $\lambda \in \omega \cap \mathbf{C}$, rezultă $f_0(\lambda) \equiv 0$ în ω.

PROPOZIŢIA 2.1. *Pentru orice* $T \in C(\mathfrak{X})$ *există o cea mai mare mulţime de unicitate analitică* Ω_T.

Demonstrație. Familia mulțimilor de unicitate analitică este nevidă, ea conținînd cel puțin mulțimea $\rho(T)$. Ea este ordonată de relația de incluziune și să o considerăm indiciată notînd-o $\{\Omega_\alpha\}_\alpha$. Să punem atunci $\Omega_T = \bigcup\limits_\alpha \Omega_\alpha$ și să arătăm că și Ω_T face parte din familie. În adevăr, fie $\omega \subseteq \Omega_T$ deschisă și $f_0 : \omega \to \mathfrak{D}_T$ o funcție analitică verificînd ecuația $(\lambda I - T) f_0(\lambda) \equiv 0$ pentru $\lambda \in \omega \cap \mathbf{C}$. Fie $\lambda_0 \in \omega$ arbitrar. Există atunci α_0 astfel încît $\lambda_0 \in \Omega_{\alpha_0}$ și fie ω_0 o vecinătate deschisă a lui λ_0 în $\omega \cap \Omega_{\alpha_0}$. Cum Ω_{α_0} e mulțime de unicitate analitică, vom aplica proprietatea ei perechii $(\omega_0 f_0 | \omega_0)$, de unde va rezulta $f_0|_{\omega_0} \equiv 0$. De aici, $f_0(\lambda) \equiv 0$ pentru $\lambda \in \omega$, prin urmare putem spune că Ω_T e o mulțime de unicitate analitică. Maximalitatea și unicitatea ei rezultă din felul în care a fost construită.

DEFINIȚIA 2.3. Vom numi *reziduu analitic* al operatorului T mulțimea $\mathbf{S}_T = \complement \Omega_T$, Ω_T fiind mulțimea deschisă maximală dată de propoziția precedentă. Din maximalitatea lui Ω_T rezultă ușor că pentru orice $\omega_0 \subseteq \mathbf{S}_T$ deschisă, există o funcție analitică nenulă $f_0 : \omega_0 \to \mathfrak{D}_T$ verificînd ecuația $(\lambda I - T) f_0(\lambda) \equiv 0$ pentru $\lambda \in \omega_0 \cap \mathbf{C}$, că $\mathbf{S}_T$ nu poate avea puncte izolate și că dacă $\operatorname{Int} \mathbf{S}_T = \emptyset$, atunci neapărat $\mathbf{S}_T = \emptyset$.

Cazul $\mathbf{S}_T = \emptyset$ corespunde prelungibilității analitice unice [14], [24].

PROPOZIȚIA 2.2. *Fie* $T_j \in C(\mathfrak{X}^j)$ $(j = 1,2)$. *Atunci*

$$\mathbf{S}_{T_1 \oplus T_2} = \mathbf{S}_{T_1} \cup \mathbf{S}_{T_2}.$$

Demonstrație. Fie $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^1 \oplus \mathfrak{X}^2$ și $T = T_1 \oplus T_2$.

Fie $f(\lambda) : \Omega \to \mathfrak{D}_T$ o funcție analitică astfel încît $(\lambda I_{\mathfrak{X}} - T) f(\lambda) \equiv 0$, $\lambda \in \Omega \cap \mathbf{C}$, cu $\Omega \subseteq \complement(\mathbf{S}_{T_1} \cup S_{T_2})$.

Atunci $f(\lambda) = f_1(\lambda) \oplus f_2(\lambda)$, deci $(\lambda I_{\mathfrak{X}^j} - T_j) f_j(\lambda) \equiv 0$ în $\Omega \cap \mathbf{C} \subseteq \complement S_{T_j}$ pentru $j = 1, 2$. Avem așadar $f(\lambda) \equiv 0$ în Ω deci, din minimalitate, rezultă $\mathbf{S}_{T_1 \oplus T_2} \subseteq \mathbf{S}_{T_1} \cup S_{T_2}$.

Invers, fie $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{T_1 \oplus T_2}$ și fie funcțiile $f_j(\lambda) : \Omega \to \mathfrak{D}_{T_j}$ care verifică ecuațiile $(\lambda I_{\mathfrak{X}^j} - T_j) f_j(\lambda) \equiv 0$ în $\Omega \cap \mathbf{C}$, $\Omega \subseteq \complement \mathbf{S}$. Considerînd $f(\lambda) = f_1(\lambda) \oplus f_2(\lambda)$, obținem $(\lambda I_{\mathfrak{X}} - T) f(\lambda) \equiv 0$ în $\Omega \cap \mathbf{C}$, deci $f(\lambda) \equiv 0$ în Ω. De aici $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{T_1 \oplus T_2} \supseteq \mathbf{S}_{T_1} \cup \mathbf{S}_{T_2}$ și propoziția e demonstrată.

DEFINIȚIA 2.4. Fie $T \in C(\mathfrak{X})$, $x \in \mathfrak{X}$ și $\lambda_0 \in \mathbf{C}_\infty$.

Vom spune că $\lambda_0 \in \delta_T(x)$ dacă într-o vecinătate V_{λ_0} a lui λ_0 există cel puțin o funcție analitică $f_x(\lambda)$ cu valori în $\mathfrak{D}_T$ așa ca $(\lambda I - T) f_x(\lambda) \doteq x$ pentru $\lambda \in V_{\lambda_0} \cap \mathbf{C}$. Vom nota cu $\gamma_T(x) = \complement \delta_T(x)$.

Vom defini de asemenea mulțimile

$$\rho_T(x) = \delta_T(x) \cap \Omega_T \quad \text{și} \quad \sigma_T(x) = \gamma_T(x) \cup \mathbf{S}_T = \complement \rho_T(x),$$

unde Ω_T și $\mathbf{S}_T$ au semnificația stabilită.

Vom numi o astfel de funcție $f_x(\lambda)$ *T-asociată* lui x. Din proprietățile lui Ω_T rezultă că în $\rho_T(x)$ există o singură funcție T-asociată lui x pe care o vom nota de aici încolo cu $x(\lambda)$ (sau $x_T(\lambda)$ cînd se poate face confuzie). Din relația $T f_x(\lambda) = \lambda f_x(\lambda) - x$ rezultă că orice funcție T-asociată lui $x \in \mathfrak{X}$ este T-analitică, oricare ar fi $x \in \mathfrak{X}$. Vom avea atunci următoarele incluziuni evidente, oricare ar fi $x \in \mathfrak{X}$,

$$(\rho) \qquad \rho(T) \subseteq \delta_T(x) \cap \Omega_T = \rho_T(x) \subseteq \delta_T(x)$$

şi prin complementare :

$$(\sigma) \qquad \gamma_T(x) \subseteq \sigma_T(x) = \gamma_T(x) \cup \mathbf{S}_T \, \sigma \subseteq (T).$$

PROPOZIŢIA 2.3. *Fie* $T \in C(\mathfrak{X})$, $x_0 \in \mathfrak{X}$ *şi* $\lambda_0 \in \delta_T(x_0) \cap \mathbf{C}$. *Atunci pentru orice funcţie* f_{x_0} *T-asociată lui* x_0 *în vecinătatea lui* λ_0, *au loc relaţiile* :

$$(i) \qquad \gamma_T(f_{x_0}(\lambda_0)) = \gamma_T(x_0),$$

$$(ii) \qquad \sigma_T(f_{x_0}(\lambda_0)) = \sigma_T(x_0).$$

Demonstraţie. Mai întîi să remarcăm că deoarece $f_{x_0}(\lambda_0) \in \mathfrak{D}_T$, orice funcţie analitică T-asociată lui $f_{x_0}(\lambda_0)$ este chiar T^2-analitică. Acum, fie $\mu_0 \in \delta_T(f_{x_0}(\lambda_0))$, deci în vecinătatea sa există o funcţie $f(\mu)$ T-asociată lui $f_{x_0}(\lambda_0)$. Aşadar putem afirma că $(\lambda_0 I - T) f(\mu)$ este T-analitică şi avem :

$$(\mu I - T)(\lambda_0 I - T) f(\mu) = (\lambda_0 I - T)(\mu I - T) f(\mu) = (\lambda_0 I - T) f_{x_0}(\lambda_0) = x_0$$

deci $\mu_0 \in \delta_T(x_0)$. Aşadar $\gamma_T(x_0) \subseteq \gamma_T(f_{x_0}(\lambda_0))$ şi

$$\sigma_T(x_0) \subseteq \gamma_T(f_{x_0}(\lambda_0)) \cup \mathbf{S}_T = \sigma_T(f_{x_0}(\lambda_0)).$$

Invers, dacă $\mu_0 \in \delta_T(x_0)$, fie $g_{x_0}(\mu)$ o funcţie T-asociată lui x_0. Dacă $\mu_0 = \lambda_0$, atunci putem lua $g_{x_0}(\mu) = f_{x_0}(\mu)$ într-o vecinătate a lui λ_0. Vom defini într-o vecinătate a lui μ_0 funcţia

$$h(\mu) = \begin{cases} \dfrac{g_{x_0}(\mu) - f_{x_0}(\lambda_0)}{\lambda_0 - \mu} & \mu \neq \lambda_0 \\[2ex] -f'_{x_0}(\lambda_0) & \mu = \lambda_0 \end{cases}$$

Această funcţie este analitică şi verifică ecuaţia $(\mu I - T) h(\mu) = f_{x_0}(\lambda_0)$, deci $\mu_0 \in \delta_T(f_{x_0}(\lambda_0))$. Am obţinut prin urmare

$$\gamma_T(f_{x_0}(\lambda_0)) \subseteq \gamma_T(x_0) \text{ şi } \sigma_T(f_{x_0}(\lambda_0)) \subseteq \gamma_T(x_0) \cup \mathbf{S}_T = \sigma_T(x_0).$$

Combinînd aceste concluzii, obţinem (i) şi (ii).

Pentru o mulţime arbitrară $M \subseteq \mathbf{C}_\infty$ vom nota :

$$\breve{\mathfrak{X}}_T(M) = \{x \in \mathfrak{X} ; \ \gamma_T(x) \subseteq M\},$$

$$\mathfrak{X}_T(M) = \{x \in \mathfrak{X} ; \ \sigma_T(x) \subseteq M\}.$$

Evident, dacă $M \not\supseteq \mathbf{S}_T$, atunci $\mathfrak{X}_T(M) = \emptyset$.

PROPOZIȚIA 2.4. *Pentru orice* $M \subseteq \mathbf{C}_\infty$, *mulțimile* $\mathfrak{X}_T(M \cup \mathbf{S}_T)$ *și* $\breve{\mathfrak{X}}_T(M)$ *sînt varietăți liniare, nevide.*

Demonstrație. În adevăr, sînt ușor de verificat următoarele relații

$$\gamma_T(x) = \gamma_T(\alpha\, x) \qquad (x \in \mathfrak{X};\ \alpha \neq 0),$$

$$\sigma_T(x) = \sigma_T(\alpha\, x) \qquad (x \in \mathfrak{X};\ \alpha \neq 0),$$

$$\gamma_T(x + y) \subseteq \gamma_T(x) \cup \gamma_T(y) \qquad (x, y \in \mathfrak{X}),$$

$$\sigma_T(x + y) \subseteq \sigma_T(x) \cup \sigma_T(y) \qquad (x, y \in \mathfrak{X}),$$

$$\gamma_T(0) = \emptyset,\ \sigma_T(0) = \mathbf{S}_T.$$

și de aici rezultă afirmațiile.

PROPOZIȚIA 2.5. *Dacă* $T_j \in C(\mathfrak{X}^j)$ $(j = 1,2)$, *atunci au loc relațiile*:

$$(i) \qquad \breve{\mathfrak{X}}^1_{T_1}(M) \oplus \breve{\mathfrak{X}}^2_{T_2}(M) = (\breve{\mathfrak{X}^1 \oplus \mathfrak{X}^2})_{T_1 \oplus T_2}(M)$$

oricare ar fi $M \subseteq \mathbf{C}_\infty$.

$$ii) \qquad \mathfrak{X}^1_{T_1}(M \cup \mathbf{S}_{T_1}) \oplus \mathfrak{X}^2_{T_2}(M \cup \mathbf{S}_{T_2}) = (\mathfrak{X}^1 \oplus \mathfrak{X}^2)_{T_1 \oplus T_2}(M \cup \mathbf{S}_{T_1 \oplus T_2})$$

pentru orice $M \subseteq \mathbf{C}_\infty$.

Demonstrație. Vom remarca mai întîi relația

$$\gamma_{T_1 \oplus T_2}(x_1 \oplus x_2) = \gamma_{T_1}(x_1) \oplus \gamma_{T_2}(x_2),$$

căci dacă $\lambda_0 \in \delta_{T_1 \oplus T_2}(x_1 \oplus x_2)$, atunci în vecinătatea sa există funcția

$$f_{x_1 \oplus x_2}(\lambda) = f_{x_1}(\lambda) \oplus f_{x_2}(\lambda)$$

deci $\lambda_0 \in \delta_{T_j}(x_j)$ $(j = 1, 2)$.

Reciproc, pe aceeași cale se obține că dacă $\lambda_0 \in \delta_{T_j}(x_j)$ $(j = 1,2)$, atunci $\lambda_0 \in \delta_{T_1 \oplus T_2}(x_1 \oplus x_2)$.

De aici rezultă ușor egalitatea

$$\gamma_{T_1 \oplus T_2}(x_1 \oplus x_2) = \gamma_{T_1}(x_1) \cup \gamma_{T_2}(x_2),$$

de unde rezultă relațiile din enunț, dacă se ține cont și de propoziția 2.2.

DEFINIȚIA 2.5. Un subspațiu închis $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$ se numește *invariant* la T dacă $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{D}_T$ și $T\,\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Y}$. Din teorema graficului închis rezultă $T/\mathfrak{Y} \in B(\mathfrak{Y})$.

PROPOZIŢIA 2.6. *Fie* $T \in C(\mathfrak{X})$, $M \subseteq \mathbf{C}_\infty$, $M \supseteq \mathbf{S}_T$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_T(M)$ *cu proprietăţile* :

1) $\mathfrak{Y}$ *închis în* $\mathfrak{X}$;
2) $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{D}_T$.

Atunci $\mathfrak{Y}$ *este un subspaţiu invariant la* T *şi* $\sigma(T|\mathfrak{Y}) \subseteq \overline{M \cap \sigma(T)}$.

Demonstraţie. Dacă $y \in \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{D}_T$, atunci orice funcţie T-asociată lui y este T^2-analitică, deci $\gamma_T(Ty) \subseteq \gamma_T(y)$. De aici obţinem şi $\sigma_T(Ty) \subseteq \sigma_T(y)$, de unde $Ty \in \mathfrak{Y}$. Deci $\mathfrak{Y}$ este un subspaţiu invariant la T.

Fie acum $\lambda \in \complement \overline{M \cap \sigma(T)}$ şi V_λ o vecinătate închisă în $\mathbf{C}_\infty$ a lui λ, cu $V_\lambda \cap \overline{M \cap \sigma(T)} = \emptyset$. Pentru orice $\mu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}$ vom defini aplicaţiile $A_\mu : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Y}$ prin egalitatea :

$$A_\mu y = y(\mu) \qquad (y \in \mathfrak{Y})$$

care sînt liniare şi cu valori în $\mathfrak{Y}$, deoarece din propoziţia 2.3 obţinem :

$$\sigma_T(y(\mu)) = \sigma_T(y) \subseteq M.$$

Din $A_\mu y = 0$ rezultă $y = (\mu I - T)\, y(\mu) = 0$, deci aplicaţiile A_μ sînt injective.

Dacă $z \in \mathfrak{Y}$ şi $y_\mu = (\mu I - T)\, z$, atunci

$$A_\mu y_\mu = A_\mu(\mu I - T)\, z = ((\mu I - T)\, z)(\mu) = (\mu I - T)\, z(\mu) = z,$$

penultima egalitate avînd loc datorită unicităţii lui $(\mu I - T)\, z)(\alpha)$ în afara lui $\mathbf{S}_T$. Aşadar aplicaţiile A_μ sînt şi surjective. Din teorema lui Banach [15], [18] rezultă $A_\mu \in B(\mathfrak{Y})$ căci pe de altă parte avem :

$$(\mu I - T)\, A_\mu y = (\mu I - T)\, y(\mu) = y$$

şi

$$A_\mu(\mu I - T)\, y = ((\mu I - T)\, y)(\mu) = (\mu I - T)\, y(\mu) = y$$

deci

$$A = (\mu I | I - T | \mathfrak{Y})^{-1}.$$

Deoarece V_λ a fost aleasă compactă în $\mathbf{C}_\infty$, rezultă că $y(V_\lambda)$ este o mulţime mărginită în $\mathfrak{Y}$, oricare ar fi $y \in \mathfrak{Y}$. Din principiul mărginirii uniforme [15] rezultă că familia $\{A_\mu \,;\, \mu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}\}$ este egal continuă în $B(\mathfrak{Y})$, deci mărginită în $B(\mathfrak{Y})$ [25]. Urmează că $\lambda \in \rho(T|\mathfrak{Y})$ şi propoziţia e demonstrată.

Ne vom ocupa în propoziţiile care urmează şi de comportarea spaţiilor Fréchet „cît" faţă de prelungibilitatea analitică reziduală.

PROPOZIŢIA 2.7. *Fie* $T \in B(\mathfrak{X})$ şi $\mathfrak{Y}_0$ *un subspaţiu invariant la* T. *Dacă* $\widetilde{T}$ *este operatorul indus de* T *pe* $\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}_0$, *atunci avem relaţia* $\mathbf{S}_{\widetilde{T}} \subseteq \sigma(T|\mathfrak{Y}_0) \cup \mathbf{S}_T$.

Demonstraţie. În adevăr, dacă $\widetilde{f}(\lambda)$ e o funcţie analitică definită într-o mulţime deschisă $\omega \subseteq \rho(T|\mathfrak{I}_0) \cap \complement \mathbf{S}_T$ verificînd $(\lambda \widetilde{I} - \widetilde{T})\widetilde{f}(\lambda) \equiv \widetilde{0}$

în $\omega \cap \mathbf{C}$, atunci vom alege $f(\lambda;\lambda_0) \in \widetilde{f}(\lambda)$ analitică în vecinătatea lui $\lambda_0 \in \omega$ (a se vedea demonstrația teoremei 2.1). Să notăm $h(\lambda) = (\lambda I - T) f(\lambda;\lambda_0) \in \mathfrak{Y}_0$ și să remarcăm că avem $(\lambda I - T)\,[f(\lambda;\lambda_0) - R(\lambda, T \mid \mathfrak{Y}_0)\, h(\lambda)] \equiv 0$ și cum $\lambda_0 \in \complement\, \mathbf{S}_T$, avem $f(\lambda;\lambda_0) = R(\lambda, T \mid \mathfrak{Y}_0)\, h(\lambda) \in \mathfrak{Y}_0$.

De aici $\widetilde{f}(\lambda) \equiv 0$, deci din minimalitate $\mathbf{S}_{\widetilde{T}} \subseteq \sigma(T \mid \mathfrak{Y}_0) \cup \mathbf{S}_T$. Să facem observația simplă că dacă $\emptyset \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \mathbf{C}_\infty$, atunci $\widetilde{\mathfrak{X}}_T(M_1) \subseteq \widetilde{\mathfrak{X}}_T(M_2)$.

Propoziția 2.8. *Fie* $T \in C(\mathfrak{X})$. $M_0 \subseteq M \subseteq \mathbf{C}_\infty$, $\mathfrak{Y}_0 = \breve{\mathfrak{X}}_T(M_0)$ *și* $\mathfrak{Y} = \breve{\mathfrak{X}}_T(M)$ *cu proprietățile :*

1) $\mathfrak{Y}_0$, $\mathfrak{Y}$ *închise în* $\mathfrak{X}$.

2) $\mathfrak{Y} \subseteq D_T$.

Atunci $\mathfrak{Y}_0$ *și* $\mathfrak{Y}$ *sînt invariante la* T *și dacă* $\widetilde{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}/\mathfrak{Y}_0$ *și* $\widetilde{\mathfrak{Y}} = \{\widetilde{y} \in \widetilde{\mathfrak{X}};\, y \in \mathfrak{Y}\}$, *atunci* $\sigma(\widetilde{T} \mid \widetilde{\mathfrak{Y}}) \subseteq \overline{M}$, *unde* $\widetilde{T}\,\widetilde{x} = \widetilde{Tx}$ $(\mathfrak{D}_T \ni x \in \widetilde{x} \in \widetilde{\mathfrak{X}})$.

Demonstrație. Ideea de demonstrație este aceeași ca și pentru propoziția 2.6. Dacă $y \in \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{D}_T$, atunci pentru orice funcție f_y T-asociată lui y are loc relația $(\lambda I - T)\, T f_y(\lambda) = T_y$ și cum $T f_y(\lambda)$ este T-analitică, rezultă $\gamma_T(T y) \subseteq \gamma_T(y)$. Această relație ne asigură invarianța spațiilor $\mathfrak{Y}_0$ și $\mathfrak{Y}$, deci construcțiile din enunț sînt posibile.

Fie acum $\lambda \in \complement\, \overline{M}$ și $V_\lambda \subseteq \mathbf{C}_\infty$ o vecinătate a sa compactă, cu $V_\lambda \cap \overline{M} = \emptyset$. Pentru orice $\mu \in V_\lambda \cap_\lambda \mathbf{C}$ vom pune

$$\widetilde{A}_\mu\, \widetilde{y} = \widetilde{f_y(\lambda)} \qquad (y \in \mathfrak{Y}),$$

unde $y \in \widetilde{y}$ iar f_y e T-asociată lui y. Va rezulta ușor că $\widetilde{A}_\mu$ sînt aplicații liniare, definite pe $\widetilde{\mathfrak{Y}}$ în mod coerent. În adevăr, avem

$$\widetilde{f_{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2}(\mu)} = \alpha_1 \widetilde{f_{y_1}(\mu)} + \alpha_2 \widetilde{f_{y_2}(\mu)}$$

deoarece $(\mu I - T)\,[f_{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2}(\mu) - \alpha_1 f_{y_1}(\mu) - \alpha_2 f_{y_2}(\mu)] = 0$ oricare ar fi funcțiile T-asociate corespunzătoare lui $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$, y_1 și y_2 și deoarece, conform propoziției 2.4,

$$\gamma_T(f_{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2}(\mu) - \alpha_1 f_{y_1}(\mu) - \sigma_2 f_{y_2}(\mu)) = \gamma_T(0) = \emptyset.$$

În plus, dacă $y_1, y_2 \in \widetilde{y}$, atunci $y_2 = y_1 + z$ cu $z \in \mathfrak{Y}_0$, deci $f_z(\mu) \in \mathfrak{J}_0$ pentru orice funcție T-asociată lui z (deoarece $\gamma_T(f_z(\mu)) = \gamma_T(z) \subseteq M_0$), deci

$$\widetilde{f_{y_2}(\mu)} = \widetilde{f_{y_1+z}(\mu)} = \widetilde{f_{y_1}(\mu)} + \widetilde{f_z(\mu)} = \widetilde{f_{y_1}(\mu)}.$$

Dacă $\widetilde{A}_\mu\, \widetilde{y} = \widetilde{0}$, atunci $\widetilde{y} = (\mu \widetilde{I} - \widetilde{T})\, \widetilde{f_y(\mu)} = \widetilde{0}$, deci aplicațiile A_μ sînt injective.

Din faptul că $y \in \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{D}_T$, este ușor de văzut că

$$\widetilde{f_{(\mu I - T)y}(\mu)} = \widetilde{(\mu I - T) f_y(\mu)} = \widetilde{y}$$

deci dacă $\widetilde{y} \in \widetilde{\mathfrak{Y}}$ şi $\widetilde{z}_\mu = (\mu \widetilde{I} - \widetilde{T})\, \widetilde{y}$, atunci

$$\widetilde{A}_\mu \widetilde{z}_\mu = \widetilde{f_{(\mu I - T) y}(\mu)} = \widetilde{y}$$

deci aplicaţiile $\widetilde{A}_\mu$ sînt şi surjective.

Să remarcăm relaţiile :

$$\widetilde{A}_\mu (\mu \widetilde{I} - \widetilde{T})\, \widetilde{y} = \widetilde{f_{(\mu I - T) y}(\mu)} = \widetilde{y}$$

şi

$$(\mu \widetilde{I} - \widetilde{T})\, \widetilde{A}_\mu \widetilde{y} = (\mu \widetilde{I} - \widetilde{T})\, \widetilde{f_y(\mu)} = \widetilde{(\mu I - T) f_y(\mu)} = \widetilde{y}.$$

Aplicarea teoremei lui Banach pentru spaţii Fréchet ne conduce la concluzia $\widetilde{A}_\mu \in B(\widetilde{\mathfrak{Y}})$,] deci $\widetilde{A}_\mu = (\mu \widetilde{I} \mid \widetilde{\mathfrak{Y}} - \widetilde{T} \mid \widetilde{\mathfrak{Y}})^{-1}$.

În sfîrşit, să remarcăm că compacitatea mulţimii $V_\lambda \subseteq \mathbf{C}_\infty$ şi analiticitatea funcţiilor $\widetilde{f_y(\mu)}$ în V_λ asigură, folosind principiul mărginirii uniforme, egal continuitatea familiei

$$\{\widetilde{A}_\mu ;\, \mu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}\}$$

De aici rezultă imediat mărginirea familiei $\{\widetilde{A}_\mu ;\, \mu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}\}$ în $B(\widetilde{\mathfrak{Y}})$. În consecinţă $\lambda \in \rho(\widetilde{T} \mid \widetilde{\mathfrak{Y}})$ deci $\sigma(\widetilde{T} \mid \widetilde{\mathfrak{Y}}) \subseteq \overline{M}$.

Continuăm acest paragraf cu un rezultat care, deşi simplu, pare destul de important dacă se are în vedere o eventuală generalizare a prelungibilităţii analitice unice pentru sisteme finite de operatori.

PROPOZIȚIA 2.9. *Un operator* $T \in C(\mathfrak{X})$ *are prelungibilitate analitică unică dacă și numai dacă* $(\breve{\mathfrak{X}}_T)(\varnothing) = \{0\}$.

Demonstraţie. Fie mai întîi $T \in C(\mathfrak{X})$ cu $\breve{\mathfrak{X}}_T(\varnothing) = \{0\}$. Dacă $f_0(\lambda)$ e o funcţie analitică cu valori în $\mathfrak{D}_T$, care verifică $(\lambda I - T) f_0(\lambda) \equiv 0$ într-o mulţime deschisă, atunci $\gamma_T(f_0(\lambda)) = \gamma_T(0) = \varnothing$, deci $f(\lambda) \equiv 0$.

Invers, fie T cu prelungibilitate analitică unică și $x \in \breve{\mathfrak{X}}_T(\varnothing)$. Vom arăta că există o funcţie $x(\lambda)$ analitică în întreg planul complex astfel ca $(\lambda I - T)\, x(\lambda) = x$. În adevăr, dacă $f_x^1(\lambda)$, $f_x^2(\lambda)$ sînt T-asociate lui x, atunci $(\lambda I - T)\,[f_x^1(\lambda) - f_x^2(\lambda)] \equiv 0$ și din prelungibilitatea analitică unică rezultă $f_x^1(\lambda) = f_x^2(\lambda)$, deci $x(\lambda)$ se poate defini univoc în tot planul complex, datorită condiţiei $\gamma_T(x) = \varnothing$.

Vom arăta că $x(\infty) = 0$. În adevăr, dacă $\lambda_n \to \infty$, atunci $x_n = \dfrac{x(\lambda_n)}{\lambda_n} \to 0$ (căci $x(\lambda)$ este analitică la infinit !) și $T x_n = x(\lambda_n) - \dfrac{x}{\lambda_n}$ tinde către $x(\infty)$. Cum T este închis avem neapărat $x(\infty) = 0$.

Așadar $x(\lambda)$ e analitică în tot planul complex și nulă la infinit. Conform teoremei lui Liouville ea este nulă peste tot. De aici rezultă ușor că $x = 0$.

TEOREMA 2.1. *Fie* $T \in B(\mathfrak{X})$, $M_0 = \overline{M}_0 \subseteq \mathbf{C}_\infty$ *Să presupunem că* $M_0 \supseteq \mathbf{S}_T$ *și că* $\mathfrak{Y}_0 = \mathfrak{X}_T(M_0)$ *este închis. Fie* $\widetilde{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}/\mathfrak{Y}_0$ *și* $\widetilde{T}$ *operatorul indus de* T *pe* $\widetilde{\mathfrak{X}}$ *prin relaţia* $\widetilde{T}\widetilde{x} = \widetilde{Tx}$ $(\mathfrak{X} \ni x \in \widetilde{x} \in \widetilde{\mathfrak{X}})$. Atunci

$$\widetilde{\mathfrak{X}}_{\widetilde{T}}(M_0) = \{\widetilde{0}\}.$$

Demonstrație. Fie $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathfrak{X}}_{\widetilde{T}}(M_0)$ și $\lambda_0 \in \complement M_0 \cap \mathbf{C}$.

Din propozițiile 2.6 și 2.7 rezultă că avem $S_{\widetilde{T}} \subseteq \sigma(T \mid \mathfrak{Y}) \cup M_0 \subseteq M_0$, prin urmare în vecinătatea lui λ_0 există $\widetilde{x}(\lambda)$. Vom scrie atunci, într-o vecinătate (eventual mai mică) a lui λ_0, dezvoltarea

$$\widetilde{x}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{a}_k (\lambda - \lambda_0)^k \qquad (\widetilde{a}_k \in \widetilde{\mathfrak{X}})$$

și deci există un $L > 0$ astfel încît oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$ există $N(n)$ natural și avem

$$|\widetilde{a}_k|_n \leqq L^k \qquad \text{pentru } k \geqq N(n).$$

Vom construi o funcție $f(\lambda) \in \mathfrak{X}$ cu proprietatea că $f(\lambda) \in \widetilde{x}(\lambda)$ pentru λ aflat într-o vecinătate a lui λ_0, $f(\lambda)$ fiind analitică. Pentru aceasta, n fiind fixat, dacă $N(n) \leqq k < N(n+1)$ vom alege elementele $a_k \in \widetilde{a}_k$ verificînd

$$|a_k|_{N(n)} \leqq (L+1)^k,$$

ceea ce e posibil datorită relației de mai sus și a modului de definire a topologiei pe spațiul cît. Fără a micșora generalitatea, se poate presupune șirul de seminorme crescător și $N(n) \geqq n$ pentru orice n. Vom arăta în aceste condiții că seria

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (\lambda - \lambda_0)^k$$

definește o funcție analitică cu valori în $(\mathfrak{X})$.

În adevăr, n fiind fixat, avem :

$$\Big| \sum_{k \geqq N(n)} a_k (\lambda - \lambda_0)^k \Big|_n \leqq \sum_{k \geqq N(n)} |a_k|_n |\lambda - \lambda_0|^k =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=N(n+p)}^{N(n+p+1)-1} |a_k|_n |\lambda - \lambda_0|^k \leqq \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=N(n+p)}^{N(n+p+1)-1} |a_k|_{N(n+p} |\lambda - \lambda_0|^k \leqq$$

$$\leqq \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=N(n+p)}^{N(n+p+1)-1} (L+1)^k |\lambda - \lambda_0|^k = \sum_{k \geqq N(n)} (L+1)^k |\lambda - \lambda_0|^k$$

și ultima expresie tinde la zero cînd $k \to \infty$, dacă $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{L+1}$.

Așadar $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\lambda - \lambda_0)^k$ definește o funcție analitică în vecinătatea lui λ_0. Alegem acum $x \in \widetilde{\mathfrak{X}}$ și cum $T \in B(\mathfrak{X})$, rezultă că funcția $h(\lambda) = (\lambda I - T) f(\lambda) - x$ e analitică în vecinătatea lui λ_0. În plus, $\widetilde{h(\lambda)} =$

$= \widetilde{(\lambda I - T) f(\lambda)} - \tilde{x} = \tilde{0}$, deci $h(\lambda) \in \mathfrak{Y}_0$, pentru orice λ. Atunci, din relaţia $\sigma(T \mid (\mathfrak{Y}_0) \subseteq M_0$, rezultă analiticitatea aplicaţiei $k(\lambda) = R(\lambda; T \mid \mathfrak{Y}_0)$ $h(\lambda)$ într-o vecinătate a lui λ_0. Aşadar $x = (\lambda I - T)[f(\lambda) - k(\lambda)]$ şi cum $\lambda_0 \in \complement\, S_T$, avem neapărat $\lambda_0 \in \rho_T(x)$.

Un raţionament corespunzător dar asemănător se face dacă $\lambda_0 = \infty \in \complement M_0$ şi se obţine aceeaşi concluzie. În definitiv, conchidem că $\sigma_T(x) \subseteq M_0$, deci că $x \in (\mathfrak{X}_T)(M_0)$. Aşadar $\tilde{x} = 0$ şi cum a fost ales arbitrar în $\tilde{\mathfrak{X}}_{\tilde{T}}(M_0)$, rezultă afirmaţia din enunţ.

COROLARUL 1. *Dacă pentru* $T \in B(\mathfrak{X})$ *spaţiul* $\mathfrak{Y}_0 = \mathfrak{X}_T(S_T)$ *este închis, atunci operatorul* $\tilde{T}$ *indus de* T *pe* $\tilde{\mathfrak{X}} = {}^{\mathfrak{X}}/\mathfrak{Y}_0$ *are prelungibilitate analitică unică.*

În adevăr, $\tilde{\tilde{\mathfrak{X}}}_{\tilde{T}}(\varnothing) \subseteq \tilde{\mathfrak{X}}_{\tilde{T}}(S_T) = \{\tilde{0}\}$ şi aplicarea propoziţiei 2.9 ne conduce la concluzie.

Vom încheia acest paragraf cu un rezultat care reliefează legătura între spectrul global al operatorului şi spectrele locale.

PROPOZIŢIA 2.10. *Pentru orice* $T \in C(\mathfrak{X})$ *au loc egalităţile*

$$\sigma(T) = \overline{\bigcup_{x \in \mathfrak{X}} \sigma_T(x)} = S_T \cup \overline{\bigcup_{x \in \mathfrak{X}} \gamma_T(x)}.$$

Demonstraţie. Relaţiile :

$$\overline{\bigcup_{x \in \mathfrak{X}} \sigma_T(x)} = S_T \cup \overline{\bigcup_{x \in \mathfrak{X}} \gamma_T(x)} \subseteq \sigma(T)$$

au loc în mod evident.

Fie acum $\lambda \in \sigma(T)$. Dacă $\lambda \in \complement \overline{\bigcup_{x \in \mathfrak{X}} \sigma_T(x)}$, ar exista o întreagă vecinătate V_λ conţinută în această mulţime şi la fel ca în propoziţia 2.6, punem $A_\mu x = x(\mu)$, unde $\mu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}$, $x \in \mathfrak{X}$. Se demonstrează exact ca în propoziţia amintită că $A_\mu = (\mu I - T)^{-1}$ şi că $\lambda \in \rho(T)$, ceea ce e absurd. Aşadar trebuie să avem egalitate şi propoziţia e demonstrată.

3. SPAŢIILE MAXIMAL INVARIANTE ALE UNUI OPERATOR ÎNCHIS

În acest paragraf vom introduce noţiunea de spaţiu maximal invariant al unui operator închis, entitate care reprezintă corespondentul natural al noţiunii de spaţiu maximal spectral din teoria operatorilor decompozabili [17] [12]. Am preferat această denumire şi o definiţie echivalentă datorită faptului că această manieră ni s-a părut mai constructivă.

DEFINIŢIA 3.1. Un subspaţiu închis $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$ se numeşte *T-absorbant* dacă pentru orice $x_0 \in \mathfrak{Y}$ şi $\lambda_0 \in \sigma(T \mid \mathfrak{Y})$ ecuaţia $(\lambda_0 I - T) y_0 = x_0$ are soluţii y_0 numai în $\mathfrak{Y}$.

Vom nota în cele ce urmează cu $\mathcal{J}_T$ familia subspaţiilor invariante ale lui T (definiţia 2.5). Dacă F e o mulţime închisă în $\mathbf{C}_\infty$ vom pune

$$\mathcal{J}_{T,F} = \{\mathfrak{Y} \in \mathcal{J}_T;\ \sigma(T \mid \mathfrak{Y}) \subseteq F\}.$$

Continuitatea operatorului $T|\mathfrak{Y}$ pentru fiecare $\mathfrak{Y}\in\mathcal{J}_T$ ne permite să afirmăm că pentru orice indice n există cel puţin un indice m şi un număr pozitiv M astfel ca

$$|T_y|_n \leq M|y|_m .$$

Vom nota cu $m(n, \mathfrak{Y})$ şi $M(n, \mathfrak{Y})$ numerele minimale cu această proprietate. Analog, pentru $\lambda\in\complement F$ şi $\mathfrak{Y}\in\mathcal{J}_{T,F}$, vom pune $m(n, \lambda, \mathfrak{Y})$ şi $M(n, \lambda; \mathfrak{Y})$, numerele care se obţin pentru operatorii $R(\lambda;\ T|\mathfrak{Y})$. $(\lambda\neq\infty)$.

DEFINIŢIA 3.2. Familia $\mathcal{J}_{T,F}$ se numeşte F-majorată ($F\subseteq\mathbf{C}_\infty$ închisă) dacă

1)
$$\begin{cases}\sup\limits_{\mathfrak{Y}\in\mathcal{J}_{T,F}} m(n, \mathfrak{Y}) = m_F(n) < \infty\\ \sup\limits_{\mathfrak{Y}\in\mathcal{J}_{T,F}} M(n, \mathfrak{Y}) = M_F(n) < \infty,\end{cases}$$

2)
$$\begin{cases}\sup\limits_{\mathfrak{Y}\in\mathcal{J}_{T,F}} m(n, \lambda, \mathfrak{Y}) = m_F(n, \lambda) < \infty\ (\lambda\in\complement F\cap\mathbf{C})\\ \sup\limits_{\mathfrak{Y}\in\mathcal{J}_{T,F}} M(n)\,\lambda\,\mathfrak{Y} = M_F(n, \lambda) < \infty\ (\lambda\in\complement F\cap\mathbf{C}).\end{cases}$$

3) Pentru orice $\lambda\in\complement F$ există o vecinătate V_λ astfel încît

$$\sup_{\substack{\mathfrak{Y}\in\mathcal{J}_{T,F}\\ \mu\in V_\lambda\cap\mathbf{C}}} |R(\mu, T|\mathfrak{Y})|_{n,\mathfrak{B}\cap\mathfrak{Y}} < \infty$$

oricare ar fi mulţimea mărginită $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{X}$.

Vom presupune familia $\mathcal{J}_T$ ordonată după relaţia de incluziune şi în sensul acestei relaţii de ordine vom putea considera submulţimi filtrante ale lui $\mathcal{J}_T$.

PROPOZIŢIA 3.1. *Fie* $F\subseteq\mathbf{C}_\infty$ *o mulţime închisă şi* $T\in C(\mathfrak{X})$. *Familia* $\mathcal{J}_{T,F}$ *filtrantă este* F*-majorată dacă şi numai dacă posedă o margine superioară.*

Demonstraţie. Să presupunem mai întîi că $\mathcal{J}_{T,F}$ posedă o margine superioară $\mathfrak{X}_{T,F}$. Deoarece orice $\mathfrak{Y}\in\mathcal{J}_{T,F}$ verifică $\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}_{T,F}$, notînd cu $m_F(n)$ şi $M_F(n)$ cele mai mici numere pentru care e satisfăcută relaţia de continuitate :

$$|Ty|_n \leq M_F(n)\,|y|_{m_F(n)} \qquad (y\in\mathfrak{X}_{T,F})$$

vem evident $m(n, \mathfrak{Y}) \leq m_F(n)$, $M(n, \mathfrak{Y}) \leq M_F(n)$ dacă $m(n, \mathfrak{Y})$ şi $M(n, \mathfrak{Y})$ înt cele mai mici numere pentru care

$$|Ty|_n \leq M(n, \mathfrak{Y})\,|y|_{m(n,\mathfrak{Y})} \qquad (y\in\mathfrak{Y}),$$

deci condiţiile 1) sînt satisfăcute.

Fie acum $\lambda \in \complement F \cap \mathbf{C}$. Din relaţia evidentă :

$$R(\lambda, T \mid \mathfrak{Y}) = R(\lambda, T \mid \mathfrak{X}_{T,F}) \mid \mathfrak{Y}$$

valabilă pentru orice $\mathfrak{Y} \in \mathcal{J}_{T,F}$, rezultă, ca mai sus, relaţiile 2). În sfîrşit, pentru orice $\lambda \in \complement F \subseteq \rho(T \mid \mathfrak{X}_{T,F})$ există o vecinătate V_λ astfel încît $\{R(\mu ; T \mid \mathfrak{X}_{T,F}) ; \mu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}\}$ e mărginită în $B(\mathfrak{X}_{T,F})$. Prin urmare, oricare ar fi mulţimea mărginită $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{X}$, avem pentru $\mathfrak{Y} \in \mathcal{J}_{T,F}$:

$$| R(\mu, T \mid \mathfrak{Y}) |_{n, \mathfrak{B} \cap \mathfrak{Y}} \leqq | R(\mu, T \mid \mathfrak{X}_{T,F}) |_{n, \mathfrak{B} \cap \mathfrak{X}_{T.F}} \leqq$$

$$\leqq \sup_{\lambda \in V_\lambda \cap \mathbf{C}} | R(\mu ; T \mid \mathfrak{X}_{T,F}) |_{n, \mathfrak{B} \cap \mathfrak{X}_{T.F}} < \infty,$$

deci şi relaţia 3) e îndeplinită. Faptul că $\mathcal{J}_{T,F}$ e filtrantă e trivial.

Invers, să presupunem că familia $\mathcal{J}_{T,F}$ e filtrantă şi F-majorată şi să punem

$$\mathfrak{X}_{T,F} = c.l.m. \{\mathfrak{Y} ; \mathfrak{Y} \in \mathcal{J}_{T,F}\}$$

(notaţia *c.l.m.* $\{\ldots\}$ înseamnă „varietatea liniară închisă generată de ...“ !).

Vom arăta că $\mathfrak{X}_{T,F} \in \mathcal{J}_{T,F}$, faptul că e margine superioară fiind atunci evident. Orice $y \in \mathfrak{X}_{T,F}$ are forma

$$y = \lim_p \sum_{j \in \sigma_p} y_j$$

unde σ_p e o familie finită de indici desemnînd elemente din $\mathcal{J}_{T,F}$. Deoarece familia $\mathcal{J}_{T,F}$ e filtrantă, se vede uşor că

$$\Big| \sum_{j \in \sigma_p} Ty_j - \sum_{j \in \sigma_q} Ty_j \Big|_n \leqq M_F(n) \Big| \sum_{j \in \sigma_p} y_j - \sum_{j \in \sigma_q} y_j \Big|_{m_F(n)}$$

şi cum T e închis, rezultă pentru orice $y \in \mathfrak{X}_{T,F}$

$$Ty = \lim_p \sum_{j \in \sigma_p} Ty_j .$$

Avem deci $T\mathfrak{X}_{T,F} \subseteq \mathfrak{X}_{T,F}$ şi din teorema graficului închis $T \mid \mathfrak{X}_{T,F} \in B(\mathfrak{X}_{T,F})$.

Ne rămîne să arătăm că $\sigma(T \mid \mathfrak{X}_{T,F}) \subseteq F$. Pentru aceasta fie $\lambda \in \complement F \cap \mathbf{C}$ şi operatorul

$$B_\lambda y = \lim_p \sum_{j \in \sigma_p} R(\lambda, T) y_j \qquad (y \in \mathfrak{X}_{T,F})$$

(abuzul de notaţie are sens precis !). Coerenţa definiţiei rezultă din formula :

$$\Big| \sum_{j \in \sigma_p} R(\lambda, T) y_j - \sum_{j \in \sigma_q} R(\lambda, T) y_j \Big|_n \leqq$$

$$\leqq M_F(n, \lambda) \Big| \sum_{j \in \sigma_p} y_j - \sum_{j \in \sigma_q} y_j \Big|_{m_F(n, \lambda)},$$

care ne dă, ca mai sus, $B_\lambda \in B(\mathfrak{X}_{T,F})$. În plus, să remarcăm că pentru $y \in \mathfrak{X}_{T,F}$ avem :

$$(\lambda I - T) B_\lambda y = B_\lambda (\lambda I - T) y = \lim_p \sum_{j \in \sigma_p} y_j = y,$$

deci

$$B_\lambda = (\lambda I | \mathfrak{X}_{T,F} - T | \mathfrak{X}_{T,F})^{-1}.$$

În sfîrșit, dacă $\lambda \in \complement F$, atunci există o vecinătate V_λ astfel încît :

$$\sup_{\substack{\mathfrak{Y} \in \mathcal{J}_{T,F} \\ \mu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}}} | R(\mu, T | \mathfrak{Y}) |_{n, \mathfrak{B} \cap \mathfrak{Y}} < \infty,$$

pentru orice $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{X}$ mărginită. Vom arăta că familia $\{R(\mu, T | \mathfrak{X}_{T,F})\}_{\mu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}}$ este punctual mărginită. În adevăr, dacă $y \in \mathfrak{X}_{T,F}$, există un șir $z_p \in \mathfrak{Y}_p$, $z_p \to y$ în topologia lui $\mathfrak{X}$, deci

$$\sup_{\mu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}} | R(\mu, T | \mathfrak{X}_{T,F}) y |_n = \sup_{\mu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}} \lim_p | R(\mu, T | \mathfrak{Y}_p) z_p |_n \leqq$$

$$\leqq \sup_p \sup_{\mu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}} | R(\mu, T | \mathfrak{Y}_p) |_{n, \{z_p\}} \leqq \sup_{\substack{\mathfrak{Y} \in \mathcal{J}_{T,F} \\ \mu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}}} | R(\mu, T | \mathfrak{Y}) |_{n, \mathfrak{B}(y) \cap \mathfrak{Y}} < \infty,$$

unde $\mathfrak{B}(y) = \{z_p\}_p \subseteq \mathfrak{X}$ este o mulțime evident mărginită. Aplicarea principiului mărginirii uniforme ne conduce la concluzia mărginirii familiei $\{R(\mu, T | \mathfrak{X}_{T,F})\}_{\mu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}}$ în $B(\mathfrak{X})$, deci se poate afirma că $\lambda \in \rho(T | \mathfrak{X}_{T,F})$, deci $\sigma(T | \mathfrak{X}_{T,F}) \subseteq F$ și $\mathcal{J}_{T,F}$ posedă o margine superioară.

Observație. Condițiile din definiția 2.3 care par destul de greoaie, sînt incomparabil mai simplu de exprimat dacă $\mathfrak{X}$ este spațiu Banach :

1) $$\sup_{\mathfrak{Y} \in \mathcal{J}_{T,F}} \| T | \mathfrak{Y} \| < \infty.$$

2) $$\sup_{\mathfrak{Y} \in \mathcal{J}_{T,F}} \| R(\lambda, T | \mathfrak{Y}) \| < \infty, \qquad (\lambda \in \complement F \cap \mathbf{C}).$$

DEFINIȚIA 3.3. Ori de cîte ori familia $\mathfrak{J}_{T,F}$ e filtrantă și F-majorată, vom numi *spațiu maximal invariant al lui* T (pe F) elementul său maximal $\mathfrak{X}_{T,F}$ (dat de propoziția precedentă).

PROPOZIȚIA 3.2. *Un subspațiu închis* $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$ *este invariant maximal al lui* $T \in C(\mathfrak{X})$ *dacă și numai dacă pentru orice subspațiu invariant* $\mathfrak{Z}$ *relația* $\sigma(T | \mathfrak{Z}) \subseteq \sigma(T | \mathfrak{Y})$ *implică* $\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{Y}$.

Demonstrație. Fie $\mathfrak{Y}$ un spațiu maximal invariant al lui T, deci $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_{T,F}$ pentru $F \subseteq \mathbf{C}_\infty$ închisă. Dacă $\mathfrak{Z}$ e invariant și $\sigma(T | \mathfrak{Z}) \subseteq \sigma(T | \mathfrak{Y}) \subseteq$ $\subseteq F$ atunci $\mathfrak{Z} \in \mathcal{J}_{T,F}$, deci $\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{Z}_{T,F}$.

Invers, dacă $\mathfrak{Y}$ are proprietatea enunțată, vom pune $F = \sigma(T | \mathfrak{Y})$. Atunci, evident, familia $\mathcal{J}_{T,F}$ îl are pe $\mathfrak{Y}$ ca element maximal.

Această propoziție arată că în cazul operatorilor mărginiți pe spații Banach, noțiunea de spațiu maximal invariant coincide cu noțiunea de spațiu maximal spectral [17].

PROPOZIŢIA 3.3. *Dacă $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$ un spaţiu maximal invariant al lui $T \in C(\mathfrak{X})$, atunci $\mathfrak{Y}$ este T-absorbant.*

Demonstraţie. Fie $\lambda_0 \in \sigma(T \mid \mathfrak{Y})$, $x_0 \in \mathfrak{Y}$ şi $y_0 \notin \mathfrak{Y}$ cu $(\lambda_0 I - T) y_0 = x_0$ şi vom arăta că se ajunge la o contradicţie. În adevăr, să definim subspaţiul

$$\mathfrak{Y}[y_0] = \{x + \alpha y_0 ;\quad x \in \mathfrak{Y},\quad \alpha \in \mathbf{C}\}.$$

care este evident închis în $\mathfrak{X}$. Cum $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{D}_T$ şi e invariant, avem

$$T(x + \alpha y_0) = Tx - \alpha x_0 + \alpha \lambda_0 y_0 \in \mathfrak{Y}[y_0],$$

deci

$$T\mathfrak{Y}[y_0] \subseteq \mathfrak{Y}[y_0]$$

şi cum T e închis

$$T \mid \mathfrak{Y}[y_0] \in B\mathfrak{Y}[y_0]).$$

Vom arăta că $\sigma(T \mid \mathfrak{Y}[y_0]) \subseteq \sigma(T \mid \mathfrak{Y})$. În adevăr, fie $\mu \in \rho(T \mid \mathfrak{Y}) \cap \mathbf{C}$. Atunci operatorul $\mu I - T$ e injectiv pe $\mathfrak{Y}[y_0]$, căci $(\mu I - T)(x + \alpha y_0) = \mu x - Tx + \alpha x_0 + \alpha(\mu - \lambda_0) y_0 = 0$ şi din unicitatea reprezentării, cum $\mu \neq \lambda_0$, rezultă $\alpha = 0$, deci $\mu x = Tx$, deci $x = 0$. Operatorul $\mu I - T$ e surjectiv pe $\mathfrak{Y}[y_0]$ căci dacă $x_1 + \alpha_1 y_0 \in \mathfrak{Y}[y_0]$, atunci ecuaţia

$$x_1 + \alpha_1 y_0 = \mu x - Tx + \alpha x_0 + \alpha(\mu - \lambda_0) y_0$$

are soluţia

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\alpha_1}{\mu - \lambda_0} \\ x = R(\mu ; T \mid \mathfrak{Y}) \left[x_1 - \dfrac{\alpha_1}{\mu - \lambda_0} x_0 \right]. \end{cases}$$

Din teorema lui Banach rezultă $R(\mu ; T \mid \mathfrak{Y}[y_0]) \in B(\mathfrak{Y}[y_0])$. Fie acum $\lambda \in \rho(T \mid \mathfrak{Y})$ şi V_λ vecinătatea lui λ pentru care $\{R(\mu ; T \mid \mathfrak{Y}) ;\ \mu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}\}$ e mărginită în $B(\mathfrak{Y})$. Fie $z \in \mathfrak{Y}[y_0]$ un punct arbitrar, $z = x + \alpha y_0$. Atunci avem :

$$\sup_{\mu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}} |R(\mu, T \mid \mathfrak{Y}[y_0] z|_n =$$

$$= \sup_{\mu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}} \left| R(\mu, T \mid \mathfrak{Y}) \left[x - \frac{\alpha}{\mu - \lambda_0} x_0 \right] + \frac{\alpha}{\mu - \lambda_0} y_0 \right|_n \leqq$$

$$\leqq \sup_{\mu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}} |R(\mu, T \mid \mathfrak{Y}) x|_n + \sup_{\mu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}} \left| \frac{\alpha}{\mu - \lambda_0} \right| |R(\mu, T \mid \mathfrak{Y}) x_0|_n +$$

$$+ \sup_{\mu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}} \left| \frac{\alpha}{\mu - \lambda_0} \right| |y_0|_n < \infty.$$

deci familia e punctual mărginită, deci mărginită, ceea ce ne arată că

$$\lambda \in \rho(T \mid \mathcal{Y}[y_0]).$$

Aşadar avem $\sigma(T \mid \mathcal{Y}[y_0]) \subseteq \sigma(T \mid \mathcal{Y})$, deci $\mathcal{Y}$ fiind maximal invariant, $(\mathcal{Y}[y_0] \subseteq \mathcal{Y}$, ceea ce nu e posibil căci $y_0 \notin \mathcal{Y}$. Contradicţia obţinută demonstrează complet propoziţia.

COROLARUL 1. *Fie* $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ *un spaţiu invariant maximal al lui* $T \in C(\mathcal{X})$ *și* $f : \omega \to \mathcal{D}_T$, $f(\lambda) \not\equiv 0$ *în* ω, *o funcţie analitică verificînd* $(\lambda I - T) f(\lambda) \equiv 0$ $(\lambda \in \omega \cap \mathbf{C})$. *Dacă* ω *este conexă și* $\omega \cap \sigma(T \mid \mathcal{Y})$ *are un punct interior, atunci* $\omega \subseteq \sigma(T \mid \mathcal{Y})$.

În adevăr, dacă $\omega \cap \sigma(T \mid \mathcal{Y})$ conţine un disc D, atunci, conform propoziţiei precedente, $f(\lambda) \in \mathcal{Y}$ împreună cu toate derivatele sale, pentru $\lambda \in D$. Cum ω e conexă, rezultă prin prelungire analitică faptul că $f(\lambda) \in \mathcal{Y}$ împreună cu toate derivatele sale pentru orice $\lambda \in \omega$. Cum f e evident T-analitică, avem :

$$Tf^{(k+1)}(\lambda) = \lambda f^{(k+1)}(\lambda) + (k+1) f^{(k)}(\lambda)$$

şi cum $f(\lambda) \not\equiv 0$ în ω, pentru orice $\lambda_0 \in \omega$ există un n_0 astfel ca $Tf^{(n_0)}(\lambda_0) = \lambda_0 f^{(n_0)}(\lambda_0)$ cu $f^{n_0}(\lambda_0) \neq 0$, deci $\lambda_0 \in \sigma(T \mid \mathcal{Y})$.

COROLARUL 2. *Dacă* $\mathcal{Y}$ *este un spaţiu invariant maximal al lui* $T \in C(\mathcal{X})$, *atunci* $\sigma(T \mid \mathcal{Y}) \subseteq \sigma(T)$.

În adevăr, dacă $\mu \in \rho(T) \cap \mathbf{C}$, atunci pentru orice $x \in \mathcal{Y}$ elementul $y = R(\mu, T)\, x$ e o soluţie a ecuaţiei $(\mu I - T) y = x$, deci $R(\mu, T) \mid \mathcal{Y} = R(\mu, T \mid \mathcal{Y})$. Fie acum $\lambda \in \rho(T)$ şi $V_\lambda \subseteq \mathbf{C}_\infty$ vecinătatea sa din definiţia spectrului. Dacă $y \in \mathcal{Y}$ e un element arbitrar, avem atunci :

$$\sup_{\mu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}} |R(\mu, T) \mid \mathcal{Y})\, y|_n \leqq \sup_{\mu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}} |R(\mu, T)\, y|_n < \infty$$

şi familia $\{R(\mu, T)\, y\}$ e mărginită pentru $\mu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}$, deci $\lambda \in \rho(T) \mathcal{Y})$ şi afirmaţia e dovedită.

COROLARUL 3. *Dacă* $\mathcal{Y}_1$ *şi* $\mathcal{Y}_2$ *sînt două spaţii maximal invariante ale lui* $T \in C(\mathcal{X})$ *cu* $\mathcal{Y}_1 \subseteq \mathcal{Y}_2$, *atunci* $\sigma(T \mid \mathcal{Y}_1) \subseteq \sigma(T \mid \mathcal{Y}_2)$.

Demonstraţia acestui rezultat se face asemănător cu demonstraţia rezultatului precedent şi de aceea o vom omite.

PROPOZIŢIA 3.4. *Fie* $T \in C(\mathcal{X})$ *şi* $\{\mathcal{X}_{T, F_\alpha}\}$ *o familie de spaţii maximal invariante ale lui* T. *Dacă familia de mulţimi* $\{F_\alpha\}$ *este filtrantă la stînga faţă de relaţia de incluziune și dacă* $F = \bigcap_\alpha F_\alpha$, *atunci există spaţiul maximal invariant* $\mathcal{X}_{T,F}$ *și are loc egalitatea* $\mathcal{X}_{T,F} = \bigcap_\alpha \mathcal{X}_{T, F_\alpha}$.

Demonstraţie. Să punem $\mathcal{Y} = \bigcap_\alpha \mathcal{X}_{T, F_\alpha}$. Evident, $\mathcal{Y}$ e un subspaţiu invariant pentru T. Vom arăta că $\sigma\ (T \mid \mathcal{Y}) \subseteq F$. Pentru aceasta fie $\mu \in \complement F \cap \mathbf{C}$. Operatorul $(\mu I - T) \mid \mathcal{Y}$ e injectiv căci dacă $(\mu I - T)\, x_0 = 0$, există un indice β astfel ca $\mu \notin F_\beta$ şi cum $\sigma(T \mid \mathcal{X}_{T, F_\beta}) \subseteq F_\beta$, rezultă $x_0 = 0$. Operatorul $(\mu I - T) \mid \mathcal{Y}$ este şi surjectiv căci dacă $y_0 \in \mathcal{Y}$, atunci pentru un indice β cu $\mu \notin F_\beta$ avem $z_0 = R(\mu, T)\, y_0 \in \mathcal{X}_{T, F_\beta}$. Pe de altă parte să remarcăm egalitatea $\mathcal{Y} = \bigcap_{\substack{\beta \\ \mu \notin F_\beta}} \mathcal{X}_{T, F_\beta}$.

În adevăr, dacă $z \in \bigcap\limits_{\substack{\beta \\ \mu \notin F_\beta}} \mathfrak{X}_{T, F_\beta}$ şi dacă există α astfel ca $z \notin \mathfrak{X}_{T, F_\alpha}$, atunci pentru $\{F_\alpha, F_\beta\}$ există F_γ astfel ca $F_\gamma \subseteq F_\alpha \cap F_\beta$, deci $F_\gamma \not\ni \mu$ şi $z \in \mathfrak{X}_{T, F_\gamma}$. Pe de altă parte, $\mathfrak{X}_{T, F_\gamma} \subseteq \mathfrak{X}_{T, F_\alpha}$ ceea ce e absurd. Aşadar avem egalitate şi $(\mu I - T) | \mathfrak{Y}$ e surjectiv. Din teorema lui Banach rezultă $R(\mu, T | \mathfrak{Y}) \in B(\mathfrak{Y})$. Acum, dacă $\lambda \in \complement F$, există o vecinătate a sa W_λ astfel ca $W_\lambda \cap F_{\alpha_0} = \varnothing$ pentru un anume indice α_0. Dacă U_λ e vecinătatea lui λ din definiţia spectrului pentru $T | \mathfrak{X}_{T, F_{\alpha_0}}$, atunci luînd $V_\lambda = U_\lambda \cap W_\lambda$ şi un element $y \in \mathfrak{Y}$, avem

$$\sup_{\mu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}} |R(\mu, T | \mathfrak{Y}) y|_n \leqq \sup_{\mu \in U_\lambda \cap \mathbf{C}} |R(\mu, T | \mathfrak{X}_{T, F_{\alpha_0}}) y|_n < \infty$$

şi mărginirea punctuală e suficientă ca să avem mărginire globală, ceea ce arată că $\lambda \in \rho(T | \mathfrak{Y})$. Aşadar avem $\sigma(T | \mathfrak{Y}) \subseteq F$. În sfîrşit, dacă $\mathfrak{Z}$ e un spaţiu invariant al lui T cu $\sigma(T | \mathfrak{Z}) \subseteq F$, atunci $\mathfrak{Z} \subseteq \bigcap\limits_\alpha \mathfrak{X}_{T, F_\alpha} = \mathfrak{Y}$, deci $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_{T, F}$.

Amintim că pentru orice operator $A \in C(\mathfrak{X})$ cu $\rho(A) \neq \varnothing$ se defineşte familia $\mathcal{F}(A)$ a funcţiilor analitice în vecinătatea mulţimii $\sigma(A)$ şi că pentru orice $f \in \mathcal{F}(A)$ se pune :

$$f(A) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\Gamma f(\lambda)\ R(\lambda_1 A)\, d\lambda & \sigma(A) \not\ni \infty \\ f(\infty)\, I + \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\Gamma f(\lambda)\ R(\lambda, A)\, d\lambda & \sigma(A) \ni \infty, \end{cases}$$

unde Γ e un sistem de curbe aflat în domeniul de definiţie al lui f, ce „înconjoară" pe $\sigma(T)$, convenabil pentru calculul integral.

PROPOZIŢIA 3.5. *Fie* $T \in C(\mathfrak{X})$, $A \in B(\mathfrak{X})$, *şi* $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$ *un spaţiu maximal invariant al lui* T. Dacă $TA \supseteq AT$ *şi dacă* $TR(\mu_0, A) \supseteq R(\mu_0, A)\, T$ *pentru un anume* $\mu_0 \in \rho(A) \cap \mathbf{C}$, *atunci oricare ar fi* $f \in \mathcal{F}(A)$ *are loc relaţia* $f(A) \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Y}$.

Demonstraţie. Să remarcăm în prealabil că avem relaţia : $TR(\mu, A) \supseteq R(\mu, A)\, T$ pentru orice $\mu \in \rho(A) \cap \mathbf{C}$. În adevăr, avem relaţia $R(\mu, A) = (\mu - \mu_0)^{-1} [R(\mu_0, A) - (\mu_0 - \mu)^{-1} I]^{-1} R(\mu_0, A)$, căci $(\mu_0 - \mu)^{-1} \in \rho(R(\mu_0, A))$, de unde $R(\mu, A)\, Tx = TR(\mu, A)\, x$ pentru orice $x \in \mathfrak{D}_T$ căci din condiţiile noastre rezultă uşor $[R(\mu_0, A) - (\mu_0 - \mu)^{-1} I]^{-1} \mathfrak{D}_T = \mathfrak{D}_T$ Fie acum $\mu \in \rho(A) \cap \mathbf{C}$ arbitrar şi să notăm $\mathfrak{Y}_\mu = R(\mu, A) \mathfrak{Y}$. Remarcăm că $\mathfrak{Y}_\mu$ e un subspaţiu închis al lui $\mathfrak{X}$. Dacă $y \in \mathfrak{Y}_\mu$, atunci $y = R(\mu, A)\, x$ cu $x \in \mathfrak{Y}$, deci $y \in \mathfrak{D}_T$ şi $Ty = TR(\mu, A)\, x = R(\mu, A)\, Tx \in \mathfrak{Y}_\mu$. Avem deci $T \mathfrak{Y}_\mu \subseteq \mathfrak{Y}_\mu$ şi $T | \mathfrak{Y}_\mu \in B(\mathfrak{Y}_\mu)$. Relaţia $Ty = R(\mu, A)\, T(\mu I - A)\, y$ ne arată că $T | \mathfrak{Y}_\mu = [R(\mu; A | \mathfrak{Y}|\ [T | \mathfrak{Y}]\, [(\mu I - A) | \mathfrak{Y}_\mu]$. De aici se deduce că dacă $\nu \in \rho(T | \mathfrak{Y}) \cap \mathbf{C}$, atunci

$$R(\nu; T | \mathfrak{Y}_\mu) = [R(\mu; A) | \mathfrak{Y}]\, [R(\nu, T | \mathfrak{Y}]\, [(\mu I - A) | \mathfrak{Y}_\mu].$$

Fie $\lambda \in \rho(T \mid \mathfrak{Y})$, V_λ vecinătatea din definiția spectrului și $y \in \mathfrak{Y}_\mu$ un element arbitrar. Atunci :

$$\sup_{\nu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}} |R(\nu, T \mid \mathfrak{Y}_\mu)\, y|_n =$$

$$= \sup_{\nu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}} |[R(\mu, A) \mid \mathfrak{Y}]\, R(\nu, T \mid \mathfrak{Y})(\mu I \mid \mathfrak{Y}_\mu - A \mid \mathfrak{Y}_\mu)\, y|_n =$$

$$= \sup_{\nu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}} |[R(\mu, A) \mid \mathfrak{Y}]\; R(\nu, T \mid \mathfrak{Y})\, y_\mu|_n = |R(\mu, A)|_{n, \mathfrak{B}_\mu} < \infty,$$

unde $y_\mu = (\mu I - A)\, y$ și $\mathfrak{B}_\mu = \{R(\nu; T)\, \mathfrak{Y}\, y_\mu;\ \nu \in V_\lambda \cap \mathbf{C}\}$ iar $\mathfrak{B}_\mu$ e o mulțime mărginită din proprietățile lui V_λ. Mărginirea punctuală ne asigură că $\lambda \in \rho(T \mid \mathfrak{Y}_\mu)$, deci $\sigma(T \mid \mathfrak{Y}_\mu) \subseteq \sigma(T \mid \mathfrak{Y}$. Cum $\mathfrak{Y}$ e maximal invariant, obținem $\mathfrak{Y}_\mu \subseteq \mathfrak{Y}$, deci $R(\mu; A)\, \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Y}$. Acum, dacă $f \in \mathcal{F}(A)$ și $y \in \mathfrak{Y}$, aproximarea cu sume integrale a lui $f(A)\ y$ ne conduce la rezultatul dorit.

PROPOZIȚIA 3.6. *În condițiile propoziției* 2.6, *spațiul* $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_T(M \cup \mathbf{S}_T)\ (M = \overline{M})$ *este maximal invariant pentru* T.

Demonstrație. În adevăr, dacă $\mathfrak{Z}$ e invariant și $\sigma(T \mid \mathfrak{Z} \subseteq M \cup \mathbf{S}_T$, atunci din definiția lui $\mathfrak{X}_T(M \cup \mathbf{S}_T)$ rezultă $\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{X}_T(M \cup S_T)$. Prin urmare familia $\mathcal{J}_{T, M \cup \mathbf{S}_T}$ are ca margine superioară spațiul $\mathfrak{X}_T(M \cup \mathbf{S}_T)$.

PROPOZIȚIA 3.7. *În condițiile propoziției* 2.8, *dacă* $T \in B(\mathfrak{X})$, $M \supseteq M_0$ *sînt închise și* $\mathbf{S}_T \cup \sigma(T \mid \breve{\mathfrak{X}}_T(M_0)) \subseteq M$, *atunci spațiul* $\breve{\mathfrak{Y}} = \breve{\mathfrak{X}}_T(M) / \breve{\mathfrak{X}}_T(M_0)$ *este maximal invariant pentru* T.

Demostrație. Fie $\widetilde{\mathfrak{Z}} \subseteq \widetilde{\mathfrak{X}}$ un subspațiu invariant pentru $\widetilde{T}$ cu $\sigma(\widetilde{T} \mid \widetilde{\mathfrak{Z}} \subseteq M$. Deoarece $\mathbf{S}_{\widetilde{T}} \subseteq M$ (conform propoziției 2.7), avem $\widetilde{\mathfrak{Z}} \subseteq \widetilde{\mathfrak{X}}_{\widetilde{T}}(M)$. Procedînd ca în teorema 2.1, pentru $z \in \widetilde{z} \in \widetilde{\mathfrak{Z}}$ vom construi o funcție analitică T-asociată lui z în vecinătatea oricărui punct $\lambda_0 \in \complement M$, deci $\gamma_T(z) \subseteq M$. Așadar vom obține $\mathfrak{Z} = \{z \in \mathfrak{X};\ \widetilde{z} \in \widetilde{\mathfrak{Z}}\} \subseteq \mathfrak{X}_T(M)$, deci $\widetilde{\mathfrak{Z}} \subseteq \widetilde{\mathfrak{Y}}$, ceea ce asigură că familia $\mathcal{J}_{\widetilde{T}, M}$ posedă ca margine superioară spațiul $\widetilde{\mathfrak{Y}}$.

4. OPERATORI REZIDUAL DECOMPOZABILI

În cuprinsul acestui paragraf vom defini decompozabilitatea reziduală a unui operator închis pe un spațiu Fréchet ca o generalizare naturală a decompozabilității operatorilor mărginiți pe spații Banach [17], [12].

Definiția noastră se referă deci la o clasă cu mult mai largă decît definiția amintită. În fapt orice operator închis face parte din clasa pe care o definim însă proprietățile sînt interesante (adică netriviale !) pentru o mulțime mai restrînsă.

Fie $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{C}_\infty$ o mulțime închisă.

DEFINIȚIA 4.1. O familie de mulțimi deschise $\{G_j\}_{j=1}^n \cup \{G_\mathbf{S}\}$ formează o S-*acoperire* a mulțimii închise $\Delta \subseteq \mathbf{C}_\infty$ dacă

$$(\varkappa_1)\quad \bigcup_{j=1}^{n} G_j \cup G_\mathbf{S} \supseteq \Delta \cup \mathbf{S},$$

$$(\varkappa_2)\quad \overline{G}_j \cap \mathbf{S} = \varnothing \qquad (j = 1, \ldots n).$$

DEFINIŢIA 4.2. Un operator $T \in C\ (\mathfrak{X})$ se va numi S-*rezidual decompozabil dacă*

(δ_1) Pentru orice $F \subseteq \mathbf{C}_\infty$ închisă cu proprietatea $F \cap \mathbf{S} = \varnothing$, familia $\mathcal{J}_{T,F}$ admite o margine superioară $\mathfrak{X}_{T,F}$.

(δ_2) Pentru orice S-acoperire $\{G_j\}_{j=1}^{n}$ a lui $\sigma(T)$ există subspaţiile invariante $\{\mathfrak{X}_j\}_{j=1}^{n}$ la T cu proprietăţile :

(δ_2') $\sigma(T \mid \mathfrak{X}_j) \subseteq G_j \qquad (j = 1, \dots n)$

(δ_2'') orice $x \in \mathfrak{X}$ are o descompunere de forma

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{\mathbf{S}}$$

cu $x_j \in \mathfrak{X}_j\,(j = 1, \dots n)$ şi $\sigma_T(x_{\mathbf{S}}) \subseteq \bar{G}_{\mathbf{S}}$

O primă remarcă este aceea că se poate întotdeauna presupune $\mathbf{S} \subseteq \sigma(T)$ deoarece e uşor de văzut că orice operator S-rezidual decompozabil e şi $\mathbf{S} \cap \sigma(T)$— rezidual decompozabil şi invers.

O a doua remarcă este aceea că, datorită condiţiei (δ_1) spaţiile invariante date de (δ_2) pot fi presupuse întotdeauna maximal invariante.

LEMA 4.1. *Fie $T \in C(\mathfrak{X})$. Atunci oricare ar fi $x \in \mathfrak{X}$ cu $\gamma_T(x) \subseteq \mathbf{C}$ rezultă $x \in \mathfrak{D}_{T^k}$ pentru toţi $k \geqq 1$ şi*

$$\sup_{\lambda \in \gamma_T(x)} |\lambda| \leqq \sup_n \overline{\lim_{n \to \infty}} |T^k x|_n^{\frac{1}{k}} < \infty .$$

Demonstraţie. Incluziunea $\gamma_T(x) \subseteq \mathbf{C}$ e echivalentă cu compacitatea lui $\gamma_T(x)$ în $\mathbf{C}$. Aşadar există o funcţie T-asociată lui x, anume f_x, care în jurul punctului de la infinit se scrie

$$f_x(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{\mu^{k+1}}$$

deoarece se constată uşor că $f_x(\infty) = 0$, ca în propoziţia 2.9. Vom continua acel procedeu. Remarcăm că deoarece T este închis, putem scrie : $0 = \lim_{\lambda \to \infty} T f_x(\lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda f_x(\lambda) - x = x_0 - x$, deci $x_0 = x$. În particular, $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda f_x(\lambda) = x$ şi $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda T f_x(\lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda\,[\lambda f_y(\lambda) - x] = x_1$ aşadar $x \in \mathfrak{D}_T$ şi $Tx = x_1$. Continuînd acest procedeu, obţinem pînă la urmă $x_n \in \mathfrak{D}_T$ şi $x_{n+1} = T x_n = T^{n+1} x$, oricare ar fi $n \geqq 0$. În definitiv, vom putea scrie

$$f_x(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k x}{\mu^{k+1}}$$

Evident, seria defineşte o funcţie analitică pentru $|\mu| >$

$> \sup_n \overline{\lim_{\lambda \to \infty}} |T^k x|_n^{\frac{1}{k}} = \tau_x$, de unde $\sup_{\lambda \in \gamma_T(x)} |\lambda| \leqslant \tau_x$.

Observație. Un rezultat identic se obține pentru $x \in \mathfrak{X}$ cu $\sigma_T(x) \subseteq \mathbf{C}$ și atunci avem chiar

$$\sup_{\lambda \in \sigma_T(x)} |\lambda| = \sup_n \lim_{k \to \infty} |T^k x|_n^{1/k}$$

căci $x(\mu)$ e analitică în $\{\mu ; |\mu| > \sup_{\lambda \in \sigma_T(x)} |\lambda|\}$. Aceste rezultate sînt importante căci ne dau un criteriu de apartenență la domeniul de definiție al lui T a unui element.

PROPOZIȚIA 4.1. *Dacă* $T \in C(\mathfrak{X})$ este **S**-*rezidual decompozabil iar* $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{C}$, *atunci* $T \in B(\mathfrak{X})$.

Demonstrație. Fie $\{G_1\} \cup \{G_{\mathbf{S}}\}$ o **S**-acoperire a lui $\sigma(T)$ cu $G_{\mathbf{S}}$ relativ compactă în **C**. Corespunzător ei, există un spațiu maximal invariant $\mathfrak{X}_1$ astfel ca orice $x \in \mathfrak{X}$ să se scrie ca $x = x_1 + x_{\mathbf{S}}$ cu $x_1 \in \mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{D}_T$ iar $\sigma_T(x_{\mathbf{S}}) \subseteq \bar{G}_{\mathbf{S}}$. Dar $\bar{G}_{\mathbf{S}}$ e compactă în **C**, deci conform lemei precedente, $x \in \mathfrak{D}_T$. Avem așadar $\mathfrak{D}_T = \mathfrak{X}$ și cum T e închis, afirmația e dovedită.

Cînd $S = \emptyset$ și $\mathfrak{X}$ e un spațiu Banach, definiția 4.2 ne dă clasa operatorilor decompozabili:

PROPOZIȚIA 4.2. *Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu Banach și $T \in C(\mathfrak{X})$ un operator $\emptyset$-rezidual decompozabil. Atunci operatorul T este decompozabil.*

Demonstrație. Din propoziția precedentă avem că $T \in B(\mathfrak{X})$. Să considerăm o ($\emptyset$-) acoperire $\{G_j\}_{j=1}^n$ a lui $\sigma(T)$. Din definiția 4.2, pentru orice $F \subseteq \mathbf{C}_\infty$ închisă, familia $\mathcal{J}_{T,F}$ are o margine superioară. De asemenea, corespunzînd acoperirii alese, există spațiile invariante $\mathfrak{X}_j$ astfel ca $\sigma(T | \mathfrak{X}_j) \subseteq G_j$ și orice x se scrie ca:

$$x = x_1 + \ldots + x_n + x_{\mathbf{S}},$$

unde $x_j \in \mathfrak{X}_j (j = 1, \ldots, n)$ și $\sigma_T(x_{\mathbf{S}}) = \emptyset$.

Analicitatea aplicației $x_{\mathbf{S}}(\lambda)$ în $\mathbf{C}_\infty$ ne conduce la concluzia $x_{\mathbf{S}} = 0$. Să notăm $F_j = \sigma(T | \mathfrak{X}_j) \subseteq G_j (j = 1, \ldots, n)$. Din (δ_1), există spațiile maximal invariante $\mathfrak{X}_{T, F_j} (j = 1, \ldots, n)$ care, pe baza propoziției 3.2., sînt maximal spectrale, deci T e decompozabil.

Observație. Demonstrația de mai sus nu utilizează ipoteza că $\mathfrak{X}$ e spațiu Banach, însă noi ne-am situat în condițiile definiției originale [17].

PROPOZIȚIA 4.3. *Fie* $T_j \in \mathbf{C}(\mathfrak{X}^j)$ *operatori* $\mathbf{S}_j$ – *rezidual decompozabil* $(j = 1,2)$, *unde* $\sigma(T_2) = \mathbf{S}_2$. *Atunci* $T = T_1 \oplus T_2 \in \mathbf{C}(\mathfrak{X}_1' \oplus \mathfrak{X}^2)$ *este* $\mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2$-*rezidual decompozabil.*

Demonstrație. Să presupunem că operatorii $T_j \in C(\mathfrak{X}^j)$ sînt $\mathbf{S}_j$-rezidual decompozabili $(j = 1,2)$; să notăm $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2$, unde $\mathbf{S}_2 = \sigma(T_2)$ și fie $\{G_j\}_{j=1}^n \cup \{G_{\mathbf{S}}\}$ o **S**-acoperire a lui $\sigma(T_1 \oplus T_2)$. E cunoscută (și e simplu de verificat) relația:

$$\sigma(T_1 \oplus T_2) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$$

și ea ne permite să afirmăm că familia $\{G_j\}_{j=1}^n \cup \{G_{\mathbf{S}}\}$ este o $\mathbf{S}_1$-acoperire a lui $\sigma(T_1)$, deci există subspațiile închise $\{\mathfrak{X}_j^1\}_{j=1}^n$ în $\mathfrak{X}^1$, invariante la

T_1 și astfel ca $\sigma(T_1 | \mathfrak{X}_j^1) \subseteq G_j$. Dacă formăm spațiile $\mathfrak{X}_j^1 \oplus \{0\}$, ele sînt invariante la $T_1 \oplus T_2$ și $\sigma(T_1 \oplus T_2 | \mathfrak{X}_j^1 \oplus \{0\} \subseteq G_j\ (j = 1, \ldots, n)$. Dacă $x^1 \oplus x^2 \in \mathfrak{X}^1 \oplus \mathfrak{X}^2$, atunci

$$x^1 = x_1^1 + \ldots + x_n^1 + x_{\mathbf{S}}^1$$

deci $x^1 \oplus x^2 = x_1^1 \oplus 0 + \ldots + x_n^1 \oplus 0 + x_{\mathbf{S}}^1 \oplus x_2$, unde

$$x_j^1 \oplus 0 \in \mathfrak{X}_j^1 \oplus \{0\} \text{ și } \gamma_{T_1 \oplus T_2}(x_{\mathbf{S}}^1 \oplus x_2) \subseteq \overline{G}_{\mathbf{S}},$$

căci avem (vezi propoziția 2.5):

$$\sigma_{T_1 \oplus T_2}(x_{\mathbf{S}}^1 \oplus x_2) = \sigma_{T_1}(x_{\mathbf{S}}^1) \cup \sigma_{T_2}(x_2) \subseteq \overline{G}_{\mathbf{S}} \cup \overline{G}_{\mathbf{S}} = \overline{G}_{\mathbf{S}}.$$

În sfîrșit, dacă $F \subseteq \mathbf{C}_\infty$ e o mulțime închisă cu $F \cap \mathbf{S} = \emptyset$, atunci $\mathcal{J}_{T,F} = \mathcal{J}_{T_1,F} \oplus \{0\}$ și din existența marginii superioare pentru familia $\mathcal{J}_{T_1,F}$ rezultă existența marginii superioare și pentru familia $\mathcal{J}_{T,F}$.

LEMA 4.2. *Fie* $T \in C(\mathfrak{X})$ *un operator* **S**-*rezidual decompozabil și* G *o mulțime deschisă cu proprietatea* $G \cap (\sigma(T) \setminus \mathbf{S}) \neq \emptyset$. *Există atunci un spațiu maximal invariant* $\mathfrak{Y} \neq \{0\}$ *astfel încît* $\sigma(T | \mathfrak{Y}) \subseteq G \cap (\sigma(T) \setminus \mathbf{S})$.

Demonstrație. Fără a micșora generalitatea vom presupune că $\overline{G} \cap \mathbf{S} = \emptyset$. Vom alege apoi o mulține deschisă G_1 astfel încît $G \subseteq \overline{G} \subseteq G_1$, $\overline{G}_1 \cap \mathbf{S} = \emptyset$ și fie **S**-acoperirea $\{G_1, G_{\mathbf{S}}\}$ unde $G_{\mathbf{S}} = \complement \overline{G}$. Există atunci un subspațiu invariant $\mathfrak{Y}$ cu $\sigma(T | \mathfrak{Y}) \subseteq G_1$. Dacă $\mathfrak{Y} = \{0\}$, atunci orice $x \in \mathfrak{X}$ ar avea forma $x = x_{\mathbf{S}}$, deci $\sigma_T(x) \subseteq \overline{G}_{\mathbf{S}}$ pentru orice $x \in \mathfrak{X}$. Am avea atunci conform propoziției 2.10, $\sigma(T) \subset \overline{G}_{\mathbf{S}} = \complement G$, ceea ce e absurd, deoarece, prin ipoteză, avem $G \cap \sigma(T) \neq \emptyset$. Așadar e necesar ca $\mathfrak{Y} \neq \{0\}$.

COROLARUL 1. *Fie* $T \in C(\mathfrak{X})$ *un operator* **S**-*rezidual decompozabil și* $F \subseteq \mathbf{C}_\infty$ *o mulțime cu proprietatea că* $F \cap \sigma(T)$ *este închisă și* $F \cap \mathbf{S} = \emptyset$. *Dacă* $\mathbf{S}_T = \emptyset$ *și dacă* $\mathfrak{X}_T(F) = \{0\}$, *atunci* $\sigma(T) \subseteq \complement\ \mathrm{Int}\ F$.

Demonstrația se face ca mai sus, ținîndu-se cont că $\mathfrak{X}_{T, F \cap \sigma(T)} \subseteq \mathfrak{X}_T(F)$ iar $\mathrm{Int}\ F \cap \sigma(T) \neq \emptyset$ conduce la o contradicție.

PROPOZIȚIA 4.4. *Dacă* $T \in C(\mathfrak{X})$ *este un operator* **S**-*rezidual decompozabil, atunci* $\mathbf{S}_T \subseteq \mathbf{S}$ *și pentru orice* G *deschisă,* $\overline{G} \subseteq \sigma(T)$, $\overline{G}_T \cap \mathbf{S} = \emptyset$ *are loc relația* $\sigma(T | \mathfrak{X}_{T,\overline{G}}) = \overline{G}$.

Demonstrație. Fie $f_0 : \omega \to \mathfrak{D}_T$ (ω deschisă) o funcție analitică care verifică $(\lambda I - T) f_0(\lambda) = 0$ dacă $\lambda \in \omega \cap \mathbf{C}\ (\omega \subseteq \complement\, \mathbf{S})$. Vom arăta că $f_0(\lambda) \equiv 0$ în ω. Putem presupune de la început $\omega \subseteq \sigma(T)$. Vom proceda prin reducere la absurd. Alegem mulțimile deschise și conexe G și G_1 cu $G \subseteq \overline{G} \subseteq G_1 \subseteq \omega$. Să presupunem că $f_0(\lambda) \not\equiv 0$ în G_1. Fie spațiul maximal invariant $\mathfrak{X}_{T,\overline{G}}$. Vom arăta că spectrul restricției lui T la $\mathfrak{X}_{T,\overline{G}}$ conține puncte interioare. De altfel vom arăta mai mult și anume că $\sigma(T | \mathfrak{X}_{T,\overline{G}}) = \overline{G}$. În adevăr, dacă am avea $\overline{G} \setminus \sigma(T | \mathfrak{X}_{T,\overline{G}}) \neq \emptyset$, atunci această mulțime ar avea interiorul nevid și dacă F ar fi o submulțime închisă a sa cu interior nevid, atunci, pe baza lemei 4.2, am avea $\mathfrak{X}_{T,F} \neq \{0\}$. Însă pe de altă parte $\sigma(T | \mathfrak{X}_{T,F}) \subseteq F \subseteq \overline{G}_T$, deci $\mathfrak{X}_{F,T} \subseteq \mathfrak{X}_{T,\overline{G}}$ și pe baza corolarului 3 al propoziției 3.3, avem $\sigma(T | \mathfrak{X}_{T,F}) \subseteq \sigma(T | \mathfrak{X}_{T,\overline{G}})$ ceea ce e imposibil.

Deci $\sigma(T \mid \mathfrak{X}_{T,\overline{G}}) = \overline{G}$ și deci $\sigma(T \mid \mathfrak{X}_{T,\overline{G}})$ conține puncte interioare. Pe baza corolarului 1 al propoziției 3.3 va trebui să avem $G_1 \subseteq \sigma(T \mid \mathfrak{X}_{T,\overline{G}}) = \overline{G}$, ceea ce e contradictoriu. Prin urmare $f_0(\lambda) \equiv 0$ în ω. Cum $\omega \subseteq \mathbf{C}$, $\mathbf{S}$ e arbitrară, rezultă $\mathbf{S}_T \subseteq \mathbf{S}$. Demonstrația afirmației care a rămas e conținută în prima demonstrație.

Pînă acum, pentru un operator $T \in C(\mathfrak{X})$ și o mulțime închisă $F \subseteq \mathbf{C}_\infty$, am introdus cîteva varietăți liniare: $\mathfrak{X}_T(F \cup \mathbf{S}_T)$, $\breve{\mathfrak{X}}_T(E)$ și $\mathfrak{X}_{T,F}$. Între ele există cîteva relații care pot fi puse repede în evidență. Avem de pildă:

$$\mathfrak{X}_{T,F} \subseteq \mathfrak{X}_T(F) = \breve{\mathfrak{X}}_T(F) \text{ dacă } \mathbf{S}_T = \emptyset$$

și

$$\mathfrak{X}_{T,F} \subseteq [\breve{\mathfrak{X}}_T(F) \setminus \breve{\mathfrak{X}}_T(\emptyset)] \cup \{0\} \text{ dacă } F \cap \mathbf{S}_T = \emptyset.$$

Ne propunem în cele ce urmează să studiem mai îndeaproape aceste relații, pentru cazuri foarte des întîlnite în aplicații.

TEOREMA 4.1. *Fie $T \in C(\mathfrak{X})$ un operator $\mathbf{S}$-rezidual decompozabil, cu $\mathbf{S}_T = \emptyset$. Atunci pentru orice $F \subseteq \mathbf{C}$ compactă cu $F \cap \mathbf{S} = \emptyset$, are loc relația*

$$x_{T,F} = \mathfrak{X}_T(F).$$

Demonstrație. Fie $F \subseteq \mathbf{C}$ compactă, cu $F \cap \mathbf{S} = \emptyset$. Vom alege mulțimile deschise G_1 și $G_{\mathbf{S}}$ astfel ca $\overline{G}_1 \cap \mathbf{S} = \emptyset$, $\overline{G}_{\mathbf{S}} \cap F = \emptyset$, $G_1 \supseteq F$, $G_{\mathbf{S}} \supseteq \mathbf{S}$ și $G_1 \cup G_{\mathbf{S}} \supseteq \sigma(T)$. În acest mod sistemul $\{G_1\} \cup \{G_{\mathbf{S}}\}$ formează o $\mathbf{S}$-acoperire a lui $\sigma(T)$. Corespunzător ei, există un spațiu invariant $\mathfrak{X}_1$ cu $\sigma(T \mid \mathfrak{X}_1) \subseteq \subseteq G_1$ astfel încît orice $x \in \mathfrak{X}_T(F)$ să se scrie $x = x_1 + x_{\mathbf{S}}$, unde $x_1 \in \mathfrak{X}_1$ și $\sigma_T(x_{\mathbf{S}}) \subseteq \overline{G}_{\mathbf{S}}$. Vom alege un sistem de curbe Γ_0 orientat pozitiv, care să înconjoare mulțimea F și să o separe de $G_{\mathbf{S}}$, sistem situat în $\complement F \cap \complement \overline{G}_{\mathbf{S}} \cap \mathbf{C}$. În vecinătatea lui Γ_0 funcțiile T-asociate $x(\lambda)$, $x_{\mathbf{S}}(\lambda)$ (deci) și $x_1(\lambda)$, sînt definite. Atunci vom avea:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} x(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} x_1(\lambda)\,d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} x_{\mathbf{S}}(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} x_1(\lambda)\,d\lambda$$

căci $x_{\mathbf{S}}(\lambda)$ e analitică în domeniul delimitat de Γ_0. Întrucît $\mathfrak{X}_1$ poate fi presupus maximal invariant, el va fi T-absorbant (propoziția 3.3), deci $x_1(\lambda) \in \mathfrak{X}_1$ pentru orice λ și aproximarea cu sume finite ne conduce la faptul că $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} x_1(\lambda)\,d\lambda \in \mathfrak{X}_1$. Pe de altă parte, cum $\mathbf{S}_T = \emptyset$, funcția $x(\lambda)$ e analitică în exteriorul lui Γ_0, deci vom avea:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} x(\lambda)\,d\lambda = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda\, x(\lambda) = x$$

(A se vedea și demonstrația lemei 4.1). Așadar $x \in \mathfrak{X}_1$.

Deoarece $x \in \mathfrak{X}_T(F)$ a fost ales arbitrar, obținem

$$\mathfrak{X}_T(F) = \bigcap_{\substack{G_1 \supseteq F \\ \overline{G}_1 \cap \mathbf{S} = \emptyset}} \mathfrak{X}_{T,\overline{G}_1}$$

Deoarece familia $\{\overline{G}_1;\ \overline{G}_1 \supseteq F,\ \ \overline{G}_1 \cap \mathbf{S} = \varnothing\}$ e filtrantă, obţinem, pe baza propoziţiei 3.4, egalitatea

$$\bigcap_{\substack{\overline{G}_1 \supseteq F \\ \overline{G}_1 \cap \mathbf{S} = \varnothing}} \mathfrak{X}_{T, \overline{G}_1} = \mathfrak{X}_{T, F}$$

Cum incluziunea $\mathfrak{X}_{T,F} \subseteq \breve{\mathfrak{X}}_T(F) = \mathfrak{X}_T(F)$e evidentă, teorema e demonstrată.

După cum vom vedea din exemple, varietăţile de tipul $\breve{\mathfrak{X}}_T(F)$ nu sînt în general închise. Totuşi, ca teoremă de structură, rezultatul care urmează pare a fi interesant.

TEOREMA 4.2. ***Fie*** $T \in B(\mathfrak{X})$ *un operator* S-*rezidual decompozabil cu* $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{C}$. *Atunci oricare ar fi* F *compactă în* $\mathbf{C}$ *cu* $F \cap \mathbf{S} = \varnothing$, *are loc relaţia*

$$\breve{\mathfrak{X}}_T(F) = \mathfrak{X}_{T,F} \dotplus \breve{\mathfrak{X}}_T(\varnothing).$$

Demonstraţie. Să remarcăm mai întîi că dacă $y \in \mathfrak{X}_{T,F} \cap \breve{\mathfrak{X}}_T(\varnothing)$, atunci putem defini în mod univoc funcţia T-asociată:

$$f_y(\lambda) = \begin{cases} (\lambda I \mid \mathfrak{X}_{T,F} - T \mid \mathfrak{X}_{T,F})_y^{-1} & \lambda \in \complement F \cap \mathbf{C} \\ x(\lambda) & \lambda \in \complement \mathbf{S}_T \end{cases}$$

deoarece $\sigma_T(y) = \mathbf{S}_T$. Cum $\lim\limits_{\lambda \to \infty} f_y(\lambda) = 0$, rezultă $y = 0$. Să considerăm acum două sisteme de curbe Γ_1 şi Γ_2 care înconjoară şi separă cele două mulţimi F şi S, orientate la fel, aflate în $\rho_T(x)$, unde $x \in \breve{\mathfrak{X}}_T(F)$, e arbitrar. Vom mai considera o curbă Γ care înconjoară cele două sisteme. Avem atunci egalitatea

$$x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} x(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} x(\lambda)\, d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} x(\lambda)\, d\lambda.$$

Să notăm cu $x_F = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_1} x(\lambda)\, d\lambda$ şi $x_S = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_2} x(\lambda)\, d\lambda$. Evident, elementele x_F şi x_S nu depind de alegerea sistemelor Γ_1 şi Γ_2. Să arătăm că $\gamma_T(x_F) \subseteq F$ şi $\gamma_T(x_S) \subseteq \mathbf{S}$. În adevăr, dacă $\mu_0 \in \complement F$, atunci există un sistem Γ_1' „în" Γ_1 astfel încît μ_0 să rămînă „în afara" acestui sistem şi atunci pentru μ în vecinătatea lui μ_0:

$$(\mu I - T)\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1'} \frac{x(\lambda)}{\mu - \lambda}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1'} x(\lambda)\, d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1'} \frac{x}{\mu - \lambda}\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1'} x(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} x(\lambda)\, d\lambda = x_F.$$

Analog se arată că $\gamma_T(x_{\mathbf{S}}) \subseteq \mathbf{S}$. Pe de altă parte, avem însă $\gamma_T(x_{\mathbf{S}}) = \gamma_T(x - x_F) \subseteq F$, deci $\gamma_T(x_{\mathbf{S}}) = \emptyset$ şi $x_{\mathbf{S}} \in \breve{\mathfrak{X}}_T(\emptyset)$. Fie acum $\{G_1, G_{\mathbf{S}}\}$ o $\mathbf{S}$-acoperire a lui $\sigma(T)$ cu $G_1 \supseteq F$, $\overline{G}_1 \cap \mathbf{S} = \emptyset$, $\overline{G}_{\mathbf{S}} \cap F = \emptyset$. Corespunzător acestei acoperiri, există un spaţiu maximal invariant $\mathfrak{X}_1$ astfel încît elementul x să se pună sub forma $x = y_1 + y_{\mathbf{S}}$ cu $y_1 \in \mathfrak{X}_1$ şi cu $\sigma_T(y_{\mathbf{S}}) \subseteq \overline{G}_{\mathbf{S}}$. Întrucît sistemul Γ_1 se alege în $\complement F$ şi se poate alege şi în $\complement \overline{G}_{\mathbf{S}}$, atunci într-o vecinătate a lui Γ_1 există funcţiile T-asociate $x(\lambda)$, $y_1(\lambda)$, $y_{\mathbf{S}}(\lambda)$ iar $\lambda \to y_{\mathbf{S}}(\lambda)$ e analitică în domeniul delimitat de Γ_1. Aşadar, din $x(\lambda) = y_1(\lambda) + y_s(\lambda)$ rezultă

$$x_F = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} y_1(\lambda)\, d\lambda \in \mathfrak{X}_1$$

deoarece $\mathfrak{X}_1$ e T-absorbant. Ca şi în teorema precedentă, vom avea $x_F \in \bigcap \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_{T,F}$ şi cu aceasta teorema e demonstrată.

Observaţie. În condiţiile teoremei precedente, la fel rezultă şi relaţia

$$\mathfrak{X}_T(F \cup S_T) = \mathfrak{X}_{T,F} \dot{+} \mathfrak{X}_T(S_T).$$

DEFINIŢIA 4.3. Vom spune despre un operator $T \in C(\mathfrak{X})$ $\mathbf{S}$-rezidual decompozabil că are *spectru localizat*, dacă condiţia (δ_2'') din definiţia 4.2 e înlocuită cu condiţia mai tare:

$(\delta_2'')^*$Orice $x \in \mathfrak{X}$ are o descompunere de forma

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{\mathbf{S}}$$

$$x_j \in \mathfrak{X}_j, \ \gamma_T(x_j) \subseteq \gamma_T(x) \, (j = 1, \dots, n)$$

şi $\sigma_T(x_{\mathbf{S}}) \subseteq \overline{G}_{\mathbf{S}}$.

Această condiţie întărită e de tipul celei utilizate în [2] pentru definirea operatorilor tare decompozabili pe spaţii Banach. Ea permite ca descompunerile date de $(\delta_2'')^*$ să aibă, pentru elemente $x \in \mathfrak{X}$ cu $\gamma_T(x) \cap \mathbf{S} = \emptyset$, forma

$$x = x_1 + \dots + x_n + x_{\mathbf{S}} \text{ cu } x_{\mathbf{S}} \in \breve{\mathfrak{X}}_T(\emptyset).$$

În particular, dacă $\mathbf{S}_T = \emptyset$, $x_{\mathbf{S}} = 0$ pentru astfel de elemente.

Decompozabilitatea reziduală introdusă pare a nu fi o proprietate suficientă pentru a asigura existenţa unei mulţimi minimale în afara căreia spectrul să aibă o comportare convenabilă. Vom introduce o condiţie suplimentară care ne va permite să studiem o astfel de posibilitate.

DEFINIŢIA 4.4. Vom spune că un operator $T \in C(\mathfrak{X})$ cu $\mathbf{S}_T = \emptyset$ e ***tare rezidual decompozabil*** dacă pentru orice F_1, $F_2 \subseteq \mathbf{C}_\infty$ închise pentru care $\mathfrak{X}_T(F_1)$ şi $\mathfrak{X}_T(F_2)$ sînt închise şi conţinute în $\mathfrak{D}_T$, spaţiul $\mathfrak{X}_T(F_1 \cup F_2)$ e de asemenea închis şi conţinut în $\mathfrak{D}_T$. În particular, operatorii decompozabili pe spaţii Banach [17] ori pe spaţii mai generale [6] intră în această clasă. Raţiunea acestei denumiri va rezulta din teorema care urmează.

TEOREMA 4.3. *Fie $T \in C(\mathfrak{X})$ un operator tare rezidual decompozabil. Există atunci o cea mai mică mulţime închisă unică $\mathrm{S}_T^a \subseteq \mathrm{C}_\infty$ astfel încît T să fie S_T^a-rezidual decompozabil şi cu spectru localizat.*

Demonstraţie. Familia mulţimilor S pentru care T e S-rezidual decompozabil şi cu spectru localizat e nevidă căci conţine evident pe $\sigma(T)$. Fie $\{\mathrm{S}_\alpha\}$ o parte total ordonată a sa şi $\mathrm{S}_0 = \bigcap\limits_\alpha \mathrm{S}_\alpha$. Vom arăta că T e S_0-rezidual decompozabil şi cu spectru localizat. În adevăr, dacă $F \subseteq \mathrm{C}_\infty$ e o mulţime închisă cu $F \cap \mathrm{S}_0 = \emptyset$, atunci există un indice α_0 astfel încît $F \cap \mathrm{S}_{\alpha_0} = \emptyset$ şi cum T e S_{α_0}-rezidual decompozabil, rezultă că familia $\mathcal{J}_{T,F}$ are un element maxim în $\mathfrak{X}$. Dacă $\{G_j\}_{j=1}^n \cup \{G_{\mathrm{S}_0}\}$ e o S_0-acoperire a lui $\sigma(T)$, există un indice α_1 astfel încît ea să devină o S_{α_1}-acoperire a lui $\sigma(T)$. (Deoarece $\{\mathrm{S}_\alpha\}$ e total ordonată!). Cum T e S_{α_1}-rezidual decompozabil şi cu spectru localizat, condiţiile care au rămas de verificat pentru ca T să fie S_0-rezidual decompozabil şi cu spectru localizat depind acum numai de acoperire şi sînt vizibil îndeplinite. Aplicarea lemei lui Zorn ne asigură că există elemente minimale. Vom arăta că există numai un singur element minimal. Pentru aceasta fie S_1 şi S_2 două elemente minimale şi să notăm $\mathrm{S} = \mathrm{S}_1 \cap \mathrm{S}_2$. Vom arăta că T este S-rezidual decompozabil şi cu spectru localizat, ceea ce va fi o contradicţie dacă $\mathrm{S}_1 \neq \mathrm{S}_2$. Fie $F \subseteq \mathrm{C}_\infty$ o mulţime închisă cu proprietatea $F \cap \mathrm{S} = \emptyset$. Vom descompune pe F în două părţi închise F_1 şi F_2, nu neapărat disjuncte, cu proprietatea $F_j \cap \mathrm{S}_j = \emptyset$ $(j = 1, 2)$, ceea ce e evident posibil. Fie acum $F_j \subseteq H_j \subseteq \overline{H}_j \subseteq G_j$ cu H_j şi G_j deschise, $\overline{G}_j \cap \mathrm{S}_j = \emptyset$ $(j=1, 2)$ şi S_j-acoperirile $\{G_j, G_{\mathrm{S}_j}\}$ cu $G_{\mathrm{S}_j} = \complement \overline{H}_j$ $(j = 1, 2)$. Fie $x \in \mathfrak{X}_T(F)$ arbitrar. Faţă de $\{G_1, G_{\mathrm{S}_1}\}$ el are descompunerea $x = x_1 + x_{\mathrm{S}_1}$ şi cum spectrul lui T e localizat, vom avea

$$\sigma_T(x_{\mathrm{S}_1}) \subseteq \overline{G}_{\mathrm{S}_1} \cap \sigma_T(x) \subseteq \overline{G}_{\mathrm{S}_1} \cap F.$$

Faţă de acoperirea $\{G_2, G_{\mathrm{S}_2}\}$, elementul x_{S_1} va avea descompunerea $x_{\mathrm{S}_1} = y_2 + y_{\mathrm{S}_2}$, deci vom scrie, în virtutea faptului că spectrul e localizat:

$$\sigma_T(y_{\mathrm{S}_2}) \subseteq \overline{G}_{\mathrm{S}_2} \cap \sigma_T(x_{\mathrm{S}_1}) \subseteq \overline{G}_{\mathrm{S}_1} \cap \overline{G}_{\mathrm{S}_2} \cap F \subseteq \complement H_1 \cap \complement H_2 \cap F = \emptyset.$$

Avem în consecinţă $y_{\mathrm{S}_2} = 0$ (conform propoziţiei 2.9). Prin urmare

$$\mathfrak{X}_T(F) \subseteq \mathfrak{X}_{T,\overline{G}_1} + \mathfrak{X}_{T,\overline{G}_2}$$

Să remarcăm însă egalităţile:

$$\mathfrak{X}_{T,\overline{G}_j} = \mathfrak{X}_T(\overline{G}_j) \quad (j = 1, 2)$$

care vor rezulta din

LEMA 4.3. *Dacă $T \in C(\mathfrak{X})$ este S-rezidual decompozabil, cu spectru localizat şi cu $\mathrm{S}_T = \emptyset$, atunci oricare ar fi $F \subseteq \mathrm{C}_\infty$ închisă cu $F \cap S = \emptyset$ are loc egalitatea*

$$\mathfrak{X}_{T,F} = \mathfrak{X}_T(F).$$

În adevăr, dacă $F \subseteq G \subseteq \overline{G} \subseteq G_1$ cu G, G_1 deschise și dacă $\overline{G}_1 \cap \mathbf{S} = \varnothing$ iar $G_{\mathbf{S}} = \complement\, \overline{G}$, cum $\{G_1, G_{\mathbf{S}}\}$ e o **S**-acoperire, orice $x \in \mathfrak{X}_T(F)$ se descompune $x = x_1 + x_{\mathbf{S}}$ cu $x_1 \in \mathfrak{X}_{T, \overline{G}_1}$ iar $\sigma_T(x_{\mathbf{S}}) \subseteq \overline{G}_{\mathbf{S}} \cap \sigma_T(x) \subseteq \subseteq \overline{G}_{\mathbf{S}} \cap F \subseteq \complement\, G \cap F = \varnothing$, deci $x_{\mathbf{S}} = 0$. Așadar $\mathfrak{X}_T(F) \subseteq \mathfrak{X}_{T, \overline{G}_1}$ și raționînd ca în finalul teoremei 4.1, obținem rezultatul dorit.

Reîntorcîndu-ne la teorema noastră, vom avea:

$$\mathfrak{X}_{T, \overline{G}_1} + \mathfrak{X}_{T, \overline{G}_2} = \mathfrak{X}_T(\overline{G}_1) + \mathfrak{X}_T(\overline{G}_2) \subseteq \mathfrak{X}_T(\overline{G}_1 \cup \overline{G}_2)$$

iar datorită faptului că T e tare rezidual decompozabil, spațiul $\mathfrak{X}_T(G_1 \cup G_2)$ e maximal invariant (propoziția 3.6). Așadar

$$\mathfrak{X}_T(F) \subseteq \bigcap_{\overline{G}_1 \cup \overline{G}_2 \supseteq F} \mathfrak{X}_T(\overline{G}_1 \cup \overline{G}_2)$$

și aplicarea propoziției 3.4 ne arată că $\mathfrak{X}_{T, F}$ există și că $\mathfrak{X}_{T, F} = \mathfrak{X}_T(F)$. Prin urmare, oricare ar fi $F \subseteq \complement_\infty$ închisă cu $F \cap \mathbf{S} = \varnothing$, familia $\mathcal{J}_{T, F}$ posedă un element maxim și (δ_1) e verificată. Fie acum $\{G_j\}_{j=1}^{n} \cup \{G_{\mathbf{S}}\}$ o **S**-acoperire a lui $\sigma(T)$. Vom construi mulțimile $G_{\mathbf{S}_1}$ și $G_{\mathbf{S}_2}$ prin completarea lui $G_{\mathbf{S}}$ astfel încît $G_{\mathbf{S}_j} \cap (\mathbf{S}_k \setminus G_{\mathbf{S}}) = \varnothing$ $(j \neq k)$. Apoi vom rafina mulțimile $G_j = \bigcup_{k=1}^{n_j} G_j^k$ astfel încît o mulțime deschisă G_j să intersecteze cel mult una din mulțimile $\mathbf{S}_1$ și $\mathbf{S}_2$ și dacă o intersectează, atunci să fie complet conținută în $G_{\mathbf{S}_1}$ respectiv $G_{\mathbf{S}_2}$. Vom putea alcătui o $\mathbf{S}_j$-acoperire a lui $\sigma(T)$ formată din acele mulțimi ce intersectează cel mult mulțimea $\mathbf{S}_k (k \neq j)$ și din $G_{\mathbf{S}_j}$ $(j = 1, 2)$. Fie $\{H_j^k\}_{j=1}^{m_k} \cup \{G_{\mathbf{S}_k}\}$ $(k = 1, 2)$ cele două acoperiri și fie $x \in \mathfrak{X}$. Față de prima acoperire are loc descompunerea

$$x = x_1^1 + \ldots + x_{m_1}^1 + x_{\mathbf{S}_1}$$

cu $\sigma_T(x_{\mathbf{S}_1}) \subseteq \overline{G}_{\mathbf{S}_1}$. La rîndul său, elementul $x_{\mathbf{S}_1}$ admite față de a doua acoperire descompunerea:

$$x_{\mathbf{S}_1} = y_1 + \cdots + y_{m_2} + y_{\mathbf{S}_2}$$

cu $\sigma_T(y_{\mathbf{S}_2}) \subseteq \overline{G}_{\mathbf{S}_2}$. Cum spectrul lui T e localizat, vom avea:

$$\sigma_T(y_{\mathbf{S}_2}) \subseteq \sigma_T(x_{\mathbf{S}}) \cap \overline{G}_{\mathbf{S}_2} \subseteq \overline{G}_{3_1} \cap \overline{G}_{\mathbf{S}_2} = \overline{G}_{\mathbf{S}},$$

ultima egalitate putîndu-se obține prin construcția mulțimilor $G_{\mathbf{S}_1}$ și $G_{\mathbf{S}_2}$, care e la dispoziția noastră. Să notăm cu $\mathfrak{X}_j^k$ spațiile maximal invariante care se obțin utilizînd ambele acoperiri. Deoarece T e tare rezidual decompozabil și aplicînd și lema 4.3, există spațiile maximal invariante $\mathfrak{X}_j \supseteq \sum_{\sigma(T \mid \mathfrak{X}_l^k) \subseteq G_j} \mathfrak{X}_l^k$ și din $\sigma(T \mid \mathfrak{X}_l^k) \subseteq G_j$ rezultă că $\sigma(T \mid \mathfrak{X}_j) \subseteq G_j (j = 1, \ldots, n)$.

Avem deci:

$$x = x_1 + \ldots + x_n + x_{\mathbf{S}},$$

unde $x_j \in \mathfrak{X}_j$ se obțin prin comprimarea termenilor corespunzători iar $x_{\mathbf{S}} = y_{\mathbf{S}_2}$. Prin urmare T este $\mathbf{S}$-rezidual decompozabil iar condiția de localizare a spectrului este evident îndeplinită. Deci dacă $\mathbf{S}_1 \neq \mathbf{S}_2$, se obține o contradicție. Prin urmare elementul minimal e unic și îl vom nota de aici înainte cu $\mathbf{S}_T^d$.

Pentru orice operator tare rezidual decompozabil, vom numi mulțimea $\mathbf{S}_T^d$, care există întotdeauna, *reziduul spectral* al lui T.

În particular, orice operator decompozabil [14] este tare rezidual decompozabil, deci posedă un reziduu spectral.

PROPOZIȚIA 4.5. *Fie* $T \in C(\mathfrak{X})$ *un operator tare rezidual decompozabil. Dacă* $\mathfrak{Y}_0$ *este un spațiu maximal invariant pentru* T *și* $T_0 = T \mid \mathfrak{Y}_0$, *atunci* T_0 *este tare rezidual decompozabil și* $\mathbf{S}_{T_0}^d \subseteq \sigma(T \mid \mathfrak{Y}_0) \cap \mathbf{S}_T^d$.

Demonstrație. Evident, $\mathbf{S}_{T_0} \subseteq \mathbf{S}_T = \emptyset$. Dacă $F_1, F_2 \subseteq \sigma(T_0)$ sînt două mulțimi închise și $\mathfrak{X}_{0T_0}(F_1)$, $\mathfrak{X}_{0T_0}(F_2)$ sînt în $\mathfrak{D}_{T_0} = \mathfrak{Y}_0$ și sînt închise, cum avem evident $\mathfrak{X}_{0T_0}(F_j) = \mathfrak{X}_T(F_j)$ $(j = 1, 2)$ și cum T e tare rezidual decompozabil, rezultă $\mathfrak{X}_T(F_1 \cup F_2) \subseteq \mathfrak{D}_T$ și e închis și cum $\sigma(T \mid \mathfrak{X}_T(F_1 \cup (F_2)) \subseteq \subseteq F_1 \cup F_2 \subseteq \sigma(T_0)$, rezultă $\mathfrak{X}_T(F_1 \cup F_2) \subseteq \mathfrak{Y}_0$, căci $\mathfrak{Y}_0$ e maximal invariant. Așadar $\mathfrak{X}_{0T_0}(F_1 \cup F_2) = \mathfrak{X}_T(F_1 \cup F_2) \subseteq \mathfrak{D}_{T_0}$ și e închis, prin urmare T_0 e tare rezidual decompozabil. Fie acum $\mathbf{S}_0 = \sigma(T \mid \mathfrak{Y}_0) \cap \mathbf{S}_T^d$ iar $\{G_j^0\}_{j=1}^n \cup \{G_{\mathbf{S}_0}\}$ σ S-acoperire a lui $\sigma(T_0)$. Evident, se poate construi o $\mathbf{S}_T^d$-acoperire a lui $\sigma(T)$, anume $\{G_j\}_{j=1}^n \cup \{G_{\mathbf{S}_T^d}\}$, astfel încît $G_j \supseteq G_j^0$ $(j = 1, \ldots, n)$ și $G_{\mathbf{S}_T^d} \supseteq G_{\mathbf{S}_0}$ (mulțimile G_j pot fi alese astfel ca $G_j^0 \cap [\mathbf{S}_T^d \setminus \sigma(T_0)] = \emptyset$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Există atunci spațiile (maximal) invariante $\mathfrak{X}_j \subseteq \mathfrak{X}$ $(j = 1, \ldots, n)$ astfel încît dacă $y \in \mathfrak{Y}_0$ să avem

$$y = y_1 + \cdots + y_n + y_0$$

cu $y_j \in \mathfrak{X}_j$, $\sigma_T(y_j) \subseteq \sigma_T(y)$ $(j = 1, \ldots, n)$, și $\sigma_T(y_0) \subseteq \overline{G}_{\mathbf{S}_T^d} \cap \sigma_T(y) \subseteq \overline{G}_{\mathbf{S}_0}$ dacă se alege convenabil $G_{\mathbf{S}_T^d} \supseteq G_{\mathbf{S}_0}$, căci $\sigma_T(y) \subseteq \sigma(T_0)$. Așadar, avem de fapt $y_j \in \mathfrak{Y}_j = \mathfrak{X}_j \cap \mathfrak{Y}_0$ care sînt maximal invariante pentru T_0 (dacă ne aranjăm să avem $G_j \cap \sigma(T_0) = G_j^0$ $(j = 1, \ldots, n)$, ceea ce e evident posibil) și $\sigma(T_0 \mid \mathfrak{Y}_j) \subseteq G_j^0$ $(j = 1, \ldots, n)$. Prin urmare condițiile (δ_2) din definiția decompozabilității reziduale sînt îndeplinite. Dacă luăm $F \subseteq \mathbf{C}_\infty$ închisă cu $F \cap \mathbf{S}_0 = \emptyset$, putem presupune $F \subseteq \sigma(T_0)$ și atunci $F \cap \mathbf{S}_T^d = \emptyset$, deci $\mathcal{J}_{T,F}$ are un element maxim în $\mathfrak{X}$, care va fi la fel și în $\mathfrak{Y}_0$. Prin urmare, operatorul T_0 este $\mathbf{S}_0$-rezidual decompozabil și cu spectru localizat. Teorema 4.3 ne dă atunci $\mathbf{S}_{T_0}^d \subseteq \mathbf{S}_0 = \sigma(T \mid \mathfrak{Y}_0) \cap \mathbf{S}_T^d$.

Vom demonstra acum un rezultat auxiliar care apare și în [2] pentru operatori decompozabili pe spații Banach.

LEMA 4.4. *Fie* $T \in B(\mathfrak{X})$ *un operator S-rezidual decompozabil cu* $\mathbf{S}_T = \emptyset$, *fie* $\mathfrak{Y}_0$ *un spațiu maximal invariant pentru* T *și* $T_0 = T \mid \mathfrak{Y}_0$. *Dacă* $\sigma(T_0) \cap \mathbf{S} = \emptyset$ *și dacă* $\widetilde{T}$ *este operatorul indus de* T *pe* $\widetilde{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}/\mathfrak{Y}_0$, *atunci* $\sigma(\widetilde{T}) \subseteq \overline{\sigma(T) \setminus \sigma(T_0)}$.

Demonstrație. Să remarcăm că $\rho(T) \subseteq \rho(\widetilde{T})$ deoarece $\rho(T) \subseteq \rho(T_0)$ și deci funcționează relația

$$R(\lambda, \widetilde{T})\,\widetilde{x} = \widetilde{R(\lambda, T)\,x} \quad (\lambda \in \rho(T),\ x \in \mathfrak{X}).$$

Din teorema 2.1, rezultă $\widetilde{\mathfrak{X}}_{\widetilde{T}}(\sigma(T_0)) = \{\widetilde{0}\}$. Avem chiar mai mult, anume dacă $G \supseteq \partial\, \sigma(T_0) \setminus \overline{\sigma(T) \setminus \sigma(T_0)}$, $G \cap \overline{\sigma(T) \setminus \sigma(T_0)} = \varnothing$ (∂ fiind operatorul frontieră) e o mulțime deschisă (eventual vidă!) în $\complement\, \overline{\sigma(T) \setminus \sigma(T_0)}$, atunci $\widetilde{\mathfrak{X}}_{\widetilde{T}}(\sigma(T_0) \cup \overline{G}) = \{\widetilde{0}\}$, căci dacă $\sigma_{\widetilde{T}}(\widetilde{x}) \subseteq \sigma(T_0) \cup \overline{G}$, atunci neapărat $\sigma_T(x) \subseteq \sigma(T_0)$, deci $x \in \mathfrak{Y}_0 (x \in \widetilde{x})$. Așadar, aplicînd corolarul 1 al lemei 4.2, conchidem

$$\sigma(T) \subseteq \complement\, \overset{\circ}{\overparen{\sigma(T_0) \cup \overline{G}}} \cap \sigma(T) \subseteq \overline{\sigma(T) \setminus \sigma(T_0)}.$$

Această relație ne va permite să demonstrăm pentru spații cît un rezultat de tipul celui dat de propoziția 4.5.

PROPOZIȚIA 4.6. *Fie* $T \in B(\mathfrak{X})$ *un operator tare rezidual decompozabil și* $\mathfrak{Y}_0$ *un spațiu maximal invariant al său. Fie* $T_0 = T \mid \mathfrak{Y}_0$ *și să presupunem că* $\sigma(T_0) \cap \mathbf{S}^d_T = \varnothing$. *Dacă* $\widetilde{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}/\mathfrak{Y}_0$ *iar* $\widetilde{T}$ *este operatorul indus de* T *pe* $\widetilde{\mathfrak{X}}$, *atunci* $\widetilde{T}$ *este tare rezidual decompozabil și* $\mathbf{S}^d_{\widetilde{T}} \subseteq \mathbf{S}^d_T$.

Demonstrație. Vom arăta mai întîi că $\widetilde{T}$ e tare rezidual decompozabil. Din teorema 2.1 deducem relația $\widetilde{\mathfrak{X}}_{\widetilde{T}}(\sigma(T_0)) = \{\widetilde{0}\}$ deci conform propoziției 2.9, avem $\mathbf{S}_{\widetilde{T}} = \varnothing$. Să presupunem acum că $\widetilde{\mathfrak{X}}_{\widetilde{T}}(F)$ e închis în $\widetilde{\mathfrak{X}}$ și să considerăm spațiul $\mathfrak{X}_0 = \{x \in \mathfrak{X};\ \widetilde{x} \in \widetilde{\mathfrak{X}}_{\widetilde{T}}(F)\}$ care e închis în $\mathfrak{X}$. Vom arăta egalitatea $\mathfrak{X}_0 = \mathfrak{X}_T(F \cup \sigma(T_0))$.

Mai întîi, dacă $x \in \mathfrak{X}_0$, cum $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathfrak{X}}_{\widetilde{T}}(F)$, procedînd ca în teorema 2.1, vom putea construi în $\complement\, [F \cup \sigma(T_0)]$ funcția T-asociată $x(\lambda)$, deci $\sigma_T(x) \subseteq F \cup \sigma(T_0)$.

Invers, vom descompune $F = F_1 \cup F_2$, unde F_1, F_2 sînt închise, $F_1 \cap \mathbf{S}^d_T = \varnothing$ și $F_2 \cap \sigma(T_0) = \varnothing$, ceea ce e posibil. Spațiul $\mathfrak{X}_T(F_1 \cup \sigma(T_0))$ e maximal invariant pentru T, conform lemei 4.3. Să notăm $\mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{X}_T(F_1 \cup \sigma(T_0)) \supseteq \mathfrak{Y}_0$ și să considerăm $\widetilde{\mathfrak{X}}_1 = \mathfrak{Y}_1/\mathfrak{Y}_0$ care e un subspațiu închis al lui $\widetilde{\mathfrak{X}}$. Dacă $T_1 = T \mid \mathfrak{Y}_1$, propoziția 4.5 ne dă că $\mathbf{S}^d_T \subseteq F_1 \cap \mathbf{S}^d_T = \varnothing$, și cum $T_0 = T_1 \mid \mathfrak{Y}_0$, aplicînd lema 4.4, obținem $\sigma(\widetilde{T}_1) \subseteq \overline{\sigma(T_1) \setminus \sigma(T_0)} \subseteq F_1$, unde $\widetilde{T}_1 = \widetilde{T} \mid \widetilde{\mathfrak{X}}_1$. Prin urmare $\widetilde{\mathfrak{X}}_1 \subseteq \widetilde{\mathfrak{X}}_{\widetilde{T}}(F)$. Fie acum o $\mathbf{S}^d_T$ — acoperire a lui $\sigma(T)$, anume $\{H_1\} \cup \{H_{\mathbf{S}^d_T}\}$, astfel încît $H_1 \supseteq \sigma(T_0)$, $\overline{H}_1 \cap F_2 = \varnothing$, $H_{\mathbf{S}^d_T} \supseteq \mathbf{S}^d_T \cup F_2$ și $\overline{H}_{\mathbf{S}^d_T} \cap \sigma(T_0) = \varnothing$. Atunci orice $x \in \mathfrak{X}_T(F \cup \sigma(T_0))$ se va scrie ca

$$x = x_1 + x_2, \text{ unde } \sigma_T(x_1) \subseteq \sigma(T_0) \cup F_1, \text{ deci } x_1 \in \mathfrak{X}_1.$$

Remarcăm de asemenea că $\sigma_{\widetilde{T}}(\widetilde{x}_{\mathbf{s}}) \subseteq \sigma_T(x_{\mathbf{s}}) = \sigma_T(x_{\mathbf{s}}) \cap \overline{H}_{\mathbf{S}^d_T} \subseteq \sigma_T(x) \cap \cap \overline{H}_{\mathbf{S}^d_T} \subseteq [F \cup \sigma(T_0)] \cap \overline{H}_{\mathbf{S}^d_T} \subseteq F$. Așadar vom avea

$$\widetilde{x} = \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_{\mathbf{s}} \in \widetilde{\mathfrak{X}}_{\widetilde{T}}(F).$$

De aici rezultă și cealaltă incluziune, deci egalitatea e demonstrată. Prin urmare rezultă că $\mathfrak{X}_T(F \cup \sigma(T_0))$ e un spațiu maximal invariant.

În fapt, prin procedeul utilizat mai sus, noi am demonstrat egalitatea :

$$\{\tilde{x}\,;\, x \in \mathfrak{X}_T(F \cup \sigma(T_0))\} = \tilde{\mathfrak{X}}_{\tilde{T}}(F),$$

adică faptul că cele două varietăţi liniare se corespund prin aplicaţia canonică. Prin urmare dacă $\mathfrak{X}_T(F \cup \sigma(T))$ e închis, atunci şi $\tilde{\mathfrak{X}}_{\tilde{T}}(F)$ e închis, căci este imagine a unui subspaţiu închis ce conţine nucleul unei aplicaţii deschise prin acea aplicaţie (adică aplicaţia canonică). Acum este evident faptul că T este tare rezidual decompozabil, deoarece T are această proprietate şi există corespondenţa semnalată între spaţiile maximal invariante. Ne-a mai rămas să arătăm că $\mathrm{S}^d_{\tilde{T}} \subseteq \mathrm{S}^d_T$. Pentru aceasta să notăm $\tilde{\mathrm{S}} = \mathrm{S}^d_T$ şi fie $\{\tilde{G}_j\}_{j=1}^n \cup \{G_{\tilde{\mathrm{S}}}\}$ o $\tilde{\mathrm{S}}$-acoperire a lui $\sigma(\tilde{T}) \subseteq \subseteq \overline{\sigma(T) \setminus \sigma(T_0)}$. Vom înlocui mulţimile $\tilde{G}_j$ cu G_j astfel încît $\{G_j\}_{j=1}^n \cup \{G_{\tilde{\mathrm{S}}}\}$ să formeze o $\tilde{\mathrm{S}}$-acoperire a lui $\overline{\sigma(T) \setminus \sigma(T_0)}$ şi $\overline{G}_j \cap \sigma(\tilde{T}) \subseteq G_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Vom alege de asemenea mulţimea G_0 deschisă, cu $\overline{G}_0 \cap \overline{\sigma(T) \setminus \sigma(T_0)}$, astfel încît $\{G_j\}_{j=0}^n \cup \{G_{\tilde{\mathrm{S}}}\}$ să formeze o $\tilde{\mathrm{S}}$-acoperire a lui $\sigma(T)$. Fără a micşora generalitatea, vom putea presupune că $\overline{G}_{\tilde{\mathrm{S}}} \cap \sigma(T_0) = \emptyset$, ceea ce e posibil deoarece $\mathrm{S} \cap \sigma(T_0) \neq \emptyset$. Există atunci spaţiile maximal invariante ale lui T, anume $\{\mathfrak{X}_j\}$ $(j = 0, \ldots, n)$, şi să notăm $F_j = \sigma(T \mid \mathfrak{X}_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$. Fie $\mathfrak{Y}_j = \mathfrak{X}_T(F_j \cup \sigma(T_0))$ evident maximal invariante şi să considerăm spaţiile care le corespund prin aplicaţia canonică $\tilde{\mathfrak{Y}}_j = \tilde{\mathfrak{X}}_{\tilde{T}}(F_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$. Evident, $\sigma(\tilde{T} \mid \tilde{\mathfrak{Y}}_j) \subseteq F_j \subseteq G_j$. Fie acum $\tilde{x} \in \tilde{\mathfrak{X}}$. Alegînd $x \in \tilde{x}$, obţinem

$$x = x_0 + x_1 + \ldots + x_n + x_{\mathrm{S}}.$$

Dar $x_0 \in \mathfrak{X}_0$ şi $\sigma(T \mid \mathfrak{X}_0) \subseteq G_0 \cap \sigma(T) \subseteq \sigma(T_0)$, deci $x_0 \in \mathfrak{Y}_0$ şi atunci

$$\tilde{x} = \tilde{x}_1 + \ldots + \tilde{x}_n + \tilde{x}_{\mathrm{S}},$$

unde $\tilde{x}_j \in \tilde{\mathfrak{Y}}_j$, $\sigma_{\tilde{T}}(\tilde{x}_{\mathrm{S}}) \subseteq \sigma_T(x_{\mathrm{S}}) \subseteq \overline{G}_{\tilde{\mathrm{S}}}$.

Vom demonstra acum localizarea spectrului. Să remarcăm relaţia $\sigma_{\tilde{T}}(\tilde{z}) \subseteq \sigma_T(z) \subseteq \sigma_{\tilde{T}}(\tilde{z}) \cup \sigma(T_0)$, dedusă la începutul acestei demonstraţii, oricare ar fi $z \in \tilde{z} \in \tilde{\mathfrak{X}}$. În particular :

$$\sigma_{\tilde{T}}(\tilde{x}_{\mathrm{S}}) \subseteq \sigma_T(x_{\mathrm{S}}) \cap \overline{G}_{\tilde{\mathrm{S}}} \subseteq \sigma_T(x) \cap \overline{G}_{\tilde{\mathrm{S}}} \subseteq$$

$$\subseteq [\sigma_{\tilde{T}}(\tilde{x}) \cup \sigma(T_0)] \cap \overline{G}_{\tilde{\mathrm{S}}} \subseteq \sigma_{\tilde{T}}(\tilde{x}) \cup (\sigma(T_0) \cap \overline{G}_{\tilde{\mathrm{S}}}).$$

Dar $\overline{G}_{\tilde{\mathrm{S}}} \cap \tilde{\mathrm{S}} = \emptyset$ prin alegerea acoperirii, de unde rezultă că avem relaţia $\sigma_{\tilde{T}}(\tilde{x}_{\mathrm{S}}) \subseteq \sigma_{\tilde{T}}(\tilde{x})$, deci $\sigma_{\tilde{T}}(\tilde{y}) \subseteq \sigma_T(\tilde{x})$, unde $y = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$. Fie acum $F = \sigma_{\tilde{T}}(\tilde{y})$. Spaţiul $\mathfrak{X}_F = \mathfrak{X}_T(F \cup \sigma(T_0))$ e maximal invariant şi $T_F = T \mid \mathfrak{X}_F$ are reziduul spectral vid. Cum $\{G_j\}_{j=0}^n$ e o acoperire a lui $\sigma(T_F) \subseteq F \cup \sigma(T_0)$, rezultă că avem

$$\mathfrak{X}_T(F \cup \sigma(T_0)) = \sum_{j=0}^{n} \mathfrak{X}_T(F \cap \overline{G}_j) \cup \sigma(T_0)),$$

așadar

$$y = y_0 + y_1 + \cdots + y_n.$$

De aici $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \ldots + \tilde{y}_n$ $(\tilde{y}_0 = \tilde{0}$ căci $y_0 \in \mathfrak{Y}_0!)$ și $\sigma_{\tilde{T}}(\tilde{y}_j) \subseteq \overline{G}_j \cap F \subseteq$ $\subseteq F = \sigma_{\tilde{T}}(\tilde{y}) \subseteq \sigma_{\tilde{T}}(\tilde{x})$, deci localizarea căutată. În plus

$$\sigma(\tilde{T} \mid \tilde{\mathfrak{X}}_{\tilde{T}}(\overline{G}_j)) \subseteq \overline{G}_j \cap \sigma(\tilde{T}) \subseteq \overline{G}_j \quad (j=1, \ldots, n),$$

deci $\tilde{Z}_j = \tilde{\mathfrak{X}}_{\tilde{T}}(\overline{G}_j)$ sînt spațiile maximal invariante căutate. În sfîrșit, familia $\mathcal{J}_{\tilde{T}, F}$ are un element maxim pentru orice $F \subseteq \mathbf{C}_\infty$ închis cu $F \cap \tilde{\mathbf{S}} = \varnothing$, căci $\mathcal{J}_{T, F \cup \sigma(T_0)}$ are această proprietate. Din teorema 4.3 rezultă atunci $\mathbf{S}^d_{\tilde{T}} \subseteq \tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}^d_T$.

5. TRANSPORTUL ANALITIC AL PROPRIETĂȚILOR REZIDUALE

În cuprinsul acestui paragraf vom studia modul în care analiticitatea acționează asupra proprietăților reziduale definite anterior. Amintim că pentru orice operator $T \in C(\mathfrak{X})$ am notat cu $\mathcal{F}(T)$ familia funcțiilor analitice într-o vecinătate a lui $\sigma(T)$ și că pentru orice $f \in \mathcal{F}(T)$, dacă $\rho(T) \neq \varnothing$, se poate defini

$$f(T) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma f(\lambda)\, R(\lambda;\, T)\, d\lambda & \sigma(T) \not\ni \infty \\[2ex] f(\infty)\, I + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma f(\lambda)\, R(\lambda;\, T)\, d\lambda & \sigma(T) \ni \infty, \end{cases}$$

unde Γ e un contur admisibil pentru calculul integral, conținut în $\rho(T)$, ce „înconjoară" pe $\sigma(T)$ în accepția uzuală a acestei expresii.

LEMA 5.1. *Fie* $T \in C(\mathfrak{X})$ $(\rho(T) \neq \varnothing)$ *și fie* $f \in \mathcal{F}(T)$. *Dacă* $\sigma(T) \ni \infty$ *și dacă* f *are în* ∞ *un zero de ordin* n, *atunci pentru orice polinom* P *al cărui grad nu depășește* n *avem* $g(\lambda) = P(\lambda) f(\lambda) \in F(T)$, $g(T) = P(T)\, f(T)$ *și* $P(T)\, f(T)\, x = f(T)\, P(T)\, x$ *pentru orice* $x \in \mathfrak{D}_{P(T)}$.

Demonstrarea acestui rezultat se face ca în Dunford și Schwartz [15, Th. VII, 9.8] așa încît o vom omite.

LEMA 5.2. *Fie* $T \in C(\mathfrak{X})$ $(\rho(T) \neq \varnothing)$. *Dacă* $\sigma(T) \ni \infty$ *și dacă* $f \in \mathcal{F}(T)$ *nu are zerouri în* $\sigma(T)$ *cu excepția punctului de la infinit în care are un zero de ordin* n, *atunci* $[f(T)]^{-1} \in C(\mathfrak{X})$ *și* $\mathfrak{D}_{[f(T)]^{-1}} = \mathfrak{D}_{T^n}$.

Demonstrația acestui fapt, de altfel destul de imediată, se face ca în Dunford și Schwartz [15, th. VII, 9.9] și o vom omite.

LEMA 5.3. *Fie* $T \in C(\mathfrak{X})$ $(\rho(T) \neq \varnothing)$ *și* $\sigma(T) \ni \infty$ *iar* $f(\lambda, \mu)$ *o funcție analitică în* λ *și* μ *cu proprietatea că* $f(., \mu) \in \mathcal{F}(T)$ *pentru orice* μ. *Mai presupunem că pentru orice* μ *fixat, funcția analitică* $\lambda \to f(\lambda, \mu)$

are la infinit un zero de ordin n, independent de μ. Atunci pentru orice polinom $P_\mu(\lambda)$ de grad strict mai mic ca n, ai cărui coeficienți depind analitic de μ, aplicația

$$\mu \to P_\mu(T)\, f(T, \mu)$$

e analitică (sensul notației simbolice fiind evident).

Demonstrație. Să notăm $g(\lambda, \mu) = P_\mu(\lambda) f(\lambda, \mu)$. Din lema 5.1 rezultă că $g(.,\mu) \in \mathcal{F}(T)$ pentru orice μ și că $g(T, \mu) = P\mu(T) f(T, \mu)$. E suficient să demonstrăm analiticitatea aplicației $\mu \to g(T, \mu)$ și acest fapt rezultă din relația:

$$\frac{g(T, \mu_1) - g(T, \mu_2)}{\mu_1 - \mu_2} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\lambda, \mu_1) - g(\lambda, \mu_2)}{\mu_1 - \mu_2} R(\lambda, T)\, d\lambda$$

(unde am utilizat faptul că $g(\infty, \mu) = 0$) folosind compacitatea în $\mathbf{C}$ a lui Γ și deci mărginirea familiei $\{R(\lambda, T);\ \lambda \in \Gamma\}$.

TEOREMA 5.1. *Fie $T \in C(\mathfrak{X})$ $(\rho(T) \neq \emptyset)$ și fie $f \in \mathcal{F}(T)$ cu popprietatea că pentru orice $\mu \in f(\sigma(T)) \setminus f(\mathbf{S}_T)$ ecuația $\mu - f(\lambda) = 0$ are cel mult un număr finit de soluții. Atunci are loc relația $\mathbf{S}_{f(T)} \subseteq f(\mathbf{S}_T)$.*

Demonstrație. Vom proceda prin reducere la absurd. Să presupunem că există o funcție analitică nenulă, fie ea $h : \omega \to \mathfrak{X}$ care verifică ecuația:

$$(\mu I - f(T)\ h(\mu) \equiv 0 \qquad (\mu \in [\omega \setminus f(\mathbf{S}_T)] \cap \mathbf{C}).$$

Vom putea alege un disc $D \subseteq f(\sigma(T)) \setminus f(\mathbf{S}_T)$ în care vom presupune că avem $h(\mu) \not\equiv 0$. Fie $\{\lambda_j'\}$ mulțimea soluțiilor ecuației $f'(\lambda) = 0$ în $\sigma(T)$. E ușor de văzut că $D \setminus \overline{\{f(\lambda_j')\}} \neq \emptyset$ căci dacă $f(\lambda_j')\}$ ar fi densă în D, cum punctele $\{\lambda_j'\}$ se pot acumula cel mult la infinit (dacă $\sigma(T) \not\ni \infty$ afirmația e trivială!), din analicitatea la infinit ar rezulta $f(\lambda) = f(\infty)$ pentru orice $f(\lambda) \in D$ ceea ce e absurd.

Prin urmare există un disc $D_1 = \overline{D}_1 \subseteq D \setminus \overline{\{f(\lambda_j')\}}$ astfel încît dacă $\mu \in D_1$, ecuația $\mu - f(\lambda) = 0$ are numai soluții simple în $\sigma(T)$. Dacă $\sigma(T) \ni \infty$, putem presupune de asemenea că $f(\infty) \notin D_1$. În general numărul soluțiilor depinde de $\mu \in D_1$, dar aplicarea teoremei lui Rouché ne permite să găsim un disc $D_2 = \overline{D}_2 \subseteq D_1$ astfel încît dacă $\mu \in D_2$, ecuația $\mu - f(\lambda) = 0$ să aibă soluțiile

$$\lambda_1(\mu),\ \lambda_2(\mu), \ldots,\ \lambda_n(\mu) \in \sigma(T) \setminus \mathbf{S}_T,$$

unde $\mu \in D_2$, $\mu \to \lambda_j(\mu)$ e analitică în D_2 $(j = 1, \ldots, n)$ iar n e un număr întreg nenegativ ce nu depinde de μ. Vom putea atunci să definim funcția

$$g_\mu(\lambda) = \begin{cases} [\mu - f(\lambda)] \prod\limits_{j=1}^{n} [\lambda_j(\mu) - \lambda]^{-1} & \lambda \neq \lambda_j(\mu) \quad (j = 1, \ldots, n) \\ \\ f'(\lambda_k(\mu)) \prod\limits_{j \neq k} [\lambda_j(\mu) - \lambda]^{-1} & \lambda = \lambda_k(\mu) \end{cases}$$

pentru $\lambda \in \sigma(T) \cap \mathbf{C}$ şi $\mu \in D_2$. Evident, dacă $\sigma(T) \ni \infty$, atunci $g_\mu(\lambda)$ se poate defini şi în acest punct. Întrucît pentru $\mu \in D_2$ fixat mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\mu - f(\lambda) = 0$ e finită, din raţionamente de continuitate şi de compacitate a mulţimii D_2 în $\mathbf{C}$, putem afirma că funcţia $g_\mu(\lambda)$ e analitică într-o vecinătate a lui $\sigma(T)$ ca funcţie de λ. Mai remarcăm că dacă $\infty \in \sigma(T)$, atunci el este un zero de ordinul n pentru $g_\mu(\lambda)$. Pentru acest caz vom aplica lema 5.1 cu $f(\lambda) = g_\mu(\lambda)$ şi $P(\lambda) = [\lambda_1(\mu) - \lambda] \dots [\lambda_n(\mu) - \lambda]$ obţinînd relaţia

$$[\lambda_1(\mu) I - T] \dots [\lambda_n(\mu) I - T]\, g_\mu(T) = \mu I - f(T).$$

(care pentru $\sigma(T) \not\ni \infty$ rezultă direct din calculul funcţional). Vom putea atunci să scriem relaţia:

$$[\lambda_1(\mu) I - T] \dots [\lambda_n(\mu) I - T]\, k(\mu) \equiv 0,$$

unde am notat $k(\mu) = g_\mu(T)\, h(\mu)$. E uşor de văzut că $\lambda_1(\mu)$ e neconstantă căci dacă $\lambda_1(\mu) = \lambda_1^0$, atunci $\mu = f(\lambda_1^0)$ pentru $\mu \in D_2$ ceea ce e absurd.

Aşadar vom putea alege un disc $D_1^0 \subseteq D_2$ astfel încît $\lambda_1'(\mu) \neq 0$, deci λ_1^{-1} să existe pe $\lambda_1(D_1^0) \subseteq \sigma(T) \setminus \mathbf{S}_T$.

Obţinem atunci pentru $\lambda \in \lambda_1(D_1^0)$

$$[\lambda I - T]\, [\lambda_2(\lambda_1^{-1}(\lambda)) I - T] \dots [\lambda_n(\lambda_1^{-1}(\lambda)) I - T]\, k(\lambda_1^{-1}(\lambda)) \equiv 0.$$

Aplicarea lemei 5.3 cu $f(\lambda, \mu) = g_\mu(\lambda)$ şi cu $P_\mu(\lambda) = [\lambda_2(\mu) - \lambda] \dots [\lambda_n(\mu) - \lambda]$ ne permite să afirmăm analiticitatea aplicaţiei

$$\mu \to [\lambda_2(\mu) I - T] \dots [\lambda_n(\mu) I - T]\, g_\mu(\lambda)$$

(care pentru $\sigma(T) \not\ni \infty$ e evidentă!), deci a aplicaţiei

$$\lambda \to [\lambda_2(\lambda_1^{-1}(\lambda)) I - T] \dots [\lambda_n(\lambda_1^{-1}(\lambda)) I - T]\, k(\lambda_1^{-1}(\lambda))$$

şi cum $\lambda_1(D_1^0) \subseteq \sigma(T) \setminus \mathbf{S}_T$, vom putea scrie că

$$[\lambda_2(\lambda_1^{-1}(\lambda)) I - T] \dots [\lambda_n\, \lambda_1^{-1}(\lambda) I - T]\, k(\lambda_1^{-1}(\lambda)) \equiv 0.$$

Din considerente similare cu cele de mai sus, vom putea alege discul $D_2^0 \subseteq D_1^0$ astfel încît pentru D_2^0 funcţia $\mu \to \lambda_2(\mu)$ să fie invertibilă pe $\lambda_2(D_2^0)$ etc. Procedînd prin recurenţă, vom obţine pînă la urmă:

$$g_{(\lambda_1 \circ \dots \circ \lambda_n)} - 1_{(\lambda)}(T)\, h((\lambda_1 \circ \dots \circ \lambda_n)^{-1})\, (\lambda)) \equiv 0$$

pentru $\lambda \in \lambda_n(D_n^0) \subseteq \sigma(T) \setminus \mathbf{S}_T$. Pentru a sfîrşi demonstraţia vom apela la lema 5.2 luînd $f(\lambda) = g_\mu(\lambda)$, deci putînd afirma injectivitatea operatorului $g_\mu(T)$ pentru orice μ (dacă $\sigma(T) \not\ni \infty$, atunci $g_\mu(\lambda)$ e invertibilă în vecinătatea lui $\sigma(T)$, deci $[g_\mu(T)]^{-1} \in B(\mathfrak{X})$!). Avem aşadar $h((\lambda_1 \circ \ldots \circ \lambda_n)^{-1}(\lambda)) \equiv 0$, deci $h(\mu) \equiv 0$ pentru $\mu \in D \supseteq D_2$ ceea ce e în contradicţie cu ipoteza făcută. Aşadar $f(T)$ are prelungibilitate analitică $f(\mathrm{S}_T)$-reziduală şi din minimalitate deducem relaţia $\mathrm{S}_{f(T)} \subseteq f(S_T)$.

TEOREMA 5.2. *Fie* $T \in C(\mathfrak{X})$ $(\rho(T) \neq \varnothing)$ *şi fie* $f \in \mathcal{F}(T)$ *neconstantă pe nici o componentă conexă a domeniului ei de definiţie. Atunci are loc relaţia* $\mathrm{S}_T \subseteq f^{-1}(\mathrm{S}_{f(T)})$.

Demonstraţie. Să notăm cu $\mathrm{S}_0 = f^{-1}(\mathrm{S}_{f(T)})$ şi să presupunem că există un disc $D \subseteq \sigma(T) \setminus \mathrm{S}_0$ şi o funcţie analitică $h : D \to \mathfrak{D}_T$, $h(\lambda) \not\equiv 0$ astfel încît să fie verificată ecuaţia $(\lambda I - T)\, h(\lambda) \equiv 0$. Să definim funcţia :

$$g_\lambda(\xi) = \begin{cases} \dfrac{f(\lambda) - f(\xi)}{\lambda - \xi} & \xi \neq \lambda \\ \\ f'(\lambda) & \xi = \lambda \end{cases}$$

analitică în ambele variabile. Dacă $\sigma(T) \ni \infty$, atunci avem $\lim\limits_{\xi \to \infty} g_\lambda(\xi) = 0$, deci $g_\lambda \in \mathcal{F}(T)$ dacă $\lambda \in D$. Aplicarea lemei 5.1 ne conduce la relaţia :

$$f(\lambda)\, I - f(T) = (\lambda I - T)\, g_\lambda(T).$$

Cum $g_\lambda(T)\,(\lambda I - T)\, x = (\lambda I - T)\, g_\lambda(T)\, x$ pentru orice $x \in \mathfrak{D}_T$, obţinem $[f(\lambda)\, I - f(T)]\, h(\lambda) \equiv 0$.

(Dacă $\sigma(T) \not\ni \infty$ această ultimă relaţia se obţine fără a se trece prin lema 5.1). Deoarece $f(\lambda)$ e neconstantă pe nici o componentă conexă a domeniului ei de definiţie, rezultă $f'(\lambda) \not\equiv 0$. Vom alege $D_1 \subseteq D$ astfel încît f^{-1} să existe pe $f(D_1)$ şi fie $k(\mu) = h(f^{-1}(\mu))$. Vom obţine atunci pe $f(D_1)$

$$[\mu I - f(T)]\, k(\mu) \equiv 0.$$

Dar

$$f(D_1) \subseteq f(D) \subseteq f(\sigma(T) \setminus \mathrm{S}_0) = f(\sigma(T) \setminus f^{-1}(\mathrm{S}_{f(T)}) \subseteq \sigma(f(T)) \setminus \mathrm{S}_{f(T)},$$

prin urmare $k(\mu) \equiv 0$ pe $f(D_1)$, deci $h(\lambda) \equiv 0$ pe D, ceea ce e absurd. Aşadar avem neapărat relaţia $\mathrm{S}_T \subseteq f^{-1}(\mathrm{S}_{f(T)})$.

Din juxtapunerea ultimelor două rezultate vom obţine următoarea teoremă de aplicare a mulţimilor reziduale faţă de proprietatea de prelungibilitate analitică unică :

TEOREMA 5.3. *Fie* $T \in C(\mathfrak{X})$ $(\rho(T)) \neq 0)$ *şi* $f \in \mathcal{F}(T)$ *cu următoarele proprietăţi :*

(*i*) *Pentru orice* $\mu \in f(\sigma(T)) \setminus f(\mathrm{S}_T)$, *ecuaţia* $\mu - f(\lambda) = 0$ *are cel mult un număr finit de soluţii*

(*ii*) *Funcţia* $f(\lambda)$ *nu este constantă pe nici o componentă conexă a domeniului ei de definiţie.*

Atunci are loc relaţia $\mathrm{S}_{f(T)} = f(\mathrm{S}_T)$.

Vom studia acum posibilitatea de a obține rezultate similare pentru spectrele locale.

TEOREMA 5.4. *Fie* $T \in C(\mathfrak{X})$ $(\rho(T) \neq \emptyset)$, $f \in \mathcal{F}(T)$ *și* $F \subseteq \mathbf{C}_\infty$ închisă. *Dacă* $x \in \mathfrak{X}$ *cu* $\gamma_T(x) \subseteq f^{-1}(F)$ *posedă o funcție T-asociată* f_x *univoc definită în toate componentele conexe ale lui* $\complement f^{-1}(F)$, *atunci* $\gamma_{f(T)}(x) \subseteq \subseteq F \cup \{f(\infty)\}$ (vom lua $\{f(\infty)\} = \emptyset$ dacă $\sigma(T) \not\ni \infty$).

Demonstrație. Fie $x \in \mathfrak{X}$ un element cu proprietatea din enunț și să notăm $H = f^{-1}(F) \cap \sigma(T)$. Fie $\mu_0 \in \complement(F \cup f(\infty))$ și $D_0 = \overline{D}_0$ un disc cu centrul în μ_0, astfel ca $D_0 \cap (F \cup \{f(\infty)\}) = \emptyset$. Avem atunci $f^{-1}(D_0) \cap f^{-1}(F) = \emptyset$. Să remarcăm că dacă $\sigma(T) \ni \infty$, atunci $f^{-1}(D_0)$ e compactă în $\mathbf{C}$ deoarece e închisă în $\mathbf{C}_\infty$ și nu conține punctul de la infinit. Să notăm

$$H_\infty = \begin{cases} H & \sigma(T) \not\ni \infty \\ H \cup \{\infty\} & \sigma(T) \ni \infty \end{cases}$$

și să „înconjurăm" mulțimea H_∞ cu un sistem de curbe Γ_0, admisibil pentru calculul integral, astfel încît $f^{-1}(D_0)$ ca și singularitățile lui f să se afle în interiorul sau exteriorul domeniului delimitat în $\mathbf{C}$ de Γ_0, după cum ∞ aparține sau nu lui $\sigma(T)$. Vom defini atunci funcția:

$$h(\mu) = \begin{cases} [\mu - f(\infty)]^{-1} + \dfrac{1}{2\pi c}\displaystyle\int_{\Gamma_0} \dfrac{f_x(\lambda)}{\mu - f(\lambda)}\, \mathrm{d}\lambda & \sigma(T) \ni \infty \\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_0} \dfrac{f_x(\lambda)}{\mu - f(\lambda)}\, \mathrm{d}\lambda & \sigma(T) \not\ni \infty \end{cases}$$

care e o funcție analitică în D_0. Vom arăta că avem $[\mu I - f(T)]\, h(\mu) = x$. Pentru aceasta va fi nevoie de cîteva calcule preliminare. Vom alege un alt sistem de curbe Γ care să „înconjoare" pe $\sigma(T)$ și pe Γ_0, conținut în domeniul de definiție al funcției f. Să remarcăm că pentru $\xi \in \Gamma$ și $\lambda \in \Gamma_0$ avem relația:

$$R(\xi, T) f_x(\lambda) = \frac{R(\xi, T)\, x - f_x(\lambda)}{\lambda - \xi}.$$

Să observăm că atunci vom avea, în ipoteza că $\sigma(T) \ni \infty$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [\mu - f(\xi)] \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{R(\xi, T) f_x(\lambda)}{\mu - f(\lambda)}\, \mathrm{d}\lambda\right) \mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [\mu - f(\xi)] \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{R(\xi, T)\, x - f_x(\lambda)}{(\lambda - \xi)\, [\mu - f(\lambda)]}\, \mathrm{d}\lambda\right) \mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}[\mu - f(\xi)]\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{d\lambda}{(\lambda-\xi)[\mu-f(\lambda)]}\right)R(\xi, T)\,x\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}[\mu - f(\xi)]\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{f_x(\lambda)}{(\lambda-\xi)[\mu-f(\lambda)]}\,d\lambda\right)d\xi =$$

$$= -\frac{[\mu-f(\infty)]^{-1}}{2\pi i}\int_{\Gamma}[\mu-f(\xi)]\,R(\xi, T)\,x\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{f_x(\lambda)}{\mu-f(\lambda)}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu-f(\xi)}{\lambda-\xi}\,d\xi\right)d\lambda =$$

$$= -\frac{[\mu-f(\infty)]^{-1}}{2\pi i}\int_{\Gamma}[\mu-f(\xi)]\,R(\xi, T)\,x\,d\xi -$$

$$-\frac{\mu-f(\infty)}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{f_x(\lambda)}{\mu-f(\lambda)}\,d\lambda$$

deoarece, din modul în care am ales sistemele Γ_0 și Γ, avem:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{d\lambda}{(\lambda-\xi)[\mu-f(\lambda)]} = -[\mu-f(\infty)]^{-1},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu-f(\xi)}{\lambda-\xi}\,d\xi = f(\lambda) - f(\infty),$$

iar

$$\int_{\Gamma_0} f_x(\lambda)\,d\lambda = 0.$$

Deoarece în aceeași ipoteză avem:

$$\mu I - f(T) = [\mu - f(\infty)]\,I + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}[\mu-f(\xi)]\,R(\xi, T)\,d\xi,$$

atunci vom putea scrie:

$$[\mu I - f(T)]\,h(\mu) = x + \frac{\mu-f(\infty)}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{f_x(\lambda)}{\mu-f(\lambda)}\,d\lambda +$$

$$+\frac{[\mu-f(\infty)]^{-1}}{2\pi i}\int_{\Gamma}[\mu-f(\xi)]\,R(\xi, T)\,x\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}[\mu-f(\xi)]\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{R(\xi, T)\,f_x(\lambda)}{\mu-f(\lambda)}\,d\lambda\right)d\xi = x,$$

ţinînd cont şi de faptul că ultima expresie a fost calculată anterior. Un calcul asemănător se face dacă $\sigma(T) \not\ni \infty$ cu remarca că atunci

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{\mathrm{d}\lambda}{(\lambda-\xi)\,[\mu - f(\lambda)]} = 0$$

datorită analiticităţii, iar

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} f_x(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R(\lambda, T)\,x\,\mathrm{d}\lambda = x.$$

În acest mod am obţinut faptul că $\mu_0 \in \delta_{f(T)}(x)$ iar $\gamma_{f(T)}(x) \subseteq f(\sigma(T))$ e compactă în $\mathbf{C}$, deci cu aceasta, relaţia $\gamma_{f(T)}(x) \subseteq F \cup \{f(\infty)\}$ a fost stabilită.

COROLARUL 1. *Fie* T *şi* f *ca în teorema precedentă şi* $F \subseteq \mathbf{C}_\infty$ *închisă cu proprietatea că orice* $x \in \mathfrak{X}$ *cu* $\gamma_T(x) \subseteq f^{-1}(F)$ *posedă o funcţie* T *asociată* f_x *univoc definită pe toate componentele conexe ale lui* $\complement f^{-1}(F)$. *Atunci are loc relaţia*

$$\breve{\mathfrak{X}}_T(f^{-1}(F)) \subseteq \breve{\mathfrak{X}}_{f(T)}(F \cup \{f(\infty)\}).$$

Folosind teorema precedentă demonstraţia e trivială.

TEOREMA 5.5. *Fie* $T \in C(\mathfrak{X})$ $(\rho(T) \neq \emptyset)$ *şi* $f \in \mathcal{F}(T)$ *o funcţie neconstantă pe nici o componentă conexă a domeniului ei de definiţie. Dacă* $F \subseteq \mathbf{C}_\infty$ *este o mulţime închisă cu proprietatea* $F \supseteq S_{f(T)}$, *atunci pentru orice* $x \in \mathfrak{X}$ *cu* $\sigma_T(x) \subseteq f^{-1}(F)$ *avem* $\sigma_{f(T)}(x) \subseteq F \cup \{f(\infty)\}$.

Demonstraţie. Deoarece $F \supseteq S_{f(T)}$, atunci, conform teoremei 5.2, vom avea $f^{-1}(F) \supseteq f^{-1}(S_{f(T)}) \supseteq S_T$, deci în afara mulţimii $f^{-1}(F)$ funcţia $x(\lambda)$ e bine definită oricare ar fi x cu $\sigma_T(x) \subseteq f^{-1}(F)$. Ca şi în teorema 5.4 vom defini în vecinătatea oricărui punct $\mu_0 \in \complement(F \cup \{f(\infty)\}) \cap \mathbf{C}$ o funcţie analitică

$$h(\mu) = \begin{cases} [\mu - f(\infty)]^{-1}x + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_0} \frac{x(\lambda)}{\mu - f(\lambda)}\,\mathrm{d}\lambda & \sigma(T) \ni \infty \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_0} \frac{x(\lambda)}{\mu - f(\lambda)}\,\mathrm{d}\lambda & \sigma(T) \not\ni \infty. \end{cases}$$

La fel ca în teorema amintită se verifică faptul că $[\mu I - f(T)]\,h(\mu) = x$ şi cum $F \supseteq S_{f(T)}$, va rezulta că avem $\sigma_{f(T)}(x) \subseteq F \cup \{f(\infty)\}$.

COROLARUL 1. *În condiţiile teoremei precedente are loc relaţia* $\mathfrak{X}_T(f^{-1}(F)) \subseteq \mathfrak{X}_{f(T)}(F \cup \{f(\infty)\})$.

TEOREMA 5.6. *Fie* $T \in C(\mathfrak{X})$ $(\rho(T) \infty \varnothing)$, $f \in \mathcal{F}(T)$ *şi* $F \subseteq \mathbf{C}\infty$ *o mulţime închisă. Atunci oricare ar fi* $x \in \mathfrak{X}$ *cu* $\gamma_{f(T)}(x) \subseteq F$, *are loc incluziunea* $\gamma_T(x) \subseteq f^{-1}(F)$.

Demonstraţie. Fie $x \in \mathfrak{X}$ cu $\gamma_{f(T)}(x) \subseteq F$. Aşadar în vecinătatea oricărui punct $\mu_0 \in \complement F$ există o funcţie analitică $h(\mu)$ care verifică $[\mu I - f(T)]\,h(\mu) = x$. Fie acum $\lambda_0 \in \complement f^{-1}(F)$. Considerînd o vecinătate V_{λ_0} a sa cu $V_{\lambda_0} \subseteq \complement f^{-1}(F)$, să remarcăm că $f(V_{\lambda_0}) \subseteq f(\complement f^{-1}(F)) \subseteq \complement F$, deci compunerea $h(f(\lambda))$ are sens pentru λ într-o vecinătate a lui λ_0, dacă $h(\mu)$ e analitică în vecinătatea lui $f(\lambda_0) = \mu_0$. Dar $f(\lambda) - f(\xi) = (\lambda - \xi)\, g_\lambda(\xi)$ cu $g_\lambda(\xi) \in \mathcal{F}(T)$, unde λ se ia din vecinătatea considerată. Pe baza lemei 5.1, avem că $[f(\lambda)\, I - f(T)]\, h(f(\lambda)) = (\lambda I - T)\, g_\lambda(T)\, h(f(\lambda))$ şi aplicaţia $\lambda \to g_\lambda(T)\, h(f(\lambda))$ e analitică, deci $\lambda_0 \in \delta_T(x)$. Avem aşadar neapărat $\gamma_T(x) \subseteq f^{-1}(F)$ şi teorema e demonstrată.

COROLARUL 1. *În condiţiile teoremei precedente are loc incluziunea* $\breve{\mathfrak{X}}_{f(T)}(F) \subseteq \breve{\mathfrak{X}}_T(f^{-1}(F))$.

COROLARUL 2. *Fie* $T \in C(\mathfrak{X})\, (\rho(T)) = \emptyset)$. *Dacă* $S_T = \emptyset$, *atunci* $S_{f(T)} = \emptyset$ *pentru orice* $f \in \mathcal{F}(T)$.

În adevăr avem $\breve{\mathfrak{X}}_{f(T)}(\emptyset) \subseteq \breve{\mathfrak{X}}_T(\emptyset) = \{0\}$ ceea ce ne asigură concluzia.

TEOREMA 5.7. *Fie* $T \in C(\mathfrak{X})\, (\rho(T) \neq \emptyset)$ *şi* $f \in \mathcal{F}(T)$ *cu proprietatea că pentru orice* $\mu \in f(\sigma(T)) \setminus f(S_T)$, *ecuaţia* $\mu - f(\lambda) = 0$ *are cel mult un număr finit de soluţii. Dacă* $F \subseteq \mathbf{C}\infty$ *este o mulţime închisă şi* $f^{-1}(F) \supseteq S_T$, *pentru orice* $x \in \mathfrak{X}$ *cu* $\sigma_{f(T)}(x) \subseteq F$ *avem* $\sigma_T(x) \subseteq f^{-1}(F)$.

Demonstraţie. Deoarece $f^{-1}(F) \supseteq S_T$, atunci, conform teoremei 5.1, avem că $F \supseteq f(S_T) \supseteq S_{f(T)}$. Dacă vom lua un punct $\lambda_0 \in \complement f^{-1}(F)$, întrucît $\mu_0 = f(\lambda_0) \in \complement F$, vom putea construi, ca în teorema precedentă, o funcţie T-asociată lui x, unică datorită condiţiei $f^{-1}(F) \supseteq S_T$.

COROLARUL 1. *În condiţiile teoremei precedente are loc incluziunea* $\mathfrak{X}_{f(T)}(F) \subseteq \mathfrak{X}_T(f^{-1}(F))$.

Evident, rezultatele obţinute în legătură cu spectrele locale se pot combina, se pot trage cîteva concluzii şi se pot obţine unele formule. Noi vom reţine trei cazuri particulare foarte importante.

PROPOZIŢIA 5.1. *Fie* $T \in B(\mathfrak{X})$. *Dacă* $\sigma(T) \not\ni \infty$ *şi dacă pentru o mulţime închisă* $F \subseteq \mathbf{C}_\infty$ *orice* $x \in \mathfrak{X}$ *cu* $\gamma_T(x) \subseteq f^{-1}(F)$ *posedă o funcţie T-asociată* f_x *univoc definită în toate componentele lui* $\complement f^{-1}(F)$, *atunci are loc egalitatea* $\breve{\mathfrak{X}}_{f(T)}(F) = \breve{\mathfrak{X}}_T(f^{-1}(F))$, *pentru orice* $f \in \mathcal{F}(T)$.

Demonstraţia acestui rezultat se obţine imediat din teoremele 5.4 şi 5.6. La fel se demonstrează şi

PROPOZIŢIA 5.2. *Fie* $T \in B(\mathfrak{X})$ *cu* $\sigma(T) \not\ni \infty$. *Dacă un element* $x \in \mathfrak{X}$ *posedă o funcţie T-asociată* f_x *univoc definită în toate componentele lui* $\delta_T(x)$, *atunci pentru orice* $f \in \mathcal{F}(T)$ *are loc egalitatea* $\gamma_{f(T)}(x) = f(\gamma_T(x))$.

Un rezultat similar se poate formula pentru spectrele locale de tip σ.

PROPOZIŢIA 5.3. *Fie* $T \in B(\mathfrak{X})$. *Fie* $\sigma(T) \not\ni \infty$ *şi* $f \in \mathcal{F}(T)$ *cu proprietatea că* $f(\lambda)$ *nu e constantă pe nici-o componentă a domeniului său de definiţie. Dacă* $F \subseteq \mathbf{C}\infty$ *este o mulţime închisă şi* $F \supseteq S_{f(T)}$, *atunci are loc egalitatea* $\mathfrak{X}_{f(T)}(F) = \mathfrak{X}_T(f^{-1}(F))$.

Demonstraţia rezultă imediat din combinarea teoremelor 5.5 şi 5.7.(Condiţia din teorema 5.7 rezultă din compacitatea lui $\sigma(T)$!).

Condiţiile impuse funcţiilor analitice $f \in \mathcal{F}(T)$, menite să aplice reziduurile analitice pe mulţimi de acelaşi tip, sînt aproape greoaie. Ele devin mult mai simplu de exprimat dacă aceste mulţimi reziduale sînt vide. Este exact situaţia care apare atunci cînd se consideră operatori tare rezidual decompozabili care prin însăşi definiţia lor au prelungibilitate analitică unică.

PROPOZIŢIA 5.4. *Fie* $T \in B(\mathfrak{X})$ *cu* $\sigma(T) \not\ni \infty$ *şi cu* $S_T = \emptyset$. *Atunci pentru orice funcţie* $f \in \mathcal{F}(T)$ *are loc incluziunea* $S^d_{f(T)} \subseteq f(S^d_T)$.

Demonstrație. Deoarece $S_T = \emptyset$ iar $f \in \mathcal{F}(T)$ are proprietatea din enunț, e ușor de văzut că ne aflăm în ipotezele din teoremm 5.1. Așadar $\breve{\mathfrak{X}}_{f(T)}(\emptyset) \subseteq \breve{\mathfrak{X}}_T(\emptyset) = \{0\}$, deci $\mathbf{S}_{f(T)} = \emptyset$. Să notăm $\mathbf{S} = f(\mathbf{S}_T^d)$ și să verificăm că $f(T)$ e $\mathbf{S}$-rezidual decompozabil și un spectru localizat. Pentru aceasta fie mai întîi $F \subseteq \mathbf{C}_\infty$ o mulțime închisă cu $F \cap \mathbf{S} = \emptyset$. Atunci avem și $f^{-1}(F) \cap \mathbf{S}_T^d \subseteq f^{-1}(F \cap \mathbf{S}) = \emptyset$, deci $\mathfrak{X}_{T, f^{-1}(F)}$ există și propoziția 5.2 ne permite să afirmăm egalitatea $\mathfrak{X}_{f(T), F} = \mathfrak{X}_{T, f^{-1}(F)}$, deci familia $\mathcal{G}_{f(T), F}$ admite un element maximal. Fie acum $\{G_j\}_{j=1}^n \cup \{G_{\mathbf{S}}\}$ o $\mathbf{S}$-acoperire a lui $\sigma(f(T))$. Să notăm $H_j = \overset{0}{\widehat{f^{-1}(\overline{G}_j)}}$ $(j = 1, \ldots, n)$ și $H_0 = \overset{0}{\widehat{f^{-1}(\overline{G}_{\mathbf{S}})}}$. Familia $\{H_j\}_{j=1}^n \cup \{H_0\}$ formează o $\mathbf{S}_T^d$-acoperire a lui $\sigma(T)$ ceea ce e ușor de verificat. Fie $\mathfrak{X}_{T, L_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ spațiile maximal invariante corespunzătoare acestei $\mathbf{S}_T^d$-acoperiri a lui $\sigma(T)$. Notăm $F_j = f(L_j)$. Avem atunci evident $L_j \subseteq H_j = f^{-1}(F_j)$, deci $\mathfrak{X}_{f(T), F_j} = \mathfrak{X}_{T, H_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Fie acum $x \in \mathfrak{X}$. El admite o descompunere

$$x = x_1 + \ldots + x_n + x_{\mathbf{S}},$$

unde $x_j \in \mathfrak{X}_{T, L_j} \subseteq \mathfrak{X}_{f(T), F_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Să remarcăm acum că aplicarea corolarului 2 al teoremei 5.6 precum și a propoziției 5.2 ne conduce la concluzie $\sigma_{f(T)}(x) = f(\sigma_T(x))$ pentru orice $x \in \mathfrak{X}$. Avem așadar $\sigma_{f(T)}(x_j) = f(\sigma_T(x_j)) \subseteq f(\sigma_T(x)) = \sigma_{f(T)}(x)$. Avem apoi

$$\sigma_{f(T)}(x_{\mathbf{S}}) = f(\sigma_T(x_{\mathbf{S}})) \subseteq f(\overline{H}_0) = f(f^{-1}(\overline{G}_{\mathbf{S}})) = \overline{G}_{\mathbf{S}}.$$

În sfîrșit, ceea ce a mai rămas de verificat rezultă din egalitatea $\mathfrak{X}_{f(T)}(F) = \mathfrak{X}_T(f^{-1}(F))$, valabilă în condițiile noastre pentru orice F compactă în $\mathbf{C}$, deci $\mathbf{S}_{f(T)}^d \subseteq f(\mathbf{S}_T^d)$.

COROLARUL 1. *Fie $T \in B(\mathfrak{X})$ cu $\sigma(T) \not\ni \infty$ și cu $\mathbf{S}_T = \emptyset$, S-rezidual decompozabil. Atunci pentru orice $f \in \mathcal{F}(T)$, operatorul $f(T)$ este $f(\mathbf{S})$-rezidual decompozabil.*

Propoziția 5.1 și corolarul 2 al teoremei 5.6 ne dau $\mathfrak{X}_{f(T)}(F) = \mathfrak{X}_T(f^{-1}(F))$ pentru orice $F \subseteq \mathbf{C}$ compactă. Restul verificărilor se fac la fel.

Propoziția 5.5. *Fie $T \in B(\mathfrak{X})$ cu $\sigma(T) \not\ni \infty$ tare rezidual decompozabil. Atunci pentru orice funcție $f \in \mathcal{F}(T)$ injectivă într-o vecinătate a lui $\sigma(T)$ are loc egalitatea $\mathbf{S}_{f(T)}^d = f(\mathbf{S}_T^d)$.*

Demonstrație. Propoziția precedentă ne oferă o incluziune. Pentru a demonstra cealaltă incluziune, se notează cu $\mathbf{S} = f^{-1}(\mathbf{S}_{f(T)}^d)$ și se consideră o $\mathbf{S}$-acoperire a lui $\sigma(T)$. Aceasta se transportă prin aplicația injectivă f într-o $\mathbf{S}_{f(T)}^d$-acoperire a lui $\sigma(f(T))$ și prin intermediul acesteia se verifică faptul că T e $\mathbf{S}$-rezidual decompozabil și cu spectru localizat, verificare standard la care vom renunța. De aici obținem $\mathbf{S}_T^d \subseteq f^{-1}(\mathbf{S}_{f(T)}^d)$, deci, în definitiv, egalitatea din enunț.

COROLARUL 1. *Fie $T \in B(\mathfrak{X})$ cu $\sigma(T) \not\ni \infty$ și cu $S_T = \emptyset$. Dacă $f \in \mathcal{F}(T)$ e injectivă, atunci T este $\mathbf{S}$-rezidual decompozabil dacă și numai dacă $f(T)$ este $f(\mathbf{S})$-rezidual decompozabil.*

Calculul funcțional cu funcții analitice în vecinătatea spectrului, privit ca un ,,transport'', are la cel puțin unul din capete un operator mărginit. Această caracteristică are influență nefastă asupra generalității, permiţînd în schimb unei clase destul de largi de funcţii analitice să fie luată în consideraţie. Rămîn totuşi în afara discuţiei cele mai simple expresii analitice — polinoamele — care nu aparţin mulţimii funcţiilor admisibile pentru calculul funcţional atunci cînd spectrul operatorului conţine punctul de la infinit; şi cum această situaţie e departe de a fi lipsită de importanţă, se impune abordarea cel puţin parţială a problemelor care au făcut obiectul primei părţi a acestui paragraf, în acest din urmă caz se ştie că iteratele unui operator închis se definesc prin recurenţă:

$$T^2 x = T\,Tx \text{ dacă } x \in \{y \in \mathfrak{D}_T;\ Ty \in \mathfrak{D}_T\}$$

ş.a.m.d. Deci fiind dat un polinom $P(\lambda)$ se poate considera operatorul $P(T)$ cu $\mathfrak{D}_{P(T)} = \mathfrak{D}_{T^n} \subseteq \mathfrak{D}_T$. Prin această operaţie se obţine tot un operator închis, aşa cum ne asigură

PROPOZIŢIA 5.6. *Dacă* $T \in C(\mathfrak{X})$ $(\rho(T)) \neq \emptyset)$, *atunci pentru orice polinom P operatorul* $P(T) \in C(\mathfrak{X})$.

Demonstraţia acestui fapt se face ca în cazul operatorilor închişi pe spaţii Banach (Dunford şi Schwartz, [15], Th. VII, 9.7) aşa încît nu o vom relua. Are loc şi o teoremă de aplicaţie a spectrului a cărei demonstraţie, fără a deveni mult mai complicată decît rezultatul corespunzător pe spaţii Banach (Dunford şi Schwartz, [15], Th. VII, 9.10), capătă un aspect mai specific.

PROPOZIŢIA 5.7. *Pentru orice* $T \in C(\mathfrak{X})$ $(\rho(T) \neq \emptyset)$ *şi orice polinom P are loc relaţia* $\sigma(P(T)) = P(\sigma(T))$.

Demonstraţie. Vom putea presupune de la început $\sigma(T) \ni \infty$ căci altfel $P \in \mathcal{F}(T)$ şi relaţia a fost demonstrată. Fie mai întîi $\xi_0 \notin P(\sigma(T))$. Atunci există o întreagă vecinătate a sa V_{ξ_0} cu proprietatea că dacă $\xi \in V_{\xi_0}$, avem $[\xi - P(\lambda)]^{-1} \in \mathcal{F}(T)$. Aşadar operatorul $g_\xi(T) \in B(\mathfrak{X})$, unde $g_\xi(\lambda) = [\xi - P(\lambda)]^{-1}$.

Să mai remarcăm că ne aflăm în condiţiile lemei 5.1, deci avem

$$g_\xi(T)[\xi I - P(T)]x = [\xi I - P(T)]g_\xi(T)x$$

pentru orice $\xi \in V_{\xi_0}$ şi $x \in \mathfrak{D}_{P(T)} = \mathfrak{D}_{T^n}$. Prin urmare $g_\xi(T) = [\xi I - P(T)]^{-1}$. Din relaţia

$$g_\xi(T)x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g_\xi(\lambda) R(\lambda; T)\,d\lambda$$

se poată obţine uşor mărginirea familiei

$$\{g_\xi(T)x;\ \xi \in V_{\xi_0}\}$$

pentru orice $x \in \mathfrak{X}$. Principiul mărginirii uniforme ne conduce la mărginirea familiei de operatori

$$\{[\xi I - P(T)]^{-1};\ \xi \in V_{\xi_0}\},$$

deci la concluzia că $\xi_0 \in \rho(P(T))$.

Fie acum $\mu_0 \notin \sigma(P(T))$ şi $V_{\mu_0} \subseteq \complement\,\sigma(P(T))$ vecinătatea lui μ_0 dată de definiţia spectrului. Fie λ_0 cu $P(\lambda_0) = \mu_0$ şi $W_{\lambda_0} = P^{-1}(V_{\mu_0})$. Ştim că dacă $\lambda \in W_{\lambda_0}$, atunci $P(\lambda) \notin \sigma(P(T))$, deci

$$\{[P(\lambda)I - P(T)]^{-1};\ \lambda \in W_{\lambda_0}\}$$

e o familie de operatori mărginită în $B(\mathfrak{X})$. Fie acum polinomul $Q_\lambda(\xi) = \dfrac{P(\lambda) - P(\xi)}{\lambda - \xi}$. Să remarcăm că din egalitatea

$$[P(\lambda) I - P(T)]\, x = Q_\lambda(T)(\lambda I - T)\, x = (\lambda I - T)\, Q_\lambda(T)\, x,$$

valabilă oricare ar fi $x \in \mathfrak{D}_{T^n}$, rezultă ușor că $Q_\lambda(T)$ e injectiv și surjectiv, căci $P(\lambda) I - P(T)$ are aceste proprietăți. Așadar, conform teoremei graficului închis, avem

$$[Q_\lambda(T)]^{-1} \in B(\mathfrak{X}), \text{ deci } (\lambda I - T)^{-1} = [Q_\lambda(T)]^{-1} [P(\lambda) I - P(T)]^{-1} \in B(\mathfrak{X})$$

pentru orice $\lambda \in W_{\lambda_0}$. Pentru a sfîrși demonstrația va fi suficient să arătăm că mulțimea $\{(\lambda I - T)^{-1} x;\ \lambda \in W_{\lambda_0}\}$ e mărginită oricare ar fi $x \in \mathfrak{X}$. Să remarcăm că avem egalitatea $[Q_\lambda(T)]^{-1} = (\lambda I - T)\,[P(\lambda) I - P(T)]^{-1}$ de unde rezultă, pentru $\lambda' \neq \lambda''$:

$$\frac{[Q_{\lambda'} T)]^{-1} - [Q_{\lambda''}(T)]^{-1}}{\lambda' - \lambda''} = [P(\lambda') I - P(T)]^{-1} +$$

$$+ (\lambda'' I - T)\, \frac{[P(\lambda') I - P(T)]^{-1} -]P(\lambda'') I - P(T)]^{-1}}{\lambda' - \lambda''} =$$

$$= [P(\lambda') I - P(T)]^{-1} - (\lambda'' I - T)\,[P(\lambda') I - P(T)]^{-1} [P(\lambda'') I - P(T)]^{-1} =$$

$$= P(\lambda') I - P(T)]^{-1}] I - (\lambda'' I - T)\,[P(\lambda'') - P(T)]^{-1}]$$

și făcînd $\lambda' \to \lambda'' = \lambda$, obținem că aplicația

$$\lambda \to [Q_\lambda(T)]^{-1} x$$

e analitică, oricare ar fi $x \in \mathfrak{X}$. Din principiul mărginirii uniforme rezultă analiticitatea aplicației $\lambda \to [Q_\lambda(T)]^{-1}$. De aici e imediată afirmația că mulțimea

$$\{(\lambda I - T)^{-1} x;\ \lambda \in W_{\lambda_0}\} = \{[Q_\lambda(T)]^{-1} [P(\lambda) I - P(T)]^{-1} x;\ \lambda \in W_{\lambda_0}\}$$

e mărginită oricare ar fi $x \in \mathfrak{X}$, deci $\lambda_0 \in \rho(T)$ și egalitatea din enunț e stabilită.

TEOREMA 5.8. *Fie* $T \in C(\mathfrak{X})$ $(\rho(T) \neq \emptyset)$. *Pentru orice polinom neconstant are loc relația* $\mathrm{S}_{P(T)} = P(\mathrm{S}_T)$.

Demonstrație. Vom urma căi asemănătoare cu cele utilizate pentru demonstrarea teoremelor 5.1 și 5.2. Vom presupune mai întîi că ar exista o funcție analitică $h(\mu) \neq 0$, definită pe un disc $D \subseteq P(\sigma(T)) \setminus P(\mathrm{S}_T)$ care verifică relația $[\mu I - P(T)]\, h(\mu) \equiv 0$. Se poate presupune că pentru orice $\mu \in D$, ecuația $\mu - P(\lambda) = 0$ are rădăcinile simple

$$\lambda_1(\mu), \ldots, \lambda_n(\mu)$$

și că $\mu \to \lambda_j(\mu)$ e analitică pe D $(j = 1, \ldots, n)$, unde n = grad P. Avem atunci descompunerea :

$$\mu I - P(T) = A_n(\lambda_1(\mu) I - T) \ldots (\lambda_n(\mu) I - T),$$

unde A_n e coeficientul lui λ^n în $P(\lambda)$, abstracţie făcînd de un semn. Aşadar are loc relaţia

$$(\lambda_1(\mu) I - T) \ldots (\lambda_n(\mu) I - T) h(\mu) \equiv 0.$$

Să remarcăm acum că pentru orice $0 \leqslant k \leqslant n$ aplicaţia

$$\mu \to T^k h(\mu)$$

e analitică. În adevăr, cum $\rho(T) \neq \emptyset$ rezultă $\rho(P(T)) \neq \emptyset$, deci alegem $\mu_0 \in \rho(P(T))$ şi atunci vom putea scrie

$$h(\mu) = (\mu_0 - \mu)[\mu_0 I - P(T)]^{-1} h(\mu)$$

şi cum $[\mu_0 I - P(T)]^{-1} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{D}_{T^n} \subseteq \mathfrak{D}_{T^k}$ avem

$$T^k h(\mu) = (\mu_0 - \mu) T^k [\mu_0 I - P(T)]^{-1} h(\mu).$$

În plus operatorul $T^k [\mu_0 I - P(T)]^{-1}$ este definit peste tot şi închis, deci e mărginit, deci în membrul al doilea avem o funcţie analitică. Cum $\lambda \to \lambda_1(\mu)$ nu e constantă, rezultă că există $D_1 \subseteq D$ pe care să fie invertibilă, deci pentru $\lambda \in \lambda_1(D_1) \subseteq \sigma(T) \setminus \mathbf{S}_T$ vom avea

$$(\lambda I - T)(\lambda_2(\lambda_1^{-1}(\lambda) I - T) \ldots . (\lambda_n(\lambda_1^{-1}(\lambda)) I - T) h(\lambda_1^{-1}(\lambda)) \equiv 0.$$

Conform observaţiei de mai sus, aplicaţia

$$\lambda \to [\lambda_2(\lambda_1^{-1}(\lambda)) I - T] \ldots [\lambda_n(\lambda_1^{-1}(\lambda)) I - T] h(\lambda_1^{-1}(\lambda))$$

e analitică şi cum $\lambda_1(D_1) \subseteq \sigma(T) \setminus \mathbf{S}_T$, ea e neapărat nulă. Procedînd asemănător din aproape în aproape, obţinem o mulţime $D_n \subseteq D$ astfel ca $h((\lambda_1 \circ \ldots \circ \lambda_n)^{-1}(\lambda)) \equiv 0$ pentru $\lambda \in \lambda_n(D_n)$ ceea ce atrage $h(\mu) \equiv 0$ pentru $\mu \in D$. Contradicţia obţinută ne arată că există relaţia

$$\mathbf{S}_{P(T)} \subseteq P(\mathbf{S}_T).$$

Reciproc, fie $\mathbf{S}_0 = P^{-1}(\mathbf{S}_{P(T)})$ şi să presupunem că există un disc $D \subseteq \sigma(T) \setminus \mathbf{S}_0$ şi o funcţie analitică $k : D \to \mathfrak{D}_T$, $k(\lambda) \neq 0$, astfel încît să avem $(\lambda I - T) k(\lambda) \equiv 0$. Să considerăm polinomul $Q_\lambda(\xi) = \dfrac{P(\lambda) - P(\xi)}{\lambda - \xi}$. Avem evident relaţia $[P(\lambda) I - P(T)] k(\lambda) = Q_\lambda(T)(\lambda I - T) k(\lambda) \equiv 0$, deoarece avem $k(\lambda) \in \mathfrak{D}_{T^m}$, pentru orice $m \geqq 0$ (şi $T^m k(\lambda)$ e analitică!), prin recurenţă. Cum $P(\lambda)$ e un polinom neconstant, procedînd ca în teorema 5.2, vom obţine pînă la urmă $k(\lambda) \equiv 0$ pentru $\lambda \in D$. Contradicţia obţinută ne arată că avem $\mathbf{S}_T \subseteq \mathbf{S}_0 = f^{-1}(\mathbf{S}_{f(T)})$ şi cu aceasta teorema e complet demonstrată.

TEOREMA 5.9. *Fie* $T \in C(\mathfrak{X})$ $(\rho(T) \neq \emptyset)$ *şi* P *un polinom neconstant. Să presupunem că elementul* $x \in \mathfrak{X}$ *posedă o funcţie T-asociată* f_x, *univoc definită în orice componentă a lui* $\delta_T(x)$. *Atunci avem* $P(\gamma_T(x)) \subseteq \subseteq \gamma_{P(T)}(x) \subseteq P(\gamma_T(x)) \cup \{\infty\}$.

Demonstraţie. Să presupunem mai întîi că există un element $x \in \mathfrak{X}$ cu proprietatea din enunţ şi să notăm cu H mulţimea $P^{-1}(P(\gamma_T(x)) \cap \cap \sigma(T)$. Fie $\mu_0 \in \complement P(\gamma_T(x)) \cap \mathbf{C}$ şi $D_0 = \overline{D}_0$ un disc în jurul său cu proprietatea $D_0 \cap P(\gamma_T(x)) = \emptyset$. Avem atunci şi $P^{-1}(D_0) \cap H = \emptyset$.

Vom considera atunci o curbă Γ_0 care „înconjoară” mulţimea $\gamma_T(x) \cup \{\infty\}$ şi conţine în domeniul delimitat de ea mulţimea (compactă în $\mathbf{C}$!) $P^{-1} D_0$), aşa ca aplicaţia $\lambda \to [\mu - P(\lambda)]^{-1}$ să fie analitică în „exteri-(orul”lui Γ_0. Să considerăm acum funcţia $h(\mu)$ dată de integrala

$$h(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f_x(\lambda)}{\mu - P(\lambda)} \mathrm{d}\lambda.$$

(Să verificăm mai întîi că avem $h(\mu) \in \mathfrak{D}_{T^m}$, $1 \leqq m \leqq n$ (n fiind gradul polinomului P). Vom face această verificare prin recurenţă. Să notăm

$$h_n(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f_x(\lambda_j^{(n)})}{\mu - P(\lambda_j^{(n)})} (\lambda_{j+1}^{(n)} - \lambda_j^{(n)})$$

sumă riemanniană pentru integrale $h(\mu)$. Avem :

$$T h_n(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{T f_x(\lambda_j^{(n)})}{\mu - P(\lambda_j^{(n)})} (\lambda_{j+1}^{(n)} - \lambda_j^{(n)}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda_j^{(n)} f_x(\lambda_j^{(n)}) - x}{\mu - P(\lambda_j^{(n)})} (\lambda_{j+1}^{(n)} - \lambda_j^{(n)})$$

şi de aici se vede că

$$T h_n(\mu) \to \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\lambda f_x(\lambda)}{\mu - P(\lambda)} \mathrm{d}\lambda - \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{1}{\mu - P(\lambda)} \mathrm{d}\lambda \right) x =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\lambda f_x(\lambda)}{\mu - P(\lambda)} \mathrm{d}\lambda + F_1(\infty) x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\lambda f_x(\lambda)}{\mu - P(\lambda)} \mathrm{d}\lambda,$$

unde

$$F_1(\lambda) = \frac{\lambda - \eta_0}{\mu - P(\lambda)},$$

iar η_0 e un punct arbitrar situat în „exteriorul” lui Γ_0. (Am presupus pentru moment că grad $P \geqq 2$!). Este vizibil că acest procedeu se poate relua şi se obţine pînă la urmă

$$T^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f_x(\lambda)}{\mu - P(\lambda)} \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\lambda^m f_x(\lambda)}{\mu - P(\lambda)} \mathrm{d}\lambda$$

unde $0 \leqq m <$ grad P şi

$$T^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f_x(\lambda)}{\mu - P(\lambda)} \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\lambda^n f_x(\lambda)}{\mu - P(\lambda)} \mathrm{d}\lambda -$$

$$- \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\lambda^n}{\mu - P(\lambda)} \mathrm{d}\lambda \right) x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\lambda^n f_x(\lambda)}{\mu - P(\lambda)} \mathrm{d}\lambda + F_n(\infty) x$$

unde $F_n(\lambda) = \frac{\lambda n - 1(\lambda - \eta_0)}{\mu - P(\lambda)}$, cu $F_n(\infty) \neq 0$. Ţinînd cont de acest rezultat, obţinem uşor că

$$[\mu I - P(T)]\, h(\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} f_x(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda + x = x$$

căci $f_x(\lambda)$ e analitică în domeniul delimitat de Γ_0. Aşadar funcţia astfel definită $h(\mu)$ este $P(T)$-asociată lui x în vecinătatea lui μ_0. Prin urmare avem incluziunea $\gamma_{P(T)}(x) \subseteq P(\gamma_T(x)) \cup \{\infty\}$. Reciproc, fie $\mu_0 \in \complement\, \gamma_{P(T)}(x)$. În vecinătatea acestui punct există o funcţie analitică $k(\mu)$ verificînd $[\mu I - P(T)]\, k(\mu) = x$. Alegem atunci $\lambda_0 \in \complement\, P^{-1}(\gamma_{P(T)}(x))$ împreună cu o întreagă vecinătate a sa V_{λ_0}. Vom lua $\mu_0 = P(\lambda_0)$ ca să putem compune $k(P(\lambda))$ $(\lambda \in V_{\lambda_0})$. Fie $Q_\lambda(\xi) = \frac{P(\lambda) - P(\xi)}{\lambda - \xi}$ care poate fi considerat ca un polinom în ξ cu coeficienţii polinoame în λ. Atunci e uşor de verificat că aplicaţia $\lambda \to [Q_\lambda(T)]\, k(P(\lambda))$ e analitică şi că avem $(\lambda - T)\, Q_\lambda(T)\, k(P(\lambda) = x$ într-o vecinătate a punctului $\lambda_0 \in$ $\in P^{-1}(\gamma_{P(T)}(x))$. Aşadar avem şi incluziunea $P(\gamma_T(x)) \subseteq \gamma_{P(T)}(x)$ şi teorema e complet demonstrată.

TEOREMA 5.10. *Fie $T \in C(\mathfrak{X})$ $(\rho(T) \neq 0)$ şi P un polinom neconstant. Atunci oricare ar fi $x \in \mathfrak{X}$ au loc relaţiile*

$$P(\sigma_T(x)) \subseteq \sigma_{P(T)}(x) \subseteq P(\sigma_T(x)) \cup \{\infty\}.$$

Demonstraţie. Acest rezultat se obţine la fel ca cel dat de teorema precedentă, utilizîndu-se şi teorema 5.8, şi de aceea nu vom insista asupra lui.

Apariţia punctului ∞ în relaţiile date de teoremele 5.9 şi 5.10 e destul de neplăcută dacă se pun probleme de decompozabilitate.

6. COMUTATORUL A DOI OPERATORI. DISTANŢĂ SPECTRALĂ NESIMETRICĂ

În cuprinsul acestei secţiuni, spaţiul pe care vom lucra va fi presupus Banach şi vom manevra exclusiv operatori mărginiţi. Această restricţie este impusă de faptul că în consideraţiile care urmează intervin esenţial normele operatorilor.

Rezultatele din acest paragraf reiau, la un nivel de uşoară generalizare, nişte rezultate mai vechi ale autorului, înglobate în lucrările [30], [31] şi [33] care au avut ca principal punct de plecare lucrarea [11].

Dacă T, V, $X \in B(\mathfrak{X})$, reamintim că prin *comutatorul* lui T şi V se înţelege aplicaţia

$$X \to TX - XV$$

notată adesea $C(T, V)$. E uşor de verificat că iteratele acestui operator verifică relaţia :

$$C(T, V)^n X = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} T^{n-k} X V^k.$$

Comutatorul a doi operatori își manifestă prezența în majoritatea problemelor de necomutativitate. Pentru noi el va fi interesant mai ales în legătură cu o caracteristică numerică ce i se poate asocia. Anume, vom defini expresia

$$\rho_X(T, V) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \| C(T, V)^n X \|^{1/n}.$$

Vom vedea că numărul $\rho_X(T, V)$ poate fi privit ca o „distanță spectrală" de la V la T prin intermediul lui X. Un caz particular deosebit de important este acela în care se ia $X = I$ și atunci vom mai nota

$$\rho_I(T, V) = \rho_{sp}(T, V).$$

Pentru a evidenția aspectul metric al mărimilor introduse, vom demonstra

Propoziția 6.1. *Fie* $T, W, V, X \in B(\mathfrak{X})$, *unde* $X \neq (0)$ *este idempotent. Atunci are loc relația* :

$$\rho_X(T, W) \leqslant \rho_X(T, V) + \rho_X(V, W).$$

Demonstrație. Să obținem mai întîi relația :

$$C(T, W)^n X = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [C(T, V)^{n-k} X]\, [C(V, W)^k X].$$

În adevăr, să considerăm aplicația :

$$\lambda \to e^{\lambda T} X e^{-\lambda W}$$

care e o funcție analitică întreagă. E ușor de verificat faptul că

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} (e^{\lambda T} X e^{-\lambda W}) \Big|_{\lambda=0} = C(T, W)^n X.$$

Pe de altă parte, datorită ipotezei, vom putea scrie :

$$e^{\lambda T} X e^{-\lambda W} = e^{\lambda T} X e^{-\lambda V} e^{\lambda V} X e^{-\lambda W}$$

și aplicarea formulei lui Leibniz ne va da

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} (e^{\lambda T} X e^{-\lambda W}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}}{d\lambda^{n-k}} (e^{\lambda T} X e^{-\lambda V}) \frac{d^k}{d\lambda^k} (e^{\lambda V} X e^{-\lambda W})$$

în care dacă facem $\lambda = 0$ și aplicăm remarca de mai sus, obținem relația anunțată. Fie acum $\varepsilon > 0$. Există atunci un $M_\varepsilon \geqq 1$ astfel încît

$$\| C(T, V)^m X \| \leqq M_\varepsilon \left(\rho_X(T, V) + \frac{\varepsilon}{2} \right)^m$$

și

$$\| C(V, W)^m X \| \leqq M_\varepsilon \left(\rho_X(V, M) + \frac{\varepsilon}{2} \right)^m$$

oricare ar fi $m \in N$. Atunci din relaţia obţinută mai sus, ţinînd cont şi de $\|X\| \geqq 1$, vom obţine :

$$\|C(T, W)^n X\| \leqq \|X\| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \|C(T, V)^{n-k} X\| \, \|C(V, W)^k X\| \leqq$$

$$\leqq M_\varepsilon^2 \|X\| \, [\rho_X(T, V) + \rho_X(V, W) + \varepsilon]^n$$

şi cum $\varepsilon > 0$ a fost ales arbitrar, se obţine

$$\rho_X(T, S) \leqq \rho_X(T, V) + \rho_X(V, W).$$

COROLARUL 1. *Pentru orice* $T, V, W \in B(\mathfrak{X})$ *are loc relaţia*

$$\rho_{sp}(T, W) \leqq \rho_{sp}(T, V) + \rho_{sp}(V, W)$$

Fără îndoială că un asemenea rezultat îndreptăţeşte speranţa că $\rho_{sp}(.,.)$ ar putea fi o metrică. Acest lucru nu e adevărat nu numai pentru că există $T_0, V_0 \in B(\mathfrak{X})$ cu $T_0 \neq V_0$ iar $\rho_{sp}(T_0, V_0) = 0$ (de pildă dacă se ia T_0 cvasinilpotent nenul iar $V_0 = 0$) dar şi pentru faptul că, în general, $\rho_{sp}(T, V) \neq \rho_{sp}(V, T)$ după cum vom vedea mai departe. Un pas spre o metrică se poate face considerînd concomitent $\rho_{sp}(T, V)$ şi $\rho_{sp}(V, T)$. Pe noi însă ne vor interesa numai mărimile de tipul $\rho_X(T, V)$, care, după cum vom vedea, apar într-un mod destul de natural într-o serie de probleme spectrale în legătură cu cuplurile de operatori. Un rezultat de bază pentru conţinutul acestei secţiuni este exprimat de

LEMA 6.1. I. *Dacă* $T, V \in B(\mathfrak{X})$, $f(\lambda)$ *este o funcţie analitică cu valori în* $\mathfrak{X}$ (B $(\mathfrak{X})$) *astfel încît* $(\lambda I - V) f(\lambda) \equiv$ const. *şi seria*

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [C(T, V)^n X] \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!}$$

converge absolut şi uniform în $\mathfrak{X}$ (*resp.* $B(\mathfrak{X})$), *atunci*

$$(\lambda I - T) g(\lambda) \equiv X(\lambda I - V) f(\lambda) \equiv \text{const.}$$

II. *Dacă* $X \equiv I$ *şi* $f(\lambda)$ *este o funcţie analitică cu valori în* $B(\mathfrak{X})$ *astfel încît* $f(\lambda)(\lambda I - V) \equiv$ const. *şi seria*

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!} C(V, T)^n I$$

converge absolut şi uniform în $B(\mathfrak{X})$, *atunci*

$$g(\lambda)(\lambda I - T) \equiv f(\lambda)(\lambda I - V) \equiv \text{const.}$$

Demonstraţiile acestor afirmaţii sînt implicit conţinute în Colojoară I. şi Foiaş C., [12], Chap. 2.

DEFINIŢIA 6.1. Vom spune că un şir $T_\nu \in B(\mathfrak{X})$ este *stîng* (*drept, bilateral*) *spectral convergent* către T dacă $\lim\limits_{\nu\to\infty} \rho_{sp}(T_\nu, T) = 0$ (respectiv $\lim\limits_{\nu\to\infty} \rho_{sp}(T, T_\nu) = 0$, respectiv ambele relaţii).

În cele ce urmează vom nota pentru orice mulţime compactă $F \subseteq \mathbf{C}$ şi $\rho > 0$ cu $D(F, \rho) = \{\mu\,;\ \mathrm{dist}\,(F, \mu) \leqq \rho\}$. În particular, $D(\{\lambda\}, \rho) = D(\lambda, \rho)$.

Reamintim că un şir de mulţimi închise A_n se zice *convergent* către mulţimea închisă A dacă pentru orice vecinătate U a lui A există un rang $N(U)$ astfel ca $A_n \subseteq U$ pentru $n > N(U)$. Un prim rezultat legat de comportarea spectrelor operatorilor este

TEOREMA 6.1. *Dacă* $T, V, X \in B(\mathfrak{X})$ *şi* $\lambda_0 \in \complement D(\sigma(V), \rho_X(T, V))$, *atunci ecuaţia* $(\lambda I - T)\, R_X(\lambda) \equiv X$ *are o soluţie* $R_X(\lambda) \in B(\mathfrak{X})$ *analitică în vecinătatea lui* λ_0.

Demonstraţie. Fie $\lambda_0 \in \complement D(\sigma(V), \rho_X(T, V))$ şi fie $r_1, r_2 > 0$ astfel ca $D(\lambda_0, r_2) \subseteq D(\lambda_0, r_1) \subseteq \rho(V)$ cu $r_1 - r_2 > \rho_X(T, V)$. Rezolvanta lui V verifică pentru $\lambda \in D(\lambda_0, r_2)$ inegalitatea

$$\left\|\frac{1}{n!} R(\lambda, V)^{(n)}\right\| \leqq \frac{r_1 M_1}{(r_1 - r_2)^{n+1}},$$

unde $M_1 = \sup\limits_{\lambda \in \Delta(\lambda_0, r_1)} \| R(\lambda, V)\|$. Vom alege $0 < \varepsilon < r_1 - r_2 - \rho_X(T, V)$. Există atunci un $M_\varepsilon \geqq 1$ astfel încît

$$\| C(T, V)^n X \| \leqq M_\varepsilon [\rho_X(T, V) + \varepsilon]^n.$$

Atunci seria

$$R_X(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [C(T, V)^n X] \frac{R(\lambda, V)^{(n)}}{n!}$$

verifică evaluarea

$$\| R_X(\lambda) \| \leqq \frac{r_1 M_1 M_\varepsilon}{r_1 - r_2 - \rho_X(T, V) - \varepsilon}$$

şi deci converge absolut şi uniform în $B(\mathfrak{X})$ definind o funcţie analitică. Din lema 6.1 avem

$$(\lambda I - T)\, R_X(\lambda) \equiv X(\lambda I - V)\, R(\lambda, V) \equiv X$$

şi demonstraţia e terminată.

COROLARUL 1. *Dacă şirul* T_n *este bilateral spectral convergent către* T, *atunci* $\sigma(T_n)$ *converge către* $\sigma(T)$.

În adevăr, dacă $U \supseteq \sigma(T)$ e o mulţime deschisă şi dacă $\delta <$ $<$ dist. $(\sigma(T), \complement U)$, atunci pentru un $n > N(U)$ obţinem $\sigma(T_n) \subseteq$

$\subseteq D(\sigma(T), \delta) \subseteq U$ dacă $n > N(U)$ căci teorema precedentă ne dă soluţii la stînga iar pentru soluţii la dreapta aplicăm acelaşi procedeu, folosind însă lema 6.1, II.

Lema 6.2. *Fie $f(\lambda)$ o soluţie analitică a ecuaţiei* $(\lambda I - V) f(\lambda) \equiv 0$ $(\lambda \in \omega$ *deschisă). Atunci oricare ar fi $X \in B(\mathfrak{X})$ şi $\lambda_0 \in \omega$, are loc incluziunea*

$$\gamma_T(X f(\lambda_0)) \subseteq D(\lambda_0, \rho_X(T, V)).$$

Demonstraţie. Pentru $\varepsilon > 0$ dat, există $M_\varepsilon \geqq 1$ astfel încît

$$\| C(T, V)^n X \| \leqq M_\varepsilon [\varepsilon + \rho_X(T, V)]^n.$$

Prin urmare seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[C(T, V)^n X] f(\lambda_0)}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}}$$

defineşte o funcţie analitică pentru $|\lambda - \lambda_0| > \varepsilon + \rho_X(T, V)$. Deoarece $(\lambda I - V) f(\lambda) \equiv 0$ obţinem

$$[C(T, V)^n X] f(\lambda_0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} T^{n-k} X V^k f(\lambda_0) = (T - \lambda_0 I)^n X f(\lambda_0)$$

şi atunci are loc egalitatea:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(T - \lambda_0 I)^n X] f(\lambda_0)}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} = R(\lambda, T) X f(\lambda_0).$$

Prin extensie analitică vom avea:

$$(\lambda I - T) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[C(T, V)^n X] f(\lambda_0)}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} = X f(\lambda_0)$$

pentru $|\lambda - \lambda_0| > \varepsilon + \rho_X(T, V)$ şi cum $\varepsilon > 0$ e arbitrar, rezultă incluziunea din enunţ.

Lema 6.3. *Fie V, $T_\upsilon \in B(\mathfrak{X})$ $(\nu \in \mathbf{N})$ şi $f(\lambda)$ o soluţie analitică a ecuaţiei $(\lambda I - V) f(\lambda) \equiv 0$ definită pe $\omega \subseteq \complement \overline{\bigcup_{\upsilon} S_{T_\upsilon}}$ deschisă. Dacă* lim $\rho_X(T_\upsilon, V) = 0$ *pentru un $X \in B(\mathfrak{X})$, atunci pentru orice $\lambda_0 \in \omega$ există un indice N_0 astfel încît $X f(\lambda_0) \in \bigcap_{\upsilon \geqq N_0} \breve{\mathfrak{X}}_{T_\nu}(\emptyset)$.*

Demonstraţie. În adevăr, dacă $\lambda_0 \in \omega$, fie $0 < \varepsilon < r_2 < r_1$ astfel încît $D(\lambda_0, r_1) \subseteq \omega$. Deoarece $\rho_X(T_\nu, V) \to 0$, există un indice $N(\varepsilon)$ astfel încît

$$\gamma_{T_\nu}(X f(\lambda_0)) \subseteq D(\lambda_0, \varepsilon)$$

dacă $\nu > N(\varepsilon)$, conform lemei precedente. Să notăm

$$f_{\xi}^{\nu}(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[C(T_{\nu}, V)^{n} X] f(\xi)}{(\mu - \xi)^{n+1}}.$$

Atunci, pentru $|\xi - \lambda_0| = r_1$ şi $\mu \in D(\lambda, r_2)$, avem

$$(\mu I - T_{\upsilon}) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi-\lambda_0|=r_1} \frac{f_{\xi}^{\nu}(\mu)}{\xi - \lambda_0} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi-\lambda_0|=r_1} \frac{X f(\xi)}{\xi - \lambda_0} \mathrm{d}\xi = X f(\lambda_0)$$

iar funcţia :

$$\mu \to \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi-\lambda_0|=r_1} \frac{f_{\xi}^{\nu}(\mu)}{\xi - \lambda_0} \mathrm{d}\xi$$

e analitică în Int $D(\lambda_0, r_1) \supseteq D(\lambda_0, \varepsilon)$. Deci $\gamma_{T_{\nu}}(Xf(\lambda_0)) \subseteq \complement D(\lambda_0, \varepsilon)$, deci $\gamma_{T_{\nu}}(Xf(\lambda_0)) = \emptyset$. Luînd $N_0 = N(\varepsilon)$, pentru $n > N_0$ vom avea relaţia anunţată.

Teorema 6.2. *Dacă* V, $T_{\nu} \in B(\mathfrak{X})$, $\mathbf{S}_{T_{\nu}} = \emptyset$ *oricare ar fi* $\nu \in \mathbf{N}$, $X \in B(\mathfrak{X})$ *e injectivă şi* $\lim\limits_{\nu \to \infty} \rho_X(T_{\nu}, V) = 0$, *atunci* $\mathbf{S}_V = \emptyset$.

Demonstraţie. Pe baza lemei precedente, demonstraţia e imediată. În adevăr, dacă $(\lambda I - V) f(\lambda) \equiv 0$ cu $f(\lambda)$ analitică, atunci, conform lemei precedente şi propoziţiei 2.9, rezultă $X f(\lambda) = 0$ pentru orice λ şi cum X e injectivă, avem $f(\lambda) \equiv 0$, deci $\mathbf{S}_V = \emptyset$.

Teorema 6.3. *Fie* T, $V \in B(\mathfrak{X})$, $x \in \mathfrak{X}$ *şi* $X \in B(\mathfrak{X})$. *Atunci are loc relaţia* $\gamma_T(Xx) \subseteq D(\gamma_V(x), \rho_X(T, V))$.

Demonstraţie. Fie $\lambda_0 \in \complement D(\gamma_V(x), \rho_X(T, V))$, unde $Xx \neq 0$ (altfel afirmaţia e trivială). Atunci există o funcţie $f_x(\lambda)$ V-asociată lui x în vecinătatea lui λ_0. Dacă se pune în teorema 6.1 în loc de $\sigma(V)$, $\rho(V)$, $R(\lambda, V)$ şi $R_X(\lambda)$ respectiv $\gamma_V(x)$, $\delta_V(x)$, $f_x(\lambda)$ şi $F_X(\lambda)$, vom obţine, folosind lema 6.1, I, că $(\lambda I - T) F_X(\lambda) \equiv Xx$ are soluţie într-o vecinătate a lui λ_0, deci

$$\gamma_T(Xx) \subseteq D(\gamma_V, (x), \rho_X(T, V)).$$

Corolarul 1. *Fie* T, $V \in B(\mathfrak{X})$ *cu* $\mathbf{S}_T = \mathbf{S}_V = \emptyset$. *Atunci pentru orice* $x \in \mathfrak{X}$ *şi* $X \in B(\mathfrak{X})$ *are loc relaţia* $\sigma_T(Xx) \subseteq D(\sigma_V(x), \rho_X(T, V))$.

Corolarul 2. *Dacă* $T_{\nu} \in B(\mathfrak{X})$ *este sting spectral convergent către* $T \in B(\mathfrak{X})$ *şi dacă* $\mathbf{S}_{T_{\nu}} = \mathbf{S}_T = \emptyset$, *atunci* $\sigma_{T_{\nu}}(x)$ *converge către* $\sigma_T(x)$, *oricare ar fi* $x \in \mathfrak{X}$.

Definiţia 6.2. Vom spune că $T \in C(\mathfrak{X})$ ($\mathfrak{X}$ poate fi chiar spaţiu Fréchet), este *semidecompozabil* dacă $\mathbf{S}_T = \emptyset$ şi dacă pentru orice $F \subseteq \mathbf{C}_{\infty}$ închisă, varietatea $\mathfrak{X}_T(F)$ este închisă. Evident, orice operator semidecompozabil e tare rezidual decompozabil.

TEOREMA 6.4. *Fie* $T, V, X \in B(\mathfrak{X})$ *cu* V *decompozabil şi* T *semidecompozabil. Atunci următoarele condiţii sînt echivalente* :

(*i*) $\rho \geqq \rho_X(T, V)$,

(*ii*) $\sigma_T(Xx) \subseteq D(\sigma_V, (x), \rho)$ *pentru orice* $x \in \mathfrak{X}$,

(*iii*) $X\mathfrak{X}_V(F) \subseteq \mathfrak{X}_T(D(F, \rho))$ *pentru orice* F *închisă.*

Demonstraţie. Fie $\rho \geqq \rho_X(T, V)$. Din teorema 6.3 rezultă relaţia $\sigma_T(Xx) \subseteq D(\sigma_V(x), \rho_X(T, V))$, deci dacă $x \in \mathfrak{X}_V(F)$, atunci $Xx \in \mathfrak{X}_T(D(F, \rho))$, deci $(i) \Rightarrow (iii)$ $(\Leftrightarrow (ii))$.

Să presupunem acum că $X(\mathfrak{X}_V(F) \subseteq \mathfrak{X}_T(D(F, \rho))$ oricare ar fi $F \subseteq \mathbb{C}_\infty$ închisă. Fie $\varepsilon > 0$ şi o acoperire $\{G_{T_j}\}_{j=1}^{n_\varepsilon}$ a lui $\sigma(V)$ cu diam. $G_i \leqq \varepsilon$. Din decompozabilitatea lui V, rezultă existenţa mulţimilor închise $F_i \subseteq G_i$ astfel ca $\sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \mathfrak{X}_V(F_i) = \mathfrak{X}$. Să considerăm şi $\mathfrak{X}_T(D, (F_i, \rho))$ şi operatorii $V_i = (V - \lambda_i I) \mid \mathfrak{X}_V(F_i)$ şi $T_i = (T - \lambda_i I) \mid \mathfrak{X}_T)D(F_i, \rho))$ cu $\lambda_i \in F_i$ $(i = 1, \ldots, n_\varepsilon)$. Din teorema de aplicare a spectrului obţinem :

$$\lim_{n \to \infty} \| V_i^n \|^{\frac{1}{n}} = \sup_{\lambda \in \sigma(V_i)} |\lambda| \leqq \sup_{\lambda \in F_i} |\lambda - \lambda_i| \leqq \varepsilon$$

şi

$$\lim_{n \to \infty} \| T_i^n \|^{\frac{1}{n}} = \sup_{\lambda \in \sigma(T_i)} |\lambda| \leqq \sup_{\lambda \in D(F_i, \rho)} |\lambda - \lambda_i| \leqq \varepsilon + \rho.$$

Prin urmare există un $M_\varepsilon \geqq 1$ astfel încît

$$\| V_i^n \| \leqq M_\varepsilon (2\varepsilon)^n \text{ şi } \| T_i^n \| \leqq M_\varepsilon (\rho + 2\varepsilon)^n.$$

Deoarece $C(T, V)^n X = C(T - \lambda I, V - \lambda I)^n X$ vom avea prin abuz de notaţie (căci $X\mathfrak{X}_V(F_i) \subseteq \mathfrak{X}_T(D(F_i, \rho)))$, pentru orice $x_i \in \mathfrak{X}_V(F_i)$,

$$\| C(T, V)^n X] x_i \| = \| [C(T_i, V_i)^n X] x_i \| \leqq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \| T_i^{n-k} \| \| S_i^k \| \| X \| \| x_i \| \leqq$$

$$\leqq M_\varepsilon^2 \| X \| (\rho + 4\varepsilon)^n \| x_i \|.$$

Dacă notăm $\mathfrak{J} = \mathfrak{X}_V(F_1) \oplus \ldots \oplus \mathfrak{X}_V(F_{n_\varepsilon})$, atunci aplicaţia

$$x_1 \oplus \ldots \oplus x_{n_\varepsilon} \to x_1 + \ldots + x_{n_\varepsilon}$$

a lui $\mathfrak{J}$ în $\mathfrak{X}$ este surjectivă. Din teorema lui Banach rezultă existenţa unei constante $M > 0$ astfel încît pentru orice $x \in \mathfrak{X}$ să existe o alegere $x_1 + \ldots + x_{n_\varepsilon} = x$ cu $x_i \in \mathfrak{X}_V(F_i)$ $(i = 1, \ldots, n_\varepsilon)$ astfel încît :

$$\sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \| x_i \| \leqq M \| x \|.$$

Atunci din relațiile obținute mai sus, vom avea:

$$\| [C(T, V)^n X] x \| \leq \sum_{i=0}^{n_\varepsilon} \| [C(T, S)^n X] x_i \| \leqq$$

$$M_\varepsilon^2 \| X \| (\rho + 4\varepsilon)^n \sum_{i=0}^{n_\varepsilon} \| x_i \| \leqq M M_\varepsilon^2 \| X \| (\rho + 4\varepsilon)^n \| x \|.$$

Din această relație rezultă ușor:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \| C(T, V)^n X \|^{\frac{1}{n}} = \rho_X(T, V) \leqq \rho$$

și teorema e demonstrată.

COROLARUL 1. *În condițiile teoremei precedente are loc formula*

$$\rho_X(T, V) = \sup_{Xx \neq 0} \sup_{\lambda \in \sigma_T(Xx)} \inf_{\mu \in \sigma_V(x)} | \lambda - \mu |.$$

În adevăr, notînd

$$\tau_X(T, V) = \sup_{Xx \neq 0} \sup_{\lambda \in \sigma_T(Xx)} \inf_{\mu \in \sigma_V(x)} | \lambda - \mu |$$

vom avea evident

$$\sigma_T(Xx) \subseteq D(\sigma_V(x), \tau_X(T, V)).$$

Pe baza teoremei precedente avem deci

$$\tau_X(T, V) \geqq \rho_X(T, V).$$

Invers, din teorema 6.3 avem

$$\sigma_T(Xx) \subseteq D(\sigma_V(x), \rho_X(T, V))$$

de unde rezultă ușor $\tau_X(T, V) \leqq \rho_X(T, V)$.

COROLARUL 2. *În condițiile teoremei precedente au loc relațiile*:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \| T^n X \| = \sup_{Xx \neq 0} \sup_{\lambda \in \sigma_T(Xx)} | \lambda |,$$

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \| X V^n \| = \sup_{Xx \neq 0} \inf_{\mu \in \sigma_V(x)} | \mu |.$$

Rezultă din precedentul corolar punînd $V = 0$ respectiv $T = 0$ în formule obținută.

Toate formulele acestea își mențin evident valabilitatea pentru $X = I$, caz important semnalat la începutul acestui paragraf.

Formula obținută în corolarul 1 ne va permite să infirmăm faptul că s-ar putea ca

$$\rho_{SD}(T, V) = \rho_{SD}(V, T) \text{ pentru orice } T, V \in B(\mathfrak{X}).$$

În adevăr, chiar în cazul finit dimensional acest fapt nu e adevărat, după cum va rezulta din următorul

Contraexemplu. Fie $\mathfrak{X} = \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ și T, V operatorii corespunzînd matricilor:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ respectiv } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

E ușor de văzut că $\sigma(T) = \{0,2\}$, $\sigma(V) = \{0,3\}$ și că dacă $(x_1, x_2) \neq 0$, atunci

$$\sigma_T((x_1, x_2)) = \begin{cases} \{0\} & \textit{dacă } x_2 = -x_1 \\ \{2\} & \textit{dacă } x_2 = x_1 \\ \{0,2\} & \textit{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

$$\sigma_V((x_1, x_2)) = \begin{cases} \{0\} & \textit{dacă } x_2 = -\dfrac{x_1}{2} \\ \{3\} & \textit{dacă } x_2 = x_1 \\ \{0,3\} & \textit{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Un calcul simplu ne arată că

$$\tau_l(T, V) = 2 \neq 3 = \tau_l(V, T)$$

deci pe baza teoremei precedente

$$\rho_{SD}(T, V) \neq \rho_{SD}(V, T).$$

În concluzie, expresia $\rho_X(T, V)$, unde X e un indempotent, nu poate fi simetrică. Definirea unei metrice se poate face dacă se consideră concomitent expresiile $\rho_X(T, V)$ și $\rho_X(V, T)$ fapt deja abordat în lucrarea [3] pentru cazul $X = I$ și convergența astfel definită duce la unele concluzii interesante, cum ar fi conservarea decompozabilității.

7. EXEMPLE ȘI OBSERVAȚII FINALE

Vom încerca în cursul acestui paragraf să demonstrăm consistența teoriei noastre prin cîteva exemple.

Pentru neprelungibilitate unică vom relua în alt cadru un exemplu devenit clasic [12] pe care însă îl vom prelucra din punctul nostru de vedere.

Exemplul 1. Fie $\mathfrak{X} = l^1$, adică spaţiul şirurilor sumabile; să notăm

$$e_k = \underbrace{\{0, 0, \ldots, 0, 1}_{k+1}, 0, \ldots\} \qquad (k = 0,1, \ldots).$$

Vom considera operatorul de translaţie la stînga

$$T\{x_0, x_1, \ldots\} = \{x_1, x_2, \ldots\}.$$

Evident, $\| Tx \| \leqq \| x \|$, deci $\| T \| \leqq 1$, şi cum $Te_1 = e_0$ rezultă că avem chiar $\| T \| = 1$. Aşadar $\sigma(T) \subseteq D_1$, unde $D_\rho = \{\lambda \in \mathbf{C}; \ |\lambda| \leqq \rho\}$. Să arătăm că avem egalitate. Pentru aceasta fie aplicaţia

$$\lambda \to \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n e_n$$

care e evident analitică în Int D_1. Să remarcăm că avem $(\lambda I - T) \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n e_n = 0$, căci $Te_0 = 0$ şi $Te_n = e_{n-1}$ pentru $n \geqq 1$. Prin urmare, dacă $\lambda \in$ Int D_1, atunci $\lambda \in \sigma(T)$, deci $\sigma(T) = D_1$. De aici rezultă simplu că $\mathbf{S}_T = D_1$. În adevăr, orice $\omega \subseteq$ Int D_1 trebuie neapărat să fie în $\mathbf{S}_T$, deci Int $D_1 \subseteq \mathbf{S}_T$, deci $D_1 = \mathbf{S}_T$.

Remarcăm că avem $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_T(\mathbf{S}_T)$. Vom arăta în cele ce urmează că $\breve{\mathfrak{X}}(\partial D_1) = \mathfrak{X}$, deci că este închis, ∂ fiind operatorul de trecere la frontieră şi că $\breve{\mathfrak{X}}_T(\emptyset)$ nu este închis în $\mathfrak{X}$ însă e un subspaţiu dens. În adevăr, fie $x \in \mathfrak{X}$ arbitrar. Să căutăm o soluţie analitică în vecinătatea originii a ecuaţiei $(\lambda I - T) f_x(\lambda) = x$. Ar trebui să avem, notînd $f_x(\lambda) = (x_0(\lambda), x_1(\lambda), \ldots)$ iar $x = (x_0 x_1, \ldots)$, egalităţile

$$x_0(\lambda) - x_1(\lambda) = x_0$$

$$x_1(\lambda) - x_2(\lambda) = x_1 \text{ etc.}$$

Luînd $x_0(\lambda) \equiv 0$ deducem $x_1(\lambda) = -x_0$, $x_2(\lambda) = -x_1 - \lambda x_0$ etc., deci $x_n(\lambda) = -x_{n-1} - \lambda x_{n-2} - \ldots - \lambda^{n-1} x_0 (n \geqq 1)$. Vom avea atunci, pentru $|\lambda| \leqq \delta < 1$,

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} x_n(\lambda) e_n \right\| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n(\lambda)| \leqq \frac{1}{1-\delta} \sum_{n=0}^{\infty} |x_k| = \frac{1}{1-\delta} \| x \|.$$

Aşadar, oricare ar fi $x \in \mathfrak{X}$, există o funcţie $f_x(\lambda)$ analitică în Int D_1, astfel încît $(\lambda I - T) f_x(\lambda) = x$. Observaţiile anterioare ne arată că această funcţie nu e unic determinată. În orice caz, avem Int $D_1 \subseteq \delta_T(x)$, deci $\gamma_T(x) \subseteq \partial D_1$ pentru orice $x \in \mathfrak{X}$, deci $\mathfrak{X} = \breve{\mathfrak{X}}_T(\partial D_1)$. Vom arăta acum că mulţimea D_1 nu poate fi diminuată. În adevăr, dacă $\lambda_0 \in D_1$, atunci $(\lambda_0 I - T)$ sau nu e injectivă sau nu e surjectivă. Dar $(\lambda_0 I - T) \ x = 0$

înseamnă că x are forma $(x_0, \lambda_0 x_0, \lambda_0^2 x_0, \ldots)$, ceea ce nu e posibil dacă $\lambda_0 \in \partial D_1$. Aşadar $\lambda_0 I - T$ nu e o aplicaţie surjectivă. Prin urmare există elemente $x \in \mathfrak{X}$ astfel încît ecuaţia $(\lambda I - T) f_x(\lambda) = x$ să nu aibă soluţii analitice în vecinătatea lui λ_0, deci $\lambda_0 \in \gamma_T(x)$.

Cu alte cuvinte, avem $\breve{\mathfrak{X}}_T(\varnothing) \neq \breve{\mathfrak{X}}_T(\partial D_1) = \mathfrak{X}$. Pe de altă parte, oricare ar fi k, $T^{k+1} e_k = 0$, prin urmare vom avea relaţia

$$(\lambda I - T) \sum_{n=0}^{k} \frac{T^n e_k}{\lambda^{n+1}} = e_k$$

şi aplicaţia :

$$\lambda \to \sum_{n=0}^{k} \frac{T^n e_k}{\lambda^{n+1}}$$

e analitică în $\mathbf{C}_\infty \setminus \{0\}$. Rezultatul anterior ne arată însă că orice $x \in \mathfrak{X}$ admite o funcţie $f_x(\lambda)$ care verifică $(\lambda I - T) f_x(\lambda) = x$ în vecinătatea originii. Aşadar $\gamma_T(e_k) = \varnothing$, oricare ar fi k şi cum $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ formează o bază Schauder în $\mathfrak{X}$, rezultă că $\breve{\mathfrak{X}}_T(\varnothing)$ e dens în $\mathfrak{X}$. Rezultatul anterior ne arată însă că el nu coincide cu tot spaţiul.

Exemplul studiat pînă acum este foarte interesant în sine. El poate servi însă şi la alcătuirea altor exemple, utile şi din alte puncte de vedere, după cum va rezulta din cele ce urmează.

Exemplul 2. Să considerăm $\mathfrak{X}^1 = l^1$, T_1 operatorul definit anterior şi fie $\mathfrak{X}^2 = C(D_2)$ — spaţiul funcţiilor continue pe D_2 cu valori complexe, iar T_2 operatorul

$$T_2 f(\lambda) = \lambda f(\lambda)$$

care e decompozabil în sensul lui Foiaş [11]. Vom considera spaţiul $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^1 \oplus \mathfrak{X}^2$ şi operatorul $T = T_1 \oplus T_2$. Propoziţia 2.2 ne dă că $\mathbf{S}_T = \mathbf{S}_{T_1} \cup \varnothing = \mathbf{S}_{T_1} = \mathbf{D}_1$ iar propoziţia 4.3 ne dă că T e D_1-rezidual decompozabil. Avem aşadar $\mathbf{S} = \mathbf{S}_T = D_1 \subsetneqq D_2 = \sigma(T)$. Din faptul că $\mathbf{S}_{T_2} = \varnothing$, rezultă uşor egalitatea $\breve{\mathfrak{X}}_T(\varnothing) = \breve{\mathfrak{X}}_{T_1}(\varnothing) \oplus \{0\}$, deci de data aceasta avem o varietate liniară care nu e nici închisă, nici densă în întreg spaţiul. În schimb $\breve{\mathfrak{X}}_T(\partial D_1) = \breve{\mathfrak{X}}_{T_1}(\partial D_1) \oplus \{0\}$ şi deci e un subspaţiu închis. Relaţia rezultă cu uşurinţă tot din faptul că T_2 are prelungibilitate analitică unică, iar $\sigma_{T_2}(f) = \operatorname{supp} f$, deci dacă $\operatorname{supp} f \subseteq \partial D_1$, atunci neapărat $f = 0$; în ceea ce priveşte egalitatea de mai sus, există justificări ale ei în [11], [32] şi vom reveni şi noi într-un caz mai general).

Să verificăm teorema 4.2 pentru acest caz. Fie deci $F \subseteq D_2$, $F \cap D_1 = \varnothing$ o mulţime închisă. Ar trebui să avem

$$\breve{\mathfrak{X}}_T(F) = \mathfrak{X}_{T,F} \dotplus \breve{\mathfrak{X}}_T(\varnothing),$$

unde suma este directă. În adevăr, avem $\mathfrak{X}_{T,F} = \{0\} \oplus \mathfrak{X}_{T_2}(F)$, căci evident $\mathfrak{X}_{T_1}(F) = \{0\}$. Conform observaţiei de mai sus, $\breve{\mathfrak{X}}_T(\varnothing) = \breve{\mathfrak{X}}_{T_1}(\varnothing) \oplus \{0\}$. Aşadar $\mathfrak{X}_{T,F} \dotplus \breve{\mathfrak{X}}_T(\varnothing) = \breve{\mathfrak{X}}_{T_1}(\varnothing) \oplus \mathfrak{X}_{T_2}(F) = \mathfrak{X}_{T_1}(F) \oplus \mathfrak{X}_{T_2}(F) = \mathfrak{X}_T(F)$. Deoarece

$\mathfrak{X}_T(\mathbf{S}_T) = \mathfrak{X}_{T_1}(\mathbf{S}_T) \oplus \mathfrak{X}_{T_2}(\mathbf{S}_T) = \mathfrak{X}^1 \oplus \mathfrak{X}_{T_2, D_1}$ e un subspaţiu închis propriu al lui $\mathfrak{X}$, se poate face factorizarea

$$\widetilde{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_T(S_T)$$

şi operatorul indus $\widetilde{T}$ are proprietatea $\widetilde{\mathfrak{X}}_{\widetilde{T}}(S_T) = \{\widetilde{0}\}$ (teorema 2.1). În particular, operatorul $\widetilde{T}$ are prelungibilitate analitică unică. Se poate verifica direct că spaţiul $\widetilde{\mathfrak{X}}$ e izomorf cu spaţiul $C(\overline{D_2 \setminus D_1})$ şi că $\widetilde{T}$ se identifică cu operatorul de înmulţire cu variabila independentă pe acest spaţiu. În sfîrşit, dacă se ţine cont de relaţia $\sigma_{T_2}(f) = \operatorname{supp} f$, se poate obţine uşor din decompozabilitatea lui T_2 faptul că T are spectru localizat. Ne vom ocupa acum şi de spaţii Fréchet veritabile. Ne vom opri asupra spaţiilor de funcţii de m ori derivabile cu derivate continue $C^m(\Omega)$, unde $\Omega \subseteq R^n$ e o mulţime deschisă $(0 \leq m \leq \infty)$ şi asupra spaţiului funcţiilor rapid descrescătoare $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ introdus de L. Schwartz [26].

Exemplul 3. Fie $\mathfrak{X} = C^m(\Omega)$, $(0 \leq m < \infty)$. Vom presupune pentru simplificare că $\Omega = \mathbf{R}^n$; fie τ o funcţia de forma $\tau(\xi) = \dfrac{\tau_1(\xi)}{\tau_2(\xi)}$, unde $\tau_1(\xi)$ e o funcţie aparţinînd cel puţin clasei considerate, cu proprietatea că $\tau_1(\xi_0) \neq \tau_2(\xi_0) = 0$ pentru orice soluţie ξ_0 a lui τ_2, iar $\tau_2(\xi)$ este o funcţie polinomială, deci $\dfrac{1}{\tau_2(\xi)}$ are singularităţi pe o varietate închisă din $\mathbf{R}^n$ astfel încît $\tau(\xi) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}_\infty$ este o funcţie continuă. Vom presupune că ordinul acestor singularităţi îl depăşeşte strict pe m. Dacă notăm cu $s(\tau)$ mulţimea singularităţilor lui τ, atunci orice $x \in \mathfrak{X}$ cu $\operatorname{supp} x \cap s(\tau) = \emptyset$ are proprietatea $\tau x \in \mathfrak{X}$. Vom putea astfel să definim un operator

$$Tx(\xi) = \tau(\xi)\, x(\xi),$$

unde $x \in \mathfrak{D}_T = \{y \in \mathfrak{X};\ \tau y \in \mathfrak{X}\}$. Întrucît topologiile uzuale pe spaţiile considerate asigură convergenţa punctuală, rezultă imediat că T e un operator închis. E uşor de văzut că $\sigma(T) = \overline{\operatorname{Imag} \tau}$. În adevăr, dacă $\lambda_0 \in \complement\, \overline{\operatorname{Imag} \tau}$, atunci funcţiile $[\lambda - \tau(\cdot)\, x(\cdot)]^{-1} \in \mathfrak{X}$ pentru λ într-o vecinătate V_{λ_0} a lui λ_0 $(\overline{V}_{\lambda_0} \cap \overline{\operatorname{Imag} \tau} = \emptyset)$ şi avem

$$(R(\lambda, T)\, x)(\xi) = [\lambda - \tau(\xi)]^{-1}\, x(\xi).$$

În plus, familia $\{[\lambda - \tau(\xi)]^{-1}\, x(\xi);\ \lambda \in V_{\lambda_0}\}$ e mărginită în $\mathfrak{X}$ oricare ar fi $x \in \mathfrak{X}$. Reciproc, dacă $\lambda_0 \in \rho(T)$, atunci din relaţia

$$[\lambda - \tau(\xi)]\, R(\lambda, T)\, x)(\xi) = x(\xi),$$

rezultă că dacă $\lambda_0 \in \operatorname{Imag} \tau$, atunci am avea pentru un şir $\{\xi_n\}$ $\lim\limits_n x(\xi_n) = 0$, ceea ce se poate oricînd contrazice printr-o alegere convenabilă a lui x.

Se poate vedea uşor că $\mathbf{S}_T = \emptyset$ căci se procedează prin reducere la absurd, punctual. Să stabilim acum relaţia

$$\sigma_T(x) = \overline{\tau\,(\text{supp}\, x)}.$$

În adevăr, dacă $\lambda_0 \in \complement\, \overline{\tau\,(\text{supp}\ x)}$, atunci aplicaţia

$$x(\lambda)(\xi) = \frac{x(\xi)}{\lambda - \tau(\xi)}$$

e analitică ca funcţie de λ cu valori în $\mathfrak{X}$ şi evident $(\lambda I - T)\, x(\lambda)\,(\xi) = x(\xi)$ pentru λ într-o vecinătate a lui λ_0. Reciproc, dacă $\lambda_0 \in \rho_T(x)$, atunci există o vecinătate a sa $V_{\lambda_0} \subseteq \rho_T(x)$. Am văzut însă că $\tau : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}_\infty$ e continuă, deci $\tau^{-1}(V_{\lambda_0})$ e deschisă în $\mathbf{R}^n$. Dacă $\tau^{-1}(V_{\lambda_0}) \cap \text{supp}\, x \neq \emptyset$, atunci ar exista un punct $\xi_1 \in \tau^{-1}(V_{\lambda_0})$ astfel ca $x(\xi_1) = \lambda_1 \neq 0$, şi atunci am avea $[\lambda_1 - \tau(\xi)]\; x\,(\lambda_1)\,(\xi) = x\,(\xi)$ şi cînd $\xi = \xi_1$ am obţine o contradicţie. Prin urmare $\tau^{-1}(V_{\lambda_0}) \cap \text{supp}\ x = \emptyset$, deci $\lambda_0 \notin \overline{\tau\,(\text{supp}\ x)}$. Prin urmare vom avea pentru orice mulţime $F \subseteq \mathbf{C}_\infty$

$$\mathfrak{X}_T(F) = \{x \in \mathfrak{X};\ \ \overline{\tau(\text{supp}\ x)} \subseteq F\}.$$

E uşor de văzut că dacă $F \subseteq \sigma(T)$ e o mulţime închisă, atunci $\mathfrak{X}_T(F)$ e un subspaţiu închis al lui $\mathfrak{X}$. Datorită faptului că $\overline{\tau\,(\text{supp}\ x)} \subseteq F$ dacă şi numai dacă $\text{supp}\ x \subseteq \tau^{-1}(F)$ (pentru $F \subseteq \mathbf{C}_\infty$ închisă, deoarece τ e continuă) rezultă :

$$\mathfrak{X}_T(F) = \{x \in \mathfrak{X};\ \text{supp}\ x \subseteq \tau^{-1}(F)\}.$$

Acum, dacă $\infty \in F$, trebuie ca $\tau^{-1}(F) \cap s(\tau) \neq \emptyset$ sau eventual să existe $\xi_n \in \tau^{-1}(F)$ cu $|\xi_n| \to \infty$. Însă cum ordinul unei singularităţi $\xi_0 \in s(\tau)$ este strict mai mare decît m (lucrăm în $C^m(\mathbf{R}^n)$ cu m finit !), nu putem avea nici măcar $\xi_0 \in \partial\, \tau^{-1}(F)$. Avem neapărat $\tau^{-1}(F) \cap s(\tau) = \emptyset$ ori de cîte ori $\mathfrak{X}_T(F) \subseteq \mathfrak{D}_T$. Faptul că eventual F e nemărginită nu e supărător. Acum, dacă $F_1, F_2 \subseteq \mathbf{C}_\infty$ sînt închise şi $\mathfrak{X}_T(F_1)$, $\mathfrak{X}_T(F_2) \subseteq \mathfrak{D}_T$, atunci $\tau^{-1}(F_1 \cup F_2) = \tau^{-1}(F_1) \cup \tau^{-1}(F_2)$ nu poate intersecta mulţimea $s(\tau)$, deci $\mathfrak{X}_T(F_1 \cup F_2) \subseteq \mathfrak{D}_T$. Aşadar operatorul nostru e tare rezidual decompozabil. Vom arăta în cele ce urmează că $\mathbf{S}_T = \{\infty\}$ sau $\emptyset$ după cum $s(\tau) \neq \emptyset$ sau $= \emptyset$, deci după cum T e nemărginit sau mărginit. Să arătăm în prealabil că T e $\{\infty\}$ — rezidual decompozabil şi cu spectru localizat. În adevăr, dacă $\{G_j\}_{j=1}^n \cup \{G_\infty\}\,\{\infty\}$ — acoperire a lui $\sigma(T)$, pe care o putem presupune o acoperire a lui $\mathbf{C}$, îi vom subordona o descompunere a unităţii

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n + \varphi_\infty = 1,$$

unde $\varphi_j \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ şi $\text{supp}\ \varphi_j \subseteq G_j$ $(j = 1, \ldots, n;\ \infty)$. Atunci orice $x \in \mathfrak{X}$ se va scrie ca

$$x(\xi) = \varphi_1(\tau(\xi))\, x(\xi) + \cdots + \varphi_n(\tau(\xi))\, x(\xi) + \varphi_\infty(\tau(\xi))\, x(\xi)$$

Se vede că $x_j(\xi) = \varphi_j(\tau(\xi))\, x(\xi) \in \mathfrak{X}_T(F_j)$, unde $F_j = \operatorname{supp} \varphi_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, deoarece aplicația $\lambda \to (\lambda - \xi)^{-1} \varphi_j(\tau(\xi))\, x(\xi)$ e analitică pentru $\lambda \in \complement \operatorname{supp} \varphi_j$. Analog se vede că $\sigma_T(x_\infty) \subseteq \overline{G}_\infty$, unde $x_\infty(\xi) = \varphi_\infty(\tau(\xi))\, x(\xi)$. În sfîrșit, din relația $\operatorname{supp} x_j \subseteq \operatorname{supp} x$, rezultă $\sigma_T(x_j) \subseteq \sigma_T(x)$, deci T are spectrul localizat. Dacă $s(\tau) = \emptyset$, atunci și $\mathfrak{X}_T(F_\infty) \subseteq \mathfrak{D}_T = \mathfrak{X}$, unde $F_\infty = \operatorname{supp} \varphi_\infty$ iar operatorul va fi $\emptyset$ — rezidual decompozabil și cu spectru localizat, deci $\mathbf{S}_T^d = \emptyset$. Dacă $s(\tau) \neq \emptyset$, atunci $\mathfrak{X}_T(F_\infty), \not\subseteq \mathfrak{D}_T$, deci neapărat $\mathbf{S}_T^d = \{\infty\}$.

Exemplul 4. În cazul în care $\mathfrak{X} = C^\infty(\mathbf{R}^n)$ sau $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, vom considera operatorul

$$T x(\xi) = \tau(\xi)\, x(\xi),$$

unde $\tau \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, respectiv τ e un polinom. Studiul se face asemănător cu cel precedent, operatorii sînt însă continui și va rezulta că sînt tare rezidual decompozabili cu $\mathbf{S}_T^d = \emptyset$.

Exemplul 5. Un caz deosebit de important este operatorul definit de un polinom diferențial cu coeficienți constanți pe spațiul $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$

$$T_P x(\xi) = P(D)\, x(\xi),$$

unde $D = (D_1, \ldots, D_n)$, $D_j = \dfrac{1}{i} \dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ iar $P(\xi) = P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ e un polinom obișnuit. El se studiază paralel cu operatorul deja studiat

$$\widetilde{T}_P x(\xi) = P(\xi)\, x(\xi)$$

din motive ușor de bănuit, pe care le vom argumenta imediat. Amintim că pe spațiul $\mathcal{S}$ se poate defini operatorul

$$\mathfrak{F} x(\eta) = \int e^{-i<\eta, \xi>} x(\xi)\, d\xi,$$

unde $<\eta, \xi> = \eta_1 \xi_1 + \ldots + \eta_n \xi_n$, bine cunoscut sub numele de transformarea Fourier. Ca operator, $\mathfrak{F}$ este continuu pe $\mathcal{S}$ și are un invers continuu pe acest spațiu. În plus se arată ușor că

$$\mathfrak{F} P(D)\, x(\eta) = P(\eta)\, \mathfrak{F} x(\eta),$$

deci avem relația :

$$\mathfrak{F} T_P = \widetilde{T}_P \mathfrak{F};$$

adică

$$T_P = \mathfrak{F}^{-1} \widetilde{T}_P \mathfrak{F}.$$

(Aceste fapte sînt tratate amănunțit în monografia [19]). Această echivalență între cei doi operatori ne permite să afirmăm multe proprietăți spectrale ale lui T_P, cunoscînd proprietățile lui $\widetilde{T}_P$. O primă remarcă este aceea că $\mathbf{S}_{T_P} = \emptyset$ deoarece $\mathbf{S}_{\widetilde{T}_P} = \emptyset$. Apoi, pentru orice $x \in \mathfrak{X} = \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, are loc relația

$$\sigma_{T_P}(x) = \sigma_{\widetilde{T}_P}(\mathfrak{F}\, x)$$

care de asemenea se poate verifica imediat. De aici rezultă faptul că

$$\mathfrak{X}_{T_P}(F) = \{x \in \mathfrak{X};\ \sigma_{\widetilde{T}_P}(\mathfrak{F}x) \subseteq F\} = \mathfrak{F}\, \mathfrak{X}_{\widetilde{T}_P}(F)$$

și cum $\mathfrak{X}_{\widetilde{T}_P}(F) = \{y \in \mathfrak{X};\ \operatorname{supp} y \subseteq P^{-1}(F)\}$ e închis, rezultă imediat și închiderea spațiului considerat, dacă F e închisă. Decompozabilitatea lui T_P rezultă prin aplicarea unui procedeu asemănător cu cel de la ultimele două cazuri și anume se ia o ($\emptyset-$) acoperire a lui $\sigma(T_P) = \sigma(\widetilde{T}_P) = \overline{\text{Imag}\, P}$ anume $\{G_j\}_{j=1}^n$, care se prelungește eventual la o acoperire a lui $\mathbf{C}_\infty$ și se alege o partiție a unității $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$, subordonată acestei acoperiri. Funcțiile φ_j fiind mărginite și avînd derivate cu suport compact, avem $\varphi_j \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$. Apoi se descompune orice $x \in \mathfrak{X}$ astfel:

$$x(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{F}^{-1}(\varphi_j \mathfrak{F}\, x)(\xi)$$

și e ușor de văzut că $\mathfrak{F}^{-1}(\varphi_j \mathfrak{F}\, x) \in \mathfrak{X}_{T_P}(F_j)$, unde $F_j = \operatorname{supp} \varphi_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Faptul că spectrul lui T_P e localizat rezultă din relația

$$\sigma_{\widetilde{T}_P}(\varphi_j \mathfrak{F}\, x) \subseteq \operatorname{supp} \varphi_j \cap \sigma_{\widetilde{T}_P}(\mathfrak{F}\, x).$$

Așadar putem afirma că T_P e tare rezidual decompozabil cu reziduu spectral vid, adică $\mathbf{S}^d_{T_P} = \emptyset$, oricare ar fi polinomul diferențial $P(D)$.

Exemplul 6. Vom relua acum un spațiu de șiruri, de data aceasta spațiu Fréchet, și operatorul de translație la stînga. Fie deci $\mathfrak{X} = \mathfrak{s}$ — spațiul tuturor șirurilor de numere complexe, unde pentru $x = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ definim seminormele

$$|x_n| = \sup_{0 \leqq k \leqq n} |x_k| \qquad (n \geqq 0).$$

Fie deci pe $\mathfrak{X}$ operatorul

$$T\{x_0, x_1, \ldots\} = \{x_1, x_2, \ldots\}.$$

E ușor de văzut că oricare ar fi n are loc relația

$$|T\, x|_n \leqq |x|_{n+1}$$

deci T e un operator continuu. Vom arăta că $\sigma(T) = \mathbf{C}_\infty$. Acest fapt va rezulta din aceea că ecuaţia

$$(\lambda I - T)\, y = x$$

are o infinitate de soluţii oricare ar fi $x \in \mathfrak{X}$ şi $\lambda \in \mathbf{C}$. În adevăr, dacă $x = \{x_0, x_1, \ldots\}$ şi $\lambda \in \mathbf{C}$, punînd

$$y_n = \lambda^n y_0 - \lambda^{n-1} x_0 - \lambda^{n-2} x_1 - \ldots - x_{n-1}\, (n \geqq 1)$$

obţinem o soluţie $y = \{y_0, y_1, \ldots\}$, unde y_0 e arbitrar. Vom arăta că avem şi $\mathrm{S}_T = \mathbf{C}_\infty$. Vom include şi acest fapt rezolvînd problema mai general. Fie $x \in \mathfrak{X}\, (x \neq 0)$ şi să căutăm o soluţie analitică $f_x(\lambda)$ a ecuaţiei

$$(\lambda I - T)\, f_x(\lambda) = x$$

în vecinătatea unui punct $\lambda_0 \in \mathbf{C}$. Ar trebui să avem $f_x(\lambda) = \{x_0(\lambda), x_1(\lambda), \ldots\}$ şi atunci:

$$x_n(\lambda) = \lambda^n x_0(\lambda) - \lambda^{n-1} x_0 - \lambda^{n-2} x_1 - \ldots - x_{n-1}.$$

Vom lua pentru simplificare $x_0(\lambda) \equiv 0$ şi vom arăta că seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n(\lambda)\, e_n,$$

unde $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ au semnificaţia din exemplul 1, defineşte o funcţie analitică întreagă. Vom ordona, formal, după puterile lui λ. Vom obţine

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k,$$

unde $a_0 = 0$ şi

$$a_k = \{\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k+1} - x_0, - x_1, \ldots\}.$$

Atunci, dacă n e o seminormă fixată, vom avea evident $\lim\limits_{k \to \infty} |a_k|_n^{1/k} = 0$ de unde rezultă afirmaţia făcută. Dacă $x = 0$ nu putem lua $x_0(\lambda) \equiv 0$ dar luînd $x_0(\lambda) = 1$, atunci

$$\lambda \to \{1, \lambda, \lambda^2, \ldots\} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k e_k$$

verifică $\lim\limits_{k \to \infty} |e_k|_n^{1/k} = 0$ pentru orice seminormă, deci afirmaţia e valabilă şi pentru 0. În particular, $\mathrm{S}_T = \mathbf{C}_\infty$ şi $\mathfrak{X} = \breve{\mathfrak{X}}_T(\{\infty\})$.

Vom arăta că $\breve{\mathfrak{X}}_T(\emptyset)$ e dens în $\mathfrak{X}$ dar că nu coincide cu întreg spaţiul. În adevăr, să alegem

$$x = \{1, 2^2, 3^3, \ldots, n^n, \ldots\}$$

şi să arătăm că ecuaţia

$$(\lambda I - T) f_x(\lambda) = x$$

nu admite o soluţie analitică în vecinătatea punctului de la infinit. Dacă nu ar fi aşa, ar exista $f_x(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{\lambda^{k+1}}$ verificînd ecuaţia

$$(\lambda I - T) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{\lambda^{k+1}} = x.$$

De aici rezultă prin identificare $x_0 = x$ şi $x_k = T\, x_{k-1} (n \geqq 1)$. Aşadar $x_k = T^k x = \{(k+1)^{k+1}, (k+2)^{k+2}, \ldots\}$ şi deci pentru o seminormă arbitrară

$$|x_k|_n = (k+n+1)^{k+n+1}.$$

Aşadar avem $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k|_n^{1/k} = \infty$, ceea ce contrazice analiticitatea presupusă. Deci $\infty \in \gamma_T(x)$ şi deci $\breve{\mathfrak{X}}_T(\emptyset) \neq \mathfrak{X} = \breve{\mathfrak{X}}_T(\{\infty\})$. Faptul că $\breve{\mathfrak{X}}_T(\emptyset)$ e dens este imediat, la fel ca în exemplul 1. El va rezulta şi dintr-o proprietate mai generală. Vom arăta că dacă

$$x = \{x_0, x_1, \ldots\}$$

are proprietatea $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n|^{\frac{1}{n}} = \theta(x) < \infty$, atunci neapărat $x \in \breve{\mathfrak{X}}_T(\emptyset)$. În adevăr, întorcîndu-ne la soluţia ecuaţiei $(\lambda I - T) f_x(\lambda) = x$, dacă vom lua $x_0(\lambda) = \frac{x_0}{\lambda} + \frac{x_1}{\lambda^2} + \ldots$ care, datorită ipotezei, e analitică în vecinătatea punctului de la infinit, vom obţine

$$x_n(\lambda) = \frac{x_n}{\lambda^{n+1}} + \frac{x_{n+1}}{\lambda^{n+2}} + \ldots$$

atunci vom avea :

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} x_n(\lambda)\, e_n\right| \leqq \sum_{n=k}^{\infty} |x_n(\lambda)| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n(\lambda)| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\,|x_n|}{|\lambda|^{n+1}} \leqq$$

$$\leqq M_\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\,[\theta(x)+\varepsilon]^n}{|\lambda|^{n+1}},$$

unde $\varepsilon > 0$ e arbitrar, de unde rezultă ușor analiticitatea soluției în $\{\lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| < \theta(x)\}$, deci $x \in \breve{\mathfrak{X}}_T(\emptyset)$.

Exemplul 7. Dacă vom considera spațiul $L^1(0, \infty)$ de funcții integrabile și operatorul

$$T_\tau f(t) = f(t + \tau),$$

unde $\tau > 0$ e fixat, se obține un operator de translație care se tratează la fel cu operatorul din exemplul 1, rezultînd aceleași concluzii.

Dacă vom considera spațiul funcțiilor definite pe $[0, \infty)]$ și local mărginite, acesta devine un spațiu Fréchet dacă punem

$$|f|_n = \sup_{t \in [0, n]} |f(t)|.$$

Considerînd tot operatorul

$$T_\tau f(t) = f(t + \tau),$$

obținem aceleași rezultate ca în exemplul precedent.

Exemplul 8. Operatorii spectrali în sensul definit de C. Ionescu Tulcea [20], deci operatorii spectrali ai lui Dunford [13], sînt tare rezidual decompozabili cu reziduul spectral vid. Operatorii spectrali nemărginiți [4] sînt tare rezidual decompozabili cu reziduul spectral egal cu $\{\infty\}$. Demonstrațiile acestor fapte sînt elementare și se bazează pe existența unei descompuneri a unității în spațiul funcțiilor măsurabile și mărginite care conduce la o descompunere a operatorului identic.

În general, au proprietăți de decompozabilitate, reziduală sau nu, toți operatorii asupra cărora se poate acționa, printr-un calcul funcțional, cu o descompunere a unității într-o algebră de funcții. Diversele combinații conduc la exemple mai complicate din care o parte au fost înglobate în cuprinsul acestei lucrări.

Primită la redacție la 12 octombrie 1968

Institutul de Matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
Calea Griviței nr. 21, București

RESIDUALLY DECOMPOSABLE OPERATORS ON FRÉCHET SPACES

ABSTRACT

This paper contains a spectral theory for closed (not necessarily bounded) operators on Fréchet spaces; it is the complete version of the author's doctoral thesis.

In the Introduction, the author gives some historical information on the development of the spectral theories.

The first paragraph contains the main notions defined again in the next sections in more general conditions; it also contains additional results on the spectral theory in locally convex algebras, when one uses the definition due to Waelbroeck of the spectrum of an element.

The second paragraph deals with a residual single valued extension property for closed operators which generalizes the well-known single valued extension property due to Dunford.

In the third section the author studies invariant maximal spaces, which correspond to the spectral maximal spaces in the theory of decomposable operators.

The main section is the fourth one. Here the author defines a residual decomposability for closed operators and obtains a unique spectral residuum for any strongly residually decomposable operator, namely, a set contained in the spectrum of the operator with the property that outside it the operator has very ,,good'' spectral properties.

The fifth section deals with the residual properties of an operator and the corresponding residual properties of another operators obtained by functional calculus with an analytic function in a neighbourhood of its spectrum.

The next paragraph is devoted to ,,spectral distances'' introduced by using the commutator of two operators.

The last section contains some examples of ,,good'' and ,,bad'' operators for the theory.

BIBLIOGRAFIE

1. Allan, G. R., *A spectral theory for locally convex algebras.* London Math. Soc., **15**, 399 — —421 (1965).
2. Apostol, C., *Restrictions and quotients of decomposable operator in Banach space.* Rev. Math. Pures Appl., **13**, 147 — 150 (1968).
3. — *Remarks on the perturbations and a topology of operators.* Journ. Functional Anal. **2** (1968) (va apare).
4. Bade, W. G., *Unbounded spectral operators.* Pacific J. Math., **4**, 373—392 (1954).
5. Bartle, R.G., *Spectral localization of operators in Banach spaces.* Math. Ann., **153**, 261—269 (1964).
6. Berruyer, *Opérateurs réguliers spectraux et opérateurs réguliers décomposables.* Thèse présentée à la Faculté de Sciences de l'Université de Lyon, 1968.
7. Bourbaki, N., *Espaces vectoriels topologiques.* Hermann, Paris, 1955.
8. Bishop, E., *A duality theorem for an arbitrary operator.* Pacific J. Math., **9**, 379—397 (1959).
9. Colojoară, I., *Operatori spectrali generalizaţi.* St. cerc. mat., *4*, 499—536 (1964).
10. — *Elemente de teorie spectrală.* Editura Acad. Bucureşti, 1968.
11. Colojoară, I., Foiaş C., *Quasi-nilpotent equivalence of not necessarily commuting operators.* Journ. of Math. and Mech., **15**, 521—540 (1966).
12. Colojoară, I., Foiaş, C., *Theory of generalized spectral operators.* Gordan & Breach, Sci. Publishers, New York, 1968.
13. Dunford, N., *Spectral operators.* Pacific J. Math., **4** 321—354 (1964).
14. — *A survey of the theory of spectral operators.* Bull. Amer. Math. Soc., **64**, 217—274 (1958).
15. Dunford, N., Schwartz, J. T., *Linear Operators* I. General Theory, Interscience Publishers, New York, 1958.
16. Foiaş, C., *Une application des distribution vectorielles à la théorie spectrale.* Bull. Sci. Math., **84**, 147—158 (1960).
17. — *Spectral maximal spaces and decomposable operators in Banach spaces.* Archiv der Math., **14**, *4—5*, 341—349 (1963).

18. HILLE, E., PHILLIPS, R., *Functional analysis and semigroups*. Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. Providence, 1957.

19. HÖRMANDER, L., *Linear partial differential operators*, vol. 116, Springer-Verlag, Berlin, 1963.

20. IONESCU TULCEA, C. T., *Spectral operators on locally convex spaces*. Bull. Amer. Math. Soc. **67**, 125–128 (1961).

21. KANTOROWITZ, S., *Classification of operators by means of the operational calculus*. Bull. Amer. Math. Soc., **70**, 316–320 (1964).

22. KRABBE, G. L., *Convolution operators that satisfy the spectral theorem*. Math. Zeitschr., **70**, 446–462 (1969).

23. MAEDA, F. — Y., *Remarks on spectra of operators on a locally convex space*. Bull. Amer. Math. Soc., **67**, 125–128 (1961).

24. — *Generalized spectral operators on locally convex spaces*. Pacific J. Math., **13**, 177–192 (1963).

25. ROBERTSON, A. P., ROBERTSON W., *Topological vector spaces*. Cambridge, University Press, 1964.

26. SCHWARTZ, L., *Théorie des distributions*. Hermann, Paris, 1951.

27. SCHWARTZ, J., *Perturbations of spectral operators and applications*. Pacific J. Math., **4**, 415–458 (1964).

28. TAYLOR, A. E., *Spectral theory of closed distributive operators*. Acta Math., **84**, 189–224 (1950).

29. TILLMANN, H. G., *Vector-valued distrbution and the spectral theorem for selfadjoint operators in Hilbert spaces*. Bull. Amer. Math. Soc., **69**, 67–71 (1963).

30. VASILESCU F.—H., *On an asymptotic behaviour of operators*. Rev. Math. Pures, Appl., **12**, 353–358 (1967).

31. — *Spectral distance of two operators*. Rev. Math. Pures Appl., **12**, 733–736 (1967).

32. — *On a class of scalar generalized operators*. Rev. Math. Pures Appl., **12**, 865–867 (1967).

33. — *Some properties of the commutator of two operators*. Journal of Math. Anal and Appl., **23**, 440–446 (1968).

34. — *Residually decomposable operators in Banach speces*. Tôhoku Math. Journ. (va apare).

35. — *Residual properties for closed operators on Fréchet spaces*. Illinois J. Math. (va apare).

36. VASILESCU, F. — H., *Analytic functions and some rezidual spectral properties*, Rev. Math. Pures Appl. (va apare).

37. — *Restrictions and quotients of strongly residually decomposable operators*, Rev. Math. Pures Appl. (va apare).

38. WAELBROECK, L., *Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives*. Journ. Math. Pures Appl., 9e série, **33**, 147–186 (1954).

39. — *Théorie des algèbres de Banach et des algèbres localement convexes*. Montréal, 1965.

40. WOLF, FR., *Operators in Banach space which admit a generalized spectral decomposition*. Indag., Math., **19**, 302–311 (1957).

41. YOSIDA, K., *Functional analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1965.

METODE DE REZOLVARE NUMERICĂ A PROBLEMEI DE PROGRAMARE PĂTRATICĂ

DE

G. VRACIU, GEZA KLINCSEK şi IULIA KLINCSEK

(Craiova)

În această lucrare se studiază problema programării pătratice din punctul de vedere al realizării numerice.

Se defineşte problema de programare pătratică, se enunţă teoreme generale din care se deduc metodele de calcul ale lui Theil — van de Panne, Houthakker şi Dantzig.

Pentru algoritmul Dantzig se elaborează schema logică de calcul şi programul în limbaj ALGOL 60.

Totodată, se elaborează o metodă proprie pentru eliminarea degenerării care poate să apară în algoritmul Dantzig.

§ 1. ENUNŢUL PROBLEMEI

În spaţiul n-dimensional real E_n cu elementele $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se consideră funcţia :

$$\varphi(x) = < a, x > - \frac{1}{2} < x, Bx > \tag{1}$$

unde cu $<,>$ se notează produsul scalar, $B = (b_{ij}), i, j = 1, 2, \ldots, n$, este o matrice pătratică, simetrică, pozitiv definită, iar $a' = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Se consideră k inegalităţi

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ih} x_i \leqslant d_h \qquad h = 1,2, \ldots, k$$

sau notînd $C = (c_{ij})$, $i = 1,2, \ldots, n$; $j = 1,2, \ldots, k$ şi $d' = (d_1 \ldots d_k)$, putem scrie $C'x \leqslant d$.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 8, P. 1249-1261, BUCUREŞTI, 1969

Vom considera vectorii $x \in F$, unde F este mulţimea

$$F = \{x \in E_n;\ C'x \leqslant d,\ x_i \geqslant 0,\ i = 1,2,\ldots,n\}. \tag{2}$$

Definiţie. O soluţie a problemei de programare pătratică este un vector $\hat{x} \in F$ pentru care se atinge maximul funcţiei $\varphi(x)$ pe mulţimea vectorilor $x \in F$.

Se poate scrie că $\hat{x} \in E_n$ reprezintă soluţia optimă a funcţiei (1), dacă : $\hat{x} \in F$ şi

$$\varphi(\hat{x}) = \max_{x \in F} [\varphi(x)] \tag{3}$$

Putem reformula problema de programare pătratică (2), (3) astfel [1] :

Fie $y \in E_k$; $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_m$ cu $m = n + k$ şi $C_1' = (C', I)$.

Avem :

$$F = \{x \in E_n,\ y \in E_k;\ C'x + I\,y = d,\ x \geqslant \theta,\ \ y \geqslant \theta\} \tag{4}$$

$$F = \{z \in E_m;\ C_1'z = d,\ z \geqslant \theta\}. \tag{4'}$$

Această problemă o putem considera ca problemă de extremum cu legături ; dacă notăm cu $u' = (u_1, \ldots, u_k)$ multiplicatorii lui Lagrange, atunci avem de calculat extremul funcţiei

$$\varphi(x, u) = \langle a, x \rangle - \frac{1}{2} \langle x, Bx \rangle - \langle u, C_1'z - d \rangle. \tag{5}$$

Pentru aceasta se rezolvă sistemul

$$\begin{aligned} a - Bx - C_1 u &= 0 \\ C_1'z - d &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

alegînd apoi soluţiile pozitive.

Un alt mod de găsire a soluţiei optime este dat de teorema Kuhn-Tucker. [2]

Teorema 1. *$z' = (x', y')$ este soluţia optimală a problemei de programare pătratică relativ la funcţia (1) şi condiţiile (4′) dacă :*

(a) $z \in F$;

b) *există un vector* $u = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \geqslant 0$ *încît* $v = B\,x + Cw - a$

c) $\langle u, z \rangle = \langle v, x \rangle + \langle w, y \rangle = 0.$

§ 2. ALGORITMUL THEIL-VAN DE PANNE. CONSIDERAȚII TEORETICE

Să notăm $C_2 = (C, -I)$ și $d'_2 = (d', \theta)$; putem scrie

$$F = \{x \in E_n, \ C'_2 x \leqslant d'_2\}. \tag{7}$$

Dacă descompunem mulțimea de indici $1, 2, \ldots, m$ în două clase $\{1,2, \ldots, m\} = S \cup Z$, clase disjuncte $S \cap Z = \varnothing$ și din liniile matricii C_2, ștergem coloanele de indici Z, obținem o nouă matrice C^S. Problema corespunzătoare condițiilor $C^S x = d^S$ o vom numi problemă S, soluția corespunzătoare o vom nota cu x^S și lagrangeanul corespunzător cu v^S. Rezolvînd sistemul de ecuații (6) modificat corespunzător, adică

$$a - Bx^S - C^S u^S = 0 \tag{6'}$$

se obține:

$$C'^S x^S - d^S = 0$$

$$u^S = P_S^{-1} (C'^S \ x^e - d^S) \tag{8}$$

$$x^S = x^e - B^{-1} C^S u^S,$$

unde $P_S = C'^S B^{-1} C^S$ iar x^θ reprezintă soluția problemei modificată pentru $S = \varnothing$.

Se observă că $x^\theta = B^{-1} a$ și $\varphi (x^\theta) = \frac{1}{2} < a, \ B^{-1} a >$.

În cazul general u^S și x^S nu reprezintă soluție pentru problema inițială (vezi teorema Kuhn-Tucker).

Se demonstrează în [1],

TEOREMA 2. *Dacă x^S și $u^S \geqslant 0$, atunci $x^S = \hat{x}$.*

În concluzie, dacă reușim să alegem mulțimea de indici S în așa fel încît soluția problemei S să verifice condiția teoremei 2, problema S devine echivalentă cu problema inițială. Vom nota în acest caz $S = \hat{S}$. Să observăm că după aflarea lui $\hat{S}$, rezolvarea problemei de optimizare se realizează prin aplicarea formulelor (8).

Să considerăm mulțimea de indici $S_1 = S \cup \{r\}$ și fie x_t componenta a t – a a vectorului x.

Pentru determinarea lui u^{S_1} și x^{S_1} se pot aplica formulele (8). Rezultă

$$u_v^{S_1} = \frac{1}{\alpha - < p, p_1 >} \cdot (C'^{S_1} x^S - d^{S_1})_r, \text{ unde } P_{S_1} = \begin{pmatrix} P_s & p \\ p' & \alpha \end{pmatrix} \text{ cu } \alpha > 0.$$

Se obține:

TEOREMA 3. *Dacă $S_1 = S \cup \{r\}$, atunci semnul componentelor de ordin r ale vectorilor u^{S_1} și $C'^{S_1} x^S - d^{S_1}$ este același.*

2.2. DESCRIEREA METODEI

Din teorema 3 se observă că, pentru o mulţime de indici $S \subset \hat{S}$ vectorul $x^S \in F$. În particular $\varnothing \subset \hat{S}$. Rezultă următorul procedeu de calcul.

a) Se calculează x^0. Dacă sînt verificate condiţiile teoremei 2, atunci $\hat{x} = x$. Dacă nu, există un indice t pentru care relaţia $C_2'x \leqslant d_2'$ este contrazisă. Punem $S_1 = \{t\}$ şi avem evident $S_1 \subset \hat{S}$.

b) S-a obţinut deja $S_k \subset \hat{S}$. Cu ajutorul formulelor (8) se obţin x^S şi u^S. Dacă sînt verificate condiţiile teoremei 2, avem $\hat{x} = x^S$ şi $\hat{S} = S$. În caz contrar, există un indice t care nu verifică relaţia (7). Atunci, punem $S_{k+1} = S \cup \{t\}$ şi avem evident $S_{k+1} \subset \hat{S}$. Procesul se termină cînd se obţine $\hat{x}$.

§ 3. METODA PARAMETRIZĂRII (CAPACITĂŢILOR) [3]

3.1. *Consideraţii teoretice.* Completăm sistemul de condiţii impuse vectorului soluţie cu

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \langle 1, x \rangle = k, \tag{9}$$

unde k este un parametru nenegativ.

În cursul rezolvării problemei, vom nota cu $\lambda = \lambda(k)$ lagrangeanul corespunzător egalităţii (9).

Problema astfel pusă putem s-o rezolvăm cu metoda Theil-Van de Panne, adică să găsim mulţimea de indici $\hat{S}_k = S(k)$.

Cu ajutorul sistemului (6) găsim şi valorile $\hat{x}_k = x(k)$ şi $\hat{u}_k = u(k)$. (S-a pus în evidenţă faptul că rezultatele depind de valoarea parametrului k.)

Există două valori numerice speciale pentru parametrul k.

Dacă $k = 0$, atunci $x = 0$ şi $\lambda(0) \geqslant 0$ iar $S(0)$ se află lesne.

Dacă $k = \hat{k} = \langle 1, \hat{x} \rangle$, unde $\hat{x}$ este soluţia problemei iniţiale, atunci din teorema (1) rezultă că

$$\begin{aligned} x(\hat{k}) &= \hat{x} \\ \lambda(\hat{k}) &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Teorema (1) şi sistemul de ecuaţii (6) ne arată că $x(k)$ şi $u(k)$ depind liniar de k atîta timp cît nu se anulează nici una din componentele strict pozitive pe intervalele corespunzătoare lui k, pe care $S(k)$ rămîne constant. Dacă pentru un k dat am rezolvat problema de programare pătratică completată prin condiţia (9), vom putea găsi un prim număr $k' > k$ pentru care cel puţin una din componentele vectorilor $x(k)$ şi $u(k)$ şi-ar schimba semnul. Conform teoremei (1), $S(k)$ îşi va schimba valoarea. Numărul k' astfel determinat îl vom numi punct critic.

3.2. *Descrierea algoritmului.* Pentru $k = 0$ problema a fost rezolvată. Avem astfel mulţimea de indici $S = S(k)$ corespunzător valorilor $k \in (0, k_1)$, unde k_1 este primul punct critic.

În fiecare asemenea punct k_1, mulţimea de indici $S(k)$ se schimbă după cum urmează:

Dacă se anulează componenta a r—a, a lagrangeanului $v(k)$, din $S(k)$, se scoate mulţimea $\{r\}$.

b) Dacă se anulează componenta a r-a, a vectorului soluţie $x(k)$, atunci la $S(k)$ se adaugă mulţimea $\{r\}$.

c) Dacă se anulează $\lambda(k)$, atunci $k_1 = \hat{k}$ şi $x(k_1) = \hat{x}$ şi rezolvarea problemei este încheiată.

§ 4. METODA DANTZIG [4]

4.1. *Descrierea metodei.* Conform teoremei 1, soluţia optimală a problemei de programare pătratică se află printre soluţiile pozitive ale sistemului (6). Soluţiile pozitive ale unui sistem liniar de ecuaţii se pot găsi prin algoritmul Simplex.

Condiţia c) din teorema 1 precizează că în soluţia optimală componentele de indice k ale vectorilor z şi u nu sînt simultan nenule.

Ar trebui deci să modificăm procedeul Simplex în aşa fel încît în fiecare tablou Simplex să avem $n + k$ variabile de bază şi $n + k$ variabile secundare, iar în bază să nu apară simultan componente de acelaşi indice pentru vectorul necunoscut z şi vectorul lagrangean u. Cu această restricţie se obţine metoda lui Wurtz, care mai poate fi îmbunătăţită.

Să admitem pe lîngă cazul dat mai sus, pe care-l vom numi *caz standard*, folosirea bazei *nonstandard*, bază în care condiţia c), teorema 1' este contrazisă pentru unul şi numai unul din indici.

Pentru scrierea tabloului Simplex iniţial presupunem că $d \geqslant 0$, altfel ar trebui să facem un calcul preliminar. Dar ipoteza $d \geqslant 0$ este foarte plauzibilă în probleme concrete, cu suport economic.

Simplexul iniţial va fi dat de tabloul 1:

Tabloul 1

Bază	Valoarea	z		u	
		x	y	v	w
v	$-a$	$-B$	O	I	$-C$
y	d	C'	I	O	O

Alegerea variabilei care intră în bază. În baza standard intră variabila de tip z al cărui lagrangean are valoarea negativă, maximă în valoarea absolută.

În baza nestandard intră lagrangeanul v_k corespunzător indicelui k, încît v_k și z_k nu aparțin nici unul bazei, în așa fel încît să fie asigurată condiția c) impusă bazei.

Alegerea variabilei care iese din bază se face în așa fel ca valorile din bază de tip z să fie pozitive. Se consideră deci raportul elementelor din coloana valorilor și din coloana elementului care intră în bază numai pentru indici pentru care această coloană are valori pozitive, și care corespund la variabile de tip z. Pentru baza nonstrand, pivotul transformării va fi dat de indicele unde se realizează minimul acestor rapoarte. Pentru baza standard se compară și cu cîtul corespunzător liniei, în care se află lagrangeanul elementului ce intră în bază.

Tablou Simplex se construiește normal și procesul se oprește cînd coloana valorilor devine nenegativă.

Numărul de operații necesare este aproximativ egal cu cel necesar, pentru rezolvarea a trei sisteme de ecuații de ordin $n + k$, prin metoda Gauss.

4.2. *Studiul degenerării.* Procedeul permite folosirea funcțiilor de optimizat (1) în care B este o matrice semidefinită. În acest caz putem avea o situație de degenerare, adică apare în tabloul simplex valoarea „0" pentru o variabilă de bază de tip z. În acest caz trebuie să procedăm la eliminarea degenerării.

Pentru aceasta se procedează astfel. Se consideră matricea B_1 diagonală, cu elementele de pe diagonală pozitive și mai mici decît ε, un număr suficient de mic.

Considerăm funcția

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - \frac{1}{2} < x,\ B_1 x >.$$

Avem evident $|\varphi_1(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \|x\|^2$. Pentru o alegere convenabilă a lui ε, se poate îndepărta degenerarea.

Deoarece $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varphi_1(x) = \varphi(x)$ cu convergență uniformă pentru x mărginit, implică relația $x_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \hat{x}$, unde $\hat{x}$ converge către soluția cu norma minimă. (Soluția problemei degenerată nu este unic determinată.)

În cele ce urmează propunem, pentru eliminarea degenerării, o metodă diferită de cea de mai sus.

Fie tabloul inițial 1:

		x	w
v	$-a$	$-B$	$-C$
y	d	C'	0

corespunzător sistemului (6), avînd soluţia iniţială :

$$x = 0, \quad y = d \geqslant 0$$

$$w = 0, \quad v = -a.$$

Presupunem că, în baza studiată, apar α componente din v, β componente din x, $(\alpha + \beta) = n$, λ componente din y şi μ componente din w $(\lambda + \mu = k)$.

Vom scrie,

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

unde a_1, x_1, v_1 au dimensiunea α, a_2, x_2, v_2 au dimensiunea β, d_1, y_1 w_1 au dimensiunea λ şi d_2, y_2, w_2 dimensiunea μ.

Pe de altă parte,

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_3 & B_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

de dimensiuni $B_1(\alpha, \alpha)$, $B_2(\beta, \beta)$, $B_3(\alpha, \beta)$, $C_1(\alpha, \lambda)$, $C_2(\alpha, \mu)$, $C_3(\beta, \lambda)$ şi $C_4(\beta, \mu)$.

Sistemul (6) se transcrie :

$$\begin{aligned}
-a_1 &= -B_1 x_1 - B_3 x_2 + v_1 - C_1 w_1 - C_2 w_2 \\
-a_2 &= -B_3' x_1 - B_2 x_2 + v_2 - C_3 w_1 - C_4 w_2 \\
-d_1 &= C_1' x_1 + C_3' x_2 + y_1 \\
-d_2 &= C_2' x_1 + C_4' x_2 + y_2.
\end{aligned}$$

Cum $|B_2| \neq 0$, există B_2^{-1} şi fie $P = C_4' B_2^{-1} C_4$. Presupunînd că am ajuns la v_1, x_2, y_1, w_2 prin tabloul simplex nedegenerat, există şi $P^{-1} = (C_4' B_2^{-1} C_4)^{-1}$.

Notînd cu $A = P^{-1} C_4' B_2^{-1}$, obţinem

$$\begin{aligned}
w_2 &= (A a_2 - P^{-1} d_1) + (P^{-1} C_2' - A \cdot B_3') x_1 + P^{-1} y_2 + A v_2 - A C_3 w_1 \\
x_2 &= A' d_2 - A' C_2' x_1 - A' y_2 \\
y_1 &= (C_3' A' C_2' - C_1') x_1 + C_3' A' y_2 + (d_1 - C_3' A' d_2) \\
v_1 &= -a_1 + B_3 A' d_2 + C_2 A a_2 - C_2 P^{-1} d_1 + (B_1 - B_3 A C_2' + C_2' + \\
&\quad + C_2' - C_2 A B_3') x_1 + (C_2 P^{-1} - B_3 A) y_2 + C_2 A v_2 + (C_1 + C_2 A C_3) w_1.
\end{aligned}$$

Deci avem tabloul 2.

Tabloul 2

Baza	Valoarea	x_1	v_2	w_1	y_2
v_1	$-a_1 + B_3A'd_2 + C_2Aa_2 - C_2P^{-1}d_1$	$B_1 - B_3A'C_2' + C_2P^{-1}C_2' - C_2AB_3'$	C_2A	$C_1 - C_2AC_3$	$C_2P^{-1} - B_3A'$
x_2	$A'd_2$	$-A'C_2'$	0	0	$-A'$
y_1	$d_1 - C_3'A'd_2$	$C_3'A'C_1' - C_1'$	0	0	$C_3'A'$
w_2	$Aa_2 - P^{-1}d_2$	$P^{-1}C_2' - AB_3'$	A_2	$-AC_3$	P^{-1}

Cînd $B \to B + \varepsilon I$, atunci $B_1 \to B_1 + \varepsilon I$; $B_2 \to B_2 + \varepsilon I$ iar unde intervine P^{-1}, vom face modificarea corespunzătoare

Relaţia

$$B_2^{-1} - \varepsilon(B_2^{-1})^2 \leqslant B_2 + \varepsilon I)^{-1} \leqslant B_2^{-1} - \varepsilon(B_2^{-1})^2 + \varepsilon^2(B_2^{-1})^3 \leqslant B^{-1}$$

ne conduce la concluzia că A depinde de ε în mod neglijabil.

Se impune modificarea a patru blocuri şi a două coloane din tabloul 2, ceea ce este destul de incomod. Vom proceda astfel : în locul schimbării funcţiei φ, modificăm vectorul d din condiţiile (2), aşa ca în tabloul simplex 2 să se schimbe numai coloana valorilor. Dacă se înlocuieşte d cu $d + e$, unde e este vector coloană cu elemente pozitive inferioare lui ε, rezultă evaluarea :

$$\Delta v_1 = B_3(\Delta x_2) - C_2(\Delta w_2)$$

$$\Delta y_1 = -C_3'(\Delta x_2) + e_1$$

$$\Delta x_2 = A'e_2$$

$$\Delta w_2 = P^{-1}e_2 = AB_2^{-1}(\Delta x_2), \text{ unde } e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

Pentru un calcul exact, se fac complet modificările indicate, adică se calculează Δx_2, de unde rezultă Δv_1 şi Δw_2, Δy_1 fiind considerat arbitrar. (Se observă că în tabloul 2, aceste matrici sînt bine determinate.) Pentru un calcul mai puţin exact, însă mai rapid, se vor modifica numai x_2 şi y_1, obţinînd o eroare inferioară produsului εN, unde $N = \max |a_{ij}|$; $i = 1,2,\ldots,n$; $j = 1,2,\ldots,n$. În ambele cazuri $\hat{x}_\varepsilon \to \hat{x}$ cînd $\varepsilon \to 0$.

§ 5. PROGRAM DE CALCUL PENTRU ALGORITMUL DANTZIG

Fie problema scrisă sub forma iniţială (1), (2), matricea B este pătratică de ordin n, iar matricea C este de ordin $n \times k$, unde vom pune $n + k = m$.

Tabloului simplex îi corespunde o matrice A de ordin $m \times (m + 1)$ care la momentul inițial are următoarea distribuire a valorilor :

$$a_{ij}\begin{cases} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \end{cases} \text{— matricea } B$$

$$a_{ij}\begin{cases} i = n + 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{cases} \text{— matricea } C'$$

$$a_{ij}\begin{cases} i = 1, \dots, n \\ j = n + 1, \dots, m \end{cases} \text{— matricea } (-C)$$

$$a_{ij}\begin{cases} i = n + 1, \dots, m \\ j = n + 1, \dots, m \end{cases} \text{— matricea nulă } 0$$

$a_{i,m+1}$ $(i = 1, \dots, n)$ — coloana $(-a)$

$a_{i,m+1}$ $(i = n + 1, \dots, m)$ — coloana (d) ; sîntem în ipoteza $d > 0$. Pentru distingerea elementelor x, y, v, w, coordonatele lor se pot citi datorită indicelui determinat de vectorul $s = \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ v \\ w \end{pmatrix}$ după cum urmează :

Componentele lui x au indicii $1, 2, \dots, n$;
Componentele lui y au indicii $n + 1$, $n + 2, \dots, m$;
Componentele lui v au indicii $m + 1, m + 2, \dots, m + n$;
Componentele lui w au indicii $m + n + 1$, $m + n + 2, \dots m + m$.

Folosim linii și coloane de semnal, care vor preciza variabilele care sînt de bază sau nu, precum și linia sau coloana matricii cărora le corespund. Linia $bd(i)$, $i = 1, \dots, m$, semnalizează coloanele și deci valoarea inițială pentru aceasta este $b\ d = (1,2, \dots, n,\ m + n + 1,\ m + n + 2, \dots, m + m)$

Coloana $b\ c\ (i)$, $i = 1,2, \dots, m$, semnalizează liniile, deci variabilele de bază ; valoarea inițială este :

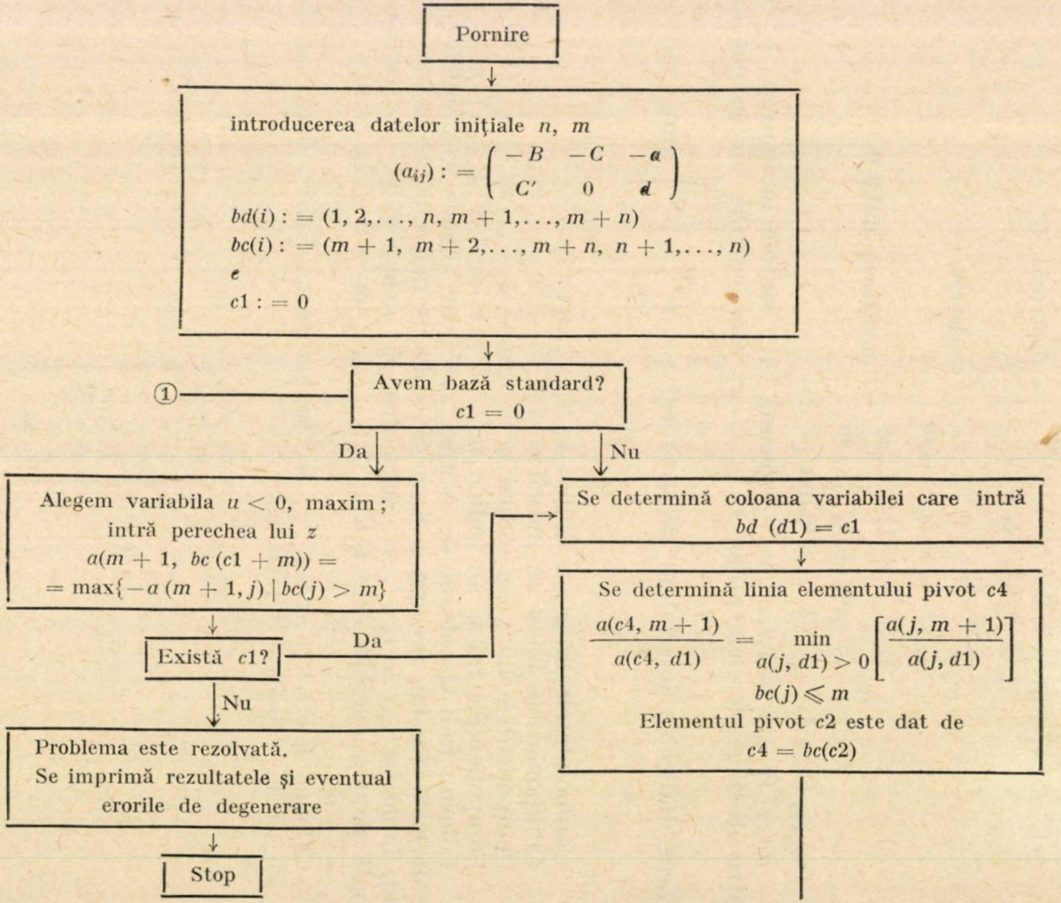
$$bc = \begin{pmatrix} m + 1 \\ m + 2 \\ \cdots\cdots \\ m + n \\ n + 1 \\ n + 2 \\ \cdots\cdots \\ m \end{pmatrix}$$

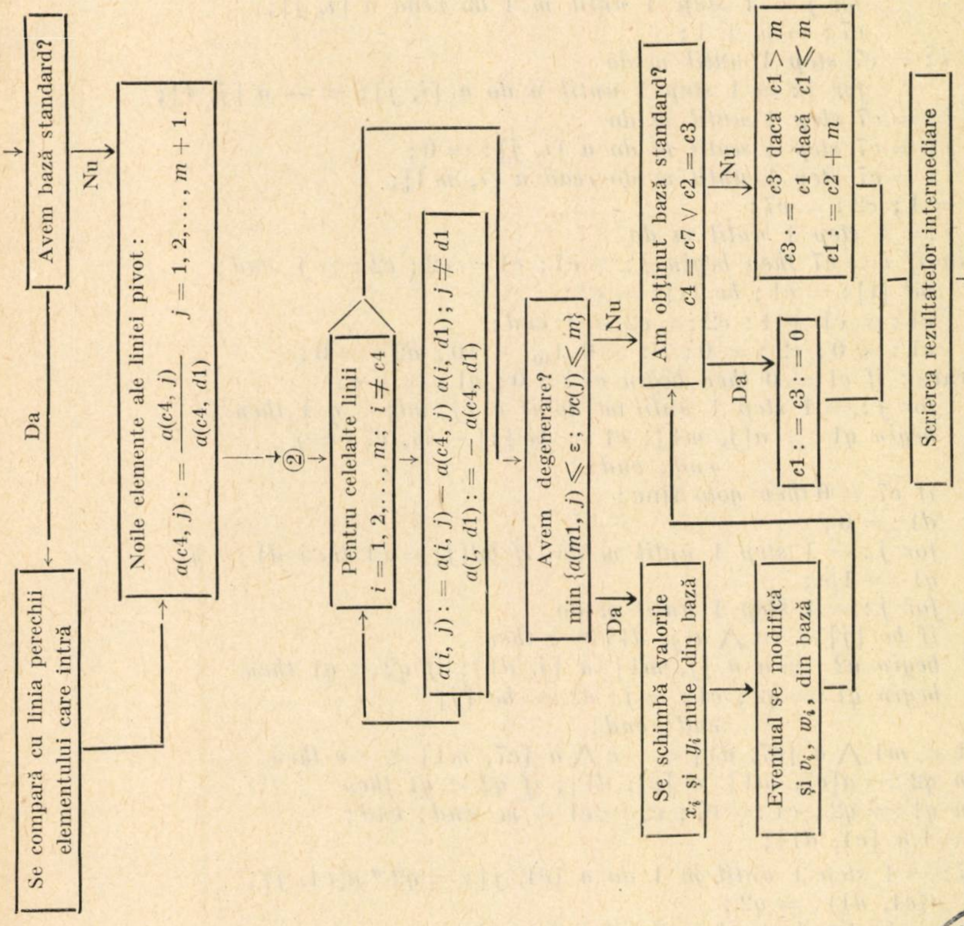
Pentru efectuarea transformării avem nevoie de patru semnale : variabila ce intră în bază, coloana din care intră, variabila care iese din bază, linia din care iese, acestea vor fi conținute în celulele $c1$, $d1$, $c2$, $c4$.

Semnalizăm faptul că trecem de la o bază standard la o bază nestandard sau la o bază nestandard și faptul că avem variabile simultan prezente sau simultan absente în bază, prin semnalele $c7$, $c3 \leqslant m$; $c1 > m$.

Pentru a elimina împărțirea cu zero se compară numerele cu e (joacă rol de ε).

Rezultă următoarea schemă bloc:


Pornire
introducerea datelor iniţiale n, m
$(a_{ij}) := \begin{pmatrix} -B & -C & -a \\ C' & 0 & d \end{pmatrix}$
$bd(i) := (1, 2, \dots, n, m+1, \dots, m+n)$
$bc(i) := (m+1, m+2, \dots, m+n, n+1, \dots, n)$
e
$c1 := 0$
Avem bază standard?
$c1 = 0$
①
Da
Nu
Alegem variabila $u < 0$, maxim;
intră perechea lui z
$a(m+1, bc(c1+m)) =$
$= \max\{-a(m+1, j) \mid bc(j) > m\}$
Există $c1$?
Da
Nu
Problema este rezolvată.
Se imprimă rezultatele şi eventual
erorile de degenerare
Stop
Se determină coloana variabilei care intră
$bd(d1) = c1$
Se determină linia elementului pivot $c4$
$\frac{a(c4, m+1)}{a(c4, d1)} = \min_{\substack{a(j, d1) > 0 \\ bc(j) \leqslant m}} \left[\frac{a(j, m+1)}{a(j, d1)}\right]$
Elementul pivot $c2$ este dat de
$c4 = bc(c2)$


Se compară cu linia perechii elementului care intră
Da
Avem bază standard?
Nu
Noile elemente ale liniei pivot :
$a(c4, j) := \frac{a(c4, j)}{a(c4, d1)}$ $j = 1, 2, \ldots, m + 1.$
②
Pentru celelalte linii
$i = 1, 2, \ldots, m;\ i \neq c4$
$a(i, j) := a(i, j) - a(c4, j)\ a(i, d1);\ j \neq d1$
$a(i, d1) := -a(c4, d1)$
Avem degenerare?
$\min\{a(m1, j) \leqslant \varepsilon;\ bc(j) \leqslant m\}$
Da
Nu
Se schimbă valorile x_i şi y_i nule din bază
Eventual se modifică şi v_i, w_i, din bază
Am obţinut bază standard?
$c4 = c7 \vee c2 = c3$
Da
Nu
$c1 := c3 := 0$
$c3 :=$ c3 dacă $c1 > m$
$c1 :=$ c1 dacă $c1 \leqslant m$
$c1 := c2 + m$
Scrierea rezultatelor intermediare
①

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

Scrierea în limbaj ALGOL a programului

```
begin integer n, m, m1 ;
read n, m ; m1 : = m + 1 ;
begin array a [1 : m, 1 : m1] ;
integer array bc [1 : m], bd, [1 : m] ;
integer c1, c2, c3, c4, c7, d1, d2, i, j ;
real q1, q2, e ;
for i : = 1 step 1 until n do
        for j = 1 step 1 until m 1 do read a [i, j] ;
        c7 : = n + 1 ;
for i : = c7 step 1 until m do
        for j : = 1 step 1 until n do a [i, j] : = — a [j, i] ;
for i : = c7 step 1 until m do
for j : = c7 step 1 until m do a [i, j] : = 0 ;
for i : = c7 step 1 until m do read a [i, m 1] ;
c1 : = 1 ; c2 : = c7 ;
for i := 1 step 1 until m do
begin if i = c7 then begin j : = c1 ; c1 = c2 ; c2 : = j  end ;
    bd [i] : = c1 ; bc [i] : = c2 ;
    c1 : = c1 + 1 ; c2 := c2 + 1 end ;
    c1 : = 0 ; c2 : = 0 ; e : = 0.1₁₀ — 10 ; d2 : = 0 ;
intrare : if c1 = 0 then begin c7 := 0 ; q1 : = —e ;
    for j : = 1 step 1 until m do if a [j, ml] < q 1 then
    begin q1 : = a[j, m1] ; c1 := bc [j] — m, c7 : = j
                    end ; end ;
    if c7 = 0 then goto fine ;
    d1 := 0 ;
    for j : = 1 step 1 until m do  if bd[j] = c1 then d1 := j ;
    q1 := 1/e ;
    for j : = 1 step 1 until m do
    if bc [j] < ml ∧ a[j, d1] > e then
    begin q2 : = a a [j, m1] / a [j, d1] ; if q2 < q1 then
    begin q1 := q2 ; c4 : = j ; c2 := bc [j]
                    end ; end ;
if c1 < m1 ∧ a [c7, d1] < —e ∧ a [c7, m1] < —e then
begin q2 := a[c7, m1] / a [c7, d1] ; if q2 < q1 then
begin q1 := q2 ; c4 := c7 ; c2 :=c1 + m  end ; end ;
q2 := 1/a [c4, d1] ;
for j : = 1 step 1 until m 1 do a [c4, j] : = q2 * a[c4, j] ;
    a[c4, d1) : = q2 ;
for j : = 1 step 1 until m do if j ≠ c4 then
begin q2 := a[ j, d1] ;
for i := 1 step 1 until m 1 do
a [j, i] : = a [j i] — q2 * a [c4, i] ;
    a [j d1] : = q2 * a[c4, d1]  end ;
q1 : = 1/e ;
for j := 1 step 1 until m do
if bc [j] < m1 ∧ a [j, m 1] <  q1 then q1 : = a[j, m 1] ;
if q1 < e then goto degenerare ;
```

```
bd (d1] : = x 2 ; bc [c4] : = c1 ;
if c4 = c7 ∨ c2 = c3 then c1 : = c3 := 0 else
      begin if c1 < m 1 then c3 := c1 ; c1 := c2 + m end ;
for j := 1 step 1 until m do
      begin print bc1 [j] ; print a [j, m 1] end ;
goto intrare ;
degenerare : d2 : = d2 + 1 ;
      for j := 1 step 1 until m do
      if bc [j] < m1 ∧ a[ j, m1] < e then a[j, m1] : = a[j, m1] + 2*e ;
      comment nu am dat forma extinsă pentru îndepărtarea degenerării,
adică nu facem modificarea valorilor şi pentru bc [j] > m fiindcă precizia
ce s-ar obţine este anulată de erorile de calcul ale maşinii — ;
      goto intrare ;
      fine : print d2 end ;
```

Primită la redacţie la 3 februarie 1968

Universitatea Craiova

METHODS OF NUMERICAL SOLVING OF THE SQUARE PROGRAMMING PROBLEM

(ABSTRACT)

This paper deals with the square programming problem from the point of view of its numerical solving.

The square programing problems are defined, the general theorems and given from which the numerical Theid-Van de Panne's, Houthakker's and Dantzig's solving methods result.

For this algorithm are given the block diagram and the programming in the Algorithmic Language ALGOL 60.

BIBLIOGRAFIE

1. Boot G. G., *Quadratic Programming.* North Holland Co., Amsterdam, 1964.
2. Kuhm, H. W., Tucker, A. W., *Nonlinear Programming Proceedings Second Berkeley Simposium or Mathematical Statistics and Probability,* 1951.
3. Houthakker, H., *The Capacity Method of Quadratic Programming.* Econometrica *28* (1960).
4. Wolfe, P., *The Simplex Method for Quadratic Programming.* Econometrica, *27* (1959).
5. Mihoc, Gh., şi Nădejde, I., *Programarea matematică.* Ed. ştiinţifică, Bucureşti, 1966.

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date din text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale. Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase gratuit. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa Comitetului de redacţie, Calea Griviţei nr. 21, Bucureşti 12.

1969 OKT 4

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

P. CARAMAN, **Homeomorfisme evasiconforme n-dimensionale**, 1967, 594 p., 31 lei.
I. COLOJOARĂ, **Elemente de teorie spectrală**, 1968, 311 p., 19,50 lei.
I. CUCULESCU, **Procese Markov și funcții excesive**, 1968, 356 p., 19 lei.
LAZĂR DRAGOȘ, **Magnetodinamica fluidelor**, 1969, 476 p., 27 lei.
ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, **Introducere în hidrodinamica corpurilor poroase**, 1969, 212 p., 8 lei.
ALEXANDRU GHIKA, **Opera matematică**, 1968, 955 p., 50 lei.
S. GUIAȘU, **Aplicații ale teoriei informației** (Sisteme dinamice-Sisteme cibernetice), 1968, 350 p., 17 lei.
A. HALANAY, D. WEXLER, **Teoria calitativă a sistemelor cu impulsuri**, 1968, 313 p., 13 lei.
M. IOSIFESCU și P. TĂUTU, **Procese stohastice și aplicații în biologie și medicină**, 1968, 345 p., 22 lei.
MANEA MĂNESCU, ANATOL MĂCRIȘ și VINCENŢIU DUMITRU, **Metode matematice moderne aplicate în planificarea lucrărilor de construcție și montaj**, 1969, 256 p., 14 lei.
T. MOROZAN, **Stabilitatea sistemelor cu parametrii aleatori**, 1969, 221 p., 8,50 lei.
RADU ROŞCA, **Geometria diferențială în spațiul eliptic**, 1969, 208 p., 9,75 lei.
N. RADU, **Inele locale**, vol. I, 1968, 377 p., 19 lei.
SIMION SANIELEVICI, **Opera matematică**, 1968, 298 p., 15,50 lei.
I. SUCIU, **Algebre de funcții**, 1969, 298 p., 7 lei.
G. VRĂNCEANU, **Lecții de geometrie diferențială**, vol. IV, 1968, 268 p., 11 lei.
* * * **Relațiile dintre matematică și științele naturii și societății**, 1969, 190 p., 10,50 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 8, P. 1143–1262, BUCUREȘTI, 1969

I.P. I – c 3523

43831

Lei 20.

762

a4

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

9

TOMUL 21

1969

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție.

La revue „STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE" parait 10 fois par an. Le prix d'un abonnément annuel est de \$ 10. — ; £ 4.4.0 ; F.F.49.— ; D.M.40.—
Toute commande de l'étranger sera adressée à CARTIMEX, Boîte postale 134—135, Roumanie, ou à ses représentants à l'étranger.
En Roumanie, vous pourrez vous abonner par les bureaux de poste ou chez votre facteur.
În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție al revistei pe adresa: Calea Griviței nr. 21, București 12.

F 762

TOM. 21, Nr. 9
1969

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

SUMAR

Pag.

VICTORIA CRISTEA, Asupra unei mişcări fluide vîscoase . . . 1265

V. CRUCEANU, Asupra modulelor afine 1271

CARMEN DARIE, Generarea prin metoda lui J. von Neumann a şirurilor de numere pseudoaleatoare 1279

SORIN GOGONEA, Contribuţii la studiul unor clase de mişcări în medii poroase 1287

VASILE IONESCU şi CIPRIAN COZMA, Problema lui Riemann generalizată în clasa funcţiilor analitice 1369

MARIA MIHOC, Asupra reprezentării ecuaţiilor cu patru variabile prin nomograme compuse cu puncte aliniate (I) 1393

GHEORGHE GH. RADU, Functorul sursă generalizat 1403

SILVIA RĂDULESCU, Asupra stării de tensiune a plăcilor elastice subţiri anizotrope 1411

I. SĂCUIU, Asupra unei generalizări a inegalităţii lui Hölder . . 1429

NICOLAE TIŢĂ, Asupra operatorilor disipativi cu componenta imaginară complet continuă 1435

G. G. VRĂNCEANU, Vectori probabilistici în spaţiul de curbură constantă negativă 1441

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 9, P. 1263–1446, BUCUREŞTI, 1969

ASUPRA UNEI MIŞCĂRI FLUIDE VÎSCOASE

DE

VICTORIA CRISTEA

În lucrarea de faţă ne propunem să studiem o mişcare fluidă vîscoasă prin drepte paralele, presupunînd că gradientul de presiune este nul [1].

1. Se presupune că fluidul este limitat de un cilindru circular infinit fix, cu generatoarele paralele cu axa Ox. În interiorul cilindrului, de ecuaţie $x^2 + y^2 = R^2$, se află o placă plană solidă de forma unei benzi infinite, care se mişcă în planul de simetrie Ozx, în sensul generatoarelor cilindrului, cu o viteză constantă de mărime w_0, paralelă cu axa Oz.

Putem presupune, pentru simplificare, că ne aflăm în cazul simetric în care pe placă $-a \leqslant x \leqslant a$, $y = 0$, $-\infty < z < +\infty$, deci planul

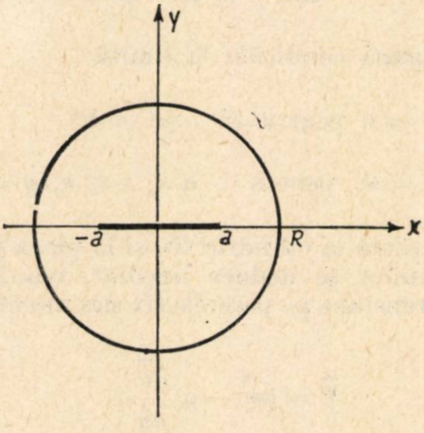


Fig. 1

Ozy este un plan de simetrie al configuraţiei. Într-o secţiune prin planul $z = 0$ avem deci figura 1. Se presupune că mişcarea fluidului este permanentă.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR 9, P. 1265–1279, BUCUREŞTI, 1969

Potrivit cu ipotezele făcute, notînd prin u, v, w proiecţiile vitezei pe axele de coordonate, avem

$$(1)\qquad u = 0, \quad v = 0, \quad w = w(x, y, z).$$

Ecuaţiile de mişcare ale lui Navier şi Stokes se reduc în absenţa forţelor de masă la

$$(2)\qquad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho}\Delta w,$$

ρ fiind densitatea, p presiunea iar μ constanta de vîscozitate. Dar ecuaţia de continuitate devine

$$(3)\qquad \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Rezultă de aici că $w = w(x, y)$, $p = p(z)$ şi

$$(4)\qquad \mu\Delta w = \frac{\partial p}{\partial z} = \text{const}.$$

Limitîndu-ne la mişcări pentru care gradientul de presiune este nul, avem

$$(5)\qquad \Delta w = 0, \; p = \text{const}.$$

La ecuaţia (5) se adaugă condiţiile la limită

$$(6)\qquad w = 0 \text{ pentru } x^2 + y^2 = R^2$$

$$(7)\qquad w = w_0 \text{ pentru } -a \leqslant x \leqslant a, \; y = 0$$

exprimînd că fluidul aderă la cilindrul fix şi la placa plană mobilă.

Expresia tensiunilor se deduce imediat, odată ce $w(x, y)$ a fost determinat. Vectorul tensiune pe peretele fix sau mobil se exprimă prin [2]

$$(8)\qquad \vec{T} = p\vec{n} - \mu\frac{\partial \vec{v}}{\partial n},$$

unde $\vec{n}(\alpha, \beta, 0)$ este versorul normalei orientate pozitiv spre elementul acţionat. În proiecţie pe axe vom avea deci

$$(9)\qquad T_x = p\alpha, \quad T_y = p\beta, \quad T_z = -\mu\frac{\partial w}{\partial n}.$$

Acţiunea totală $\vec{R}(R_x, R_y, R_z)$ a fluidului asupra unei porţiuni cilindrice de perete, de înălţime egală cu unitatea şi avînd ca secţiune prin planul Oxy arcul de curbă C este dată de

$$R_x = 0, \; R_y = 0, \; R_z = -\mu \int_C \frac{\partial w}{\partial_n} \mathrm{d}s. \tag{10}$$

În virtutea ecuaţiei (5), $w(x, y)$ este o funcţie armonică. Dacă se consideră o conjugată armonică a ei $w^*(x, y)$, atunci

$$R_z = -\mu \int_C \frac{\partial w^*}{\partial s} \mathrm{d}s, \tag{10'}$$

unde sensul de parcurs pe C este ales astfel ca direcţiile lui $\vec{n}$ şi $\vec{\tau}$ (versorul tangentei) să facă unghiul $+\frac{\pi}{2}$.

În cazul nostru C este chiar secţiunea prin Oxy a peretelui situat în interiorul cilindrului şi atunci formula (10′) ne arată că R_z se exprimă cu ajutorul perioadei conjugatei armonice a lui $w(x, y)$. Pe de altă parte, din (5) şi (6) rezultă că $w(x, y)$ este egal cu $w_0 u(x, y)$, unde $u(x, y)$ este măsura armonică a lui C.

Funcţia $u(x, y)$ satisface condiţiilor următoare:

1) ea este armonică în domeniul D limitat de cercul $x^2 + y^2 = R^2$ şi de segmentul $-a \leqslant x \leqslant a$, $y = 0$;

2) avem

$$u = 0 \text{ pentru } x^2 + y^2 = R^2, \; u = 1 \text{ pentru } -a \leqslant x \leqslant a, y = 0. \tag{11}$$

2. Vom determina în cele ce urmează pe $u(x, y)$ adaptînd la cazul actual un procedeu utilizat de C. Iacob [3].

Fie $v(x, y)$ o conjugată armonică a lui $u(x, y)$. Vom nota $h(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ şi vom căuta pe $h(z)$ sub forma

$$h(z) = i\beta \int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{g(z)}} + \gamma, \tag{12}$$

unde

$$g(z) = (z^2 - a^2)(z^2 - a'^2), \; a' = \frac{R^2}{a}, \tag{13}$$

β și γ fiind constante reale. Funcția $\sqrt{g(z)}$ este considerată în planul complex cu tăieturile $(-\infty, -a']$, $[a', +\infty)$, $[-a, +a]$ pe axa reală și se alege determinația radicalului care este egală cu $-R^2$ pe marginea superioară a tăieturii în punctul $z = 0$. Vom avea deci

$$\sqrt{g(z)} = \mp \sqrt{g(x)} \text{ pe } [-a, +a]_{\pm}$$

$$\sqrt{g(z)} = -i\sqrt{|g(x)|} \text{ pe } [-a', -a]$$

$$\sqrt{g(z)} = i\sqrt{|g(x)|} \text{ pe } [a, a']$$

$$\sqrt{g(z)} = \pm \sqrt{g(x)} \text{ pe } (-\infty, -a']_{\pm} \text{ și } [a' + \infty)_{\pm}$$

cu corespondența semnelor.

A doua condiție (11) impune să luăm $\gamma = 1$. Ținînd seama de principiul de simetrie al lui Schwarz, prima condiție (11) conduce la

$$u = -1 \text{ pe tăieturile } (-\infty, -a']_{\pm} \text{ și } [a', +\infty)_{\pm}. \tag{14}$$

Această condiție revine la

$$\gamma + \beta \int_a^{a'} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|g(x)|}} = -1$$

de unde

$$\beta = -\frac{2}{\displaystyle\int_a^{a'} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|g(x)|}}}.$$

Dar

$$\int_a^{a'} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|g(x)|}} = 2\int_a^{R} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|g(x)|}}.$$

Rezultă astfel

$$\beta = -\frac{1}{\displaystyle\int_a^{R} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|g(x)|}}}. \tag{15}$$

Din expresia (12) a lui $h(z)$ şi ţinînd seamă de (15) se vede imediat că perioada ω a lui $v(x, y)$ în jurul tăieturii $[-a, +a]$ este egală cu

$$\omega = 2\beta \int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{g(x)}} = 4\beta \int_{0}^{a} \frac{dx}{\sqrt{g(x)}} \tag{16}$$

pentru sensul de parcurs trigonometric.

Rezultă deci că acţiunea fluidului asupra obstacolului este dată, pentru o bandă de lungime egală cu unitatea, în conformitate cu (10′), de

$$R_z = + \mu w_0 \omega = -4\mu\, w_0 \frac{\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{g(x)}}}{\displaystyle\int_a^R \frac{dx}{\sqrt{|g(x)|}}} \tag{17}$$

ţinînd seamă de schimbarea semnului de parcurs. Formula (17) rezolvă complet problema.

Dacă facem substituţia $x = aX$ şi notăm $k = \dfrac{a}{R}$, $k' = \sqrt{1-k^2}$, se găseşte

$$R_z = -4\mu\, w_0 \frac{K(k)}{K(k')}, \tag{18}$$

unde $K(k)$ este integrala eliptică completă de speţa I

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-X^2)(1-k^2X^2)}}.$$

În particular, dacă $k (0 < k < 1)$ este mic, avem

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k^2}{4} + \dots\right), \quad K(k') = \lg\frac{4}{k} + \left(\lg\frac{4}{k} - 1\right)\frac{k^2}{4} + \dots$$

deci

$$R_z \approx -4\mu\, w_0 \frac{\frac{\pi}{2}}{\lg\frac{4}{k}} = -\frac{2\mu\pi w_0}{\lg\frac{4}{k}}. \tag{18'}$$

Dacă k este vecin de 1, atunci

$$K(k) = \lg \frac{4}{k'} + \lg \left(\frac{4}{k'} - 1 \right) k'^2 + \ldots$$

$$K(k') = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k'^2}{4} + \ldots \right)$$

deci

$$R_z \approx -4\mu\, w_0 \frac{\lg \frac{4}{k'}}{\frac{\pi}{2}} \approx -\frac{8\mu w_0}{\pi} \lg \frac{4}{k'}. \tag{18''}$$

Primită la redacție la 24 decembrie 1968

Institutul de construcții
București

SUR UN MOUVEMENT FLUIDE VISQUEUX

(RÉSUMÉ)

Dans le présent travail on étudie un mouvement fluide visqueux par droites parallèles, en supposant le gradient de pression nul. Ce mouvement est produit par la translation rectiligne et uniforme, parallèle à l'axe Oz, d'une plaque plane, de longueur infinie, à l'intérieur de la masse fluide, qui est limitée par une paroi cylindrique dont la section par le plan Oxy est représentée dans la figure 1. On suppose que la plaque est symétrique par rapport au plan Ozy. L'effort sur une portion de plaque de hauteur égale à l'unité est donné par [18].

BIBLIOGRAFIE

1. R. Berker, *Intégration des équations de mouvement d'un fluide visqueux incompressible.* Handbuch der Physik, **VIII/2**, 78 (1963).
2. C. Jacob, *Introducton mathématique à la Mécanique des fluides.* Bucarest – Paris, Ed. Acad. R.P.R. – Gauthier-Villars, 1959, p. 280.
3. C. Jacob, *Recherches sur le mouvement engendré par la rotation de plusieurs corps solides.* Disquisitiones Mathematicae et Physicae, **III**, *3 – 4*, 236 (1943).

ASUPRA MODULELOR AFINE

DE

V. CRUCEANU

(Iaşi)

Studiul global al mulţimii conexiunilor liniare pe o varietate diferenţiabilă ne-a condus [2] la introducerea noţiunii de modul afin care constituie o generalizare a celei de spaţiu afin. Cercetarea acestei generalizări este obiectul Notei de faţă.

1. HOMOMORFISMELE MODULELOR LINIARE

Vom reaminti mai întîi definiţia unui dimorfism între două module liniare în sensul utilizat de Bourbaki în [1, p. 52] şi vom stabili asupra acestor dimorfisme unele rezultate care ne vor fi necesare mai departe. Vom nota prin (V, K) o mulţime $V = \{X, Y, Z, \dots\}$ dotată cu o structură de modul liniar stîng peste un inel $K = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$.

DEFINIŢIA 1. Fie (V, K) şi (V', K') două module liniare. Vom numi *homomorfism liniar* (dimorfism după Bourbaki) al lui (V, K) în (V', K') o pereche de aplicaţii (f, φ), unde $f : V \to V'$, şi $\varphi : K \to K'$, care satisfac condiţiile :

1. φ este un homomorfism de inele ;
2. f este φ-liniară, adică pentru orice $\alpha \in K$ şi $X, Y \in V$,

$$f(X + Y) = f(X) + f(Y), \; f(\alpha X) = \varphi(\alpha) f(X).$$

Perechea (f, φ) se va numi *izomorfism liniar* dacă în plus aplicaţiile f şi φ sînt bijective.

Observaţie. Dacă (V, K) şi (V', K') sînt unitare, condiţia 2) a definiţiei precedente este echivalentă cu următoarea :

$$(1) \quad \forall \alpha, \beta \in K, \; \forall X, Y \in V, \; f(\alpha X + \beta Y) = \varphi(\alpha) f(X) + \varphi(\beta) f(Y).$$

Considerînd mulţimea $\mathfrak{F}(V, V')$ a aplicaţiilor lui V în V' se obţine imediat

Teorema 1. *Operațiile de adunare și înmulțire cu elemente din* K', *definite pe* $\mathcal{F}(V, V')$ *prin condițiile :*

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(V, V'),\ h = f + g \Leftrightarrow \forall X \in V : h(X) = f(X) + g(X),$$

$$\forall \alpha' \in K',\ \forall f \in \mathcal{F}(V, V'),\ g = \alpha' f \Leftrightarrow \forall X \in V : g(X) = \alpha' f(X),$$

determină pe $\mathcal{F}(V, V')$ o structură de modul liniar peste K'.

Fie apoi $\mathcal{L}(V, V'; \varphi)$ submulțimea lui $\mathcal{F}(V, V')$ formată din acele aplicații ale lui V în V' care împreună cu un homomorfism fixat $\varphi : K \to K'$ determină homomorfisme liniare ale lui (V, K) în (V', K'). Avem

Teorema 2. *Dacă inelul* K' *este comutativ,* $\mathcal{L}(V, V'; \varphi)$ *este un submodul al lui* $(\mathcal{F}(V, V'), K')$.

În adevăr, dacă $f, g \in \mathcal{L}(V, V'; \varphi)$, $\alpha' \in K'$ și $h = f + g$, $l = \alpha' f$, atunci, printr-un calcul simplu, se constată că și h, $l \in \mathcal{L}(V, V'; \varphi)$.

Ținînd seama că produsul $(f'' \circ f', \varphi'' \circ \varphi') : (V, K) \to (V'', K'')$, a două homomorfisme liniare $(f', \varphi') : (V, K) \to (V', K')$ și $(f'', \varphi'') : (V', K') \to (V'', K'')$ precum și inversul $(f^{-1}, \varphi^{-1}) : (V', K') \to (V, K)$ al unui izomorfism liniar $(f, \varphi) : (V, K) \to (V', K')$ sînt de asemenea homomorfisme liniare [1, p, 52], obținem de aici, în particular,

Teorema 3. *Operația de compunere determină pe mulțimea automorfismelor liniare* (f, φ) *ale unui modul liniar* (V, K) *o structură de grup.*

2. MODULE AFINE

Fie (V, K) un modul liniar și $A = \{P, Q, R, \dots\}$ o mulțime de elemente numite puncte.

Definiția 2. Spunem că aplicația $\pi : A \times A \to V$ definește pe A o structură de *modul afin* asociat modulului liniar (V, K) dacă satisface condițiile :

1. $\forall P, Q, R \in A : \pi(P, Q) + \pi(Q, R) = \pi(P, R)$.

2. Există un punct $O \in A$ astfel încît aplicația $h : A \to V$ definită de regula $h(P) = \pi(O, P)$, pentru orice $P \in A$, să fie bijectivă.

Mulțimea A dotată cu această structură se numește *modul afin asociat modulului liniar* (V, K). Pentru el vom folosi notația (A, V, K, π) sau (A, V, K). Vom mai introduce notația $\pi(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$. Dacă (V, K) este un spațiu liniar, atunci (A, V, K) se numește *spațiu afin*.

Din condițiile definiției rezultă imediat :

$$\forall P \in A : \overrightarrow{PP} = \vec{O}, \quad \forall P, Q \in A : \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}. \tag{2}$$

De aici se deduce apoi că punctul O în condiția 2 poate fi luat arbitrar.

Definiția 3. Se spune că patru puncte $P, Q, R, S \in A$ determină un paralelogram dacă

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}. \tag{3}$$

Din egalitatea evidentă

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS}$$

rezultă că relația (3) este echivalentă cu

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}. \tag{4}$$

Dacă modulul (V, K) este unitar, spunem că și modulul afin (A, V, K) este unitar. Atunci ca și la spații afine se arată că pentru orice sistem finit de puncte $P_1, P_2, \ldots, P_m \in A$ și de elemente $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^m \in K$, astfel încît $\alpha^1 + \alpha^2 + \ldots + \alpha^m = 1$, punctul P dat de relația

$$\overrightarrow{OP} = \alpha^1 \overrightarrow{OP_1} + \alpha^2 \overrightarrow{OP_2} + \ldots + \alpha^m \overrightarrow{OP_m}, \tag{5}$$

nu depinde de alegerea punctului O. Putem deci da

Definiția 4. Se numește *centrul de masă* al sistemului de puncte $P_1, P_2, \ldots, P_m$ cu masele $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^m$ satisfăcînd condiția $\alpha^1 + \alpha^2 + \ldots + \alpha^m = 1$, punctul P dat de relația (5).

Vom folosi notația

$$P = \alpha^1 P_1 + \alpha^2 P_2 + \ldots + \alpha^m P_m. \tag{6}$$

Definiția 5. Se spune că o parte A' a lui A este un *submodul afin* al modulului (A, V, K) dacă există un punct $O \in A'$ astfel încît mulțimea $V' = \{\overrightarrow{OP}\,;\ P \in A'\}$ să fie un submodul liniar al lui (V, K) sau dacă $A' = \Phi$.

Se constată ușor că submodulul V' nu depinde de alegerea punctului $O \in A'$ și că restricția aplicației π la $A' \times A'$ definește pe A' o structură de modul afin asociat modulului liniar (V', K). Aceasta se numește structura de modul afin *indusă* pe A' de cea dată pe A. Pentru module unitare avem

Teorema 4. *Condiția necesară și suficientă ca o parte* $A' \neq \Phi$ *a lui* A *să fie un submodul afin al lui* (A, V, K), *este ca pentru orice sistem de* $m \leqslant 3$ *puncte* $P_1, \ldots, P_m \in A'$ *și elemente* $\alpha^1, \ldots, \alpha^m \in K$, *astfel încît* $\alpha^1 + \ldots + \alpha^m = 1$, *centrul de masă* $P = \alpha^1 P_1 + \ldots + \alpha^m P_m$ *să aparțină de asemenea lui* A'.

În adevăr, dacă A' este submodul afin al lui (A, V, K) corespunzător submodulului liniar V', atunci pentru orice sistem de puncte $P_1, \ldots, P_m \in V'$ cu masele $\alpha^1, \ldots, \alpha^m \in K$, vectorii $\overrightarrow{P_m P_i}$ $(i = 1, \ldots, m-1)$ aparțin lui V' și deci vectorul

$$\overrightarrow{P_m P} = \alpha^1 \overrightarrow{P_m P_1} + \ldots + \alpha^{m-1} \overrightarrow{P_m P_{m-1}}$$

aparține de asemenea lui V'. Prin urmare centrul de masă $P \in A'$.

Reciproc, să presupunem condițiile teoremei îndeplinite, să luăm un punct $O \in A'$ și să punem $V' = \{\overrightarrow{OP},\ P \in A'\}$. Considerînd $X, Y \in V'$ și $\alpha, \beta \in K$, există $P, Q \in A'$ și $R \in A$ astfel încît

$$X = \overrightarrow{OP}, \quad Y = \overrightarrow{OQ}, \quad \alpha X + \beta Y = \overrightarrow{OR}.$$

De aici rezultă atunci

$$R = \alpha P + \beta Q + (1 - \alpha - \beta) O,$$

adică R este centru de masă pentru sistemul P, Q, O din A' și deci și el aparține lui A'. Deci $\alpha X + \beta Y \in V'$, adică V' este submodul liniar al lui (V, K) și prin urmare A' este submodul afin al lui (A, V, K).

Observație. Dacă în inelul K elementul 2.1_K este ineversabil, se constată ușor că este suficient să fie îndeplinită condiția teoremei numai pentru $m = 2$.

3. HOMOMORFISMELE MODULELOR AFINE

DEFINIȚIA 6. Se numește *homomorfism afin* al modulului afin (A, V, K, π) în modulul afin (A', V', K', π') un triplet de aplicații (F, f, φ), unde $F : A \to A'$, $f : V \to V'$, $\varphi : K \to K'$, astfel încît :

1. $(f, \varphi) : (V, K) \to (V', K')$ este un homomorfism liniar.

2. $\forall P, Q \in A : f(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{F(P)F(Q)}$.

Dacă aplicațiile F, f, φ sînt și bijective, tripletul (F, f, φ) se numește *izomorfism afin.*

Observație. Condiția a doua a acestei definiții este echivalentă cu faptul că următoarea diagramă

$$\begin{tikzcd}
A \times A \arrow[r, "F \times F"] \arrow[d, "\pi"'] & A' \times A' \arrow[d, "\pi'"] \\
V \arrow[r, "f"'] & V'
\end{tikzcd}$$

este comutativă.

Fie o aplicație oarecare $F : A \to A'$ și O un punct din A. Punînd atunci $h(P) = \pi(O, P)$ și $h'(P') = \pi'(F(O), P')$, aplicațiile $h : A \to V$ și $h' : A' \to V'$ astfel definite sînt, conform condiției 2 din definiția 2, bijective. Putem considera deci aplicația $f : V \to V'$ dată de regula

$$f = h' \circ F \circ h^{-1}$$

sau, ceea ce este același lucru,

$$(7) \qquad \forall X \in V : \ f(X) = X' \Leftrightarrow X = \overrightarrow{OP}, \quad X' = \overrightarrow{F(O)F(P)}.$$

Această aplicație pe care o vom numi aplicația *indusă* de F prin intermediul punctului O depinde în general de alegerea lui O. Ea nu depinde de acest punct dacă și numai dacă

$$\forall O, P, O_1, P_1 \in A : \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O_1P_1} \Rightarrow \overrightarrow{F(O)F(P)} = \overrightarrow{F(O_1)F(P_1)}, \tag{8}$$

adică dacă F păstrează proprietatea a patru puncte de a determina un paralelogram.

Dacă tripletul $(F, f, \varphi) : (A, V, K) \to (A', V', K')$ este un homomorfism afin, atunci din condiția 2 a definiției 6 rezultă că F păstrează paralelogramele și că aplicația f, care împreună cu φ determină un homomorfism liniar, este indusă de F prin intermediul unui punct oarecare O din A.

Reciproc, dacă aplicația $F : A \to A'$ are proprietatea că există un punct $O \in A$ astfel încît aplicația $f : V \to V'$ indusă prin intermediul lui O să definească împreună cu homomorfismul $\varphi : K \to K'$ un homomorfism liniar, atunci tripletul (F, f, φ) este un homomorfism afin.

În adevăr, condiția 1 a definiției 6 este satisfăcută prin ipoteză. Considerînd apoi $P, Q \in A$, din condiția 1 și definiția lui f rezultă

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{PQ}) &= f(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = f(\overrightarrow{OQ}) - f(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{F(O)F(Q)} - \\ &- \overrightarrow{F(O)F(P)} = \overrightarrow{F(P)F(Q)}, \end{aligned} \tag{9}$$

adică este satisfăcută și condiția 2 a definiției 6. Avem deci

TEOREMA 5. *Condiția necesară și suficientă ca perechea de aplicații* (F, φ), *unde* $F : A \to A'$ *și* $\varphi : K \to K'$, *să determine un homomorfism afin al modulului afin* (A, V, K) *în* (A', V', K') *este să existe un punct* $O \in A$ *astfel încît aplicația* $f : V \to V'$, *indusă de* F *prin intermediul lui* O, *să definească împreună cu* φ *un homomorfism liniar.*

Observație. Un homomorfism afin (F, f, φ) este unic determinat de homomorfismul liniar (f, φ) și de o pereche de puncte corespunzătoare $O \in A$ și $O' \in A'$.

În adevăr, după condiția 2 a definiției 6, aplicația $F : A \to A'$ este determinată atunci de relația

$$\overrightarrow{O'F(P)} = f(\overrightarrow{OP}). \tag{10}$$

Pentru module unitare avem

TEOREMA 6. Condiția necesară și suficientă ca aplicația $F : A \to A'$ să determine împreună cu homomorfismul $\varphi : K \to K'$ un homomorfism afin al lui (A, V, K) în (A', V', K') este ca ea să păstreze centrele de masă pentru sisteme formate din $m \leqslant 3$ puncte, adică

$$\forall P_i \in A, \ \forall \alpha^i \in K, \quad (i = 1, \ldots, m), \ \alpha^1 + \ldots + \alpha^m = 1 : \tag{11}$$

$$F(\alpha^i P_i) = \varphi(\alpha^i) F(P_i).$$

Necesitatea condiţiei. Punînd $P = \alpha^i P_i$ şi considerînd un punct $O \in A$ avem

$$\overrightarrow{OP} = \alpha^i \overrightarrow{OP_i}.$$

Cum f este φ-liniară, obţinem de aici relaţia

$$f(\overrightarrow{OP}) = \varphi(\alpha^i) f(\overrightarrow{OP_i})$$

care după condiţia 2 a definiţiei 6 este echivalentă cu

$$\overrightarrow{F(O)F(P)} = \varphi(\alpha^i)\overrightarrow{F(O)F(P_i)}.$$

De aici rezultă imediat condiţia (11).

Suficienţa condiţiei. Fie $O \in A$ şi $f : V \to V'$ aplicaţia indusă de F prin intermediul lui O. Considerînd X, $Y \in V$, α, $\beta \in K$ şi punînd $X = \overrightarrow{OP}$, $Y = \overrightarrow{OQ}$, $\alpha X + \beta Y = \overrightarrow{OR}$, obţinem

$$R = \alpha P + \beta Q + (1 - \alpha - \beta)O.$$

Din condiţia teoremei rezultă atunci

$$F(R) = \varphi(\alpha)F(P) + \varphi(\beta)F(Q) + (1 - \varphi(\alpha) - \varphi(\beta)F(O),$$

adică

$$\overrightarrow{F(O)F(R)} = \varphi(\alpha)\, \overrightarrow{F(O)\, F(P)} + \varphi(\beta)\, \overrightarrow{F(O)\, F(Q)}.$$

Prin urmare

$$f(\alpha X + \beta Y) = \varphi(\alpha) f(X) + \varphi(\beta) f(Y)$$

şi deci, după teorema 5, tripletul (F, f, φ) este un homomorfism afin.

Observaţie. În cazul cînd elementul 2.1_K este inversabil, putem lua, în teorema 6, $m = 2$.

TEOREMA 7. Fie $\mathcal{F}(A, A')$ mulţimea aplicaţiilor lui A în A' şi O un punct din A. Aplicaţia

$$\Pi : \mathcal{F}(A, A') \times \mathcal{F}(A, A') \to \mathcal{F}(V, V') \times V'$$

definită de regula

(12) $$\forall F, G \in \mathcal{F}(A, A') : \quad \Pi(F, G) = (f_{FG}, X'_{FG}),$$

unde

$$(13)\quad f_{FG}(X = \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{F(P)\,G(P)} - \overrightarrow{F(O)\,G(O)}, \qquad X'_{FG} = \overrightarrow{F(O)G(O)},$$

determină pe $\mathcal{F}(A, A')$ o structură de modul afin asociat modulului liniar $(\mathcal{F}(V, V') \times V', K')$.

În adevăr, din (13) rezultă, printr-un calcul simplu, că

$$\forall F, G, H \in \mathcal{F}(A, A') : \quad \Pi(F, G) + \Pi(G, H) = \Pi(F, H).$$

Fixînd apoi $F \in \mathcal{F}(A, A')$, fiecărui element $(f, X') \in \mathcal{F}(V, V') \times V'$ îi corespunde o aplicaţie $G \in \mathcal{F}(V, V')$ şi numai una dată de regula

$$(14)\qquad \forall P \in A\,; \quad \overrightarrow{F(P)\,G(P)} = f(\overrightarrow{OP}) + X'$$

pentru care avem

$$(15)\qquad \Pi(F, G) = (f, X').$$

Observaţie. Aplicaţia Π depinde evident de alegerea punctului O. Sînt însă cazuri, de exemplu în geometria diferenţială, cînd punctul O poate fi ales într-un mod intrinsec [2].

Fie acum $\mathcal{A}(A, A'\,; \varphi)$ submulţimea lui $\mathcal{F}(A, A')$ formată din acele aplicaţii ale lui A în A' care împreună cu un homomorfism fixat $\varphi : K \to K'$ determină homomorfisme afine ale lui (A, V, K) în (A', V', K'). Avem

TEOREMA 8. *Dacă inelul K' este comutativ, $\mathcal{A}(A, A'\,; \varphi)$ este un submodul afin al lui $(\mathcal{F}(A, A'), \mathcal{F}(V, V') \times V', K')$ asociat modulului liniar $(\mathcal{L}(V, V'\,; \varphi) \times V', K')$.*

Conform teoremei 2 este suficient să arătăm că mulţimea $M = \{\Pi(F, G)\,; F, G \in \mathcal{A}(A, A'\,; \varphi)\}$, unde F este fixată, coincide cu $\mathcal{L}(V, V'\,; \varphi) \times V'$.

Luînd $G \in \mathcal{A}(A, A'\,; \varphi)$ avem, după (13),

$$\forall X \in V : \ f_{FG}(X = \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{F(P)\,G(P)} - \overrightarrow{F(O)\,G(O)} = \overrightarrow{G(O)\,G(P)} -$$

$$(16)\qquad - \overrightarrow{F(O)\,F(P)} = f_G(X) - f_F(X),$$

unde f_F şi f_G sînt aplicaţiile lui V în V' induse respectiv de F şi G prin intermediul lui O. Deci $f_{FG} \in \mathcal{L}(V, V'\,; \varphi)$ şi prin urmare $\Pi(F, G) \in \mathcal{L}(V, V'\,; \varphi) \times V'$ adică $M \subset \mathcal{L}(V, V'\,; \varphi) \times V'$.

Considerînd apoi $(f, X') \in \mathfrak{L}(V, V'; \varphi) \times V'$ şi luînd aplicaţia $G \in \mathfrak{F}(A, A')$ dată de (14), obţinem (15). Cum aplicaţia $f_G : V \to V'$ indusă de G prin intermediul lui O este dată de

$$f_G = f + f_F, \tag{17}$$

rezultă că $f_G \in \mathfrak{L}(V, V'; \varphi)$ şi deci $G \in \mathfrak{A}(A, A'; \varphi)$. Prin urmare $(f, X') \in M$, adică $\mathfrak{L}(V, V'; \varphi) \times V' \subset M$.

Din cele două incluziuni rezultă că $M = \mathfrak{L}(V, V'; \varphi) \times V'$ şi teorema este demonstrată.

Fie două homomorfisme afine $(F', f', \varphi') : (A, V, K) \to (A', V', K')$, $(F'', f'', \varphi'') : (A', V', K') \to (A'', V'', K'')$ şi să punem $F = F'' \circ F'$, $f = f'' \circ f'$, $\varphi = \varphi'' \circ \varphi'$.

Cum perechea $(f, \varphi) : (V, K) \to (V'', K'')$ este un homomorfism liniar iar

$$f(\overrightarrow{PQ}) = (f'' \circ f')(\overrightarrow{PQ}) = f''(\overrightarrow{F'(P)F'(Q)}) =$$

$$= \overrightarrow{(F'' \circ F')(P)(F'' \circ F')(Q)} = \overrightarrow{F(P)F(Q)},$$

rezultă că tripletul $(F, f, \varphi) : (A, V, K) \to (A'', V'', K'')$ este un homomorfism afin.

Considerînd apoi un izomorfism afin $(F, f, \varphi) : (A, V, K) \to (A', V', K')$, după cum ştim $(f^{-1}, \varphi^{-1}) : (V', K') \to (V, K)$ este un izomorfism liniar. Punînd $P' = F(P)$, $Q' = F(Q)$, obţinem

$$f^{-1}(\overrightarrow{P'Q'}) = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{F^{-1}(P)F^{-1}(Q)}$$

şi deci $(F^{-1}, f^{-1}, \varphi^{-1}) : (A', V', K') \to (A, V, K)$ este un izomorfism afin.

În particular, dacă cele două module afine coincid, obţinem de aici

TEOREMA 9. *Operaţia de compunere determină pe mulţimea automorfismelor afine (F, f, φ) ale unui modul afin (A, V, K) o structură de grup.*

Primită la redacţie la 31 iulie 1968

Universitatea „Alexandru I. Cuza"
Iaşi

SUR LES MODULES AFFINES

(RÉSUMÉ)

L'étude globale de l'ensemble des connexions linéaires sur une variété différentiable a conduit l'auteur [2] à l'introduction de la notion de module affine qui représente une généralisation de l'espace affine. La recherche de cette généralisation est l'objet de la note ci-dessus.

BIBLIOGRAFIE

1. BOURBAKI, N., *Éléments de mathématique. Algèbre*, Chap. 2. Hermann, Paris, 1962, p. 51–52.
2. CRUCEANU, V., *Sur la définition d'une connexion affine*. C.R. Acad. Sci. Paris, **266**, 532–534.

GENERAREA PRIN METODA LUI J. VON NEUMANN A ŞIRURILOR DE NUMERE PSEUDOALEATOARE 1)

DE

CARMEN DARIE

(Cluj)

În lucrarea de faţă se dă un program de generare la calculatorul electronic DACICC-1 a şirurilor de numere pseudoaleatoare, scrise în baza 10, prin metoda propusă de J. von Neumann.

A fiind un număr arbitrar de 4 cifre scris într-o bază de numeraţie g, se notează cu $N(A)$ numărul care corespunde lui A prin algoritmul lui J. von Neumann. În lucrare se dau expresiile cifrelor numărului $N(A)$ în funcţie de cifrele numărului A.

1. ŞIRUL PSEUDOALEATOR AL LUI J. VON NEUMANN. GENERARE ŞI STUDIU STATISTIC

1.1. DEFINIŢIE. Dacă $g \geqslant 2$ este un număr natural, atunci vom nota cu

$$\overline{a_{m-1}\, a_{m-2} \ldots a_1 a_0}^{(g)}$$

numărul natural

$$a_0 + a_1 g + \ldots + a_{m-1}\, g^{m-1},$$

unde $m = 2k$ (număr par).

Dacă din expresia numărului

$$\left(\overline{a_{m-1}\, a_{m-2} \ldots a_1 a_0}^{(g)}\right)^2 = \overline{b'_{2m} \ldots b'_1 b'_0}^{(g)} \qquad (b'_j \in \overline{0,\, g-1})$$

---

1) Lucrarea a fost comunicată la ,,Colocviul tinerilor matematicieni de la Institutul de calcul'', Cluj, 9 mai 1968.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 9, P. 1279–1285, BUCUREŞTI, 1969

ştergem primele şi ultimele $\frac{m}{2} = k$ cifre, obţinem numărul notat cu

$$N\left(\overline{a_{m-1}\,a_{m-2}\ldots a_1 a_0}^{(g)}\right) = \overline{b'_{k+m+1}\ldots b'_{k+1}\,b'_k}^{(g)} = \overline{a^1_{m-1}\ldots a^1_0}^{(g)}.$$

În anumite condiţii, [5], şirul finit de cifre în baza g generat de $\overline{a_{m-1}\ldots a_0}^{(g)}$,

$$a_{m-1},\ldots, a_0, a^{(1)}_{m-1},\ldots, a^{(1)}_0,\ldots, a^{(l)}_{m-1},\ldots, a^{(l)}_0 \tag{1}$$

se consideră fiind *pseudoaleator*, acest şir fiind o aproximaţie a unui şir normal de cifre [1], [2], în sensul că orice combinaţie finită de lungime n de cifre, apare în n-întinderea lui (1), aproximativ de acelaşi număr de ori $\left(\frac{ml}{n}\right.$ este un număr relativ mare$\left.\right)$.

Experienţa arată că în general şirul (1) satisface această proprietate motiv pentru care generarea acestui şir se foloseşte în metoda Monte-Caro.

Un număr $\overline{a_{m-1}\ldots a_0}^{(g)}$ are perioada l, dacă numerele

$$\overline{a_{m-1}\ldots a_0}^{(g)},\ldots, \overline{a^{(l)}_{m-1}\ldots a^{(l)}_0}^{(g)}$$

sînt diferite şi dacă

$$N\left(\overline{a^{(l)}_{m-1}\ldots a^{(l)}_0}^{(g)}\right)$$

este egal cu unul din aceste numere. Această definiţie riguroasă a perioadei se cere completată cu o altă definiţie cu un caracter stohastic : un număr $\overline{a_{m-1}\ldots a_0}^{(g)}$ are perioada pseudoaleatoare l, dacă şirul (1) este un şir pseudoaleator în sensul aproximaţiei normale de mai sus, iar şirul

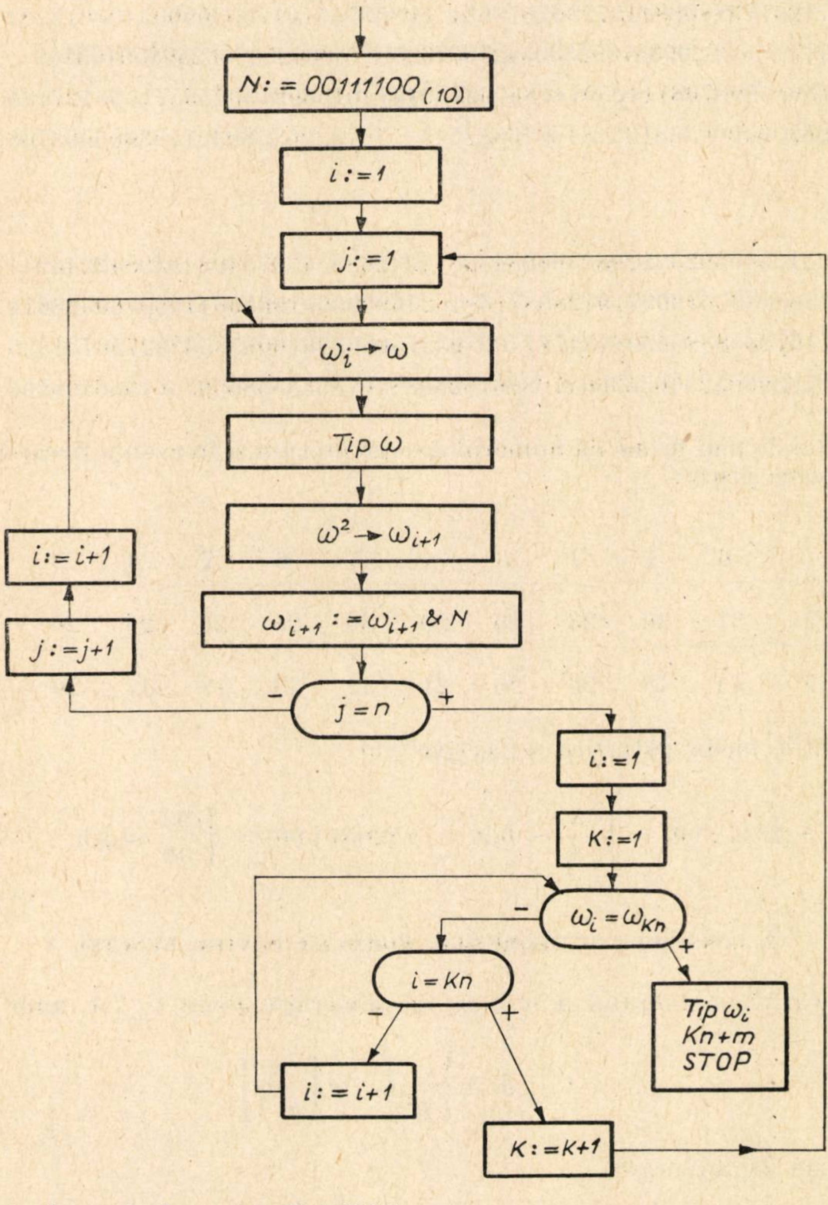
$$a_{m-1},\ldots, a_0,\ldots, a^{(s)}_{m-1},\ldots, a^{(s)}_0$$

pentru $s \geqslant l$, nu este pseudoaleator.

Pornind de la ipoteza că perioada pseudoaleatoare este cu puţin inferioară perioadei, se pune problema generării unor numere de perioadă mai mare decît un număr dat. În acest fel, pentru a obţine un număr de perioadă pseudoaleatoare p, generăm un număr de perioadă p' $(p' > p)$.

1.2. GENERAREA NUMERELOR PSEUDOALEATOARE ÎN BAZA 10 PRIN METODA LUI J. VON NEUMANN

Folosind schema logică


N: = 00111100 (10)
i := 1
j := 1
ω_i → ω
Tip ω
ω² → ω_{i+1}
ω_{i+1} := ω_{i+1} & N
j = n
−
+
j := j+1
i := i+1
i := 1
K := 1
ω_i = ω_{Kn}
−
+
i = Kn
−
+
i := i+1
K := K+1
Tip ω_i
Kn+m
STOP

la calculatorul electronic DACICC — 1, se pot genera şiruri de numere pseudoaleatoare de tip Neumann în baza 10. Un alt program permite aflarea şirurilor de numere de perioadă mai mare decît un număr dat (programul respectiv a fost întocmit de autorul lucrării împreună cu cercetătorul A. Kovacs de la Institutul de calcul). Pentru perioadă mai mare decît 60, se obțin de exemplu numerele 1647, 2057.

Șirurile pseudoaleatoare corespunzătoare sînt :

164771267798808841572807873631760869755101760309095491018282
591598724563820938760233054229376259175006253906256859463549
595445012590708114059740867627294474016602750756571566127185
724296256406036813548433438825454770752968580321103006093708

şi

205723123453923222982808884828712426885439334684939842243941
531423858823619097194288871694624690959919656644080860528614
785671673658380950848471740989327806933616085856292756731829
345291639605256055366472886762368876783335586593467686499999.

Tabelul de mai jos ne dă numărul de cifre precum și frecvența fiecărei cifre în aceste șiruri :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1647	31	20	23	19	20	30	28	26	23	20
2057	14	13	26	26	21	22	33	19	37	29

Abaterile medii pătratice respective sînt :

$$\sigma\,(1647\,;\,60) = \sqrt{\frac{3}{4}} \sim 0{,}9, \qquad \sigma\,(2057\,;\,60) = \sqrt{\frac{93}{40}} \sim 1{,}5.$$

2. CONSIDERAȚII TEORETICE. FORMULĂ PENTRU FUNCȚIA N

Cifrele numărului A în baza de numerație g sînt $C_{g,j}\,A$, unde

$$C_{g,j}\,A = \left[\frac{A}{g^j}\right] - g\left[\frac{A}{g^{j+1}}\right]$$

şi avem reprezentarea

$$A = \sum_{j=0}^{\infty} g^j\, C_{g,j}\,A.$$

Cu aceste expresii, algoritmul lui Neumann pentru $m = 4$,

$$N\,(\overline{a_3 a_2 a_1 a_0}^{(g)}) = \overline{a'_3 a'_2 a'_1 a'_0}^{(g)}$$

se reduce la

$$a'_0 = C_0(C_1(C_1 a_0^2 + C_0 2a_1 a_0) + C_1 2a_1 a_0 + C_0(a_1^2 + 2a_2 a_0)) = C_0 u,$$

$$a'_1 = C_0(C_1 u + C_1(a_1^2 + 2a_2 a_0) + C_2 2a_1 a_0 + C_0(2a_2 a_1 + 2a_3 a_0)) = C_0 v,$$

$$a'_2 = C_0(C_1 v + C_0(a_2^2 + 2a_3 a_1) + C_1(2a_2 a_1 + 2a_3 a_0) + C_2(a_1^2 + 2a_2 a_0)) = C_0 w,$$

$$a'_3 = C_0(C_1 w + C_2(2a_2 a_1 + 2a_3 a_0) + C_1(a_2^2 + 2a_3 a_1) + C_0 2a_3 a_2),$$

unde u, v, w sînt expresiile la care se aplică C_0 pentru a obţine a'_0, a'_1 şi a'_2.

Ţinînd seamă de aceste reprezentări, se pune problema studiului soluţiilor în a_i, a_j, a_k, a_l, ale unor ecuaţii de forma

$$C_0(a_i^2 + 2a_i a_j) = b,$$

$$C_1(a_i^2 + 2a_i a_j) = b,$$

$$C_0(a_i a_j + a_k a_l) = b,$$

adică a studiului unor ecuaţii de forma

$$C_0(C_l a_i^2 + C_m a_i a_j) = b. \tag{2}$$

Pentru diferiţi indici m şi l, soluţiile acestor r ecuaţii prezintă un grad mai mic sau mai mare de regularitate. Vom nota cu

$$\nu\,(l, m\,; g; b)$$

numărul soluţiilor unei asemenea ecuaţii, unde a_i, $a_j \in \overline{0, g-1}^{n+l}$ şi

$$n = \max\,(l, m).$$

Din egalitatea

$$C_l\,(a_i + g^{n+l})^2 + C_m\,((a_i + g^{n+l})\,(a_j + g^{n+l})) = C_l\, a_i^2 + C_m\, a_i\, a_j$$

rezultă că soluţiile ecuaţiei (2) se repetă cu perioada g^{n+l}.

Pentru rezolvarea acestor ecuaţii se folosesc următoarele proprietăţi stabilite tot în această lucrare

$$C_0(x + y) = C_0(C_0 x + C_0 y)$$

$$C_0(xy) = C_0(C_0 x C_0 y)$$

$$C_1(x + y) = C_0(C_1(C_0 x + C_0 y) + C_1 x + C_1 y)$$

$$C_1(xy) = C_0(C_1 x C_0 y + C_0 x C_1 y + C_1 x C_1 y).$$

Pentru demonstrarea formulelor mai sus amintite, să considerăm două numere scrise în baza de numeraţie g :

$$A = a_0 + a_1 g + \dots + a_{m-1} g^{m-1},$$

$$B = b_0 + b_1 g + \dots + b_{m-1} g^{m-1}.$$

Pentru suma şi pentru produsul lor vom obţine respectiv următoarele reprezentări :

$$A + B = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) g + \dots + (a_{m-1} + b_{m-1}) g^{m-1},$$

$$AB = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) g + \dots + a_{m-1} b_{m-1} g^{2m-1}.$$

Ne interesează expresia componentelor $C_{0,g}$ şi $C_{1,g}$ în funcţie de componentele respective ale lui A şi B :

$$C_{0,g}\, A = a_0, \qquad C_{0,g}\, B = b_0,$$

$$C_{1,g}\, A = a_1, \qquad C_{1,g}\, B = b_1,$$

$$C_{0,g}\, A + B = C_0(a_0 + b_0) = C_0(C_0 A + C_0 B),$$

$$C_{1,g}\, A + B = C_0(C_1(a_0 + b_0) + a_1 + b_1) = C_0(C_1(C_0 A + C_0 B) + + C_1 A + C_1 B),$$

$$C_{0,g}\, AB = C_0(a_0 b_0) = C_0(C_0 A C_0 B),$$

$$C_{1,g}\, AB = C_0(C_1(a_0 b_0) + a_0 b_1 + a_1 b_0) = C_0(C_1(C_0 A C_0 B) + C_0 A C_1 B + + C_1 A C_0 B).$$

Primită la redacţie la 21 ianuarie 1969

Academia Republicii Socialiste România —
Filiala din Cluj,
Institutul de Calcul

GÉNÉRATION DES SUITES DE NOMBRES PSEUDO-ALÉATOIRES PAR LA MÉTHODE DE J. VON NEUMANN

(RÉSUMÉ)

Le travail a trait à l'algorithme de génération des nombres pseudo-aléatoires, proposé par J. von Neumann, et contient le schéma logique, conformément auquel on génère ces suites de nombres au calculateur électronique DACICC-1.

Pour deux nombres qui génèrent des suites de période plus grande que 60, on applique un test statistique de vérification de la normalité des suites obtenues.

A étant un nombre arbitraire de 4 chiffres, écrit dans une base de numération g, on désigne par $N(A)$ le nombre qui correspond à A par l'algorithme de J. von Neumann. Dans le travail on donne les expressions des chiffres du nombre $N(A)$ en fonction des chiffres du nombre A.

BIBLIOGRAFIE

1. Berţi, Şt. N., *Probleme legate de studiul şirurilor normale de cifre.* St. cerc. mat., **17** *9*, 1429–1441 (1965).
2. Borel, E., *Leçons sur la théorie des fonctions.* Edit. Gauthier-Villars, Paris, 1914.
3. Jansson, B., *Random number generators.* Stockholm, 1966.
4. Metropolis, N., *Phase shifts-middle square-wave equations.* Symposion on Monte-Carlo Methods, March 16–17, 1954, University of Florida.
5. Neumann, J. von, *Various techniques used in connections with random digits.* Collected Works, General Editor A. H., Oxford, Pergamon Press, 1961–1963.

CONTRIBUȚII LA STUDIUL UNOR CLASE DE MIȘCĂRI ÎN MEDII POROASE[1]

DE

SORIN GOGONEA

Lucrarea este consacrată studiului mişcării apelor arteziene în domenii plane a căror frontieră conţine un număr oarecare de porţiuni impermeabile.
În capitolul I se arată că pentru determinarea vitezei complexe se ajunge la rezolvarea unei probleme la limită de tip Hilbert cu singularităţi de tip polar şi coeficienţi discontinui.
În capitolul II se tratează problemele lui Riemann şi Hilbert cu singularităţi date şi coeficienţi discontinui de o anumită formă, care permit, printre altele, rezolvarea problemei de teoria filtraţiei în cazul semiplanului. Aceleaşi probleme sînt reluate în capitolul III tot în cazul semiplanului, dar fără a mai impune nici o restricţie coeficienţilor.
În capitolul IV este rezolvată problema lui Riemann cu singularităţi date şi coeficienţi discontinui în cazul domeniilor multiplu conexe din care se deduce soluţia problemei lui Hilbert în cazul cercului. În particular se rezolvă complet problema mişcării apelor arteziene în domenii circulare cu frontiera parţial obturată.
Capitolul V este consacrat aplicării rezultatelor generale obţinute mai înainte la rezolvarea problemei mişcării fluidelor în medii poroase în prezenţa cavităţilor parţial obturate.

CAPITOLUL I

§ 1. INTRODUCERE

1. Această lucrare este consacrată studiului unei probleme centrale din hidrodinamica mediilor poroase, mişcarea apelor arteziene. În sensul cel mai larg, prin ape arteziene se înţeleg fluidele care circulă prin stratul permeabil fără a forma o suprafaţă liberă, cu alte cuvinte domeniul ocupat

---

[1] Lucrarea reprezintă teza de doctorat susţinută în ziua de 13 februarie 1969 la Facultatea de Matematică-Mecanică a Universităţii Bucureşti.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 9, P. 1287-1367, BUCUREȘTI, 1969

de mediul poros și cel în care se găsește fluid coincid, [1]. În cazul nostru însă, ne vom limita la acele mișcări care au loc în plane orizontale, elementele mișcării fiind identice cu două plane oarecare. Sub această formă problema își găsește numeroase și importante aplicații în hidraulica subterană, extracția de petrol etc. ceea ce justifică interesul deosebit care i s-a acordat.

Desigur cazul cel mai simplu al acestui tip de mișcări este acela în care frontiera domeniului ocupat de mediul poros este în întregime contur de alimentare, adică este în întregime în contact direct cu fluidul liber. De fapt în această condiție au fost elaborate marea majoritate a lucrărilor, astfel încît dispunem pentru acest caz de o teorie destul de bine închegată.

Problema se complică în mod sensibil, dacă se admite că frontiera domeniului de mișcare conține anumite porțiuni obturate, prin care fluidul liber nu poate pătrunde, circumstanță care se întîlnește destul de des în practică. În această direcție, cercetările, puține la număr, nu s-au efectuat în mod sistematic. O primă problemă a fost considerată de M. Muskat în cunoscuta sa monografie, [2], care a studiat mișcarea într-un semiplan a cărui frontieră este permeabilă numai de-a lungul unui segment de lungime finită. Mai tîrziu A. Houpeurt, [3], s-a ocupat de mișcarea în interiorul unui domeniu avînd forma unui segment de cerc, o porțiune a frontierei fiind impermeabilă. Rezultatele sale au fost generalizate de H. Ene, [4], [5]. Cazul unor domenii de formă mai complicată cu frontiere ce se întind pînă la infinit și care prezintă unele porțiuni impermeabile, a fost considerat de Șt. I. Gheorghiță, [6]. Într-o serie de lucrări, [7], [8], [9], [10], am obținut generalizări a unora din rezultate și ne-am ocupat de studiul unor configurații noi.

Toate aceste lucrări se caracterizează prin faptul că rezultatele pe care ele le conțin au fost obținute prin utilizarea unor metode particulare, care deși s-au dovedit eficace în problema respectivă, își limitează în general la aceasta domeniul de aplicabilitate. În plus, aceste metode, fără excepție, nu permit decît studiul cazurilor cînd frontiera domeniului ocupat de mediul poros conține o singură porțiune impermeabilă.

2. În aceste condiții ne-am propus să abordăm în general problema mișcării apelor arteziene în domenii simplu conexe, mărginite de frontiere care conțin un număr oarecare de porțiuni impermeabile.

După formularea problemei, cu precizarea tuturor condițiilor în care lucrăm, vom arăta că ea poate fi redusă într-un anumit mod la o problemă la limită mixtă pentru funcțiile analitice de o variabilă complexă. Mai precis, dacă mediul poros este omogen, vom ajunge la rezolvarea unei probleme de tip Hilbert cu singularități date și cu coeficienți, care figurează în condițiile la limită, discontinui. Sub această formă problema n-a fost încă tratată în literatură.

Studiul complet al problemei va fi făcut pentru domeniile canonice uzuale, semiplanul și cercul, întrucît, așa cum se va vedea mai jos, ne putem reduce întotdeauna la acestea printr-o reprezentare conformă.

Rezultatele obținute depășesc, prin conținutul lor, cerințele problemei inițiale. În primul rînd ele pot servi și în alte domenii, cum ar fi teoria căldurii sau electrostatică, unde se întîlnesc probleme similare. În al doilea rînd se pot obține generalizări ale unor probleme cunoscute care prezintă un deosebit interes, cum ar fi de exemplu problema lui Volterra.

În fine, rezultatele generale obţinute pot fi adoptate cu uşurinţă astfel încît ele să fie aplicabile la soluţionarea unei alte probleme importante, anume mişcarea în prezenţa cavităţilor.

§ 2. FORMULAREA PROBLEMEI

3. Să considerăm în planul variabilei complexe $z = x + iy$ un domeniu $\mathfrak{D}$ simplu conex, mărginit de o curbă L, ocupat de un mediu poros omogen, avînd coeficientul de filtraţie constant şi egal cu $k > 0$. Despre L vom presupune că este fie o curbă închisă, fie o curbă deschisă şi nelimitată în ambele sensuri, avînd o tangentă care variază în mod continuu. În plus vom admite că unghiul $\theta(\zeta)$ făcut de tangenta dusă într-un punct $\zeta \in L$ cu o direcţie fixă, să spunem axa Ox, satisface o condiţie Hölder (condiţia H).

Vom adopta pe L un sens de parcurs şi vom nota prin D_1 domeniul care rămîne la stînga cînd parcurgem L în acest sens. Prin D_2 vom nota complementara lui D_1 faţă de întreg planul complex. În această lucrare vom considera, cînd nu se face vreo menţiune specială, că $\mathfrak{D} = D_1$.

Fie apoi A_j şi B_j, $(j = 1, \ldots, p)$, $2p$ puncte situate pe L, numerotate în sensul de parcurs, a căror afixe le vom nota prin a_j, respectiv b_j. Arcele $\overparen{A_j, B_j}(j = 1, \ldots, p)$ le vom nota prin C_j iar reuniunea lor prin C. Analog fie C'_j arcele $\overparen{B_j, A_{j+1}}$ $(j = 1, \ldots, p$, iar $A_{p+1} \equiv A_1)$ şi C' reuniunea lor. Avem deci $L = C + C'$. Vom numi punctele A_j şi B_j extremităţi şi uneori cînd nu avem de făcut distincţie între ele vom nota afixele lor într-o ordine arbitrară cu c_k $(k = 1, 2, \ldots, 2p)$. Să presupunem că arcele C_j constituie contururi de alimentare iar arcele C'_j sînt impermeabile. În interiorul lui $\mathfrak{D}$ există nişte puţuri perfecte reprezentate în planul mişcării prin nişte cercuri γ_s, de raze δ_s, şi cu centrele în punctele de afixă z_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$, care colectează fluidul ce intră în mediul poros prin C. Aşa că de fapt mediul poros ocupă domeniul situat între L şi aceste cercuri, care este multiplu conex. Vom admite însă ipoteza, unanim acceptată, potrivit căreia se poate prelungi mişcarea şi în interiorul cercurilor ca şi cum mediul poros ar ocupa tot domeniul simplu conex mărginit de L, cu condiţia să se introducă nişte singularităţi ale mişcării în punctele z_s.

În definitiv dacă admitem că mişcarea este supusă legii lineare de filtraţie (legea lui Darcy), problema se reduce la următoarea [1], [11]:

Să se determine o funcţie analitică $f(z) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y)$ definită în domeniul $\mathfrak{D}$ în următoarele condiţii

a) Diferenţa

$$f_0(z) = f(z) - \sum_{s=1}^{n} \frac{q_s}{2\pi} \ln \frac{1}{z - z_s} \tag{I.1}$$

este olomorfă în $\mathfrak{D}$,

$$\text{(I.2)} \qquad \text{b) } \varphi(P) = 0, \quad P \in C_j,$$

$$\text{(I.3)} \qquad \text{c) } \psi(P) = K_j, \quad P \in C'_j,$$

$$\text{(I.4)} \qquad \text{d) } \varphi(P) = kH_s \quad P \in \gamma_s,$$

Notațiile făcute, și care vor fi utilizate în toată lucrarea, sînt următoarele :

$\varphi(x, y)$ este potențialul vitezelor, definit cu aproximația unei constante aditive arbitrare, și care este legat de presiunea p prin relația lui Darcy

$$\text{(I.5)} \qquad \varphi = -\frac{k}{\rho g}\, p,$$

ρ fiind densitatea constantă a fluidului iar g accelerația gravitației;

$\psi\,(x, y)$ este funcția de curent, $q_s > 0$ este debitul de fluid ce trece prin γ_s și care nu este cunoscut, urmînd a fi determinat din condițiile problemei;

K_j sînt niște constante, dintre care numai una poate fi dată *a priori*, de altfel în mod arbitrar;

$H_s > 0$ reprezintă diferențele de nivel dintre fluidul liber aflat în bazinul de alimentare în contact cu frontiera C și fluidul din puțul cu centrul în z_s.

Deoarece razele δ_s sînt extrem de mici în raport cu distanțele punctelor de pe γ_s $(s = 1,\ldots, n)$ la un punct de pe L sau la un punct de pe γ_l $(l = 1,\ldots, s-1,\ s+1,\ldots, n)$, vom utiliza relația (I.4), așa cum s-a procedat în toate lucrările consacrate apelor arteziene, numai pentru determinarea debitelor, după ce potențialul complex $f(z)$ a fost obținut cu ajutorul primelor trei condiții.

Așadar în fond este vorba de o problemă la limită de tip mixt pentru funcții avînd un număr finit de singularități logaritmice în puncte situate la distanță finită. Ideea care stă la baza studiului ce întreprindem pentru rezolvarea acestei probleme este următoarea. În loc de a încerca direct determinarea funcției f, ne vom fixa atenția asupra derivatei sale, adică a vitezei complexe, care va prezenta singularități de tip polar și cu care este mult mai ușor de manevrat. Ideea în sine nu este nouă. Ea a fost utilizată cu succes în unele chestiuni de hidrodinamica fluidelor perfecte (cum ar fi de exemplu teoria aripii subțiri, [12], [13]) conducînd la problema la limită de tip Dirichlet.

4. Să introducem atunci viteza complexă

$$\text{(I.6)} \qquad w(z) = u(x, y) - iv(x, y) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z},$$

unde

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \text{ şi } v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tag{I.7}$$

sînt componentele vitezei pe axele Ox şi Oy.

Din (I.1) rezultă atunci

$$w(z) = -\sum_{s=1}^{n} \frac{q_s}{2\pi} \frac{1}{z - z_s} + w_0(z), \tag{I.8}$$

unde $w_0(z)$ este olomorfă în $\mathfrak{D}$.

Fie s arcul pe L măsurat de la un anumit punct fix în sensul pozitiv ales şi $\vec{n}$ versorul normalei interioare la L. Din (I.2) rezultă

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{I.9}$$

iar din relaţia (I.3), care atrage $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}n} = 0$, urmează că

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}n} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}n} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}n} = 0. \tag{I.10}$$

Datorită ipotezelor făcute asupra lui L, după cum se ştie (de ex. [14]), derivatele tangenţiale $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$ şi cele după normala interioară $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}n}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}n}$ există pe L şi satisfac o condiţie H.

Fie atunci funcţiile a şi b definite prin relaţiile

$$a(P) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, & P \in C \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}n}, & P \in C' \end{cases} ; \quad b(P) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, & P \in C \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}n}, & P \in C'. \end{cases} \tag{I.11}$$

Evident în acest mod funcţiile hölderiene a şi b sînt perfect definite peste tot pe L cu excepţia punctelor de afixă c_k, unde valorile lor nu sînt determinate. Li se poate atribui de exemplu una din valorile limită $a(c_k \pm 0)$ respectiv $b(c_k \pm 0)$, înţelegînd aici, ca şi peste tot în această lucrare, prin $\chi(c - 0)$ şi $\chi(c + 0)$ valorile limită a unei funcţii $\chi(P)$ reală sau complexă definită pe L cînd punctul P tinde către punctul de afixă c în sensul adoptat, respectiv în sensul contrar. În ipotezele făcute asupra lui L, valorile $a(c_k \pm 0)$, (respectiv $b(c_k \pm 0)$), există întotdeauna şi în general sînt diferite între ele. Aşadar funcţiile a şi b definite prin (I.11) au discontinuităţi de prima speţă într-un număr finit de puncte.

Se mai vede că $a(P)$ şi $b(P)$ (respectiv valorile lor limită în c_k) nu se anulează simultan.

În tot ceea ce urmează vom spune că o funcţie reală sau complexă $\chi(P)$, unde P este un punct al unei curbe închise sau deschise L, aparţine clasei H_0 în raport cu mulţimea E dacă satisface următoarele condiţii, [14] :

— Este definită peste tot pe L cu excepţia unei mulţimi E finite de puncte afixe c_k $(k = 1, 2, \ldots, s)$.

— Există limitele $\chi(c_k \pm 0)$, (în general diferite) în toate punctele c_k.

— Este hölderiană pe fiecare din arcele închise $L_k = c_k, c_{k+1}$ cu condiţia să-i atribuim în c_k şi c_{k+1} respectiv valorile $\chi(c_k + 0)$ şi $\chi(c_{k+1} - 0)$.

Evident, funcţiile a şi b definite mai sus aparţin clasei H_0.

Ţinînd seama de (I.7) şi (I.11), relaţiile (I.9) şi (I.10) pot fi condensate sub forma unei singure condiţii la limită

$$a(P)u(P) + b(P)v(P) = 0, \tag{I.12}$$

înţelegînd că această condiţie este satisfăcută peste tot pe L cu excepţia mulţimii E a punctelor c_k.

În cazul cînd domeniul $\mathfrak{D}$ conţine punctul de la infinit, trebuie să precizăm comportamentul funcţiei w în vecinătatea acestui punct. Deoarece în cadrul în care ne-am situat, potenţialul complex nu are singularităţi în acest punct, în vecinătatea lui este valabilă dezvoltarea

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^{-k}, \tag{I.13}$$

de unde rezultă că dezvoltarea corespunzătoare a lui $w(z)$ începe cu termenul de forma $\frac{1}{z^2}$, sau utilizînd o notaţie clasică.

$$w(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right). \tag{I.14}$$

Mai rămîne să precizăm comportamentul lui $w(z)$ în vecinătatea punctelor c_k, unde, aşa cum am arătat, nu putem pretinde satisfacerea condiţiei (I.12). Din teoria generală a mişcărilor plane a fluidelor incompresibile în medii poroase ([1], pag. 93—97, [11], pag. 53—55), se ştie că acest comportament depinde de unghiul făcut în punctele c_k de arcele permeabile cu cele impermeabile. Cum în cazul nostru acest unghi este egal cu π, $w(z)$ nu va fi mărginită în vecinătatea acestor puncte. Pe de altă parte, deoarece va trebui să obţinem în cele din urmă expresia potenţialului complex, trebuie să cerem ca $w(z)$ să fie integrabilă pe contur, deci ca în vecinătatea punctelor c_k să admită evaluarea

$$|w(z)| < \frac{\text{const.}}{|z - c_k|^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{I.15}$$

În definitiv, cu precizările făcute mai sus, am ajuns la următoarea problemă la limită :

Să se determine o funcţie $w(z) = u - iv$ analitică în domeniul simplu conex $\mathfrak{D}$, mărginită de curba L, avînd singularităţi polare într-un număr finit de puncte situate la distanţă finită, prelungibilă continuu peste tot pe L, cu excepţia unei mulţimi E formată din punctele de afixă c_k $(k = 1, \ldots, 2p)$, în vecinătatea cărora admite evaluarea (I.15) şi care satisface condiţia la limită (I.12) pentru toate punctele de pe $L - E$, funcţiile a şi b avînd discontinuităţi de prima speţă în punctele c_k. Dacă punctul de la infinit se găseşte în $\mathfrak{D}$, w trebuie să satisfacă în vecinătatea lui relaţia (I.14).

Vom numi pe scurt o problemă de acest tip, problema lui Hilbert cu singularităţi date şi coeficienţi discontinui.

5. Aşa cum am mai amintit, vom rezolva problema propusă cînd domeniul mişcării este un domeniu canonic uzual, cercul sau semiplanul, în cazul cărora frontiera satisface evident condiţiile care i-au fost impuse. Fie $\mathfrak{D}^*$ acest domeniu, L^* frontiera lui şi $Z = X + iY$ planul complex în care se află. Fie apoi $z = z(Z)$ funcţia care reprezintă conform domeniul $\mathfrak{D}^*$ pe $\mathfrak{D}$ cu corespondenţa frontierelor şi $Z = Z(z)$ inversa ei. Dacă L satisface condiţiile impuse la început, este demonstrat faptul că prin funcţia de transformare se ajunge în planul Z la o condiţie la limită de tipul (I.12) cu aceleaşi proprietăţi, [14]. Rezolvînd deci problema în acest plan şi înlocuind Z cu $Z = Z(z)$ se obţine soluţia din planul iniţial.

Pentru problema de hidrodinamică de la care am pornit prezintă însă interes şi domeniile a căror frontieră au anumite puncte anguloase şi care se întîlnesc foarte frecvent în practică. Vom arăta că, pentru acest caz, dificultatea apărută poate fi depăşită relativ uşor.

Într-adevăr, datorită faptului că datele la limită (I.2) şi (I.3) sînt constante, ele vor rămîne constante şi pe porţiunile corespunzătoare de pe L^*. Considerînd potenţialul complex $f(Z) = f[z(Z)]$, vom putea să-i aplicăm în întregime raţionamentele de mai sus întrucît condiţiile sînt aceleaşi. Fie $w(Z) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}Z}$ soluţia problemei la limită.

Avem

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}Z}\,\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z}. \tag{I.16}$$

Dacă unghiul tangentelor într-un punct angulos de pe L, de afixă $\tilde{z}$, este $\mu\pi$, $(0 \leqslant \mu \leqslant 2)$, atunci vom avea în vecinătatea acestui punct, notînd $\tilde{Z} = Z(\tilde{z})$,

$$z - \tilde{z} = (Z - \tilde{Z})^{\mu} \cdot [\lambda_1 + \lambda_2 (Z - \tilde{Z}) + \ldots],$$

de unde rezultă că în această vecinătate avem

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z} = O\,[(Z - \tilde{Z})^{1-\mu}]. \tag{I.17}$$

Punctul angulos poate ocupa pe L una din următoarele trei poziții : a) pe unul din arcele C_j ; b) pe unul din arcele C'_j ; c) la intersectarea unui arc permeabil cu unul impermeabil. În primele două cazuri imaginea pe L^* a punctului angulos este un punct în care prelungirea continuă a lui $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}Z}$ este posibilă. Avem deci $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}Z} = O\,(1)$ și atunci

$$\text{(I.18)} \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = O[(Z - \tilde{Z})^{1-\mu}].$$

Deci dacă $\mu < 1$, viteza se anulează în punctul angulos, iar dacă $\mu > 1$, devine infinită, ceea ce este în concordanță cu teoria generală la care ne-am mai referit.

În cazul al treilea vom avea $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}Z} = O\,[(Z - \widetilde{Z})^{-\nu}]$ cu $0 < \nu < 1$. După cum se va vedea în capitolele următoare, atît în cazul semiplanului cît și al cercului obținem $\nu = \frac{1}{2}$. Rezultă atunci

$$\text{(I.19)} \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = O\,[(Z - \widetilde{Z})^{\frac{1}{2}-\mu}].$$

Deci obținem viteză nulă pentru $\mu < \frac{1}{2}$ și viteză infinită pentru $\mu > \frac{1}{2}$, ceea ce iarăși concordă cu teoria generală.

O ultimă chestiune privind utilizarea reprezentării conforme și care trebuie elucidată, este legată de comportamentul soluției la infinit, atunci cînd este cazul. Fie că prin reprezentarea efectuată lui $z = \infty$ îi corespunde $Z = Z_\infty$, iar lui $Z = \infty$ îi corespunde $z = z_\infty$.

În vecinătatea lui $Z = Z_\infty$ avem

$$z = \frac{\alpha_1}{Z - Z_\infty} + \frac{\alpha_2}{(Z - Z_\infty)^2} + \ldots$$

deci $\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z} = O\,[(Z - Z_\infty)^2]$. Apoi cum $Z = Z_\infty$ este un punct din interiorul lui $\mathfrak{D}^*$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}Z} = O(1)$. Deci

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = 0\ [(Z - Z_\infty)^2] = O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

adică este îndeplinită condiția (I.14).

Apoi în vecinătatea lui $z = z_\infty$

$$Z = \frac{\beta_1}{z - z_\infty} + \frac{\beta_2}{(z - z_\infty)^2} + \ldots$$

şi deci $\frac{dZ}{dz} = O\,[(z - z_\infty)^{-2}] = O(Z^2)$.

Cum relaţia (I.14) este îndeplinită pentru $w(Z)$, avem $\frac{df}{dz} = O\left(\frac{1}{Z^2}\right)$ şi deci $\frac{df}{dz}$ este mărginită în $z = z_\infty$.

Evident, dacă unul din domeniile $\mathfrak{D}$ sau $\mathfrak{D}^*$ este mărginit, prima din consideraţiile precedente, respectiv a doua, este de prisos. De asemenea, în cazul cînd în transformarea considerată punctele de la infinit se corespund, îndeplinirea condiţiei (I.14) este evidentă.

6. Am arătat mai înainte (punctul 3) că relaţia (I.4) serveşte la determinarea debitelor îndată ce se cunoaşte expresia potenţialului complex determinat prin celelalte condiţii. Acest procedeu, folosit în exclusivitate în toate lucrările, se bazează pe faptul că razele puţurilor fiind extrem de mici, contururile lor vor fi, pentru soluţia obţinută, cu o foarte bună aproximaţie, nişte linii echipotenţiale. Atunci va fi suficient să scriem că relaţia (I.4) este îndeplinită într-un punct oarecare al lui γ_s. Se obţine în acest mod un sistem de ecuaţii algebrice care determină debitele şi cu ajutorul căruia se poate studia problema interferenţei puţurilor (a se vedea de ex. [3], [7], [15]).

Să mai amintim de asemenea că V. P. Pilatovski, [16], a obţinut expresia debitelor sub forma unor integrale de contur care sînt utile mai ales cînd se cunoaşte presiunea medie pe o curbă ce înconjoară cîte un singur puţ.

Aici vom prezenta un procedeu pentru determinarea debitului în cazul unui singur puţ, [8], care s-a dovedit extrem de comod. El se bazează pe faptul că în fond ipoteza amintită mai sus este echivalentă cu a neglija în calcule puterile lui δ (raza puţului) superioare lui unu, [11].

Fie deci $f = f(Z)$ potenţialul complex în planul transformat $Z = Z(z)$ şi $Z_0 = Z(z_0)$ imaginea izvorului situat în planul fizic în punctul $z = z_0$. Fie apoi dezvoltarea acestui potenţial în vecinătatea lui Z_0 :

$$f(Z) = \frac{q}{2\pi} \ln (Z - Z_0) + A_0 + A_1 (Z - Z_0) + A_2 (Z - Z_0)^2 + \ldots$$

sau

$$f(Z) = -\frac{q}{2\pi} \ln A\,(Z - Z_0) + A_1 (Z - Z_0) + \ldots \tag{I.20}$$

unde A este o constantă.

În ipotezele acceptate, conturul puțului din planul fizic se transformă într-un cerc de rază δ_1 legată de δ prin relația [2], [17]:

$$\delta_1 = \delta \left| \frac{dZ}{dz} \right|_{z=z_0}, \tag{I.21}$$

și dacă punem $Z - Z_0 = \delta_1 e^{i\omega}$ (δ_1 fiind de același ordin cu δ), aceasta implică că vom obține la limită, uniform în raport cu ω,

$$q = \frac{2\,\pi k\, H}{\ln \dfrac{1}{|A|\delta_1}}. \tag{I.22}$$

Cu această formulă s-a obținut destul de rapid expresia debitului în multe cazuri cînd expresia potențialului complex era complicată ([8], [9], [10]).

§ 3. CONSIDERAȚII GENERALE ASUPRA CONȚINUTULUI LUCRĂRII

7. Problema determinării unei funcții olomorfe cunoscînd pe frontieră o combinație liniară a părților sale reale și imaginare pusă de Hilbert, [18], [19], pentru a ilustra cercetările sale în domeniul ecuațiilor integrale, își găsește numeroase și importante aplicații în diferite chestiuni de fizică-matematică. Ea a fost succesiv atacată de Fr. Noether, [20], prin reducere la o ecuație integrală singulară, de C. Iacob, [21], [22], care a utilizat în studiul ei ecuații integrale de tip Fredholm și, în fine, de N. I. Musheli̇șvili, [14], care a redus-o la o problemă Riemann.

Problema clasică a lui Hilbert a fost apoi extinsă în două direcții.

Pe de o parte s-a considerat că în condiția la limită, coeficienții pot admite discontinuități de prima speță, în sensul precizat la § 2. Problema întîlnită și studiată într-un caz particular de către H. Villat [23], a fost rezolvată în general de către N. I. Mushelișvili și școala sa [24], [14] și apoi de F. D. Gahov [25]. Se datorește lui Mushelișvili împărțirea soluțiilor în clase în raport cu comportamentul lor în punctele de discontinuitate ale coeficienților, clase care joacă un rol deosebit de important.

Pe de altă parte, menținînd continuitatea coeficienților, C. Iacob, [26], [27], a admis că soluția poate avea anumite singularități izolate în domeniu. A obținut în acest fel soluția completă pentru cerc.

8. În această lucrare, cum s-a văzut deja mai sus, am fost conduși, din considerații hidrodinamice, la studiul problemei lui Hilbert într-o formă mai generală care înglobează circumstanțele întîlnite în ambele extensiuni de care era vorba mai înainte.

În ceea ce privește modul de tratare al acestei probleme, ea va fi în toate cazurile redusă la o problemă Riemann cu coeficienți discontinui și singularități date, a cărei soluție prezintă și un interes în sine.

Vom începe studiul nostru considerînd drept domeniu canonic semiplanul. Utilizarea semiplanului prezintă importante avantaje, constatate în numeroase împrejurări, legate de forma frontierei care poate fi luată chiar axa reală. Apar însă în cazul nostru şi o serie de dificultăţi legate de faptul că punctul de la infinit se găseşte pe frontiera domeniilor D_1 şi D_2, ceea ce pentru problema lui Riemann corespunzătoare este destul de incomod.

Din această cauză am pornit în capitolul II studiul problemelor într-un caz care nu este cel mai general (§§ 1,3), dar care permite evitarea dificultăţilor amintite mai sus. Se ajunge astfel la o problemă Riemann cu singularităţi date în cazul contururilor deschise (§ 2) care permite soluţionarea unei probleme Hilbert cu coeficienţi de un anumit tip (§ 4). Deşi cazul tratat nu este cel mai general, vom arăta că el cuprinde totuşi în particular soluţia pentru problema lui Volterra cu singularităţi (§ 5), precum şi soluţia completă a problemei de teoria filtraţiei (§ 6). Capitolul se încheie cu § 7 în care sînt tratate cîteva aplicaţii concrete din mişcarea apelor arteziene.

În capitolul III se reia problema pentru semiplan în cazul cel mai general (§§ 1,2) obţinîndu-se soluţia completă. Ca aplicaţii se obţine soluţia problemei lui Dirichlet, cu singularităţi şi date la limită discontinui, o nouă formă a soluţiei problemei lui Volterra cu singularităţi, precum şi soluţia problemei de mişcarea apelor arteziene.

În capitolul IV se tratează problema pentru cazul contururilor închise. În § 1 se consideră problema lui Riemann cu singularităţi date şi coeficienţi discontinui pentru domenii multiplu conexe. În §§ 2,3 se tratează problema lui Hilbert în cazul cercului, din care se deduce în particular soluţia problemei lui Volterra cu singularităţi date (§ 4). Soluţia problemei de teoria filtraţiei în cazul cînd domeniul mişcării este un cerc este dată în § 5. În fine, ultimul paragraf este consacrat unor aplicaţii concrete privind mişcarea apelor arteziene.

În ultimul capitol sînt tratate cîteva probleme referitoare la mişcarea în prezenţa cavităţilor umplute cu un fluid perfect.

Am considerat justificat acest lucru întrucît pe de o parte există o legătură strînsă din punct de vedere fizic între aceste probleme şi anumite probleme din mişcarea apelor arteziene (a se vedea de ex. [39]), iar pe de altă parte din punct de vedere matematic se poate ajunge la probleme la limită aproape identice, pentru care se pot utiliza deopotrivă soluţiile generale pe care le obţinem în cursul lucrării.

În încheiere să-mi fie permis să-mi exprim adînca mea recunoştinţă conducătorului meu ştiinţific, acad. prof. C. Iacob, pentru îndrumarea şi ajutorul acordat în toată activitatea mea, pentru sfaturile şi încurajările de care am beneficiat permanent în decursul elaborării acestei lucrări.

Sînt de asemenea profund îndatorat prof. dr. doc. Şt. I. Gheorghiţă pentru bunăvoinţa cu care a urmărit dezvoltarea lucrării, pentru numeroase sugestii făcute şi care au fost pentru mine deosebit de preţioase.

CAPITOLUL II

§ 1. PROBLEMA LUI RIEMANN CU SINGULARITĂŢI DATE ŞI COEFICIENŢI DISCONTINUI DE UN ANUMIT TIP

1. Să considerăm în planul variabilei complexe $z = x + iy$ o curbă L închisă, sau nelimitată în ambele sensuri, avînd proprietăţile specificate în capitolul I (punctul **3**). Dacă L este închisă, vom alege sensul de parcurs astfel încît domeniul D_1 să fie interiorul curbei. Să considerăm pe L punctele A_j, $B_j (j = 1, 2, \dots, p)$ care determină arcele C_j şi C'_j aşa cum s-a văzut (fig. 1a, b).

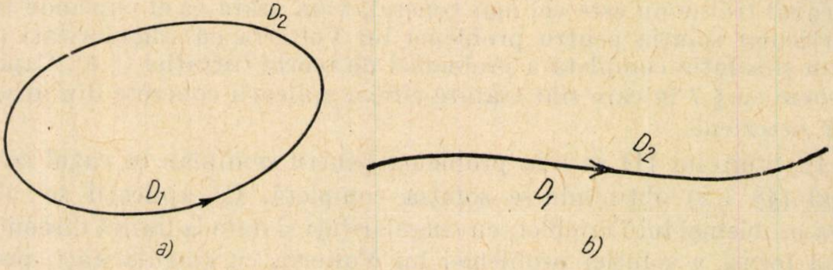


Fig. 1

Fie apoi două funcţii uniforme $\Phi_1^{(0)}(z)$ şi $\Phi_2^{(0)}(z)$, definite şi olomorfe în tot planul cu excepţia singularităţilor lor izolate (poluri sau puncte esenţiale). Presupunem că singularităţile lui $\Phi_1^{(0)}(z)$ se găsesc numai în D_1, iar cele ale lui $\Phi_2^{(0)}(z)$ numai în D_2.

Se cere determinarea unei funcţii $\Phi(z)$ analitică pe porţiuni

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi_1(z), & z \in D_1, \\ \Phi_2(z), & z \in D_2, \end{cases} \tag{II.1}$$

în următoarele condiţii :

— Partea principală a funcţiei $\Phi_j(z)$ relativă la singularităţile din D_j să fie $\Phi_j^{(0)}$ $(j = 1, 2)$, cu alte cuvinte diferenţele

$$h_1(z) = \Phi_1(z) - \Phi_1^{(0)}(z) ; \; h_2(z) = \Phi_2(z) - \Phi_2^{(0)}(z), \tag{II.2}$$

sînt olomorfe în D_1, respectiv în D_2.

— Să fie satisfăcută condiţia la limită

$$\Phi_1(\zeta) = \widetilde{G}(\zeta)\, \Phi_2(\zeta) + g(\zeta), \tag{II.3}$$

unde

$$\widetilde{G}(\zeta) = \begin{cases} G(\zeta), & \zeta \in C \\ 1 & \zeta \in C' \end{cases} \tag{II.4}$$

Despre funcţiile G şi g definite pe $L - E$ (cf. cap. I, punctul 4) vom face următoarele presupuneri :

$G(\zeta)$ este de clasă H_0 pe fiecare din arcele C_j, dacă îi atribuim în punctele c_k valorile limită corespunzătoare, şi pe care le putem presupune diferite de unu. În plus, $G(\zeta)$ (respectiv $G(c_k \pm 0)$ nu se anulează nicăieri.

$g(\zeta)$ este de clasă H_0 pe $L = C + C'$.

Vom începe prin a studia problema omogenă ($g(\zeta) \equiv 0$). Atunci din (II.3) şi (II.4) rezultă

$$\begin{aligned} &\Phi_1(\zeta) - \Phi_2(\zeta) = 0, \quad \zeta \in C', \\ &\Phi_1(\zeta) = G(\zeta)\,\Phi_2(\zeta), \quad \zeta \in C. \end{aligned} \tag{II.5}$$

Prima din aceste relaţii ne arată că arcele C'_j nu reprezintă linii de salturi pentru funcţia $\Phi(z)$, astfel încît problema omogenă s-a redus la determinarea unei funcţii analitice definită în domeniul D, format din planul prevăzut cu tăieturi de-a lungul arcelor C_j, în următoarele condiţii :

Diferenţa

$$h(z) = \Phi(z) - \Phi^{(0)}(z) \tag{II.6}$$

este olomorfă în D, unde

$$\Phi^{(0)}(z) = \Phi_1^{(0)}(z) + \Phi_2^{(0)}(z), \tag{II.7}$$

iar pe C este îndeplinită condiţia

$$\Phi_1(\zeta) = G(\zeta)\,\Phi_2(\zeta), \quad \zeta \in C. \tag{II.8}$$

Aici prin $\Phi_1(\zeta)$ şi $\Phi_2(\zeta)$ vom înţelege limitele lui $\Phi(z)$ cînd $z \to \to \zeta \in C$ pe drumuri situate la stînga, respectiv la dreapta lui C, în raport cu sensul de parcurs ales. Evident, condiţia nu are sens în extremităţile arcelor C_j.

Vom numi această problemă, prin analogie cu cazul soluţiilor fără singularităţi, problema lui Riemann cu singularităţi date pentru contururi deschise. Pentru problema de la care am plecat este suficient, cum se va vedea, cunoaşterea unei soluţii particulare, soluţia canonică a problemei omogene în cazul contururilor deschise. Vom da însă soluţia completă a acestei probleme care prezintă un interes în sine, fiind susceptibilă de aplicaţii în alte chestiuni.

§ 2. PROBLEMA LUI RIEMANN CU SINGULARITĂŢI DATE ÎN CAZUL CONTURURILOR DESCHISE

2. Fie C_j ($j = 1, \ldots, p$) arcele $\overset{\frown}{A_j B_j}$, fără puncte comune între ele, avînd proprietăţile de regularitate pe care le-am admis şi pentru L. Se cere determinarea unei funcţii analitice în planul prevăzut cu tăieturi de-a lungul lui C_j (domeniul D) cu următoarele proprietăţi :

a) Funcţia

$$h(z) = \Phi(z) - \Phi^{(0)}(z) \tag{II.9}$$

este olomorfă peste tot în D, cu excepţia eventuală a punctului de la infinit.

b) $\Phi(z)$ este prelungibilă continuu pe $C = \bigcup_{j=1}^{p} C_j$ cu excepţia extremităţilor punctelor de afixă c_k (a_j sau b_j), $k = 1, \ldots, 2p$, în vecinătatea cărora admite evaluarea

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{const.}}{|z - c_k|^{\alpha}}, \quad \alpha \in (0,1). \tag{II.10}$$

c) Pe arcele C_j deschise este satisfăcută condiţia

$$\Phi_1(\zeta) = G(\zeta)\,\Phi_2(\zeta) + g(\zeta). \tag{II.11}$$

Ca şi mai înainte, prin $\Phi_1(\zeta)$ şi $\Phi_2(\zeta)$ vom înţelege valorile lui $\Phi(z)$ obţinute prin prelungire continuă venind pe drumuri din stînga respectiv din dreapta. G şi g sînt funcţii hölderiene pe arcele închise C_j (înţelegînd $G(c_k) = \lim G(\zeta)$ şi $g(c_k) = \lim g(\zeta)$ pentru $\zeta \to c_k$ pe arcul respectiv), iar $G(\zeta) \neq 0$.

3. Să considerăm la început problema omogenă ($g \equiv 0$). Se ştie, [14], că $e^{\gamma(z)}$, unde

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\ln G(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \tag{II.12}$$

este o soluţie particulară a problemei omogene fără singularităţi. Ea satisface condiţia (II.11) făcută omogenă pentru toate punctele de pe C în afară de extremităţile c_k, în vecinătatea cărora avem

$$\gamma(z) = (\alpha_k + i\,\beta_k)\ln(z - c_k) + \gamma_0(z), \tag{II.13}$$

$\gamma_0(z)$ fiind regulată în această vecinătate, iar numerele reale α_k şi β_k sînt date de

$$\alpha_k + i\,\beta_k = \mp \frac{1}{2\pi i}\ln G(c_k), \tag{II.14}$$

semnul minus fiind luat pentru punctele A_j iar semnul plus pentru punctele B_j. Extremităţile pentru care $G(c_k)$ este real şi pozitiv (deci $\alpha_k = 0$) se numesc extremităţi singulare.

Soluţia canonică de clasă h $(c_1, c_2, \ldots, c_r)$ a problemei omogene introdusă de Musheli̧şvili, [14], este dată de

$$X(z) = e^{\gamma(z)} \prod_{k=1}^{2p} (z - c_k)^{\lambda_k}, \tag{II. 15}$$

unde λ_k sînt numere întregi determinate astfel încît să fie satisfăcute relaţiile

$$\begin{aligned} 0 &< \alpha_k + \beta_k < 1, \quad k = 1, 2, \ldots, r \\ -1 &< \alpha_k + \beta_k < 0, \quad k = r + 1, r + 2, \ldots, m \\ \alpha_k &+ \lambda_k = 0, \quad k = m + 1, \ldots, 2p, \end{aligned} \tag{II.16}$$

m fiind numărul extremităţilor nesingulare.

Este evident că $X(z)$ este soluţie a problemei omogene o dată cu $e^{\gamma(z)}$. Se mai arată că $|X(z)|$ rămîne mărginită în vecinătatea extremităţilor singulare, tinde către zero în extremităţile $c_1, \ldots, c_r$ ca $|z - c_k|^{\alpha_k + \lambda_k}$ $(0 < \alpha_k + \lambda_k < 1)$ şi tinde către infinit în celelalte extremităţi nesingulare ca $|z - c_k|^{\alpha_k + \lambda_k}$ $(-1 < \alpha_k + \lambda_k < 0)$.

Prin indicele problemei lui Riemann se înţelege numărul întreg

$$\varkappa = -\sum_{k=1}^{2p} \lambda_k. \tag{II.17}$$

Din (II.15) se vede atunci că $X(z)$ are la infinit un zero de ordin $\varkappa$, dacă $\varkappa > 0$, şi un pol de ordin $-\varkappa$, dacă $\varkappa < 0$.

4. Să ne întoarcem la problema neomogenă. Vom căuta soluţiile de clasă $h(c_1, c_2, \ldots, c_r)$, adică soluţiile care rămîn mărginite în vecinătatea extremităţilor $c_1, c_2, \ldots, c_r$. Condiţia (II.11) se mai poate scrie

$$\frac{\Phi_1(\zeta)}{X_1(\zeta)} - \frac{\Phi_2(\zeta)}{X_2(\zeta)} = \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)}. \tag{II.18}$$

Urmînd procedeul lui C. Iacob, [26], să considerăm funcţia $\dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$. Ţinînd seama de proprietăţile lui $X(z)$, se poate arăta ca şi în [14] că această funcţie satisface o relaţie de tipul (II.10).

În aceste condiţii, dacă $\Phi(z)$ n-ar avea singularităţi, ţinînd seama de (II.18) şi de faptul că $\dfrac{1}{X(z)}$ are un pol de ordin $\varkappa$ dacă $\varkappa > 0$, ar rezulta că, [14],

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + Q_\varkappa(z),$$

unde $Q_{\varkappa}(z)$ este un polinom de grad cel mult $\varkappa$, dacă $\varkappa \geqslant 0$. Cum Φ are singularități, va trebui să scriem

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta - z} + Q_{\varkappa}(z) + \Psi_0(z), \tag{II.19}$$

unde $\Psi_0(z)$ este o funcție cu anumite singularități la a cărei determinare trecem acum.

Ținînd seama de (II.9) putem scrie

$$\Psi_0(z) = M(z) + H(z) + \frac{h(z)}{X(z)} - Q_{\varkappa}(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta - z}, \tag{II.20}$$

unde am notat

$$\frac{\Phi^{(0)}(z)}{X(z)} = M(z) + H(z), \tag{II.21}$$

$M(z)$ fiind suma părților principale ale funcției $\dfrac{\Phi^{(0)}(z)}{X(z)}$ relativă la singularitățile din D. Urmează că $H(z)$ este olomorfă.

Ținînd seama de faptul că $h(z)$ este olomorfă iar $\dfrac{1}{X(z)}$ are un pol la infinit de ordin $\varkappa$, (dacă $\varkappa > 0$), rezultă că partea principală a lui $\Psi_0(z)$ relativă la singularitățile din D este $M(z) + Q^{*}_{\varkappa}(z)$, $Q^{*}_{\varkappa}(z)$ fiind tot un polinom de grad $\varkappa$. Atunci diferența $\Psi_0(z) - M(z) - Q^{*}_{\varkappa}(z)$ va fi olomorfă în tot planul inclusiv punctul de la infinit, deci se reduce la o constantă care poate fi înglobată în $Q^{*}_{\varkappa}(z)$. Atunci din (II.19) obținem soluția sub forma

$$\Phi(z) = X(z)\,[M(z) + P_{\varkappa}(z)] + \frac{X(z)}{2\pi i}\int_C \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta - z} \tag{II.22}$$

unde $P_{\varkappa}(z)$ este un polinom de grad cel mult $\varkappa$, dacă $\varkappa \geqslant 0$, și o constantă dacă $\varkappa < 0$. Primul termen reprezintă soluția generală a problemei omogene, și este important de observat că numai aici figurează singularitățile prescrise (prin prezența funcției $M(z)$), iar termenul al doilea reprezintă o soluție particulară a problemei neomogene.

5. Nu e greu de văzut că soluția (II.22) este de clasă dorită. Într-adevăr, în vecinătatea extremităților $c_1, c_2, \ldots, c_r$, $X(z)$ se comportă, așa cum am văzut, ca $|z - c_k|^{\alpha_k + \lambda_k}$ cu $\alpha_k + \lambda_k \in (0,1)$. Din (II.21) rezultă $X(z)\ M(z) = \Phi^{(0)}(z) - H(z)\ X(z)$. Cum $\Phi^{(0)}(z)$ și $H(z)$ sînt mărginite în c_k, rezultă același lucru pentru $X(z) M(z)$. În mod evident, același lucru rezultă pentru termenul $X(z)\ P_{\varkappa}(z)$. Cît privește integrala, se știe, [14], că ea se comportă în vecinătatea extremităților ca $|z - c_k|^{-(\alpha_k + \lambda_k)}$, deci termenul corespunzător este și el mărginit.

În vecinătatea celorlalte extremităţi nesingulare, pentru care $\alpha_k + \lambda_k \in (-1, 0)$, rezultă printr-un raţionament analog că soluţia nu mai este mărginită şi tinde către infinit ca $|z - c_k|^{\alpha_k+\lambda_k}$. În ceea ce priveşte extremităţile singulare, pentru care $\alpha_k + \lambda_k = 0$, din aceleaşi proprietăţi cunoscute ale integralei de tip Cauchy, rezultă că în vecinătatea lor soluţia rămîne mărginită dacă $\beta_k \neq 0$ şi se comportă (datorită integralei) ca $\ln (z - c_k)$, dacă $\beta_k = 0$.

Rămîne de văzut dacă soluţia (II.22) are singularităţile dorite. Să presupunem la început $\varkappa \geqslant 0$. Avem $X(z)\,M(z) - \Phi^{(0)}(z) = - H(z)X(z)$. Cum $X(z)$ nu are singularităţi în D, rezultă că această diferenţă este olomorfă. Termenul $X(z)P_\varkappa(z)$ este olomorf datorită faptului că $X(z)$ are la infinit un zero de ordin $\varkappa$ şi în mod evident este olomorf şi termenul ce conţine integrala. Aşadar diferenţa $\Phi(z) - \Phi^{(0)}(z)$ este olomorfă şi soluţia are pentru $\varkappa \geqslant 0$ singularităţile dorite.

Dacă $\varkappa < 0$ vom avea

$$\Phi(z) - \Phi^{(0)}(z) = X(z)\left[-H(z) + K + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}\right], \quad K = \text{const.},$$

şi se vede că membrul drept are un pol de ordin $-\varkappa$ la infinit. Pentru ca această singularitate să dispară este necesar şi suficient ca suma din paranteză să aibă un zero de ordin $-\varkappa$ în acest punct, adică această proprietate trebuie să o aibă funcţia

$$\text{(II.23)} \qquad \mathcal{H}(z) = M(z) - \frac{\Phi^{(0)}(z)}{X(z)} + K + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}.$$

Cum K este o constantă arbitrară, înseamnă că în fond, pentru ca soluţia să aibă singularităţile dorite, trebuiesc îndeplinite $-\varkappa - 1$ condiţii. În acest caz soluţia problemei este unică, deoarece diferenţa a două eventuale soluţii este regulată şi satisface condiţia la limită omogenă. Cum $\varkappa < 0$, ea este identic nulă, [14].

§ 3. REZOLVAREA PROBLEMEI DIN § 1. CAZURI PARTICULARE

6. Vom relua în primul rînd problema omogenă. S-a văzut că ea este echivalentă cu problema omogenă pentru contururile deschise C_j pe care este satisfăcută a doua condiţie (II.5), suma părţilor principale ale soluţiei fiind dată de (II.7). Fie soluţia canonică (II.15) a acestei probleme, numerele Λ_k fiind luate în conformitate cu clasa dorită. Să scriem condiţia la limită sub forma

$$\text{(II.24)} \qquad \frac{\Phi_1(\zeta)}{X_1(\zeta)} - \frac{\Phi_2(\zeta)}{X_2(\zeta)} = 0,$$

şi să examinăm funcţia $\frac{\Phi(z)}{X(z)}$. Ea are saltul nul la trecerea prin L şi un pol la infinit de ordin $\varkappa$, dacă $\varkappa > 0$. Atunci la fel ca în paragraful precedent vom avea

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)} = Q_{\varkappa}(z) + \Psi_0(z), \tag{II.25}$$

funcţia $\Psi_0(z)$ avînd anumite singularităţi şi urmînd a fi determinată. Notînd

$$\frac{\Phi_j^{(0)}(z)}{X_j(z)} = M_j(z) + H_j(z), \tag{II.26}$$

unde $M_j(z)$ este suma părţilor principale ale funcţiei $\frac{\Phi_j^{(0)}(z)}{X_j(z)}$ relativă la singularităţile din D_j $(j = 1, 2)$, vom putea scrie

$$\Psi_0(z) = M_j(z) + H_j(z) + \frac{h(z)}{X_j(z)} - Q_{\varkappa}(z), \tag{II.27}$$

relaţie în care înţelegem în membrul din stînga că $z \in D_1$ sau $z \in D_2$ după cum $j = 1$ sau $j = 2$.

Să presupunem la început că L este o curbă închisă. Dacă $j = 1$, cum $X_1(z)$ este regulată în D_1, rezultă că suma părţilor principale ale lui $\Psi_0(z)$ relativă la singularităţile din D_1 este $M_1(z)$. Dacă $j = 2$, $X_2^{-1}(z)$ are un pol de ordin $\varkappa$ la infinit pentru $\varkappa > 0$ şi un zero de ordin $-\varkappa$ pentru $\varkappa < 0$. Deci suma părţilor principale ale lui $\Psi_0(z)$ relativă la singularităţile din D_2 este $M_2(z)$ dacă $\varkappa < 0$ şi $M_2(z) + Q_{\varkappa}^{\star}(z)$ dacă $\varkappa \geqslant 0$. Atunci diferenţa $\Psi_0(z) - M_1(z) - M_2(z) - Q_{\varkappa}^{\star}(z)$ se reduce la o constantă care poate fi înglobată în $Q_{\varkappa}^{\star}$.

Dacă L este o curbă nelimitată în ambele sensuri, $z = \infty$ aparţine ambelor domenii D_j. Raţionamentul se va face pentru fiecare din ele aşa cum a fost făcut mai sus pentru D_2. Va rezulta atunci ţinînd seama de (II.25)

$$\Phi(z) = X(z)\,[M_1(z) + M_2(z) + P_{\varkappa}(z)], \tag{II.28}$$

unde $P_{\varkappa}(z)$ este un polinom de grad cel mult $\varkappa \geqslant 0$ şi o constantă dacă $\varkappa < 0$.

7. Vom trece la studiul problemei neomogene. Datorită liniarităţii problemei, va fi suficient să determinăm o soluţie particulară a acestei probleme pe care să o adăugăm la cea dată de (II.28). Dacă scriem condiţia (II.3) sub forma

$$\frac{\Phi_1(\zeta)}{X_1(\zeta)} - \frac{\Phi_2(\zeta)}{X_2(\zeta)} = \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)} \qquad \zeta \in L - E, \tag{II.29}$$

şi ţinînd seama de comportamentul soluţiei canonice şi de clasa lui $\Phi(z)$, rezultă că funcţia $\dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$ satisface o condiţie de tipul (II.18).

Atunci, evident, o soluţie particulară va fi dată de

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}, \tag{II.30}$$

atunci cînd integrala din membrul drept există. Dacă L este o curbă închisă, ea există întotdeauna în virtutea proprietăţilor lui g. Dacă L este nelimitată, ea conţine punctul de la infinit şi s-ar putea ca integrala să nu existe nici măcar în valoare principală în cazul cînd $X_1(\zeta)$ nu are la infinit comportamentul necesar. Această dificultate poate fi depăşită în anumite cazuri, foarte importante în aplicaţii, printr-un procedeu utilizat de Mushelişvili în problema fără singularităţi. Anume, în relaţia (II.29) putem înţelege prin $X(z)$ nu soluţia canonică care s-a utilizat la obţinerea soluţiei generale a problemei omogene dată de (II.28), ci o soluţie canonică de altă clasă, să-i spunem $\widetilde{X}(z)$, care în mod evident satisface relaţia $G(\zeta) = \widetilde{X}_1(\zeta)\cdot\widetilde{X}_2^{-1}(\zeta)$ şi deci (II.29). Vom alege, dacă este posibil, $\widetilde{X}(z)$ astfel încît să asigure pentru $\dfrac{g(\zeta)}{\widetilde{X}_1(\zeta)}$ proprietăţile necesare convergenţei integralei. Dacă o astfel de soluţie există, va trebui să ne convingem că prin utilizarea ei sînt respectate în plus următoarele două condiţii :

— Soluţia finală a problemei neomogene să rămînă de clasa dorită.

— Să nu se introducă singularităţi suplimentare, care de altfel sînt posibile numai în punctul de la infinit.

Vom avea prilejul, ceva mai încolo, să utilizăm acest procedeu.

Soluţia problemei neomogene va fi atunci

$$\Phi(z) = X(z)\,[M_1(z) + M_2(z) + P_\varkappa(z)] + \frac{\widetilde{X}(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(\zeta)}{\widetilde{X}_1(\zeta)}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}. \tag{II.31}$$

Ţinînd seama de faptul că $X(z)$ este soluţia canonică a problemei lui Riemann pentru contururi deschise şi de modul cum s-au făcut raţionamentele la punctul 5 rezultă imediat că toate concluziile obţinute acolo privind comportamentul soluţiei respective în vecinătatea extremităţilor, rămîn în întregime valabile şi pentru soluţia (II.31). Studiul singularităţilor se face urmînd exact aceeaşi cale iar rezultatele obţinute sînt similare. Anume, dacă $\varkappa \geqslant 0$ soluţia are numai singularităţile prescrise. Dacă $\varkappa < 0$, apare un pol suplimentar la infinit de ordin $-\varkappa$. Pentru ca acesta să dispară este necesar şi suficient ca funcţiile

$$\widetilde{\mathfrak{K}}(z) = M_1(z) + M_2(z) - \frac{\Phi_2^{(0)}(z)}{X(z)} + K + \frac{1}{2\pi i}\frac{\widetilde{X}(z)}{X(z)}\int_L \frac{g(\zeta)}{\widetilde{X}_1(\zeta)}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}, \tag{II.32}$$

în cazul cînd $z = \infty \in D_2$, deci L este o curbă închisă, respectiv

$$\widetilde{\mathfrak{H}}^*(z) = M_1(z) + M_2(z) - \frac{\Phi_1^{(0)}(z) + \Phi_2^{(0)}(z)}{X(z)} + K + \frac{1}{2\pi i}\frac{\widetilde{X}(z)}{X(z)}\int_L \frac{g(\zeta)}{\widetilde{X}_1(\zeta)}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}, \tag{II.33}$$

dacă $z = \infty$ aparţine ambelor domenii D_1 şi D_2, să aibe în acest punct un zero de ordin $-\varkappa$. O dată aceste condiţii îndeplinite, soluţia problemei este unică. Într-adevăr, considerînd două eventuale soluţii, diferenţa lor nu va mai avea singularităţi şi va satisface condiţia la limită (II.3) omogenă. În acest caz, deoarece indicele este negativ, se ştie că soluţia respectivă este identic nulă şi deci cele două soluţii coincid.

8. Din cele de mai sus rezultă că soluţia problemei lui Riemann care ne interesează se obţine fără dificultate îndată ce dispunem de soluţia canonică (II.15). În vederea aplicaţiilor vom determina această soluţie într-un caz foarte particular, dar extrem de important.

Să considerăm că avem $G(\zeta) \equiv -1$. Atunci $\ln G(\zeta) = i\pi$ şi relaţia (II.12) ne dă imediat

$$\gamma(z) = \sum_{j=1}^{p} \ln \sqrt{\frac{z - b_j}{z - a_j}}. \tag{II.34}$$

Se vede uşor din această relaţie că toate extremităţile c_k sînt nesingulare şi avem :

— În vecinătatea punctelor a_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$ $\alpha_j = -\dfrac{1}{2}$, $\beta_j = 0$,

— În vecinătatea punctelor b_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$ $\alpha_j = \dfrac{1}{2}$, $\beta_j = 0$.

Relaţia (II.15) poate fi scrisă atunci

$$X(z) = \prod_{j=1}^{p} \sqrt{\frac{z - b_j}{z - a_j}},\ \prod_{k=1}^{2p} (z - c_k)^{\lambda_k}. \tag{II.35}$$

De aici se deduc uşor soluţiile canonice pentru cîteva clase importante pentru ceea ce urmează :

1) Clasa h_0 corespunzătoare lui $r = 0$ este clasa soluţiilor pentru care nu vom face nici o restricţie privind mărginirea lor în extremităţi. Se vede imediat că va trebui să luăm $\lambda_j = 0$ pentru extremităţile a_j şi $\lambda_j = -1$ pentru extremităţile b_j. Vom avea atunci

$$\varkappa = p, \tag{II.36}$$

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{\prod_{j=1}^{p} (z - a_j)(z - b_j)}}, \tag{II.37}$$

unde prin radicalul de la numitor vom înţelege o ramură a sa olomorfă în planul prevăzut cu tăieturi de-a lungul arcelor C_j.

2) Clasa h_{2p}, corespunzătoare lui $r = 2p$, este clasa soluţiilor mărginite în toate extremităţile. Aici va trebui să luăm $\lambda_j = 1$ pentru extremităţile a_j şi $\lambda_j = 0$ pentru extremităţile b_j şi va rezulta

$$\varkappa = -p \tag{II.38}$$

$$X(z) = \sqrt{\prod_{j=1}^{p} (z-a_j)(z-b_j)}, \tag{II.39}$$

cu aceeaşi observaţie privind radicalul.

3) Clasa $h\,(a_1, a_2, \ldots, a_p)$, adică clasa soluţiilor mărginite în toate punctele a_j. Pentru aceste puncte va trebui să luăm $\lambda_j = 1$, iar pentru extremităţile b_j, $\lambda_j = -1$. Atunci

$$\varkappa = 0 \tag{II.40}$$

$$X(z) = \sqrt{\prod_{j=1}^{p} \left(\frac{z-a_j}{z-b_j}\right)}, \tag{II.41}$$

radicalul fiind de asemenea olomorf în planul cu aceleaşi tăieturi.

4) Clasa $h\,(b_1, b_2, \ldots, b_p)$, cu semnificaţia evidentă, ne va da

$$\varkappa = 0, \tag{II.42}$$

$$X(z) = \sqrt{\prod_{j=1}^{p} \left(\frac{z-b_j}{z-a_j}\right)}. \tag{II.43}$$

§ 4. PROBLEMA LUI HILBERT PENTRU SEMIPLAN, CU SINGULARITĂŢI DATE, ŞI COEFICIENŢI DISCONTINUI DE UN ANUMIT TIP

9. Fie D_1 semiplanul $y > 0$ şi o funcţie $F_0(z)$ uniformă, definită şi olomorfă în tot planul cu excepţia singularităţilor sale izolate (poluri sau puncte esenţiale) ce se găsesc numai în D_1. Se cere determinarea unei funcţii $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ definită în D_1 astfel încît diferenţa

$$h(z) = F(z) - F_0(z) \tag{II.44}$$

este olomorfă în D_1, iar pe axa reală L este îndeplinită condiţia

$$\widetilde{a}(\zeta)\, U(\zeta) + \widetilde{b}(\zeta)\, V(\zeta) = c(\zeta), \tag{II.45}$$

unde a, b, c sînt funcţii reale definite pentru $\zeta \in L - E$ astfel încît

$$(\mathrm{II}.46)\qquad \tilde{a} = \begin{cases} a(\zeta), & \zeta \in C, \\ 0, & \zeta \in C' \end{cases} \qquad \tilde{b} = \begin{cases} b(\zeta), & \zeta \in C \\ 1, & \zeta \in C'. \end{cases}$$

Prin $a(\zeta)$ şi $b(\zeta)$ am notat două funcţii de clasă H_0 pe fiecare din arcele C_j în raport cu extremităţile lor, iar prin $c(\zeta)$ o funcţie de clasă H_0 pe L în raport cu mulţimea E a extremităţilor arcelor C_j şi C'_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$.

Extinzînd după procedeul cunoscut, [14], funcţia $F(z)$ pînă la o funcţie analitică pe porţiuni, punînd

$$(\mathrm{II}.47)\qquad \Phi(z) = \begin{cases} \Phi_1(z) = F(z), & z \in D_1, \\ \Phi_2(z) = \overline{F(\bar{z})}, & z \in D_2, \end{cases}$$

ajungem pentru funcţia $\Phi(z)$ la problema Riemann

$$(\mathrm{II}.48)\qquad \Phi_1(\zeta) = \tilde{G}(\zeta)\, \Phi_2(\zeta) + g(\zeta) \quad \zeta \in L - E,$$

unde

$$(\mathrm{II}.49)\qquad \tilde{G}(\zeta) = \begin{cases} G(\zeta) = -\dfrac{a + ib}{a - ib} & \zeta \in C \\ 1 & ,\ \zeta \in C' \end{cases} ; \quad g(\zeta) = \frac{2c}{\tilde{a} - i\tilde{b}},$$

Prin $\Phi_j(\zeta)$ se înţeleg valorile limită ale lui $\Phi(z)$ cînd $z \to \zeta$ venind din semiplanul superior D_1 respectiv din cel inferior D_2. Sensul de parcurgere a lui L va fi deci de la $-\infty$ spre $+\infty$.

Funcţia $\Phi(z)$ va avea singularităţi astfel încît suma părţilor lor principale vor fi, ţinînd seama de (II.47),

$$(\mathrm{II}.50)\qquad \Phi_1^{(0)}(z) = F_0(z)\,; \quad \Phi_2^{(0)}(z) = \overline{F_0(\bar{z})}.$$

Am ajuns în acest mod la o problemă Riemann de tipul celei considerate în § 1 al acestui capitol. Dintre soluţiile acestei probleme va trebui să alegem numai pe acelea pentru care este verificată condiţia suplimentară

$$(\mathrm{II}.51)\qquad \Phi(z) = \overline{\Phi(\bar{z})},$$

rezultată din (II.47). O astfel de soluţie va fi

$$(\mathrm{II}.52)\qquad \Phi_*(z) = \frac{1}{2}\,[\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})}],$$

care verifică după cum se ştie condiţia (II.45), îndată ce acest lucru este realizat de $\Phi(z)$. Soluţia problemei Hilbert va fi atunci

$$(\mathrm{II}.53)\qquad F(z) = \frac{1}{2}\,[\Phi_1(z) + \overline{\Phi_2(\bar{z})}],$$

unde $\Phi_j(z)$ sînt date de formula (II.31). Obţinem deci

$$F(z) = \frac{1}{2} X_1(z) [M_1(z) + M_2(z) + P_\varkappa(z)] + \frac{1}{2} \overline{X_2(\overline{z})} [\overline{M_1(\overline{z})} +$$

$$(\text{II.54}) \quad + \overline{M_2(\overline{z})} + \overline{P_\varkappa(\overline{z})}] + \frac{1}{2\pi i} \left\{ \widetilde{X}_1(z) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c(\zeta)}{\widetilde{X}_1(\zeta) [\widetilde{a}(\zeta) - i \widetilde{b}(\zeta)]} \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \right.$$

$$\left. - \overline{\widetilde{X}_2(\overline{z})} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c(\zeta)}{\overline{\widetilde{X}_1(\zeta)} [\widetilde{a}(\zeta) + i \widetilde{b}(\zeta)]} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right\},$$

unde $X(z)$ şi $\widetilde{X}(z)$ sînt soluţii canonice ale problemei Riemann (II.48) de o anumită clasă (ce pot eventual coincide), $P_\varkappa$ un polinom de grad cel mult $\varkappa$ (sau o constantă dacă $\varkappa < 0$), iar $M_j(z)$ $(f = 1, 2)$ sînt suma părţilor principale ale funcţiilor $\frac{F_0(z)}{X_1(z)}$ şi $\frac{\overline{F_0(\overline{z})}}{X_2(z)}$ relative respectiv la singularităţile din D_j.

Nu e greu de văzut că soluţia (II.54) este de aceeaşi clasă cu soluţia problemei lui Riemann. Într-adevăr, primul termen a apărut şi în soluţia acestei probleme. Deoarece o soluţie canonică a problemei Riemann se comportă în modul, în vecinătatea unei extremităţi c_k, ca $|z - c_k|^{\alpha_k + \lambda_k}$, acelaşi comportament îl va avea şi $\overline{X(\overline{z})}$ (c_k fiind numere reale). Cum prin ipoteză $\widetilde{X}(z)$ nu influenţează asupra clasei soluţiilor, rezultă că întreaga soluţie (II.54) este de clasă dorită.

Ne rămîne de văzut ce singularităţi are soluţia (II.54). Partea principală a primului termen relativă la singularităţile date în D_1 este, în conformitate cu cele văzute la problema lui Riemann, egală cu $\frac{1}{2} F_0(z)$. Al doilea termen (în care $\overline{z} \in D_2$) va da, datorită simetriei punctelor singulare în cele două domenii, ca parte principală relativă la aceleaşi singularităţi, tot $\frac{1}{2} F_0(z)$. Ultimii doi termeni n-au singularităţi în aceste puncte. Dacă $\varkappa < 0$, apare ca şi în problema lui Riemann o singularitate suplimentară, anume un pol de ordinul $-\varkappa$ la infinit introdus de soluţia canonică. Se poate găsi şi în acest caz condiţia necesară şi suficientă pentru ca această singularitate să dispară. Ţinînd seama de relaţia (II.15), rezultă că

$$\overline{X_2(\overline{z})} = e^{\overline{\gamma_2(\overline{z})}} \prod_{k=1}^{2p} (z - c_k)^{\lambda_k} = e^{\overline{\gamma_2(\overline{z})} - \gamma_1(z)} X_1(z),$$

$\gamma_j(z)$ fiind determinările funcţiei $\gamma(z)$ dată de (II.12) în D_j $(j = 1, 2)$.

O relație analoagă este evident valabilă și pentru $\overline{\widetilde{X}}_2(\bar{z})$. Înlocuind aceste valori în (II.54), condiția căutată se traduce prin faptul că funcția

$$\mathfrak{M}(z) = M_1(z) + M_2(z) - \frac{F_0(z)}{X_1(z)} + K + \frac{1}{\pi i}\cdot$$

$$\text{(II.55)}\quad \cdot\,\frac{\widetilde{X}_1(z)}{X_1(z)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c(\zeta)}{\widetilde{X}_1(\zeta)\,[\widetilde{a}(\zeta) - i\,\widetilde{b}(\zeta)]}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} + \mathrm{e}^{\overline{\gamma_2(\bar{z})} - \gamma_1(z)}\Bigg[\overline{M_1(\bar{z})} +$$

$$+ \overline{M_2(\bar{z})} - \frac{F_0(z)}{\overline{X_2(\bar{z})}} + \overline{K} - \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c(\zeta)}{\overline{\widetilde{X}}_1(\zeta)\,[\widetilde{a}(\zeta) + i\,\widetilde{b}(\zeta)]}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}\Bigg],$$

trebuie să aibă un zero de ordin $-\varkappa$ la infinit.

Dacă aceste condiții sînt îndeplinite, repetînd raționamentul de la punctul 7 ne asigurăm că soluția este unică.

10. În vederea aplicațiilor ne va fi utilă o variantă a problemei tratate la punctul precedent. Să considerăm alături de $F(z)$ funcția $F^*(z)$ analitică în D_1 definită prin

$$\text{(II.56)}\qquad F^*(z) = -\,i\,F(z) = V - iU.$$

Se cere să determinăm această funcție astfel încît diferența

$$\text{(II.57)}\qquad h^*(z) = F^*(z) - F_0^*(z)$$

să fie olomorfă în D_1, $F_0^*(z)$ fiind o funcție uniformă definită în tot planul cu excepția singularităților sale izolate situate în D_1, iar pe $L - E$ să fie îndeplinită relația

$$\text{(II.58)}\qquad \widetilde{a}(\zeta)\,U(\zeta) + \widetilde{b}(\zeta)\,V(\zeta) = c(\zeta),$$

unde de data aceasta

$$\text{(II.59)}\qquad \widetilde{a} = \begin{cases} a(\zeta), & \zeta\in C\\ 1\ , & \zeta\in C'\end{cases};\quad \widetilde{b}(\zeta) = \begin{cases} b(\zeta), & \zeta\in C\\ 0\ , & \zeta\in C'\end{cases}\cdot$$

a, b, c avînd proprietățile precizate la punctul **9**.

Introducînd din nou o funcție analitică pe porțiuni definită prin

$$\text{(II.60)}\qquad \Phi_2^*(z) = \begin{cases}\Phi_1^*(z) = F^*(z), & z\in D_1,\\ \Phi_2^*(z) = \overline{F^*(\bar{z})}, & z\in D_2,\end{cases}$$

şi scriind condiţia (II.58) sub forma

$$\mathcal{R}e\,\{iF^* \cdot (\widetilde{a} - i\widetilde{b})\} = c,$$

ajungem, urmînd calea obişnuită, la problema lui Riemann

$$\Phi_1^*(\zeta) = \widetilde{G}^*(\zeta)\,\Phi_2^*(\zeta) + g^*(\zeta), \tag{II.61}$$

unde

$$\widetilde{G}^*(\zeta) = \begin{cases} G^*(\zeta) = \dfrac{a + ib}{a - ib}, & \zeta \in C \\ 1, & \zeta \in C' \end{cases} \quad ; \; g^*(\zeta) = \frac{-2ic}{\widetilde{a} - i\widetilde{b}}\,. \tag{II.62}$$

Sumele părţilor principale ale soluţiei relative la singularităţile din cele două domenii vor fi evident

$$\Phi_{1*}^{(0)}(z) = F_0^*(z) = -\,i\,F_0(z), \qquad \Phi_{2*}^{(0)}(z) = \overline{F_0^*(\overline{z})} = i\,\overline{F_0(\overline{z})}. \tag{II.63}$$

Dacă vom nota cu $X^*(z)$ şi $\widetilde{X}^*(z)$ soluţiile canonice corespunzătoare problemei omogene rezultată din (II.61) şi cu $M_j^*(z)$ suma părţilor principale ale funcţiilor $\dfrac{\Phi_{j*}^{(0)}(z)}{X_j^*(z)}$ relativă la singularităţile în D_j, obţinem soluţia analoagă lui (II.54). Transcriind rezultatul pentru funcţia $F(z)$ avem

$$\begin{aligned} F(z) = {} & \frac{i}{2}\, X_1^*(z)\,[M_1^*(z) + M_2^*(z) + P_\varkappa(z)] + \frac{i}{2}\,\overline{X_2^*(\overline{z})}\,[\overline{M_1^*(\overline{z})} + \\ & + \overline{M_2^*(\overline{z})} + \overline{P_\varkappa(\overline{z})}] - \frac{i}{2\pi}\left\{\widetilde{X}_1^*(z)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c(\zeta)}{X_1^*(\zeta)\,[\widetilde{a}(\zeta) - i\,\widetilde{b}(\zeta)]}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} + \right. \\ & \left. + \overline{\widetilde{X}_2^*(\overline{z})}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c(\zeta)}{\overline{\widetilde{X}_1^*(\zeta)}\,[\widetilde{a}(\zeta) + i\,\widetilde{b}(\zeta)]}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}\right. . \end{aligned} \tag{II.64}$$

În mod evident comportamentul soluţiei în vecinătatea extremităţilor ca şi singularităţile ei nu necesită nici un studiu suplimentar, concluziile fiind aceleaşi. Condiţiile de compatibilitate pentru cazul $\varkappa < 0$ revin la a cere ca funcţia următoare să aibe un zero de ordin $-\,\varkappa$ la infinit:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^*(z) = {} & M_1^*(z) + M_2^*(z) + i\,\frac{F_0(z)}{X_1^*(z)} + K + \\ & + \frac{1}{\pi i}\,\frac{\widetilde{X}_1^*(z)}{\widetilde{X}_1(z)}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c(\zeta)}{\overline{\widetilde{X}_1^*(\zeta)}\,[\widetilde{a}(\zeta) - i\,\widetilde{b}(\zeta)]}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} + \mathrm{e}^{\overline{\gamma_2^*(\overline{z})} - \gamma_1^*(z)}\,[\overline{M_1^*(\overline{z})} + \\ & + \overline{M_2^*(\overline{z})} + \overline{K} + \frac{1}{\pi i}\,\frac{\widetilde{X}_1^*(z)}{\widetilde{X}_1(z)}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c(\zeta)}{\overline{\widetilde{X}_1^*(\zeta)}\,[\widetilde{a}(\zeta) + i\,\widetilde{b}(\zeta)]}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}\Bigg]. \end{aligned} \tag{II.65}$$

§ 5. PROBLEMA LUI VOLTERRA CU SINGULARITĂŢI DATE, ÎN CAZUL SEMIPLANULUI

11. Cu notaţiile utilizate la punctul **10** să considerăm că avem $a(\zeta) = 0$, $b(\zeta) = 1$, iar $c(\zeta) = n(\zeta)$ dacă $\zeta \in C$ şi $c(\zeta) = m(\zeta)$ dacă $\zeta \in C'$. Condiţia (II.45) devine atunci

$$\text{(II.66)} \quad \begin{aligned} U(\zeta) &= m(\zeta), \quad \zeta \in C', \\ V(\zeta) &= n(\zeta), \quad \zeta \in C. \end{aligned}$$

Am ajuns în acest mod la problema mixtă (în cazul semiplanului) considerată de V. Volterra, [28], care constă în determinarea unei funcţii olomorfe într-un domeniu cunoscînd pe o parte a frontierei partea sa reală iar pe restul frontierei partea sa imaginară. H. Schwarz, [29], a arătat că problema nu admite în general o soluţie dacă datele la limită sînt arbitrare. Condiţiile de compatibilitate împreună cu soluţia în cazul semiplanului au fost obţinute de A. Signorini, [30]. Rezultatele lui Signorini au fost regăsite mai tîrziu de diverşi autori. Vom menţiona în special stabilirea condiţiilor de compatibilitate de către C. Iacob, [31], care pornind de la o interpretare dată de V. Vâlcovici, [32], [33], acestor condiţii, ca fiind condiţii de uniformitate ale soluţiei, regăseşte rezultatul lui Signorini fără a face apel la forma soluţiei. Problema lui Volterra şi-a găsit numeroase şi deosebit de importante aplicaţii în diferite chestiuni de hidrodinamică, aşa cum se poate constata din lectura tratatului [12].

În acest paragraf vom generaliza problema lui Volterra în sensul că vom admite existenţa unor singularităţi ale soluţiei în domeniu. Soluţia se va obţine ca un caz particular al consideraţiilor precedente.

Cum în conformitate cu (II.66) trebuie să luăm $a(\zeta) = 0$ şi $b(\zeta) = 1$, rezultă din (II.62) că $G^*(\zeta) = -1$ şi ajungem astfel la cazul considerat la punctul **8**. Vom căuta soluţia care să fie mărginită în toate extremităţile, adică soluţia de clasă h_{2p}. În acest caz indicele problemei este negativ ($\varkappa = -p$), şi după cum s-a văzut, pentru existenţa soluţiei sînt necesare anumite condiţii de compatibilitate. Soluţia canonică a problemei Riemann corespunzătoare va fi dată de (II.34) :

$$\text{(II.67)} \quad X^*(z) = \sqrt{P(z)}, \quad P(z) = \prod_{j=1}^{p} (z - a_j)(z - b_j).$$

Pentru a preciza ideile vom presupune că funcţia $\sqrt{P(z)}$ este luată cu determinaţia care este reală şi pozitivă pentru z real şi mai mare decît b_p. Atunci vom avea pe axa reală

$$\text{(II.68)} \quad X_1^*(\zeta) = \begin{cases} \sqrt{P(\zeta)}\ , & \zeta > b_p \\ (-1)^{p-j+1}\, i \sqrt{|P(\zeta)|}, & \zeta \in (a_j, b_j),\ j = 1, 2, \ldots, p \\ (-1)^{p-j} \sqrt{P(\zeta)}\ , & \zeta \in (b_j, a_{j+1}),\ j = 1, 2, \ldots, p-1 \\ (-1)^{p} \sqrt{P(\zeta)}\ , & \zeta < a_1, \end{cases}$$

radicalii fiind luaţi cu determinaţia lor aritmetică.

De aici rezultă imediat

$$\overline{X_1^*(\zeta)} = \begin{cases} X_1^*(\zeta), & \zeta \in C', \\ -X_1^*(\zeta), & \zeta \in C. \end{cases} \tag{II.69}$$

Dacă admitem că funcţia $F(z) = U + iV$ definită în semiplanul superior admite singularităţi izolate a căror parte principală este $F_0(z)$, atunci păstrînd notaţiile din paragraful precedent formula (II.64) ne dă

$$F(z) = \frac{i}{2}\sqrt{P(z)}\,[M_1^*(z) + M_2^*(z) + K] + \frac{i}{2}\overline{\sqrt{P(\bar{z})}}\,[\overline{M_1^*(\bar{z})} + \overline{M_2^*(\bar{z})} + \overline{K}] -$$

$$-\frac{i}{2\pi}\left\{\sqrt{P(z)}\left[\int_C \frac{i\,n(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} + \int_{C'} \frac{m(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}\right] +\right.$$

$$\left. + \overline{\sqrt{P(\bar{z})}}\left[\int_C \frac{i\,n(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} + \int_{C'} \frac{m(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}\right]\right\}.$$

Am utilizat drept $X^*(z)$ tot funcţia $X(z)$, căci datorită comportamentului ei la infinit, integralele respectiv converg.

Dar $\overline{\sqrt{P(\bar{z})}} = \sqrt{P(z)}$ şi notînd

$$\mu(\zeta) = \begin{cases} m(\zeta), & \zeta \in C' \\ in(\zeta) & \zeta \in C, \end{cases} \tag{II.70}$$

obţinem în definitiv,

$$F(z) = \frac{i}{2}\sqrt{P(z)}\,[M_1^*(z) + M_2^*(z) + \overline{M_1^*(\bar{z})} + \overline{M_2^*(\bar{z})}] + \tag{II.71}$$

$$+ \frac{i}{\pi}\sqrt{P(z)}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{z - \zeta},$$

unde radicalul din integrală este luat cu determinaţia precizată mai sus prin (II.68). Constanta reală care ar fi trebuit să figureze în paranteza primului termen a fost omisă, întrucît funcţia $\frac{F(z)}{\sqrt{P(z)}}$ trebuie să se anuleze la infinit.

Funcţiile $M_1^*(z)$ şi $M_2^*(z)$ sînt suma părţilor principale ale funcţiilor $\frac{-iF_0(z)}{\sqrt{P(z)}}$, respectiv $\frac{i\,\overline{F_0(\bar{z})}}{\sqrt{P(z)}}$ relative la singularităţile din D_1 respectiv D_2.

Formula (II.71) generalizează binecunoscuta formulă a lui Signorini la care se reduce dacă $F_0(z) \equiv 0$. Ea nu îndeplinește însă toate condițiile cerute întrucît, așa cum era de așteptat, deoarece $\varkappa = -p$, ea posedă un pol suplimentar de ordinul p la infinit. De altfel este ușor de constatat că avem

$$F(z) - F_0(z) = \frac{i}{2}\sqrt{P(z)}\Big[-H_1^*(z) - H_2^*(z) - \overline{H_1^*(\overline{z})} - \overline{H_2^*(\overline{z})} +$$

$$+ 2i\frac{\overline{F_0(\overline{z})}}{\sqrt{P(z)}} + \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}}\frac{d\zeta}{z-\zeta}\Big],$$

termenii din paranteză fiind evident olomorfi în semiplanul superior, sau, ținînd seama de semnificația funcțiilor $H_j^*(z)$,

$$F(z) - F_0(z) = \frac{i}{2}\sqrt{P(z)}\Big[M_1^*(z) + M_2^*(z) + \overline{M_1^*(\overline{z})} + \overline{M_2^*(\overline{z})} +$$

$$+ 2i\frac{F_0(z)}{\sqrt{P(z)}} + \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}}\frac{d\zeta}{z-\zeta}\Big].$$

Pentru ca singularitatea suplimentară să dispară, trebuie ca paranteza să aibe un zero de ordinul p la infinit. Această paranteză coincide de altfel cu funcția definită de relația (II.65), dacă se ține seama că $X^*(z) = \widetilde{X}^*(z)$ și că, în conformitate cu (II.34), avem $\gamma^*(z) = \overline{\gamma^*(\overline{z})}$. Pentru explicitarea acestor condiții vom relua procedeul utilizat în cazul problemei fără singularități, [12], și care se bazează pe următorul rezultat, [34]. Fie $\chi(z)$ o funcție olomorfă în D_1 astfel încît $\lim\limits_{z\to\infty} |z\chi(z)| = 0$. Dacă partea sa reală tinde pentru $z \to \zeta \in L$ uniform către o funcție $\lambda(\zeta)$, atunci

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Considerînd drept $\chi(z)$ funcțiile $z^{j-1}\dfrac{F(z) - F_0(z)}{\sqrt{P(z)}}$ $(j = 1, 2, \ldots, p-1)$, care îndeplinesc condițiile cerute, obținem condițiile de compatibilitate ale problemei sub forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Re e\Big\{\frac{i}{2}\Big[M_1^*(\zeta) + M_2^*(\zeta) + \overline{M_1^*(\zeta)} +$$

$$+ \overline{M_2^*(\zeta)} + 2i\frac{F_0(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}}\Big] + \frac{\mu(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}}\Big\}\zeta^{j-1}\,d\zeta = 0,$$

sau observînd că suma $M_1^*(\zeta) + M_2^*(\zeta) + \overline{M_1^*(\zeta)} + \overline{M_2^*(\zeta)}$ este reală

$$\text{(II.72)}\quad \int_{-\infty}^{\infty}\Big[\frac{\mu(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}} - \Re e\Big\{\frac{F_0(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}}\Big\}\Big]\zeta^{j-1}\,d\zeta = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, p-1)$$

Sub rezerva îndeplinirii acestor condiţii, soluţia (II.71) este unică. Dacă $F_0(z) \equiv 0$ se regăsesc condiţiile lui Signorini, [30], [12].

12. Dacă în problema lui Volterra pe arcele C_j se cunosc valorile părţii reale, adică dacă în loc de (II.66) avem

$$U(\zeta) = m(\zeta), \quad \zeta \in C, \qquad V(\zeta) = n(\zeta), \quad \zeta \in C', \tag{II.73}$$

soluţia se obţine în acelaşi mod utilizînd rezultatele obţinute la punctul **9** din paragraful precedent. Va fi suficient să considerăm $a(\zeta) = 1$ şi $b(\zeta) = 0$. Atunci din (II.49) rezultă din nou $G(\zeta) = -1$.

Soluţia canonică a problemei Riemann omogene, corespunzătoare lui (II.48), va fi din nou dată de funcţia (II.67), avînd valorile pe axa reală precizate prin (II.68). Păstrînd atunci şi celelalte notaţii făcute, formula (II.54) ne dă

$$F(z) = \frac{1}{2}\sqrt{P(z)}\,[M_1(z) + M_2(z) + K] + \frac{1}{2}\overline{\sqrt{P(\bar{z})}}\,[\overline{M_1(\bar{z})} + \overline{M_2(\bar{z})} + \overline{K}] +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\left\{\sqrt{P(z)}\left[\int_C \frac{m(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}}\frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int_{C'} \frac{in(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}}\frac{d\zeta}{\zeta - z}\right] +\right.$$
$$\left. + \overline{\sqrt{\bar{P}(z)}}\left[\int_C \frac{m(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}}\frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int_{C'} \frac{in(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}}\frac{d\zeta}{\zeta - z}\right]\right\}.$$

Dacă notăm acuma

$$\nu(\zeta) = \begin{cases} im(\zeta), & \zeta \in C, \\ -n(\zeta), & \zeta \in C', \end{cases} \tag{II.74}$$

obţinem, cu aceleaşi observaţii făcute la punctul precedent, formula

$$F(z) = \frac{1}{2}\sqrt{P(z)}\,[M_1(z) + M_2(z) + \overline{M_1(\bar{z})} + \overline{M_2(\bar{z})}] + \tag{II.75}$$
$$+ \frac{1}{\pi}\sqrt{P(z)}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\nu(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}}\frac{d\zeta}{z - \zeta},$$

care rezolvă problema propusă.

Ca şi în cazul precedent diferenţa

$$F(z) - F_0(z) = \frac{1}{2}\sqrt{P(z)}\left[-H_1(z) - H_2(z) - \overline{H_1(\bar{z})} - \overline{H_2(\bar{z})} + \frac{2\,\overline{F_0(\bar{z})}}{\sqrt{P(z)}}\right] +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\sqrt{P(z)}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\nu(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}}\frac{d\zeta}{z - \zeta},$$

sau

$$F(z) - F_0(z) = \frac{1}{2}\sqrt{P(z)}\left[M_1(z) + M_2(z) + \overline{M_1(\bar{z})} + \overline{M_2(\bar{z})} - \frac{2F_0(z)}{\sqrt{P(z)}}\right] +$$

$$+ \frac{\sqrt{P(z)}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\nu(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{z - \zeta},$$

mai păstrează un pol de ordinul p la infinit. Pentru a găsi condițiile de compatibilitate să aplicăm teorema utilizată la punctul precedent funcțiilor $z^{j-1}\cdot\dfrac{i\,[F(z) - F_0(z)]}{\sqrt{P(z)}}$ $(j = 1, 2, \ldots, p - 1)$. Se obține

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Re\mathrm{e}\,\frac{i}{2}\Big\{M_1(\zeta) + M_2(\zeta) + \overline{M_1(\zeta)} + \overline{M_2(\zeta)} -$$

$$- \frac{2F_0(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}}\Big] + \frac{\nu(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}}\Big\}\,\zeta^{j-1}\,\mathrm{d}\zeta = 0$$

sau

$$\text{(II.76)}\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\nu(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}} - \Re\mathrm{e}\left\{\frac{i\,F_0(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}}\right\}\right]\zeta^{j-1}\,\mathrm{d}\zeta = 0, \quad j = 1, 2, \ldots\, p - 1$$

§ 6. SOLUȚIA PROBLEMEI DE TEORIA FILTRAȚIEI ÎN CAZUL SEMIPLANULUI

13. Acest paragraf este consacrat rezolvării, în cazul semiplanului, a problemei din hidrodinamica mediilor poroase formulate la paragraful 2 al primului capitol. Deoarece, așa cum s-a văzut, soluția încetează de a mai fi mărginită în toate extremitățile, vom fi obligați să utilizăm ceea ce am numit soluții de clasă h_0.

Vom trata problema într-un cadru puțin mai general decît este necesar pentru obținerea soluției de care ne ocupăm, în sensul că vom considera condiții la limită neomogene.

Mai precis, se cere determinarea unei funcții $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ analitică în semiplanul superior, de clasă h_0, avînd singularități izolate într-un număr de puncte la distanță finită cu partea principală $F_0(z)$ astfel încît pentru $z = \zeta \in L$,

$$\text{(II.77)}\quad \begin{aligned} U(\zeta) &= m(\zeta), \quad \zeta \in C, \\ V(\zeta) &= n(\zeta), \quad \zeta \in C'. \end{aligned}$$

Sîntem din nou în cazul considerat la punctul **9**, dacă facem $a(\zeta) = 1$ și $b(\zeta) = 0$, adică $G(\zeta) = -1$. De data aceasta soluția canonică a problemei Riemann omogene, corespunzătoare lui (II.48), va fi în conformitate cu (II.37) :

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{P(z)}}, \tag{II.78}$$

unde $\sqrt{P(z)}$ are aceeaşi semnificaţie ca în (II.67) şi (II.68). Va trebui deci să aplicăm formula (II.54). Drept soluţie $\widetilde{X}(z)$ nu vom mai putea lua de data aceasta $X(z)$, căci aşa cum se poate uşor observa, integralele respective nu converg în general. Vom alege drept $\widetilde{X}(z)$ ca soluţie canonică una din soluţiile de la punctul 8, corespunzătoare indicelui nul, să spunem cea dată de (II.41). Luînd pentru această soluţie determinaţia care este reală şi pozitivă pentru $z = \zeta > b_p$, nu e greu de văzut că

$$\overline{\widetilde{X}(\bar{z})} = \widetilde{X}(z) \text{ şi } \overline{\widetilde{X}_1(\zeta)} = \begin{cases} \widetilde{X}_1(\zeta), & \zeta \in C' \\ -\widetilde{X}_1(\zeta), & \zeta \in C. \end{cases} \tag{II.79}$$

Atunci introducînd funcţia $\nu(\zeta)$ dată de (II.74), rezultă din (II.54) prin calcule analoage

$$F(z) = \frac{1}{2\sqrt{P(z)}}\left[M_1(z) + M_2(z) + \overline{M_1(\bar{z})} + \overline{M_2(\bar{z})} + \alpha_0 + \alpha_1 z +, \ldots, + \alpha_p z^p\right] +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sqrt{\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{z-a_j}{z-b_j}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{\zeta-b_j}{\zeta-a_j}\right)}\frac{\nu(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{z-\zeta}, \tag{II.80}$$

unde $M_1(z)$ şi $M_2(z)$ sînt suma părţilor principale ale funcţiilor $F_0(z)\sqrt{P(z)}$ respectiv $\overline{F_0(\bar{z})}\sqrt{P(z)}$ relative la singularităţile din D_1, respectiv D_2. Coeficienţii $\alpha_j (f = 0, 1, \ldots, p)$ ai polinomului sînt de data aceasta reali.

14. Revenind la problema de hidrodinamică, să considerăm că mediul poros ocupă semiplanul superior, arcele C_j constituind frontiera de alimentare iar arcele C'_j sînt obturate (fig. 2).

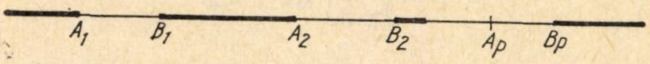


Fig. 2

În punctele z_j sînt centrate puţuri de debite q_j. Sistemul ortogonal $(\vec{s}, \vec{n})$ coincizînd evident cu sistemul de axe (Ox, Oy), vom obţine din (I.11) şi (I.12)

$$\begin{aligned} u(\zeta) &= 0, \quad \zeta \in C, \\ v(\zeta) &= 0, \quad \zeta \in C'. \end{aligned} \tag{II.81}$$

Sîntem în cazul tratat la punctul precedent dacă vom lua

$$F(z) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}, \tag{II.82}$$

adică

$$U = u\,;\ V = -v, \tag{II.83}$$

şi $m(\zeta) = n(\zeta) = 0$.

Prin $M_1(z)$ şi $M_2(z)$ va trebui să înţelegem, ţinînd seama de semnificaţia lor şi de (I.8), suma părţilor principale ale funcţiilor

$$-\sqrt{P(z)}\sum_{s=1}^{n}\frac{q_s}{2\pi}\frac{1}{z-z_s} \text{ respectiv } -\sqrt{P(z)}\sum_{s=1}^{n}\frac{q_s}{2\pi}\frac{1}{z-\overline{z}_s}, \tag{II.84}$$

relative la singularităţile lor.

Mai rămîne de văzut în ce condiţii este respectat comportamentul soluţiei la infinit dat de (I.14). Este uşor de constatat că acest lucru se realizează dacă şi numai dacă în soluţia (II.80) luăm $\alpha_p = \alpha_{p-1} = 0$ cînd $p > 1$ şi $\alpha_j = 0\ (j = 1, 2, \ldots, p)$ cînd $p = 1$.

În definitiv soluţia problemei care ne interesează este dată de

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{2\sqrt{P(z)}}\,[M_1(z) + M_2(z) + \overline{M_1(\overline{z})} + \overline{M_2(\overline{z})} + \\ + \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{p-2}\, z^{p-2}] \tag{II.85}$$

dacă $p > 1$ şi

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{2\sqrt{P(z)}}\,[M_1(z) + M_2(z) + \overline{M_1(\overline{z})} + \overline{M_2(\overline{z})}], \tag{II.86}$$

dacă $p = 1$.

Cu ajutorul acestor formule se poate calcula potenţialul complex sub forma

$$f(z) = \int_{\tilde{z}}^{z}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z + C_0. \tag{II.87}$$

Deoarece $C_0 = f(\tilde{z})$, să considerăm că punctul $\tilde{z}$ se găseşte pe unul din segmentele impermeabile pentru care constanta K_j care figurează în (I.3) este egală cu zero, ceea ce este posibil, una din aceste constante fiind arbitrară. Atunci C_0 este un număr real şi în acest fel în expresia potenţialul complex subzistă încă p constante arbitrare care vor trebui determinate.

Pentru aceasta vom adopta la cazul nostru un procedeu utilizat de M. V. Keldîş şi L. I. Sedov, [35], în studiul problemei lui Dirichlet pentru planul cu tăieturi. Datorită condiţiilor la limită (I.2) vom putea scrie din (II.86), luînd $\tilde{z} = a_0$ real,

$$\mathcal{R}\mathrm{e}\left\{\int_{a_0}^{b_j} w(z)\,\mathrm{d}z\right\} + C_0 = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, p. \tag{II.88}$$

Deoarece $w(z)$ satisface relaţia (I.15), drumul de integrare de la a_0 la b_j poate fi luat chiar axa reală. Aceste relaţii constituie un sistem liniar de p ecuaţii cu p necunoscute. Se poate arăta că el este rezolubil în mod unic. Vom avea

$$\mathcal{R}e\left\{\int_{a_0}^{b_j}\frac{1}{2\sqrt{P(\zeta)}}\left[\alpha_0+\alpha_1\zeta+\alpha_2\zeta^2+\ldots+\alpha_{p-2}\zeta^{p-2}\right]\mathrm{d}\zeta\right\}+C_0=\lambda_j \tag{II.89}$$

unde

$$\lambda_j=-\mathcal{R}e\left\{\int_{a_0}^{b_j}\frac{1}{2\sqrt{P(\zeta)}}\left[M_1(\zeta)+M_2(\zeta)+\overline{M_1(\zeta)}+\overline{M_2(\zeta)}\right]\mathrm{d}\zeta\right\}. \tag{II.90}$$

Să considerăm sistemul omogen corespunzător ($\lambda_j=0$). Vom scrie fiecare integrală luată pe intervalul (a_0, b_j) ca o sumă de integrale luate pe intervalele (a_0, b_1), $(b_1, a_2)\ldots(a_j, b_j)$. Vom scădea prima ecuaţie din a doua, a doua din a treia etc. şi ţinînd seama că pe intervalele (a_k, b_k) integrantul este pur imaginar, obţinem

$$\mathcal{R}e\left\{\int_{a_0}^{b_1}\frac{1}{2\sqrt{P(\zeta)}}\left[\alpha_0+\alpha_1\zeta+\ldots+\alpha_{p-2}\zeta^{p-2}\right]\mathrm{d}\zeta\right\}+C_0=0, \tag{II.91}$$

$$\int_{b_k}^{a_{k+1}}\frac{\alpha_0+\alpha_1\zeta+\ldots+\alpha_{p-2}\zeta^{p-2}}{(-1)^{p-k}\sqrt{P(\zeta)}}\,\mathrm{d}\zeta=0,\quad k=1,2,\ldots,p-1. \tag{II.92}$$

Cum în fiecare din intervalele (b_k, a_{k+1}) numitorul funcţiilor de sub integrală păstrează semn constant, rezultă că polinomul de la numărător, de grad $p-2$, trebuie să aibe cel puţin o rădăcină în fiecare din aceste $p-1$ intervale. Acest lucru nu este posibil decît dacă $\alpha_0=\alpha_1=\ldots=\alpha_{p-2}=0$, ceea ce atrage din (II.61) şi $C_0=0$. Aşadar sistemul omogen (II.89) nu admite decît soluţia banală, ceea ce demonstrează afirmaţia făcută. În acest mod potenţialul complex este perfect determinat.

Dacă $p=1$, unica constantă C_0 se va determina impunînd condiţia $f(b_1)=0$ sau $f(a_1)=0$ după cum $a_0\in(b_1,\infty)$ sau $a_0\in(-\infty, a_1)$.

15. Dacă în loc de condiţiile (II.76) vom admite că

$$\begin{aligned}&U(\zeta)=m(\zeta), &&\zeta\in C',\\ &V(\zeta)=n(\zeta), &&\zeta\in C,\end{aligned} \tag{II.93}$$

păstrînd celelalte ipoteze neschimbate vom putea utiliza rezultatele de la punctul **10** în care vom face $a(\zeta)=0$ şi $b(\zeta)=1$. Vom avea din nou $G^*(\zeta)=-1$. Soluţia canonică de clasă h_0 va fi evident dată tot de (II.78), şi ca şi la punctul precedent vom utiliza drept $\widetilde{X}(z)$ funcţia dată de (II.41). Introducînd din nou funcţia $\mu(\zeta)$ prin relaţia (II.70) obţinem din (II.64)

$$\begin{aligned}F(z)=\frac{i}{2\sqrt{P(z)}}&\left[M_1^*(z)+M_2^*(z)+\overline{M_1^*(\bar z)}+\overline{M_2^*(\bar z)}+\alpha_0+\alpha_1 z+\right.\\ &\left.+\ldots+\alpha_p z^p\right]+\frac{i}{\pi}\sqrt{\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{z-a_j}{z-b_j}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{\zeta-b_j}{\zeta-a_j}\right)}\,\frac{\mu(\zeta)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}\zeta.\end{aligned} \tag{II.94}$$

Aici $M_1^*(z)$ și $M_2^*(z)$ sînt suma părților principale ale funcțiilor $-iF_0(z)\sqrt{P(z)}$ respectiv $\overline{iF_0(\bar{z})}\sqrt{P(z)}$ relative la singularitățile lor, iar α_j niște constante arbitrare reale.

16. Cele de mai sus se aplică imediat în cazul mișcărilor schematizate în figura 2 dacă vom considera de această dată că segmentele C_j' sînt contururi de alimentare iar C_j sînt impermeabile. Vom avea acum

$$(\text{II.95})\qquad \begin{aligned} u(\zeta) &= 0, \qquad \zeta \in C', \\ v(\zeta) &= 0, \qquad \zeta \in C, \end{aligned}$$

și luînd din nou $F(z) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$ vom ajunge la problema de la punctul precedent în care $m(\zeta) = n(\zeta) = 0$.

Din cele arătate la punctul **14** rezultă că viteza complexă va fi

$$(\text{II.96})\qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{i}{2\sqrt{P(z)}}\,[M_1^*(z) + M_2^*(z) + \overline{M_1^*(\bar{z})} + \overline{M_2^*(\bar{z})} + \alpha_0 +$$

$$+ \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{p-2} z^{p-2}],$$

dacă $p > 1$ și

$$(\text{II.97})\qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{i}{2\sqrt{P(z)}}\,[M_1^*(z) + M_2^*(z) + \overline{M_1^*(\bar{z})} + \overline{M_2^*(\bar{z})}],$$

dacă $p = 1$, unde $M_1^*(z)$ și $M_2^*(z)$ sînt respectiv suma părților principale ale funcțiilor

$$(\text{II.98})\qquad i\sqrt{P(z)}\sum_{s=1}^{n}\frac{q_s}{2\pi}\,\frac{1}{z - z_s} \quad \text{și} \quad -i\sqrt{P(z)}\sum_{s=1}^{n}\frac{q_s}{2\pi}\,\frac{1}{z - \bar{z}_s},$$

relative la singularitățile lor.

Potențialul complex se va calcula tot cu ajutorul formulei (II.87) iar cele p constante arbitrare vor rezulta ca soluția unică a sistemului corespunzător lui (II.88)

$$(\text{II.99})\qquad \mathcal{R}e\left\{\int_{a_0}^{a_j} w(z)\,\mathrm{d}z\right\} + C_0 = 0.$$

În acest mod problema mișcării apelor arteziene într-un mediu poros care ocupă un semiplan este complet rezolvată. În conformitate cu cele arătate la capitolul I vom putea găsi soluția pentru orice domeniu care poate fi reprezentat conform pe semiplan. În particular, probleme de tipul celor considerate în [8], [9], [10] pot fi soluţionate pe o cale mai simplă. De asemenea se poate utiliza cu succes metoda semiinversă aşa cum a fost dezvoltată în [36], dacă domeniul canonic cu care se lucrează este semiplanul.

§7. APLICAŢII

17. În acest paragraf vom ilustra rezultatele obţinute în prezentul capitol pe cîteva cazuri concrete de mişcări ale apelor arteziene.

Să considerăm la început cazul din figura 2 de la punctul **14**, luînd $p = 1$. Aşadar din întreaga frontieră a semiplanului numai porţiunea situată pe segmentul $(-a, a)$ este contur de alimentare. Această problemă a fost considerată pentru prima oară de M. Muskat, [2], care a obţinut soluţia pe o cale destul de laborioasă. Această soluţie a fost regăsită şi generalizată de noi, dar tot prin utilizarea unei metode particulare. După cum se va vedea, aici se obţine soluţia pe o cale destul de rapidă, şi ceea ce este important, direct în planul fizic.

Să considerăm că avem un singur puţ de rază δ şi debit q, centrat în punctul de afixă $z_0 = x_0 + iy_0$. Din (II.84) rezultă imediat că

$$M_1(z) = -\frac{q}{2\pi}\frac{\sqrt{z_0^2 - a^2}}{z - z_0}; \quad M_2(z) = -\frac{q}{2\pi}\frac{\sqrt{\bar{z}_0^2 - a^2}}{z - \bar{z}_0}, \tag{II.100}$$

şi atunci relaţia (II.85) ne dă

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = -\frac{q}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}}\left[\frac{\sqrt{z_0^2 - a^2}}{z - z_0} + \frac{\sqrt{\bar{z}_0^2 - a^2}}{z - \bar{z}_0}\right]. \tag{II.101}$$

Se verifică cu uşurinţă că această funcţie îndeplineşte condiţiile la limită, are singularitatea dorită şi comportamentul necesar în punctul de la infinit.

Dacă admitem că pe $(a, +\infty)$ avem $\psi = 0$, atunci putem lua în formula (II.86) $\tilde{z} = a$ şi obţinem

$$f(z) = -\frac{q}{2\pi}\int_a^z \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}}\left[\frac{\sqrt{z_0^2 - a^2}}{z - z_0} + \frac{\sqrt{\bar{z}_0^2 - a^2}}{z - \bar{z}_0}\right]\mathrm{d}z.$$

Integralele se efectuează uşor, printr-o schimbare de variabilă şi obţinem

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{q}{2\pi}\Bigg[\ln \frac{a^2 - z_0 z - \sqrt{z_0^2 - a^2}\sqrt{z^2 - a^2}}{a(z - z_0)} &+ \\ + \ln \frac{a^2 - \bar{z}_0^2 z - \sqrt{\bar{z}_0^2 - a^2}\sqrt{z^2 - a^2}}{a(z - \bar{z}_0)}\Bigg]&. \end{aligned} \tag{II.102}$$

Pentru calculul debitului vom aplica formula (I.22), unde de data aceasta $Z = z$. Dezvoltînd (II.101) în vecinătatea punctului $z = z_0$ pentru a obține valoarea lui A, rezultă după cîteva calcule simple

$$A = \frac{iy_0a^2}{(a^2-z_0^2)\,[(a^2 - r_0^2) - |z_0^2 - a^2|]}, \quad r_0 = |z_0|$$

şi cum $|z_0^2-a^2| = \sqrt{(r_0^2-a^2)^2+4a^2y_0^2}$, obţinem în cele din urmă

$$q = \frac{2\pi kH}{\ln \dfrac{4y_0}{\delta}\, \dfrac{\sqrt{(r_0^2-a^2)^2+4a^2y_0^2}}{a^2-r_0^2+\sqrt{(r_0^2-a^2)^2+4a^2y_0^2}}}. \tag{II.103}$$

Aceasta este tocmai formula obţinută de M. Muskat.

18. În acelaşi mod se poate obţine soluţia şi în cazul cînd segmentul $(-a, a)$ este impermeabil, restul axei reale constituind frontieră de alimentare, aplicînd rezultatele de la punctul **16**.

În acest caz din (II.98) urmează că

$$M_1^*(z) = \frac{q_i}{2\pi}\,\frac{\sqrt{z_0^2-a^2}}{z-z_0}; \quad M_2^*(z) = -\frac{qi}{2\pi}\,\frac{\sqrt{\bar{z}_0^2-a^2}}{z_0-\bar{z}_0}, \tag{II.104}$$

şi atunci formula (II.97) ne dă

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = -\frac{q}{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}}\left[\frac{\sqrt{z_0^2-a^2}}{z-z_0} - \frac{\sqrt{\bar{z}_0^2-a^2}}{z-\bar{z}_0}\right], \tag{II.105}$$

de unde luînd $\psi = 0$ pe $(-a, a)$ rezultă

$$f(z) = -\frac{q}{2\pi}\int_a^z \frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}}\left[\frac{\sqrt{z_0^2-a^2}}{z-z_0} - \frac{\sqrt{\bar{z}_0^2-a^2}}{z-\bar{z}_0}\right]\mathrm{d}z. \tag{II.106}$$

Calculînd integralele rezultă

$$f(z) = \frac{q}{2\pi}\left[\ln\frac{a^2-z_0z-\sqrt{z_0^2-a^2}\sqrt{z^2-a^2}}{a(z-z_0)} - \right.$$
$$\left. - \ln\frac{a^2-\bar{z}_0z-\sqrt{\bar{z}_0^2-a^2}\sqrt{z^2-a^2}}{a(z-\bar{z}_0)}\right]. \tag{II.107}$$

Se vede imediat că dacă în realaţia precedentă facem ca $a \to 0$ obţinem, abstracţie făcînd de o constantă aditivă pur imaginară care poate fi omisă,

$$f(z) = \frac{q}{2\pi}\ln\frac{z-\bar{z}_0}{z-z_0}, \tag{II.108}$$

binecunoscuta formulă care rezolvă problema în cazul cînd întreaga frontieră a semiplanului este contur de alimentare.

Dezvoltînd potenţialul (II.107) în vecinătatea punctului $z = z_0$, calculînd valoarea lui A şi utilizînd relaţia (I.22) obţinem pentru debit formula

$$q = \frac{2\pi kH}{\ln \dfrac{\sqrt{(r_0^2 - a^2)^2 + 4a^2y_0^2}\,[a^2 - r_0^2 + \sqrt{(r_0^2 - a^2)^2 + 4a^2y_0^2}]}{\delta a^2 y_0}}. \tag{II.109}$$

Aceasta trece pentru $a \to 0$ în

$$q = \frac{2\pi kH}{\ln\,[2y_0\delta^{-1}]}, \tag{II.110}$$

formula pentru semiplan.

CAPITOLUL III

1. Problemele lui Riemann şi Hilbert cu singularităţi date şi coeficienţi discontinui în cazul semiplanului au fost considerate în capitolul precedent, restrîngînd, pe anumite intervale, generalitatea coeficienţilor care intră în condiţiile la limită (formulele (II.4) şi (II.46)). Am recurs la acest lucru pentru a putea obţine o soluţie în care punctul de la infinit să-şi păstreze caracterul special implicat de problema de hidrodinamică, deşi el se găseşte pe frontiera domeniilor D_1 şi D_2.

În acest capitol vom trece la studiul celor două probleme fără a mai impune nici o restricţie coeficienţilor. Va trebui însă, aşa cum se procedează şi în cazurile clasice, să renunţăm la caracterul special al punctului de la infinit, al cărui rol va fi jucat de un punct oarecare situat la distanţă finită.

§ 1. PROBLEMA LUI RIEMANN CU SINGULARITĂŢI DATE ŞI COEFICIENŢI DISCONTINUI ÎN CAZUL SEMIPLANULUI

2. Fie din nou D_1 şi D_2 semiplanul superior respectiv inferior al variabilei $z = x + iy$ şi L axa reală. Cu notaţiile utilizate în capitolul II, punctul 1, se cere determinarea unei funcţii analitice pe porţiuni

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi_1(z), & z \in D_1, \\ \Phi_2(z), & z \in D_2, \end{cases} \tag{III.1}$$

astfel încît :

a) Diferenţele

$$h_j(z) = \Phi_j(z) - \Phi_j^{(0)}(z), \qquad (j = 1, 2), \tag{III.2}$$

sînt olomorfe în D_j.

b) $\Phi(z)$ este prelungibilă pe L cu excepția mulțimii E a punctelor de afixe $c_j (j = 1, 2, \ldots, s)$, în vecinătatea cărora admite evaluarea

$$(\text{III.3}) \qquad |\Phi(z)| < \frac{\text{const.}}{|z - c_j|^\alpha}, \qquad \alpha \in (0,1),$$

respectiv

$$(\text{III.3}') \qquad |\Phi(z)| < \text{const.}\, |z|^\alpha, \qquad \alpha \in (0,1),$$

dacă punctul de la infinit este unul din aceste puncte.

c) Pe $L - E$ este îndeplinită condiția

$$(\text{III.4}) \qquad \Phi_1(\zeta) = G(\zeta)\, \Phi_2(\zeta) + g(\zeta),$$

unde G și g sînt de clasă H_0 pe L, iar $G(\zeta) \neq 0$.

Vom defini indicele problemei

$$(\text{III.5}) \qquad \varkappa = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{var} \{\ln G(\zeta)\}_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{var} \{\arg G(\zeta)\}_{-\infty}^{+\infty},$$

în același mod cum se definește în problema fără singularități, [14].

Fie ζ_0 un punct oarecare pe axa reală care nu coincide cu nici una din extremitățile c_j. Ne alegem pentru acest punct o determinație a lui $\ln G(\zeta_0)$, cu alte cuvinte precizăm valoarea lui $\arg G(\zeta_0 + 0)$, și urmărim prin continuitate această determinație parcurgînd axa reală în sens pozitiv. Ajungînd la prima extremitate, să spunem c_k, obținem valoarea $\arg G(c_k - 0)$. Definim apoi $\arg G(c_k + 0)$ astfel încît

$$(\text{III.6}) \qquad -1 < \frac{1}{2\pi} [\arg G(c_k - 0) - \arg G(c_k + 0)] < 1.$$

O dată determinată valoarea lui $\arg G(c_k + 0)$ o urmărim prin continuitate și obținem $\arg G(c_{k+1} - 0)$. Definim apoi $\arg G(c_{k+1} + 0)$ printr-o relație similară cu (III.6) și repetăm procedeul la trecerea prin toate extremitățile, inclusiv la trecerea prin punctul de la infinit dacă $G(\infty) \neq G(-\infty)$. Ne reîntoarcem astfel în ζ_0 cu valoarea $\arg G(\zeta_0 - 0)$. Prin definiție

$$(\text{III.7}) \qquad \varkappa = \frac{1}{2\pi} [\arg G(\zeta_0 - 0) - \arg G(\zeta_0 + 0)].$$

Este ușor de arătat că această valoare este independentă de punctul inițial ζ_0 ca și de determinația respectivă a lui $\ln G(\zeta_0)$.

Dacă notăm

$$(\text{III.8}) \qquad \alpha_j + i\beta_j = \frac{1}{2\pi i} \cdot \ln \frac{G(c_j - 0)}{G(c_j + 0)} = \frac{1}{2\pi i} [\ln G(c_j - 0) - \ln G(c_j + 0)],$$

atunci condiţia (III.6) se scrie

$$-1 < \alpha_j < 1. \tag{III.9}$$

Extremităţile pentru care $\frac{G(c_j-0)}{G(c_j+0)}$ este un număr real pozitiv vor fi numite extremităţi singulare şi ele sînt caracterizate prin $\alpha_j = 0$. Pentru celelalte extremităţi putem considera, la alegere, una din inegalităţile $0 < \alpha_j < 1$ sau $-1 < \alpha_j < 0$.

Evident, dacă c_j este un punct de continuitate al lui G, atunci avem $\alpha_j = \beta_j = 0$.

3. Fie atunci soluţia canonică a problemei omogene ($g(\zeta) \equiv 0$) fără singularităţi de clasă $h(c_1, \ldots, c_r)$ dată de, [14],

$$X(z) = \begin{cases} X_1(z) = \mathrm{e}^{\Gamma(z)}, & z \in D_1, \\ X_2(z) = \left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^{-\varkappa} \cdot \mathrm{e}^{\Gamma(z)}, & z \in D_2, \end{cases} \tag{III.10}$$

unde $\varkappa$ este astfel determinat încît pentru extremităţile $c_1, c_2, \ldots c_r$ am ales $\alpha_j \in (0,1)$ $(j = 1, \ldots, r)$ iar pentru celelalte extremităţi nesingulare $\alpha_j \in (-1,0)$, $(j = r+1, \ldots, m)$, în timp ce $\alpha_j = 0$ $(j = m+1, \ldots, s)$ pentru extremităţile singulare. Funcţia $\Gamma(z)$ este definită de

$$\Gamma(z) = \frac{z+i}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln\left[\left(\dfrac{\zeta-i}{\zeta+i}\right)^{-\varkappa} G(\zeta)\right]}{(\zeta-z)(\zeta+i)}\, \mathrm{d}\zeta. \tag{III.11}$$

Să observăm cu Mushelişvili că datorită relaţiei evidente

$$\frac{z+i}{(\zeta-z)(\zeta+i)} = \frac{1}{\zeta-z} - \frac{1}{\zeta+i}, \tag{III.12}$$

expresia (III.11) a lui $\Gamma(z)$ mai poate fi scrisă sub forma

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln\left[\left(\dfrac{\zeta-i}{\zeta+i}\right)^{-\varkappa} G(\zeta)\right]}{\zeta-z}\, \mathrm{d}\zeta - \tag{III.13}$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln\left[\left(\dfrac{\zeta-i}{\zeta+i}\right)^{-\varkappa} G(\zeta)\right]}{\zeta+i}\, \mathrm{d}\zeta.$$

Ultimul termen este o constantă care va apare multiplicativ în expresia lui $X(z)$, ceea ce nu deranjează, întrucît soluția canonică poate fi definită pînă la un factor constant. Am putea considera deci drept $\Gamma(z)$ primul termen din (III.13). Dar în general această integrală nu există, nici măcar în valoare principală dacă $G(-\infty) \neq G(+\infty)$, în timp ce valoarea principală a lui (III.11) există întotdeauna. Vom utiliza de la caz la caz una din aceste două forme.

Din (III.10) se observă că soluția canonică este întotdeauna mărginită la infinit, în schimb are un pol în $z = -i$, dacă $\varkappa < 0$. Punctul $z = -i$ va juca deci rolul special pe care l-a avut punctul de la infinit în capitolul precedent.

În fine, în vecinătatea extremităților, ținînd seama de proprietățile integralei de tip Cauchy, comportamentul soluției canonice este

$$X(z) = (z - c_j)^{\alpha_j + i\beta_j}\, \Omega(z), \tag{III.14}$$

unde $\Omega(z)$ este olomorfă în această vecinătate.

4. Ținînd seamă că $X(z)$ este o soluție particulară a problemei omogene, condiția la limită (III.4) poate fi scrisă sub forma

$$\frac{\Phi_1(\zeta)}{X_1(\zeta)} - \frac{\Phi_2(\zeta)}{X_2(\zeta)} = \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)}. \tag{III.15}$$

Să considerăm funcția $\dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$. Ținînd seama de (III.14) și impunînd ca $\Phi(z)$ să rămînă mărginită în vecinătatea punctelor $c_1, \ldots, c_r$, rezultă că această funcție satisface pentru toate extremitățile o condiție de tipul (III.3). Ea va fi atunci o funcție analitică pe porțiuni avînd pe L saltul dat de (III.15). Alături de ea să considerăm și funcția

$$A(z) = \frac{z+i}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)\,(\zeta + i)}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = (z + i)\,\widetilde{A}(z) \tag{III.16}$$

$\widetilde{A}(z)$ fiind o integrală de tip Cauchy. Făcînd ca $z \to \zeta \in L$ și ținînd seama de formulele de salt ale lui Plemelj, se constată ușor că valorile la limită ale lui $A(z)$ satisfac

$$A_1(\zeta) - A_2(\zeta) = \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)}.$$

Atunci funcția

$$B(z) = \frac{\Phi(z)}{X(z)} - A(z),$$

are saltul nul la trecerea prin L, singularități izolate induse de $\Phi(z)$, precum și un pol de ordinul $\varkappa$ în $z = -i$ dacă $\varkappa > 0$. Așadar putem scrie

$$B(z) = C_0 + C_1 \frac{1}{z+i} + \frac{C_2}{(z+i)^2} + \ldots \frac{C_{\varkappa}}{z+i)^{\varkappa}} + \Psi(z),$$

sau

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)} = \frac{z+i}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)(\zeta+i)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{Q_{\varkappa}(z)}{(z+i)^{\varkappa}} + \Psi(z), \tag{III.17}$$

unde $Q_x(z)$ este un polinom arbitrar de grad $\varkappa$, iar $\Psi(z)$ este o funcţie definită în tot planul avînd singularităţi în punctele în care are şi $\Phi(z)$ şi care urmează a fi determinată.

Să punem

$$\frac{\Phi_j^{(0)}(z)}{X_j(z)} = M_j(z) + H_j(z), \tag{III.18}$$

unde prin $M_j(z)$ am notat suma părţilor principale ale funcţiei $\dfrac{\Phi_j^{(0)}}{X(z)}$ relativ la singularităţile din $D_j (j = 1, 2)$. Aici, ca şi în întreg acest capitol, vom înţelege prin aceste singularităţi cele induse de $\Phi_j^{(0)}(z)$ şi nu cele care eventual ar proveni din prezenţa lui $X(z)$.

Ţinînd seama de (III.2) va rezulta

$$\Psi(z) = M_j(z) + H_j(z) + \frac{h_j(z)}{X_j(z)} - \tag{III.19}$$

$$- \frac{z+i}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)(\zeta+i)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{Q_{\varkappa}(z)}{(z+i)^{\varkappa}},$$

unde $j = 1,2$ după cum $z \in D_1$ sau $z \in D_2$.

Fie $j = 1$. Din (III.10) rezultă că X_1 nu are zerouri în D_1, deci $\dfrac{h_1(z)}{X_1(z)}$ este olomorf în acest domeniu, inclusiv punctul de la infinit. În mod evident acelaşi lucru se întîmplă cu ceilalţi termeni, în afară de $M_1(z)$ care este deci partea principală a lui $\Psi(z)$ relativă la singularităţile din D_1.

Dacă $j = 2$, $X_2(z)$ are un zero de ordin $\varkappa$ în $z = -i$, dacă $\varkappa > 0$, deci $\dfrac{h_2(z)}{X_2(z)}$ are un pol de acelaşi ordin în acest punct. Acelaşi pol îl are şi ultimul termen. Atunci partea principală a funcţiei $\Psi(z)$ relativă la singularităţile din D_2 va fi $M_2(z) + \widetilde{P}_{\varkappa}\left(\dfrac{1}{z+i}\right)$, unde $\widetilde{P}_{\varkappa}$ înseamnă un polinom de grad $\varkappa$. Rezultă că diferenţa $\Psi(z) - M_1(z) - M_2(z) - \widetilde{P}_{\varkappa}\left(\dfrac{1}{z+i}\right)$ este olomorfă în tot planul, inclusiv punctul de la infinit, deci se reduce la o constantă. Atunci din (III.13) urmează că

$$\Phi(z) = X(z)\left[M_1(z) + M_2(z) + \frac{P_{\varkappa}(z)}{(z+i)^{\varkappa}}\right] + \tag{III.20}$$

$$+ X(z) \frac{z+i}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)(\zeta+i)} \frac{d\zeta}{\zeta - z},$$

unde $P_\varkappa(z)$ este un polinom arbitrar de grad $\varkappa$, dacă $\varkappa \geqslant 0$, iar $\dfrac{P_\varkappa(z)}{(z+i)^\varkappa}$ se reduce la o constantă, dacă $\varkappa < 0$. Datorită lui (III.13) ultimul termen din (III.20) poate fi evident înlocuit cu

$$\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}, \tag{III.21}$$

dacă punctul de la infinit nu este punct de discontinuitate pentru $g(\zeta)$, constanta aditivă care rămîne putînd fi înglobată în polinom.

5. Forma (III.20) a soluției fiind necesară, să-i cercetăm singularitățile. Ținînd seama de (III.18) deducem

$$\begin{aligned}\Phi_1(z) - \Phi_1^{(0)}(z) = {} & -X_1(z)H_1(z) + X_1(z)M_2(z) + X_1(z)\frac{P_\varkappa(z)}{(z+i)^\varkappa} + \\ & + X_1(z)\frac{z+i}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)\,(\zeta+i)}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}\end{aligned} \tag{III.22}$$

și

$$\begin{aligned}\Phi_2(z) - \Phi_2^{(0)}(z) = {} & -X_2(z)\,H_2(z) + X_2(z)M_1(z) + X_2(z)\frac{P_\varkappa(z)}{(z+i)^\varkappa} + \\ & + X_2(z)\frac{z+i}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)\,(\zeta+i)}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}.\end{aligned} \tag{III.22'}$$

Să presupunem la început $\varkappa \geqslant 0$. $H_1(z)$ este olomorfă prin definiție în D_1 iar $X_1(z)$ nu are singularități așa cum se vede din (III.10). Deci termenul $X_1(z)\,H_1(z)$ este olomorf și la fel $X_1(z)M_2(z)$ căci singularitățile lui $M_2(z)$ se află numai în D_2. Același lucru se întîmplă cu ultimii doi termeni, termenul conținînd integrala fiind mărginit la infinit deoarece această integrală se anulează datorită comportamentului densității sale. Deci $\Phi_1(z)$ are singularitățile dorite în D_1.

Același lucru se poate spune relativ la domeniul D_2 căci $X_2(z)$ nu are singularități în acest domeniu, este mărginit la infinit și are un zero de ordin $\varkappa$ în $z = -i$, ceea ce face ca termenul ce conține $P_\varkappa(z)$ să fie olomorf și în acest punct.

Rezultă că pentru $\varkappa \geqslant 0$ soluția problemei are ca parte principală în cele două domenii funcțiile prescrise.

Să presupunem acum că $\varkappa < 0$. Pentru domeniul D_1 concluzia este aceeași, întrucît $X_1(z)$ continuă să nu aibă singularități. În D_2 însă membrul drept din (III.22') arată că apare un pol suplimentar în $z = -i$ datorită termenilor ce conțin în factor pe $X_2(z)$, care în virtutea lui (III.10) are acest pol. Pentru ca această singularitate să dispară, este necesar și suficient ca funcția

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(z) = {} & M_1(z) + M_2(z) - \frac{\Phi_2^{(0)}(z)}{X_2(z)} + K + \\ & + \frac{z+i}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)(\zeta+i)}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z},\end{aligned} \tag{III.23}$$

unde K este o constantă arbitrară, să aibe un zero de ordin $-\varkappa$ în punctul $z = -i$. Constanta K poate fi aleasă astfel încît una din aceste condiţii să fie satisfăcută. Rezultă deci că pentru existenţa soluţiei sînt necesare satisfacerea a $-\varkappa - 1$ condiţii (III.23). O dată aceste condiţii îndeplinite, un raţionament identic cu cel făcut la punctul **7** din capitolul precedent ne asigură că soluţia este unică.

6. Ne-a mai rămas să studiem comportamentul soluţiei (III.20) în vecinătatea extremităţilor. Fie extremităţile $c_1, c_2, \dots, c_r$. Datorită lui (III.14) se vede că $|X(z)|$ se anulează ca $|z - c_j|^{\alpha_j}$ cu $\alpha_j \in (0, 1)$. Din proprietăţile cunoscute ale integralei de tip Cauchy rezultă că integrala din ultimul termen se comportă în aceeaşi vecinătate ca $|z - c_j|^{-\alpha_j}$ Deci acest termen este mărginit. În mod evident termenul $X(z)\dfrac{P_\varkappa(z)}{(z+i)^\varkappa}$ se anulează în c_j.

Avem apoi $X_1(z)\, M_1(z) = \Phi_1^{(0)}(z) - H_1(z)\, X_1(z)$. Primul termen este mărginit în toate extremităţile căci nu are singularităţi pe frontieră, iar al doilea se anulează în c_j. Cît priveşte termenul $X_1(z)\, M_2(z) = X_1(z)\dfrac{\Phi_2^{(0)}(z)}{X_2(z)} - X_1(z) H_2(z)$, eleste mărginit avînd în vedere (III.14). Aceleaşi raţionamente se pot face şi referitor la $X_2(z)$ şi în concluzie rezultă că soluţia problemei este efectiv mărginită în toate extremităţile pentru care $\alpha_j \in (0,1)$.

Considerînd acum celelalte extremităţi nesingulare pentru care $\alpha_j \in (-1,0)$ şi ţinînd seama de (III.14), se vede uşor, reluînd raţionamentele de mai sus, că soluţia nu mai este mărginită în vecinătatea lor şi tinde către infinit ca $|z - c_j|^{\alpha_j}$.

În extremităţile singulare ($\alpha_j = 0$) soluţia canonică rămîne mărginită, proprietate care se transferă şi asupra soluţiei $\Phi(z)$ dacă $\beta_j \neq 0$. Dacă $\beta_j = 0$, toţi termenii soluţiei rămîn mărginiţi în afară de integrală care, după cum se ştie, se comportă ca $\ln(z - c_j)$.

Prin analogie cu cazul problemei fără singularităţi vom numi soluţia (III.20) soluţia de clasă $h(c_1, c_2, \dots, c_r)$. Ea se bucură deci de proprietatea că rămîne mărginită în vecinătatea extremităţilor nesingulare $c_1, \dots, c_r$ şi tinde către infinit cu un ordin mai mic decît unu în celelalte extremităţi nesingulare.

§ 2. PROBLEMA LUI HILBERT CU SINGULARITĂŢI DATE ŞI COEFICIENŢI DISCONTINUI ÎN CAZUL SEMIPLANULUI

7. Fie D_1 semiplanul $y > 0$ şi $F_0(z)$ o funcţie uniformă definită şi olomorfă în tot planul cu excepţia singularităţilor sale izolate ce se găsesc numai în D_1. Se cere determinarea unei funcţii $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ definită în D_1 şi care satisface următoarele condiţii :

Diferenţa

$$F(z) - F_0(z) = h(z) \tag{III.24}$$

este olomorfă în D_1.

$F(z)$ este prelungibilă continuu pe L cu excepția unei mulțimi finite E de puncte $c_j (j = 1, 2, \ldots, s)$, în vecinătatea cărora este valabilă evaluarea

$$|F(z)| < \frac{\text{const.}}{|z - c_j|^{\alpha}}, \qquad \alpha \in (0, 1). \tag{III.25}$$

Pe $L - E$ este îndeplinită relația

$$a(\zeta) U(\zeta) + b(\zeta) V(\zeta) = c(\zeta), \tag{III.26}$$

unde a, b, c sînt funcții de clasa H_0 pe L în raport cu mulțimea E, iar a și b nu se anulează simultan.

Ca și la punctul 4, capitolul II, vom extinde $F(z)$ în tot planul pînă la o funcție analitică pe porțiuni punînd

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi_1(z) = F(z), & z \in D_1, \\ \Phi_2(z) = \overline{F(\bar{z})}, & z \in D_2. \end{cases} \tag{III.27}$$

Ajungem în acest fel pentru funcția $\Phi(z)$ la problema Riemann

$$\Phi_1(\zeta) = G(\zeta)\, \Phi_2(\zeta) + g(\zeta), \tag{III.28}$$

cu singularități date prin părțile principale în cele două domenii, de funcțiile

$$\Phi_1^{(0)}(z) = F_0(z)\,; \quad \Phi_2^{(0)}(z) = \overline{F_0(\bar{z})}. \tag{III.29}$$

Prin G și g am notat funcțiile de clasă H_0 pe L

$$G(\zeta) = -\frac{a(\zeta) + ib(\zeta)}{a(\zeta) - ib(\zeta)}\,; \quad g(\zeta) = \frac{2c(\zeta)}{a(\zeta) - ib(\zeta)}. \tag{III.30}$$

Rezolvînd problema lui Riemann, obținem soluția problemei propuse luînd

$$F(z) = \frac{1}{2}\,[\Phi_1(z) + \overline{\Phi_2(\bar{z})}]. \tag{III.31}$$

Utilizînd atunci formula (III.20) obținem

$$\begin{aligned} F(z) = {} & \frac{1}{2} X_1(z) \left[M_1(z) + M_2(z) + \frac{P_{\varkappa}(z)}{(z + i)^{\varkappa}} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \overline{X_2(\bar{z})} \left[\overline{M_1(\bar{z})} + \overline{M_2(\bar{z})} + \frac{\overline{P_{\varkappa}(\bar{z})}}{(z - i)^{\varkappa}} \right] + \\ & + \frac{1}{4\pi i} \left\{ X_1(z)\,(z + i) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)\,(\zeta + i)}\, \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \right. \\ & \left. - \overline{X_2(\bar{z})}\,(z - i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{g(\zeta)}}{\overline{X_1(\zeta)}\,(\zeta - i)}\, \frac{d\zeta}{\zeta - \bar{z}} \right\}, \end{aligned} \tag{III.32}$$

unde $X(z)$ este soluția canonică de clasă dată a problemei Riemann (III.28), (III.30), iar $M_1(z)$ și $M_2(z)$ sînt suma părților principale ale funcțiilor $\frac{F_0(z)}{X_1(z)}$, respectiv $\frac{\overline{F_0(\bar{z})}}{X_2(z)}$.

Dacă $g(-\infty) = g(+\infty)$, această formulă se mai poate scrie și sub forma

$$F(z) = \frac{1}{2} X_1(z) \left[M_1(z) + M_2(z) + \frac{P_\varkappa(z)}{(z+i)^\varkappa} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \overline{X_2(\bar{z})} \left[\overline{M_1(\bar{z})} + \overline{M_2(\bar{z})} + \frac{P_\varkappa(\bar{z})}{(z-i)^\varkappa} \right] + \tag{III.33}$$

$$+ \frac{1}{4\pi i} \left\{ X_1(z) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} - \overline{X_2(\bar{z})} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{g(\zeta)}}{X_1(\zeta)} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \right\}.$$

Comportamentul în extremități al soluției se deduce imediat din cel al soluției problemei Riemann. Într-adevăr, primul și al treilea termen din (III.32) sau (III.33) au apărut și în cazul problemei Riemann. Din (III.14) se deduce ușor că $\overline{X(\bar{z})}$ are același comportament ca și $X(z)$, de unde rezultă că întreaga soluție a problemei Hilbert este de clasă dată.

Să cercetăm singularitățile soluției. Punînd ca mai înainte

$$\frac{F_0(z)}{X_1(z)} = M_1(z) + H_1(z), \quad \frac{\overline{F_0(\bar{z})}}{X_2(z)} = M_2(z) + H_2(z), \tag{III.34}$$

și ținînd seama că de aici urmează că pentru $z \in D_1$ $F_0(z) = \overline{X_2(\bar{z})}\,[\overline{M_2(\bar{z})} + \overline{H_2(\bar{z})}]$, obținem din (III. 32)

$$F(z) - F_0(z) = \frac{1}{2} X_1(z) \left[-H_1(z) + M_2(z) + \frac{P_\varkappa(z)}{(z+i)^\varkappa} + \right. \tag{*}$$

$$\left. + \frac{z+i}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)(\zeta + i)} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \overline{X_2(\bar{z})} \left[-\overline{H_2(\bar{z})} + \overline{M_1(\bar{z})} + \frac{P_\varkappa(z)}{(z-i)^\varkappa} - \frac{z-i}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\zeta)}{\overline{X_1(\zeta)}\,(\zeta - i)} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \right].$$

Să presupunem $\varkappa \geqslant 0$. Termenii din prima linie sînt olomorfi așa cum s-a dovedit la problema lui Riemann. Cît privește termenii din linia doua, $\overline{H_2(\bar{z})}$ este o funcție olomorfă prin definiție iar $\overline{M_1(\bar{z})}$ nu are singularități întrucît $\bar{z} \notin D_1$. Apoi din (III.10) rezultă că

$$\overline{X_2(\bar{z})} = \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^\varkappa \mathrm{e}^{\overline{\Gamma(\bar{z})}}, \tag{III.35}$$

deci și această funcție este olomorfă în D_1. Produsul $\overline{X_2(\bar{z})}\,\dfrac{\overline{P_\varkappa(\bar{z})}}{(z-i)^\varkappa}$ nu va mai prezenta singularitate în $z = i$ și astfel pentru $\varkappa \geqslant 0$ soluția (III.32) (și evident și (III.33)) are singularitățile prescrise.

Dacă $\varkappa < 0$, ca și în problema lui Riemann, termenii din (*) care conțin în factor pe X_1 sînt funcții olomorfe. Dar din (III.35) se vede că $\overline{X_2(\bar{z})}$ are în $z = i$ un pol de ordin $-\varkappa$. Pentru ca acesta să dispară, este necesar și suficient ca paranteza care înmulțește această funcție (și în care acuma $\dfrac{\overline{P_\varkappa(\bar{z})}}{(z-i)^\varkappa} = K$ cu $K = \text{const.}$) trebuie să aibe un zero de ordin $-\varkappa$ în $z = i$. Adică acest zero trebuie să-l aibe funcția

$$(\text{III.36}) \quad \mathscr{M}(z) = \overline{M_1(\bar{z})} + \overline{M_2(\bar{z})} - \frac{F_0(z)}{\overline{X_2(\bar{z})}} + \overline{K} \cdot \frac{z-i}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{g(\zeta)}}{X_1(\zeta)(\zeta-i)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Cum $\overline{K}$ este arbitrar, urmează că trebuie satisfăcute $-\varkappa - 1$ condiții de existență a soluției mărginite. Sub rezerva îndeplinirii acestor condiții soluția este unică. Într-adevăr, dacă am avea două soluții care au aceeași parte principală și satisfac aceeași condiție la limită, diferența lor va fi olomorfă peste tot în D_1 și va satisface condiția la limită (III.26) omogenă. Or, se știe că o astfel de soluție nu poate fi decît cea identic nulă, de unde rezultă afirmația noastră.

§ 3. APLICAȚII

Vom considera în acest paragraf cîteva aplicații simple ale problemei lui Hilbert cu singularități date și coeficienți discontinui în cazul semiplanului. Anume vom obține soluția problemei lui Dirichlet, o nouă formă a soluției problemei lui Volterra precum și soluția problemei de filtrație.

PROBLEMA LUI DIRICHLET PENTRU SEMIPLAN CU SINGULARITĂȚI DATE

8. Dacă în condiția la limită (III.26) luăm $a = 1$ și $b = 0$ ajungem la problema lui Dirichlet pentru semiplan : se cere determinarea unei funcții $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ în semiplanul superior D_1 astfel încît diferența $F(z) - F_0(z)$ este olomorfă în D_1 iar pe axa reală L avem

$$(\text{III.37}) \qquad U = c(\zeta),$$

unde $c(\zeta)$ este o funcție de clasă H_0 pe L în raport cu mulțimea E a punctelor $c_j (j = 1, 2, \ldots, s)$.

Din (III.30) obținem atunci $G(\zeta) = -1$ și $g(\zeta) = 2c(\zeta)$. Funcția $G(\zeta)$ fiind continuă, vom avea evident pentru toate punctele de discontinuitate ale lui $c(\zeta)$, $\alpha_j = \beta_j = 0$. Se deduce imediat $\varkappa = 0$.

Vom putea evident folosi pentru determinarea lui $\Gamma(z)$ primul termen din (III.13) şi obţinem uşor $\Gamma_1(z) = \frac{\pi i}{2}$, $z \in D_1$, şi $\Gamma_2(z) = -\frac{\pi i}{2}$, $z \in D_2$. De aici urmează, în conformitate cu (III.10), că $X_1(z) = i$ şi $X_2(z) = -i$ şi deci din (III.34) deducem $M_1(z) = -iF_0(z)$ şi $M_2(z) = i\overline{F_0(\overline{z})}$.

Să presupunem la început că funcţia $c(\zeta)$ verifică o condiţie Hölder şi în vecinătatea punctului de la infinit, adică $c(-\infty) = c(\infty)$. Atunci utilizînd formula (III.33) se obţine uşor

$$F(z) = F_0(z) - \overline{F_0(\overline{z})} + \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{z-\zeta} + C_0 i, \tag{III.38}$$

unde C_0 este o constantă reală. Dacă $F_0(z) \equiv 0$, regăsim clasica formulă care rezolvă problema lui Dirichlet pentru semiplan (de ex. [12], [34]). Considerînd apoi $c(\zeta) \equiv 0$ şi $C_0 = 0$, obţinem o relaţie foarte mult utilizată în metoda imaginilor.

Dacă admitem că $c(-\infty) \neq c(+\infty)$, va trebui să utilizăm formula (III.32) şi atunci obţinem

$$F(z) = F_0(z) - \overline{F_0(\overline{z})} + \frac{z+i}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta+i)(\zeta-z)} + \frac{z-i}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-i)(\zeta-z)} + C_0 i. \tag{III.39}$$

9. Problema determinării unei funcţii analitice în semiplanul superior avînd singularităţi date, cunoscînd pe frontieră partea sa imaginară, se rezolvă în mod analog dacă luăm $a = 0$, $b = 1$, $V(\zeta) = c(\zeta)$.

În acest caz $G(\zeta) = 1$, $g(\zeta) = 2ic$ şi din nou $\varkappa = 0$. Primul termen din (III.13) ne dă $\Gamma(z) = 0$, deci $X_1(z) = X_2(z) = 1$ şi apoi din (III.34) deducem $M_1(z) = F_0(z)$, $M_2(z) = \overline{F_0(\overline{z})}$.

Considerînd $c(-\infty) = c(+\infty)$, formula (III.33) ne dă

$$F(z) = F_0(z) + \overline{F_0(\overline{z})} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z} + C_0. \tag{III.40}$$

Dacă însă $c(-\infty) \neq c(+\infty)$, vom utiliza formula (III.32) şi obţinem

$$F(z) = F_0(z) + \overline{F_0(\overline{z})} + \frac{z+i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta+i)(\zeta-z)} + \frac{z-i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-i)(\zeta-z)} + C_0. \tag{III.41}$$

În formulele (III.40) şi (III.41), C_0 este o constantă reală. În particular, făcînd în (III.40) $c(\zeta) \equiv 0$ şi $C_0 = 0$, se obţine o relaţie simplă utilizată de asemenea foarte mult în metoda imaginilor.

PROBLEMA LA LIMITĂ MIXTĂ CU SINGULARITĂŢI IN CAZUL SEMIPLANULUI

10. Vom relua acum problema la limită mixtă cu singularităţi date care a fost soluţionată în § § 5,6 din capitolul II. Să presupunem că mulţimea E a punctelor de pe axa reală este formată din punctele A_j şi B_j de afixe a_j respectiv b_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$. Să notăm cu C_j segmentele $\overline{A_jB_j}$, $(j = 1, 2, \ldots, p)$ şi cu C'_j segmentele $\overline{B_jA_{j+1}}(j = 0, 1, \ldots, p)$, C'_0 însemnînd $(-\infty, a_1)$ iar C'_p, (b_p, ∞). Dacă în (III.26) luăm

$$a(\zeta) = 1, \quad b(\zeta) = 0, \quad c(\zeta) = m(\zeta) \text{ pe } C_j,$$

$$a(\zeta) = 0, \quad b(\zeta) = 1, \quad c(\zeta) = n(\zeta) \text{ pe } C'_j,$$

obţinem condiţiile la limită

$$\text{(III.42)} \qquad \begin{aligned} U(\zeta) &= m(\zeta) \quad \text{pe} \quad C = \bigcup_{j=1}^{p} C_j, \\ V(\zeta) &= n(\zeta) \quad \text{pe} \quad C' = \bigcup_{j=0}^{p} C'_j. \end{aligned}$$

Vom avea atunci

$$\text{(III.43)} \qquad G(\zeta) = \begin{cases} -1 \text{ pe } C \\ \ \ 1 \text{ pe } C' \end{cases}, \quad g(\zeta) = \begin{cases} 2m(\zeta) \text{ pe } C \\ 2in(\zeta) \text{ pe } C', \end{cases}$$

şi deci

$$\text{(III.44)} \qquad \arg G(\zeta) = \begin{cases} (2k_j + 1)\pi & \text{pe } C_j, \\ 2k'_j\pi & \text{pe } C'_j, \end{cases}$$

unde k_j şi k'_j sînt numere întregi.

Vom căuta la început soluţia de clasă h_{2p}. Aplicînd procedeul pentru determinarea indicelui expus la punctul **1**, alegînd saltul lui $\arg G(\zeta)$, astfel încît pentru toate extremităţile să avem $\alpha_j \in (0,1)$, se găseşte destul de uşor că $\varkappa = -p$.

Deoarece $G(-\infty) = G(+\infty)$ vom avea din primul termen al lui (III.13)

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln\left[\left(\dfrac{\zeta - i}{\zeta + i}\right)^p G(\zeta)\right]}{\zeta - z} \mathrm{d}\,\zeta,$$

unde prin $\ln\left(\frac{\zeta - i}{\zeta + i}\right)^p$ va trebui să înțelegem valorile pe axa reală a funcției $\ln\left(\frac{z - i}{z + 1}\right)^p$, olomorfă în planul prevăzut cu o tăietură de-a lungul axei imaginare între punctele de afixe $\pm\, i$. Vom putea atunci scrie

$$\text{(III.45)}\quad \Gamma(z) = \frac{p}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln\left(\frac{\zeta - i}{\zeta + i}\right)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\arg G(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \mathfrak{J}_1(z) + \mathfrak{J}_2(z).$$

Prima integrală se poate calcula prin metoda reziduurilor, alegînd drept contur de integrare semicercul $|z| = R$, $y > 0$, segmentele $(-R, 0)$ şi $(0, R)$, tăietura pe axa imaginară cuprinsă între punctele 0 şi i, precum şi un cerc mic de rază ρ cu centrul în punctul $z = i$.

Aplicînd teorema reziduurilor şi făcînd apoi ca $R \to \infty$ şi $\rho \to 0$, găsim

$$\mathfrak{J}_1(z) = \begin{cases} \ln \dfrac{z}{z + i}, & z \in D_1. \\[2ex] \ln \dfrac{z}{z - i}, & z \in D_2. \end{cases}$$

A doua integrală se calculează mai uşor ţinînd seama de valorile determinate pentru $\arg G(\zeta)$ în fiecare din intervale. Rezultă

$$\mathfrak{J}_2(z) = -\,p \ln z + \ln \sqrt{P(z)}, \quad z \in D_1 \cup D_2.$$

unde am notat, ca şi în capitolul precedent,

$$\text{(III.46)}\qquad P(z) = \prod_{j=1}^{p} (z - a_j)(z - b_j).$$

Atunci, ţinînd seama de aceste relaţii, (III.10) ne dă

$$\text{(III.47)}\qquad X(z) = \frac{\sqrt{P(z)}}{(z + i)^p},$$

unde prin $\sqrt{P(z)}$ vom înţelege ramura olomorfă în planul prevăzut cu tăieturi de-a lungul segmentelor C_j, care de exemplu ia valori reale şi pozitive pentru $z = \zeta > b_p$. Se vede foarte uşor că $X(z)$ determinat de (III.47) îndeplineşte toate cerinţele : este soluţie a problemei lui Riemann omogenă cu $G(\zeta)$ dat de (III.43) şi este mărginită peste tot, cu excepţia punctului $z = -\,i$ care este un pol de ordin $-\,\varkappa = p$.

Dacă vom nota prin $M_1(z)$ şi $M_2(z)$ respectiv suma părţilor principale ale funcţiilor

$$\frac{F_0(z)\,(z+i)^p}{\sqrt{P(z)}} \text{ şi } \frac{\overline{F_0(\bar{z})}\,(z+i)^p}{\sqrt{P(z)}},$$

formula (III.32) ne dă după cîteva transformări

$$F(z) = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{P(z)}}{(z+i)^p}\,[M_1(z) + M_2(z) + K] +$$

$$\text{(III.48)} \qquad + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{P(z)}}{(z-i)^p}\left[\overline{M_1(\bar{z})} + \overline{M_2(\bar{z})} + \overline{K}\right] +$$

$$+ \frac{i}{2\pi}\sqrt{P(z)}\left\{\frac{1}{(z+i)^{p-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\zeta+i)^{p-1}\,\mu(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}}\,\frac{d\zeta}{z-\zeta} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(z-i)^{p-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\zeta-i)^{p-1}\,\mu(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}}\,\frac{d\zeta}{z-\zeta}\right\},$$

unde

$$\text{(III.49)} \qquad \mu(\zeta) = \begin{cases} m(\zeta) & , \quad \zeta \in C, \\ in(\zeta) & , \quad \zeta \in C', \end{cases}$$

$\sqrt{P(\zeta)}$ fiind luat urmărind prin continuitate determinaţia aleasă, (valorile sale fiind de altfel cele din membrul drept al formulei (II.68)).

Este uşor de arătat (de altfel acest lucru rezultă din cazul general de la punctul 7) că soluţia (III.48) are toate singularităţile prescrise. În plus însă, aşa cum era de aşteptat, ea posedă un pol de ordinul p în punctul $z = i$. Pentru a găsi condiţiile de compatibilitate vom dezvolta a doua paranteză şi a doua integrală din (III.48) în jurul lui $z = i$ şi vom impune anularea unui număr corespunzător de coeficienţi, astfel încît singularitatea suplimentară să dispară. Dacă vom nota cu e_j $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ coeficienţii dezvoltării funcţiei

$$\text{(III.50)} \qquad \sqrt{P(z)}\left[\overline{M_1(\bar{z})} + M_2(\bar{z}) - \frac{F_0(z)}{\overline{X(\bar{z})}} + K\right]$$

în jurul lui $z = i$, obţinem condiţiile necesare şi suficiente de existenţă a soluţiei sub forma

$$\text{(III.51)} \qquad \begin{cases} e_k + \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\zeta-1)^{p-k-1}\,\mu(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}}\,d\zeta = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, p-1 \\ e_0 = 0 \end{cases}$$

Constanta K fiind arbitrară, o putem determina astfel încît una din aceste condiţii, de pildă ultima, să fie automat satisfăcută. Rămîn de îndeplinit $p-1$ condiţii, care o dată satisfăcute, asigură unicitatea soluţiei.

Dacă soluţia nu are singularităţi, condiţiile de compatibilitate vor fi tot în număr de $p - 1$, şi ele se deduc din (III.51) luînd toţi coeficienţii e_j egali cu zero. De altfel din (III.48) se vede că în acest caz soluţia are numai un pol de ordinul $p - 1$.

Formula (III.48) ne dă deci o altă formă a soluţiei problemei lui Volterra expusă în § 5 al capitolului precedent. Cele două soluţii coincid în fond datorită unicităţii, dacă respectivele condiţii de compatibilitate sînt satisfăcute. Forma lor deosebită provine din faptul că singularitatea suplimentară apare în cele două cazuri în puncte diferite, $z = \infty$ respectiv $z = i$, ele trebuind înlăturate prin condiţii de compatibilitate, care în mod natural vor avea altă expresie.

11. În mod cu totul analog se poate găsi soluţia de clasă h_0. Alegînd saltul lui $\arg G(\zeta)$ astfel încît pentru toate extremităţile să avem $\alpha_j \in (-1, 0)$, găsim de data aceasta $\varkappa = p$. Calculînd $\Gamma(z)$ în modul indicat mai sus obţinem

$$X(z) = \frac{(z+i)^p}{\sqrt{P(z)}}, \tag{III.52}$$

funcţie care în mod evident satisface toate condiţiile pentru a fi o soluţie canonică de clasă h_0 a problemei omogene. Atunci formula (III.33) ne dă

$$\begin{aligned} F(z) = {} & \frac{1}{2}\,\frac{(z+i)^p}{\sqrt{P(z)}}\left[M_1(z) + M_2(z) + \frac{\nu_0 + \nu_1 z + \ldots + \nu_p z^p}{(z+i)^p}\right] + \\ & + \frac{1}{2}\,\frac{(z-i)^p}{\sqrt{P(z)}}\left[\overline{M_1(\bar z)} + \overline{M_2(\bar z)} + \frac{\bar\nu_0 + \bar\nu_1 z + \ldots + \bar\nu_p z^p}{(z-i)^p}\right] + \\ & + \frac{i}{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{P(z)}}\left\{(z+i)^{p+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{P(\zeta)}\,\mu(\zeta)}{(\zeta+i)^{p+1}}\,\frac{d\zeta}{z-\zeta} + \right. \\ & \left. + (z-i)^{p+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{P(\zeta)}\,\mu(\zeta)}{(\zeta-i)^{p+1}}\,\frac{d\zeta}{z-\zeta}\right., \end{aligned} \tag{III.53}$$

unde $\mu(\zeta)$ este dat de (III.49), $M_1(z)$ şi $M_2(z)$ sînt respectiv suma părţilor principale ale funcţiilor

$$\frac{F_0(z)\sqrt{P(z)}}{(z+i)^p}, \qquad \frac{\overline{F_0(\bar z)}\sqrt{P(z)}}{(z+i)^p}, \tag{III.54}$$

iar ν_j ($f = 1, 2, \ldots, p$) sînt nişte constante arbitrare.

Pentru problema de teoria filtrației vom avea, notînd $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = F(z)$,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{(z+i)^p}{2\sqrt{P(z)}}\left[M_1(z) + M_2(z)\right] + \frac{1}{2}\frac{(z-i)^p}{\sqrt{P(z)}}\left[\overline{M_1(\overline{z})} + \overline{M_2(\overline{z})}\right] +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{P(z)}}\left[\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_p z^p\right], \tag{III.55}$$

unde de data aceasta constantele $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sînt reale. Determinarea lor se poate face în felul următor. Se vede imediat că primii doi termeni din (III.55) ne dau în vecinătatea punctului de la infinit o dezvoltare de forma $\frac{1}{2}\left(\frac{S_1}{z} + \frac{S_2}{z^2} + \ldots\right)$. Dacă $\sqrt{P(z)}$ admite în aceeași vecinătate dezvoltarea

$$\sqrt{P(z)} = z^p + \mu_{p-1} z^{p-1} + \ldots \tag{III.56}$$

vom avea

$$\frac{\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_p z^p}{\sqrt{P(z)}} = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{z} + \frac{\lambda_2}{z^2} + \frac{\lambda_3}{z^3} + \ldots$$

de unde $\lambda_0 = \alpha_p$ și $\lambda_1 = \alpha_{p-1} - \alpha_p \mu_{p-1}$. Pentru ca să fie îndeplinită condiția (I.14), trebuie să luăm $\alpha_p = 0$ și $\lambda_1 + S_1 = 0$, ceea ce ne determină pe α_{p-1}. Ne rămîn astfel de determinat coeficienții $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-2}$ pentru care se poate aplica întocmai procedeul expus în capitolul precedent.

Evident, această cale este ceva mai lungă, din care cauză este de preferat utilizarea rezultatelor din capitolul II.

CAPITOLUL IV

1. Acest capitol este consacrat studiului problemelor la limită de tip Riemann și Hilbert cu singularități date și coeficienți discontinui în cazul domeniilor mărginite de curbe închise. Problema lui Riemann o vom considera în general pentru un domeniu multiplu conex, însă pentru problema lui Hilbert, care reprezintă scopul principal, vom utiliza numai soluția corespunzătoare pentru domenii simplu conexe.

§ 1. PROBLEMA LUI RIEMANN CU SINGULARITĂȚI DATE ȘI COEFICIENȚI DISCONTINUI ÎN CAZUL DOMENIILOR MULTIPLU CONEXE

2. Să considerăm în planul z, $m + 1$ contururi închise L_j $(j = 0,1,2, \ldots, m)$, disjuncte, toate avînd proprietățile specificate la capitolul I punctul 3 și astfel încît L_0 conține în interior pe celelalte. Prin D_1 vom înțelege domeniul cuprins între L_0 și L_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$, iar prin D_2 complementara lui față de întreg planul, adică reuniunea domeniilor

simplu conexe $D_2^{(0)}$ (exteriorul lui L_0) şi $D_2^{(k)}$ (interiorul lui L_k, $k = 1, 2, \ldots, \ldots, m$). Deci punctul de la infinit se găseşte în D_2. În cazul cînd curbele L_k lipsesc, domeniile simplu conexe D_1 şi D_2 vor fi respectiv interiorul şi exteriorul curbei L_0.

Dacă L_0 lipseşte, D_1 va fi format din exteriorul curbelor L_k, el conţinînd deci punctul de la infinit, iar D_2 din interiorul acestor curbe.

În aceste condiţii se cere determinarea unei funcţii analitice pe porţiuni

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi_1(z) \quad , & z \in D_1 , \\ \Phi_2(z) \quad , & z \in D_2 , \end{cases} \tag{IV.1}$$

astfel încît

a) Diferenţele

$$h_1(z) = \Phi_1(z) - \Phi_1^{(0)}(z) \, ; \; h_2(z) = \Phi_2(z) - \Phi_2^{(0)}(z) \tag{IV.2}$$

sînt olomorfe în D_1, respectiv D_2.

b) $\Phi(z)$ este prelungibilă continuu pe $L = \bigcup\limits_{k=0}^{m} L_k$ cu excepţia unei mulţimi finite E, de puncte avînd afixele c_l ($l = 1, 2, \ldots, s$) în vecinătatea cărora admite evaluarea

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{const.}}{|z - c_l|^{\alpha}}, \qquad \alpha \in (0, 1). \tag{IV.3}$$

c) Pe $L - E$ este îndeplinită condiţia

$$\Phi_1(\zeta) = G(\zeta) \, \Phi_2(\zeta) + g(\zeta). \tag{IV.4}$$

Ca de obicei am notat prin $\Phi_1^{(0)}(z)$ şi $\Phi_2^{(0)}(z)$ două funcţii uniforme, definite şi olomorfe în tot planul cu excepţia singularităţilor lor izolate ce se găsesc numai în D_1 respectiv D_2. Am notat apoi

$$G(\zeta) = G_k(\zeta) \text{ şi } g(\zeta) = g_k(\zeta), \; \zeta \in L_k , \tag{IV.5}$$

unde $G_k(\zeta)$ şi $g_k(\zeta)$ sînt funcţii date pe L_k, de clasă H_0 relativ la mulţimea $E \cap L_k$, iar $G_k(\zeta) \neq 0$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, m$).

Indicele problemei va fi prin definiţie numărul

$$\varkappa = \sum_{j=0}^{m} \varkappa_k , \tag{IV.6}$$

unde

$$\varkappa_k = \frac{1}{2\pi} \operatorname{var} \{\arg G_k(\zeta)\}_{L_k} \tag{IV.7}$$

Pe fiecare din curbele L_k, $\varkappa_k$ se calculează așa cum s-a arătat la capitolul III, punctul 2, alegînd saltul argumentului lui $G(\zeta)$ în punctele mulțimii E care se găsesc pe L_k, astfel încît să fie satisfăcută o relație de tipul (III.6). În conformitate cu clasa dorită, vom alege pentru extremitățile $c_1, c_2, \ldots, c_r$, $\alpha_j \in (0, 1)$, iar pentru celelalte extremități nesingulare $\alpha_j \in (-1, 0)$, α_j fiind dat de (III.8), unde în loc de funcția $G_k(\zeta)$ trebuie înțeles $G_k(\zeta)$.

Vom considera soluția canonică de clasă dată a problemei omogene fără singularități, [14], [25], și vom distinge două cazuri :

Dacă L_0 există, avem

$$X(z) = \begin{cases} X_1(z) = \prod\limits_{k=1}^{m} (z - z\ )^{-\varkappa_k} \mathrm{e}^{\Gamma(z)}, & z \in D_1 \\ X_2(z) = (z - z_0)^{-\varkappa} \mathrm{e}^{\Gamma(z)}, & z \in D_2, \end{cases} \tag{IV.8}$$

unde

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln \left[(\zeta - z_0)^{-\varkappa} \prod\limits_{k=1}^{m} (\zeta - z_k)^{\varkappa_k} G(\zeta)\right]}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta, \tag{IV.9}$$

iar în absența curbei L_0

$$X(z) = \begin{cases} X_1(z) = \prod\limits_{k=1}^{m} (z - z_k)^{-\varkappa_k} \mathrm{e}^{\Gamma(z)}, & z \in D_1, \\ X_2(z) = \mathrm{e}^{\Gamma(z)}, & z \in D_2 \end{cases} \tag{IV.10}$$

unde acum

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln \left[\prod\limits_{k=1}^{m} (\zeta - z_k)^{-\varkappa_k} G(\zeta)\right]}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta. \tag{IV.11}$$

În relațiile de mai sus z_0 înseamnă un punct fix din D_1 iar z_k puncte fixe respectiv din $D_2^{(k)}$, și se știe ([14], pag. 136) că soluția canonică nu depinde de poziția acestor puncte în domeniile respective.

În cazul soluției (IV.8) cum $z = \infty \in D_2$, rezultă că dacă $\varkappa < 0$, acest punct este un pol de ordin $-\varkappa$. Același lucru se întîmplă și în cazul soluției (IV.10), căci de data aceasta $z = \infty \in D_1$. Să mai remarcăm că în virtutea proprietăților integralele de tip Cauchy (IV.9) și (IV.10) comportamentul soluțiilor canonice în vecinătatea extremităților este cel dat de (III.14).

Utilizînd soluția canonică corespunzătoare vom scrie din nou condiția la limită (IV.4) sub forma

$$\frac{\Phi_1(\zeta)}{X_1(\zeta)} - \frac{\Phi_2(\zeta)}{X_2(\zeta)} = \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)}, \tag{IV.12}$$

şi vom considera iarăşi funcţia $\frac{\Phi(z)}{X(z)}$. Ca şi în capitolul precedent, se arată că ea este o funcţie analitică pe porţiuni şi ţinînd seama de saltul ei pe L dat de (IV.12), rezultă

$$\text{(IV.13)} \qquad \frac{\Phi(z)}{X(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} + Q_\varkappa(z) + \Psi_0(z),$$

unde $Q_\varkappa(z)$ este un polinom de grad $\varkappa$, iar $\Psi_0(z)$ o funcţie definită în tot planul avînd singularităţi izolate induse de singularităţile lui $\Phi(z)$.

Notînd cu $M_j(z)$ suma părţilor principale ale funcţiilor $\frac{\Phi_j^{(0)}(z)}{X_j(z)}$ relative la singularităţile din D_j, adică scriind că

$$\text{(IV.14)} \qquad \frac{\Phi_j^{(0)}(z)}{X_j(z)} = M_j(z) + H_j(z), \qquad j = 1, 2,$$

vom deduce din (IV.14)

$$\text{(IV.15)} \qquad \Psi_0(z) = M_j(z) + H_j(z) + \frac{h_j(z)}{X_j(z)} - Q_\varkappa(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}.$$

Dacă curba L_0 există, (deci $z = \infty \in D_2$), un raţionament identic cu cel folosit la capitolul III, punctul **3** ne arată că suma părţilor principale ale lui $\Psi_0(z)$ relativă la singularităţile din D_1 este $M_1(z)$ iar cea relativă la singularităţile din D_2 este $M_2(z) + \widetilde{Q}_\varkappa(z)$, unde $\widetilde{Q}_\varkappa(z)$ este alt polinom de grad $\varkappa$. Dacă curba L_0 lipseşte (deci $z = \infty \in D_1$), atunci pentru D_1 suma părţilor principale va fi $M_1(z) + \widetilde{Q}_\varkappa(z)$ iar pentru D_2, $M_2(z)$. Deci în ambele cazuri suma părţilor principale ale lui $\Psi_0(z)$ relativă la toate singularităţile din plan va fi $M_1(z) + M_2(z) + \widetilde{Q}_\varkappa(z)$. Atunci va rezulta ca şi la capitolul III că $\Psi_0(z) = M_1(z) + M_2(z) + \widetilde{Q}_\varkappa(z)$, unde prin $\widetilde{Q}_\varkappa(z)$ va trebui să înţelegem o constantă dacă $\varkappa < 0$.

Înlocuind această expresie în (IV.13) obţinem în definitiv

$$\text{(IV.16)} \qquad \Phi(z) = X(z)\,[M_1(z) + M_2(z) + P_\varkappa(z)] + \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}.$$

3. Pentru a vedea ce singularităţi are soluţia (IV.16), vom forma diferenţele (IV.2). Se obţine uşor

$$\text{(IV.17)} \qquad \Phi_1(z) - \Phi_1^{(0)}(z) =$$

$$= X_1(z)\left[-H_1(z) + M_2(z) + P_\varkappa(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}\right],$$

$$\text{(IV.17}'\text{)} \qquad \Phi_2(z) - \Phi_2^{(0)}(z) =$$

$$= X_2(z)\left[-H_2(z) + M_1(z) + P_\varkappa(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}\right].$$

Dacă $\varkappa \geqslant 0$, se vede atît din (IV.8) cît și din(IV.10) că soluția canonică nu are singularități nici în D_1 nici în D_2 și are un zero de ordin $\varkappa$ la infinit. Atunci repetînd raționamentul utilizat la capitolul III, punctul 5, conchidem că diferențele (IV.17) și (IV.17′) sînt olomorfe și deci pentru $\varkappa \geqslant 0$ soluția (IV.6) are singularitățile prescrise.

Dacă însă $\varkappa < 0$, $X_2(z)$ din formula (IV.8) și $X_1(z)$ din formula (IV.10) au un pol de ordinul $-\varkappa$ la infinit.

Pentru ca această singularitate suplimentară să dispară, este necesar și suficient ca parantezele din membrul drept al relațiilor (IV.17′), respectiv (IV.17), să aibe un zero de ordin $-\varkappa$ la infinit. Deci în cazul $\varkappa < 0$ condițiile de existență a soluției revin la faptul că funcțiile

$$\text{(IV.18)} \quad \mathcal{H}_1(z) = M_1(z) + M_2(z) - \frac{\Phi_2^{(0)}(z)}{X_2(z)} + K + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z},$$

în cazul cînd L_0 există, și

$$\text{(IV.19)} \quad \mathcal{H}_2(z) = M_1(z) + M_2(z) - \frac{\Phi_1^{(0)}(z)}{X_1(z)} + K + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z},$$

în cazul cînd L_0 lipsește, trebuie să aibe un zero de ordin $-\varkappa$ la infinit. K fiind o constantă, aceasta revine deci la satisfacerea a $-\varkappa - 1$ condiții de compatibilitate. Pe baza unui raționament care l-am mai făcut în capitolele precedente, rezultă atunci unicitatea soluției.

În ceea ce privește comportamentul soluției în vecinătatea extremităților, am amintit deja că $X(z)$ se comportă în aceste vecinătăți așa cum arată relația (III.14). Ținînd seama că din acest punct de vedere celelalte funcții care intră în (IV.16) au aceleași proprietăți ca funcțiile din (III.20), putem reproduce în întregime raționamentul utilizat la capitolul III, punctul 6. Vom reține numai concluziile lui. Soluția (IV.16) este efectiv de clasă $h(c_1, c_2, \ldots, c_r)$, adică rămîne mărginită în vecinătatea extremităților $c_1, c_2, \ldots, c_r$. În vecinătatea celorlalte extremități nesingulare soluția tinde către infinit cu un ordin mai mic decît unu.

§ 2. PROBLEMA LUI HILBERT CU SINGULARITĂȚI DATE ȘI COEFICIENȚI DISCONTINUI PENTRU INTERIORUL CERCULUI

4. Fie D_1 cercul $|z| < R$ și $F_0(z)$ o funcție uniformă definită și olomorfă în tot planul, cu excepția singularităților sale izolate ce se găsesc numai în D_1. Se cere determinarea unei funcții $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$, definită în D_1 astfel încît să fie îndeplinite următoarele condiții :

a) Diferența

$$\text{(IV.20)} \qquad F(z) - F_0(z) = h(z)$$

este olomorfă în D_1.

b) $F(z)$ este prelungibilă continuu pe L cu excepţia unei mulţimi finite E de puncte avînd afixele c_k $(k = 1, 2, \ldots, s)$ în vecinătatea cărora avem

$$|F(z)| < \frac{\text{const.}}{|z - c_k|^{\alpha}}, \quad \alpha \in (0,1). \tag{IV.21}$$

Pe $L - E$ este îndeplinită condiţia

$$a(\zeta)U(\zeta) + b(\zeta)V(\zeta) = c(\zeta), \tag{IV.22}$$

a, b, c fiind funcţii reale de punctul $\zeta \in L - E$, de clasă H_0 în raport cu mulţimea E şi în plus a şi b nu se anulează simultan.

Ca şi în cazul semiplanului, vom extinde $F(z)$ pînă la o funcţie analitică pe porţiuni după procedeul clasic punînd

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi_1(z) = F(z), & z \in D_1, \\ \Phi_2(z) = \overline{F\left(\dfrac{R^2}{z}\right)}, & z \in D_2. \end{cases} \tag{IV.23}$$

Se ajunge, după cum se ştie, la o problemă Riemann pentru $\Phi(z)$ cu condiţia la limită

$$\Phi_1(\zeta) = G(\zeta)\,\Phi_2(\zeta) + g(\zeta), \tag{IV.24}$$

unde

$$G(\zeta) = -\frac{a(\zeta) + ib(\zeta)}{a(\zeta) - ib(\zeta)}; \quad g(\zeta) = \frac{2c(\zeta)}{a(\zeta) - ib(\zeta)}, \tag{IV.25}$$

sînt evident funcţii de clasă H_0. Va trebui să găsim acele soluţii ale problemei Riemann, care să aibe singularităţi, părţile lor principale în cele două domenii fiind respectiv

$$\Phi_1^{(0)}(z) = F_0(z), \quad \Phi_2^{(0)}(z) = \overline{F_0\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)}. \tag{IV.26}$$

Deoarece din (IV.23) rezultă în mod necesar $\Phi(z) = \overline{\Phi\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)}$ şi cum $\overline{\Phi\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)}$ este ea însăşi soluţie a problemei Riemann, se ştie că, [14], pentru problema lui Hilbert soluţia va fi dată de

$$F(z) = \frac{1}{2}\left[\Phi_1(z) + \overline{\Phi_2\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)}\right]. \tag{IV.27}$$

Pentru a rezolva problema lui Riemann vom folosi rezultatele din pragraful precedent, unde va trebui să considerăm că $L_0 = L$ este cercul $|z| = R$ iar $L_1, \ldots, L_m$ lipsesc. Soluţia canonică de clasă dată se va obţine din (IV.8) luînd de exemplu $z_0 = 0$:

$$\text{(IV.28)} \qquad X(z) = \begin{cases} X_1(z) = \mathrm{e}^{\Gamma(z)}, & z \in D_1 \\ X_2(z) = z^{-\varkappa}\, \mathrm{e}^{\Gamma(z)}, & z \in D_2, \end{cases}$$

unde

$$\text{(IV.29)} \qquad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln[\zeta^{-\varkappa} G(\zeta)]}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta,$$

iar indicele

$$\text{(IV.30)} \qquad \varkappa = \frac{1}{2\pi} \operatorname{var} \{\arg G(\zeta)\}_L,$$

este determinat în conformitate cu clasa dorită.

Dacă vom nota prin $M_1(z)$ şi $M_2(z)$ respectiv suma părţilor principale ale funcţiilor $F_0(z)/X_1(z)$, $\overline{F_0\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)}/X_2(z)$, punînd

$$\text{(IV.31)} \qquad \frac{F_0(z)}{X_1(z)} = M_1(z) + H_1(z); \qquad \frac{\overline{F_0\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)}}{X_2(z)} = M_2(z) + H_2(z),$$

atunci din (IV.16) şi (IV.27) obţinem

$$\text{(IV.32)} \qquad F(z) = \frac{1}{2} X_1(z)[M_1(z) + M_2(z) + P_\varkappa(z)] +$$

$$+ \frac{1}{2} \overline{X_2\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)} \left[\overline{M_1\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)} + \overline{M_2\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)} + \overline{P_\varkappa\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)} \right] +$$

$$+ \frac{1}{4\pi i} \left\{ X_1(z) \int_L \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} - \overline{X_2\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)} \int_L \frac{\overline{g(\zeta)}}{\overline{X_1(\zeta)}} \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} \right) \mathrm{d}\zeta \right\},$$

ţinînd seama că pe cerc $\bar{\zeta} = \frac{R^2}{\zeta}$.

5. Pentru a pune în evidenţă singularităţile acestei soluţii să observăm că din (IV.31) rezultă că pentru $z \in D_1$

$$F_0(z) = X_1(z)[M_1(z) + H_1(z)] = \overline{X_2\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)} \left[\overline{M_2\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)} + \overline{H_2\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)} \right],$$

i deci putem scrie

IV.33)
$$F(z) - F_0(z) = \frac{1}{2} X_1(z)\Big[- H_1(z) + M_2(z) + P_\varkappa(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\zeta)}{X_1(\zeta)}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}\Big] + \frac{1}{2}\overline{X_2\left(\frac{R^2}{\bar z}\right)}\Big[-\overline{H_2\left(\frac{R^2}{\bar z}\right)} + \overline{M_1\left(\frac{R^2}{\bar z}\right)} + \overline{P_\varkappa\left(\frac{R^2}{\bar z}\right)} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{g(\zeta)}}{\overline{X_1(\zeta)}}\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}\right)\mathrm{d}\zeta\Big].$$

Dacă $\varkappa \geqslant 0$, termenii din prima linie fiind aceeaşi care au apărut i în problema lui Riemann sînt funcţii olomorfe. Apoi cum $\frac{R^2}{\bar z} \in D_2$ lacă $z \in D_1$, H_2 este olomorfă prin definiţie în acest domeniu, iar M_1 u are singularităţi decît în D_1. În fine, polul de ordinul $\varkappa$ din origine a lui $\overline{P_\varkappa\left(\frac{R^2}{\bar z}\right)}$ este înlăturat de $\overline{X_2\left(\frac{R^2}{\bar z}\right)}$ care are un zero de ordin $\varkappa$ în acelaşi unct. Deci întreaga soluţie are pentru $\varkappa \geqslant 0$ singularităţile dorite. Dacă nsă $\varkappa < 0$, $\overline{X_2\left(\frac{R^2}{\bar z}\right)}$ are un pol de ordin $-\varkappa$ în origine. Ca şi în cazurile nterioare, vom înlătura această singularitate suplimentară impunînd ca aranteza care înmulţeşte această funcţie să aibă un zero de ordin $-\varkappa$ n acest punct. Aceasta revine la a cere ca acest zero să-l aibe funcţia

IV.34)
$$\widetilde{\mathfrak{K}}(z) = \overline{M_1\left(\frac{R^2}{\bar z}\right)} + \overline{M_2\left(\frac{R^2}{\bar z}\right)} - \frac{F_0(z)}{\overline{X_2\left(\frac{R^2}{\bar z}\right)}} + \overline{K} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{g(\zeta)}}{\overline{X_1(\zeta)}}\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}\right)\mathrm{d}\zeta,$$

eea ce, ţinînd seama de faptul că K este o constantă arbitrară, înseamnă atisfacerea a $-\varkappa - 1$ condiţii. Dacă aceste condiţii sînt satisfăcute, n raţionament identic cu cel făcut la sfîrşitul § 2 al capitolului III ne rată că soluţia este unică.

Nu este greu apoi să arătăm că soluţia (IV.32) este de clasă dorită. ntr-adevăr, în primul rînd cele văzute la studiul problemei lui Riemann e arată că termeni ce conţin în factor $X_1(z)$ se bucură de această prorietate. Apoi cum în vecinătatea unei extremităţi avem $X_2(z) = (z - c_j)^{\alpha_j + i\beta_j}\,\Omega(z)$ şi cum $\bar c_j = \frac{R^2}{c_j}$ rezultă imediat că în vecinătatea acelei

extremități $\overline{X_2\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)} = (z - c_j)^{\alpha_j - i\beta_j}\, \Omega_1(z)$, unde Ω_1 este de asemene
o funcție regulată în c_j. De aici urmează, repetînd raționamentul făcut d
mai multe ori, că și termenii rămași sînt de clasă $h(c_1, c_2, \dots, c_\tau)$.

§ 3. PROBLEMA LUI HILBERT CU SINGULARITĂȚI DATE ȘI COEFICIENȚI DISCONTINUI PENTRU EXTERIORUL CERCULUI

6. Potrivit unei observații făcute de C. Iacob, [26], determinați
în D_2 a soluției problemei lui Riemann poate servi la construirea soluție
problemei lui Hilbert pentru exteriorul cercului.

Vom formula această problemă exact ca la punctul 4 înlocuin
peste tot domeniu D_1 prin D_2. Extensiunea lui $F(z)$ la tot planul va f
făcută acum sub forma, [26],

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi_1(z) = \overline{F\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)}, & z \in D_1, \\ \Phi_2(z) = F(z), & z \in D_2. \end{cases} \tag{IV.35}$$

Scriind condiția la limită (IV.22) sub forma

$$\mathrm{Re}\,\{(a - ib)\,(U + iV)\} = c,$$

sau

$$(a - ib)F(\zeta) + (a + ib)\overline{F(\zeta)} = 2c,$$

și ținînd seama că din (IV.35) rezultă pentru $z = \zeta \in L$ că $F(\zeta) = \Phi_2(\zeta)$ și
$\overline{F(\zeta)} = \Phi_1(\zeta)$, obținem

$$\Phi_1(\zeta) = \overline{G(\zeta)}\, \Phi_2(\zeta) + \overline{g(\zeta)}, \tag{IV.36}$$

unde funcțiile G și g sînt date de (IV.25). Părțile principale ale soluție
acestei probleme Riemann vor fi de data aceasta

$$\Phi_1^{(0)}(z) = \overline{F_0\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)}, \qquad \Phi_2^{(0)}(z) = F_0(z). \tag{IV.37}$$

Soluția problemei lui Hilbert se va obține prin analogie cu (IV.27)
cu ajutorul relației

$$F(z) = \frac{1}{2}\left[\Phi_2(z) + \overline{\Phi_1\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)}\right]. \tag{IV.38}$$

Dacă $X(z)$ este soluţia canonică de clasă dată a problemei Riemann omogene, definită prin relaţiile (IV.28) şi (IV.29), în care $G(\zeta)$ trebuie înlocuit cu conjugata sa complexă, vom obţine, ţinînd seama de (IV.32) şi de (IV.38),

$$F(z) = \frac{1}{2} X_2(z)\,[M_1(z) + M_2(z) + P_\varkappa(z)] + \tag{IV.39}$$

$$+ \frac{1}{2}\overline{X_1\left(\frac{R^2}{\bar z}\right)}\left[\overline{M_1\left(\frac{R^2}{\bar z}\right)} + \overline{M_2\left(\frac{R^2}{\bar z}\right)} + \overline{P_\varkappa\left(\frac{R^2}{\bar z}\right)}\right] +$$

$$+ \frac{1}{4\pi i}\left\{X_2(z)\int_L \frac{\overline{g(\zeta)}}{X_1(\zeta)}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} - \overline{X_1\left(\frac{R^2}{\bar z}\right)}\int_L \frac{g(\zeta)}{\overline{X_1(\zeta)}}\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}\right)\mathrm{d}\zeta\right\}.$$

Printr-un raţionament identic cu cel făcut la problema anterioară se dovedeşte că soluţia (IV.39) este de clasă dorită. De asemenea ea are singularităţile prescrise dacă $\varkappa \geqslant 0$. Dacă $\varkappa < 0$, soluţia are un pol de ordinul $-\varkappa$ la infinit pentru înlăturarea căruia trebuie ca funcţia

$$\widetilde{\mathfrak{K}}_1(z) = M_1(z) + M_2(z) - \frac{F_0(z)}{X_2(z)} + K + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{g(\zeta)}}{X_1(\zeta)}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \tag{IV.40}$$

să aibe un zero de ordin $-\varkappa$ la infinit.

Vom trece acuma la studiul cîtorva aplicaţii importante a problemei lui Hilbert tratată mai sus.

§ 4. PROBLEMA LUI VOLTERRA PENTRU CERC CU SINGULARITĂŢI DATE

7. Fie A_j şi B_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$ $2p$ puncte pe cercul $|z| = R$ de afixe a_j, b_j (sau c_k, $k = 1, 2, \ldots, 2p$, considerînd aceste puncte într-o ordine arbitrară). Să notăm cu C_j arcele $\overset{\frown}{A_jB_j}$ şi cu C'_j arcele $\overset{\frown}{B_jA_{j+1}}$. Se cere determinarea unei funcţii $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ definită în domeniul $D_1 : |z| < R$ avînd singularităţi izolate în D_1 cu partea principală $F_0(z)$ şi astfel încît

$$\begin{aligned} U(\zeta) &= m(\zeta) \quad \text{pe} \quad C = \bigcup_j C_j, \\ V(\zeta) &= n(\zeta) \quad \text{pe} \quad C' = \bigcup_j C'_j, \end{aligned} \tag{IV.41}$$

unde $m(\zeta)$ şi $n(\zeta)$ sînt două funcţii reale definite pe C respectiv C' de clasă H_0 în raport cu mulţimea E formată din punctele A_j şi B_j. Vom căuta soluţia de clasă h_{2p}, adică soluţia care este mărginită în toate extremităţile A_j şi B_j. Se vede imediat că această problemă este un caz particular al problemei Hilbert tratată mai sus dacă luăm

$$a(\zeta) = 1, \quad b(\zeta) = 0, \quad c(\zeta) = m(\zeta) \quad \text{pe} \quad C$$

$$a(\zeta) = 0, \quad b(\zeta) = 1, \quad c(\zeta) = n(\zeta) \quad \text{pe} \quad C'.$$

Vom obține atunci din (IV.25)

$$G(\zeta) = \begin{cases} -1 & \text{pe } C \\ 1 & \text{pe } C' \end{cases} \qquad g(\zeta) = \begin{cases} 2m(\zeta) & \text{pe } C \\ 2in(\zeta) & \text{pe } C' \end{cases} \tag{IV.42}$$

și deci

$$\omega(\zeta) = \arg G(\zeta) = \begin{cases} (2k_j + 1)\pi & \text{pe } C \\ 2k_j'\pi & \text{pe } C' \end{cases} \tag{IV.43}$$

k_j și k_j' fiind numere întregi.

Pentru a determina indicele, să plecăm de la un punct ζ_0 situat pe C_l', unul din arcele C_j', și să luăm $\omega(\zeta_0 + 0) = 0$. Prin continuitate rezultă că $\omega\,(a_{l+1} - 0) = 0$. Deoarece

$$0 < \frac{1}{2\pi}\,[\omega(a_{l+1} - 0) - \omega\,(a_{l+1} + 0)] < 1$$

rezultă că $\omega\,(a_{l+1} + 0) = -\pi$ și în acest fel s-a determinat k_l'. Continuînd în același mod se observă că la trecerea prin fiecare extremitate ω are un salt de $-\pi$. Revenim deci în ζ_0 cu valoarea $\omega(\zeta_0 - 0) = -2p\pi$. Rezultă deci $\varkappa = -p$.

Soluția canonică a problemei Riemann omogene corespunzătoare se obține din (IV.28) și (IV.29),

$$X(z) = \begin{cases} X_1(z) = e^{\Gamma(z)}, & z \in D_1, \\ X_2(z) = z^p \cdot e^{\Gamma(z)}, & z \in D_2, \end{cases} \tag{IV.44}$$

unde

$$\Gamma(z) = \frac{p}{2\pi i}\int_L \frac{\ln\zeta\,d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi}\int_L \arg G(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta - z}. \tag{IV.45}$$

Prima integrală din (IV.45), deoarece $\arg\zeta$ trebuie să varieze continuu cînd ζ descrie cercul în sens direct plecînd de la ζ_0, se va calcula integrînd pe un contur format din L, tăietura care unește originea cu ζ_0 și un cerc mic cu centrul în origine, a cărui rază este făcută ulterior să tindă către zero. A doua integrală se calculează imediat, ținînd seama de valorile lui $\arg G(\zeta)$ pe fiecare arc așa cum au fost obținute la determinarea indicelui. Vom obține astfel

$$X(z) = \sqrt{\prod_{j=1}^{p} (z - a_j)\,(z - b_j)} = \sqrt{P(z)}, \tag{IV.46}$$

unde prin radical înțelegem o ramură a sa olomorfă în planul prevăzut cu tăieturi de-a lungul arcelor C_j. De aici se obține imediat că

$$\overline{X\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)} = \frac{R^{2p}}{\sqrt{P(0)}\,z^p}\,X(z), \tag{IV.47}$$

unde

$$P(0) = \prod_{j=1}^{p} (a_j \cdot b_j), \tag{V.48}$$

şi făcînd $z \to \zeta \in L$,

$$\overline{X_1(\zeta)} = \frac{R^{2p}}{\sqrt{P(0)}\,\zeta^p} X_2(\zeta). \tag{IV.49}$$

Dacă vom nota cu $M_1(z)$ şi $M_2(z)$ suma părţilor principale ale funcţiilor $F_0(z)/\sqrt{P(z)}$ şi $F_0\left(\frac{R^2}{z}\right)/\sqrt{P(z)}$ relative la singularităţile lor şi utilizînd (IV.32) obţinem

$$\begin{aligned} F(z) = \frac{1}{2}\sqrt{P(z)}\Bigg\{ & M_1(z) + M_2(z) + K + \frac{R^{2p}}{\sqrt{P(0)}} z^{-p}\Bigg[\overline{M_1\left(\frac{R^z}{\bar{z}}\right) +} \\ & \overline{+ M_2\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)} + \overline{K}\Bigg] + \frac{1}{2\pi i}\sqrt{P(z)}\Bigg[\int_L \frac{\mu(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \\ & - z^{-p}\int_L \frac{\mu(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}} \zeta^p \left(\frac{1}{z-\zeta} + \frac{1}{\zeta}\right) d\zeta\Bigg], \end{aligned} \tag{IV.50}$$

unde

$$\mu(\zeta) = \begin{cases} m(\zeta) & , \zeta \in C, \\ in(\zeta) & , \zeta \in C', \end{cases} \tag{IV.51}$$

formulă care rezolvă problema propusă. În absenţa singularităţilor, problema lui Volterra pentru cerc a fost considerată de B. Demtchenko, [37], însă pe calea reducerii ei printr-o reprezentare conformă la o problemă pentru semiplan.

Soluţia (IV.50) nu îndeplineşte însă toate condiţiile întrucît, aşa cum era de aşteptat (deoarece $\varkappa = -p < 0$), ea posedă un pol suplimentar de ordinul p în origine. Acesta va dispare dacă funcţia $\mathcal{H}(z)$ definită de (IV.34) are un zero de ordinul p în origine. Efectuînd dezvoltarea în jurul originii a funcţiei

$$\frac{R^{2p}}{\sqrt{P(0)}}\left[\overline{M_1\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)} + \overline{M_2\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)} - \frac{F_0(z)}{X_2\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)} + \overline{K}\right] = \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^j,$$

vom putea scrie condiţiile de compatibilitate ale problemei sub forma

$$d_0 = 0$$

$$\left\{ d_k + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(\zeta)}{\sqrt{P(\zeta)}} \zeta^{p-k-1}\, d\zeta = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, p-1 \right. \tag{IV.52}$$

dintre care prima, de pildă, poate fi satisfăcută alegînd în mod convenabil constanta K. Îndeplinirea acestor condiţii atrage după sine unicitatea soluţiei.

§ 5. SOLUŢIA PROBLEMEI DE TEORIA FILTRAŢIEI ÎN CAZUL CERCULUI

8. Pe baza rezultatelor obţinute în §§ 2, 3 sîntem în măsură să rezolvăm problema din teoria mişcării apelor arteziene formulată în capitolul I, în cazul cînd domeniul este un cerc.

Fie D_1 domeniul $|z| < 1$ şi să presupunem că arcele $\overset{\frown}{A_j B_j}$ sînt contururi de alimentare iar arcele $\overset{\frown}{B_j A_{j+1}}$ sînt impermeabile. Cu notaţiile utilizate la capitolul I, vom lua

$$F(z) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = w(z), \tag{IV.53}$$

adică

$$U = u, \; V = -v. \tag{IV.54}$$

Condiţia la limită

$$a(\zeta)\, u(\zeta) + b(\zeta)\, v(\zeta) = 0, \tag{IV.55}$$

la care se ajunge pentru funcţia $w(z)$, va coincide cu condiţia omogenă (IV.22) dacă vom înlocui în aceasta, şi prin urmare în toate relaţiile pe care ea le implică, pe $b(\zeta)$ cu $-b(\zeta)$. Aşadar în cazul nostru

$$G(\zeta) = -\frac{a - ib}{a + ib}, \quad g(\zeta) \equiv 0, \tag{IV.56}$$

unde a şi b sînt date de (I.11). Dacă vom nota cu σ unghiul polar al razei vectoare ce trece prin origine, adică notînd pentru punctele de pe frontieră $\zeta = e^{i\sigma}$, vom avea

$$a(\sigma) = \begin{cases} -\sin\sigma & \text{pe } C \\ -\cos\sigma & \text{pe } C' \end{cases} \quad b(\sigma) = \begin{cases} \cos\sigma & \text{pe } C \\ -\sin\sigma & \text{pe } C' \end{cases} \tag{IV.57}$$

de unde rezultă

$$G(\zeta) = \begin{cases} e^{-2i\sigma} = \dfrac{1}{\zeta^2}, & \zeta \in C, \\[2ex] -e^{-2i\sigma} = -\dfrac{1}{\zeta^2}, & \zeta \in C', \end{cases} \tag{IV.58}$$

şi

$$\arg G(\zeta) = \omega(\sigma) = \begin{cases} -2\sigma + 2k_j\pi & \text{pe } C, \\ -2\sigma + (2k'_j + 1)\pi & \text{pe } C'. \end{cases} \tag{IV.59}$$

În conformitate cu cele văzute la capitolul I sîntem obligaţi să căutăm soluţii de clasa h_0. Pentru calculul indicelui vom utiliza procedeul indicat în paragraful precedent şi ţinînd seama că de data aceasta saltul argumentului la trecerea prin fiecare extremitate va fi π se obţine $\varkappa = p - 2$. Se vede deci că $\varkappa \geqslant 0$ pentru $p \geqslant 2$ şi $\varkappa < 0$ pentru $p = 1$. Atunci soluţia canonică corespunzătoare de clasă h_0 va fi

$$X(z) = \begin{cases} X_1(z) = e^{\Gamma(z)}, & z \in D_1 \\ X_2(z) = z^{-(p-2)} e^{\Gamma(z)}, & z \in D_2, \end{cases} \tag{IV.60}$$

unde

$$\Gamma(z) = -\frac{(p-2)}{2\pi i}\int_L \frac{\ln\zeta\, d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi}\int_L \frac{\omega(\sigma)\, d\zeta}{\zeta - z}. \tag{IV.61}$$

Calculînd aceste integrale într-un mod analog celui indicat la § 4 se găseşte

$$X(z) = \begin{cases} \dfrac{X_0}{\sqrt{P(z)}}, & z \in D_1, \\[2ex] \dfrac{X_0 z^2}{\sqrt{P(z)}}, & z \in D_2, \end{cases} \tag{IV.62}$$

unde $\sqrt{P(z)} = \sqrt{\prod\limits_{j=1}^{p} (z - a_j)(z - b_j)}$ este presupus olomorf în planul prevăzut cu tăieturi de-a lungul arcelor C'_j. Constanta X_0 a fost introdusă din comoditate de calcul. Se vede uşor că $X(z)$ îndeplineşte toate condiţiile pentru a fi soluţie canonică. În particular dacă $p = 1$, ea are pol simplu la infinit.

Să alegem constanta X_0 astfel încît

$$\frac{\overline{X}_0}{X_0}\sqrt{P(0)} = 1. \tag{IV.63}$$

Cum $\sqrt{|P(0)|} = 1$ rezultă că

$$X_0 = \sqrt[4]{P(0)}. \tag{IV.64}$$

Atunci

$$\overline{X\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} = z^{p-2} X(z). \tag{IV.65}$$

Notînd prin $M_1(z)$ şi $M_2(z)$ respectiv părţile principale ale funcţiilor

$$\frac{-\sqrt{P(z)}}{X_0}\sum_{s=1}^{n}\frac{q_s}{2\pi}\,\frac{1}{z - z_s} \quad \text{şi} \quad \frac{-\sqrt{P(z)}}{X_0 z^2}\sum_{s=1}^{n}\frac{q_s}{2\pi}\,\frac{z}{1 - z_s z}, \tag{IV.66}$$

din formula (IV.32) obținem

a) $p > 1$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{X_0}{2\sqrt{P(z)}}\left\{M_1(z) + M_2(z) + z^{p-2}\left[\overline{M_1\left(\frac{1}{\bar z}\right)} + \overline{M_2\left(\frac{1}{\bar z}\right)}\right] + \right.$$

(IV.67)

$$\left. + (\alpha_0 + \bar\alpha_{p-2}) + (\alpha_1 + \bar\alpha_{p-3})z + (\alpha_2 + \bar\alpha_{p-4})z^2 + \ldots + (\alpha_{p-2} + \bar\alpha_0)z^{p-2}\right\},$$

$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-2}$ fiind constante arbitrare, în general complexe.

Dacă vom nota cu β_j coeficienții polinomului care figurează în (IV.67), această relație se mai scrie

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{X_0}{2\sqrt{P(z)}}\left\{M_1(z) + M_2(z) + z^{p-2}\left[\overline{M_1\left(\frac{1}{\bar z}\right)} + \overline{M_2\left(\frac{1}{\bar z}\right)}\right] + \sum_{j=0}^{p-2}\beta_j z^j\right\}$$

(IV.68)

astfel încît

(IV.69) $$\beta_j = \bar\beta_{p-j-2}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, p-2.$$

Se poate atunci ușor constata că în coeficienții nedeterminați din (IV.68) apar în total $p - 1$ constante reale distincte.

b) $p = 1$:

(IV.70) $$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{X_0}{2\sqrt{P(z)}}\left\{M_1(z) + M_2(z) + \frac{1}{z}\left[\overline{M_1\left(\frac{1}{\bar z}\right)} + \overline{M_2\left(\frac{1}{\bar z}\right)}\right]\right\},$$

constanta care figura în locul polinomului trebuind să fie nulă pentru ca soluția să fie olomorfă și în origine. Într-adevăr, singularitatea din acest punct introdusă de $\frac{1}{z}$ este numai aparentă, căci $\overline{M_1\left(\frac{1}{\bar z}\right)}$ și $\overline{M_2\left(\frac{1}{\bar z}\right)}$ conțin în factor pe z.

Potențialul complex va rezulta dintr-o relație analoagă cu (II.88)

(IV.71) $$f(z) = \int_{a_0}^{z}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z + C_0$$

unde C_0 poate fi considerată o constantă reală dacă a_0 se găsește pe arcul impermeabil pentru care $\psi = 0$.

Cele p constante reale care figurează în expresia potențialului complex (dacă $p > 1$) se pot determina din sistemul liniar

(IV.72) $$\mathscr{Re}\left\{\int_{a_0}^{b_j}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z\right\} + C_0 = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, p.$$

Ne putem convinge de rezolubilitatea acestui sistem dacă facem în integrale o schimbare de variabilă printr-o funcţie omografică adecvată, care duce circumferinţa în axa reală a unui alt plan. Se ajunge în acest mod la un sistem de tipul (II.88) căruia i se poate aplica în întregime raţionamentul făcut la capitolul II, punctul **14**.

9. Să încercăm acuma rezolvarea problemei de la punctul precedent pentru exteriorul cercului $|z| = 1$, folosind rezultatele de la punctul **6**. Deoarece $G(\zeta)$ este dat de (IV.58) vom avea

$$\overline{G(\zeta)} = \begin{cases} e^{2i\sigma} = \zeta^2, & \zeta \in C \\ -e^{2i\sigma} = -\zeta^2, & \zeta \in C' \end{cases} \tag{IV.73}$$

şi

$$\arg \overline{G(\zeta)} = \omega(\sigma) = \begin{cases} 2\sigma + 2k_j\pi & \text{pe } C, \\ 2\sigma + (2k_j' + 1)\pi & \text{pe } C'. \end{cases} \tag{IV.74}$$

Calculînd indicele problemei, în cazul soluţiilor de clasă h_0, vom obţine printr-un procedeu analog $\varkappa = p + 2$. În acelaşi mod indicat la punctul **8** calculăm şi soluţia canonică a problemei Riemann corespunzătoare şi obţinem

$$X(z) = \begin{cases} X_1(z) = \dfrac{X_0}{\sqrt{P(z)}}, & z \in D_1, \\ \\ X_2(z) = \dfrac{X_0}{z^2\sqrt{P(z)}}, & z \in D_2. \end{cases} \tag{IV.75}$$

Atunci formula (IV.39) ne dă

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{2}\frac{X_0}{\sqrt{P(z)}}\left\{\frac{1}{z^2}[M_1(z) + M_2(z)] + z^p\left[\overline{M_1\left(\frac{1}{\bar z}\right)} + \overline{M_2\left(\frac{1}{\bar z}\right)}\right] + \sum_{j=-2}^{p}\beta_j z^j\right\} \tag{IV.76}$$

unde am notat prin $M_1(z)$ şi $M_2(z)$ respectiv părţile principale ale funcţiilor

$$\frac{-\sqrt{P(z)}}{X_0}\sum_{s=1}^{n}\frac{q_s}{2\pi}\frac{z}{1 - z\bar z_s} \text{ şi } \frac{-z^2\sqrt{P(z)}}{X_0}\sum_{s=1}^{n}\frac{q_s}{2\pi}\frac{1}{z - z_s}, \tag{IV.77}$$

β_j sînt constante legate prin relaţiile

$$\beta_j = \bar\beta_{p-j-2} \quad , \; j = -2, -1, 0, \ldots, p \tag{IV.78}$$

iar X_0 este dat de (IV.64).

Este uşor de văzut că datorită relaţiilor (IV.78) în cele $p + 3$ constante complexe figurează în realitate numai $p + 3$ constante reale distincte. Vom arăta cum pot fi ele determinate printr-un procedeu analog cu cel de la capitolul III, punctul **11**. Datorită relaţiilor (IV.77) este clar în primul rînd că termenii $\frac{1}{z^2\sqrt{P(z)}}[M_1(z)+M_2(z)]$ sînt în vecinătatea punctului de la infinit de forma $O\left(\frac{1}{z^3}\right)$, iar termenii $\frac{z^p}{\sqrt{P(z)}}\left[\overline{M_1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)+M_2\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}\right]$ admit în vecinătatea acestui punct o dezvoltare de forma $\gamma_0+\gamma_1\frac{1}{z}+\gamma_2\frac{1}{z^2}+\dots$ Pe de altă parte dacă dezvoltarea lui $\sqrt{P(z)}$ în vecinătatea lui $z=\infty$ este

(IV.79) $$\sqrt{P(z)}=z^p+\mu_{p-1}z^{p-1}+\mu_{p-2}z^{p-2}+\dots,$$

vom avea

$$\frac{\sum\limits_{j=-2}^{p}\beta_j z^j}{\sqrt{P(z)}}=\lambda_0+\lambda_1\frac{1}{z}+\lambda_2\frac{1}{z^2}+\dots$$

de unde rezultă $\lambda_0=\beta_p$ şi $\lambda_1=\beta_{p-1}-\beta\,\mu_{p-1}$. Dacă vom lua atunci $\lambda_0+\gamma_0=0$ şi $\lambda_1+\gamma_1=0$, viteza complexă va avea la infinit comportamentul necesar. În acelaşi timp constantele β_p, β_{p-1} şi o dată cu ele, datorită relaţiilor (IV.78), şi constantele β_{-2} şi β_{-1}, vor fi determinate. În felul acesta expresia (IV.76) a vitezei complexe va mai cuprinde constantele $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p-2}$ exact sub aceeaşi formă ca şi relaţia (IV.68) şi deci ele pot fi determinate prin sistemul (IV.72).

§ 6. APLICAŢII

Vom expune în acest paragraf cîteva aplicaţii simple a rezultatelor obţinute mai sus.

10. Să presupunem că mediul poros ocupă domeniul $|z|<1$, pe frontieră există o singură porţiune impermeabilă care ocupă arcul ACB (fig. 3a), afixele punctelor A şi B fiind respectiv $a=e^{-i\theta}$, $b=-e^{i\theta}$ $(\theta>0)$ iar în punctul z_0 este centrat un puţ.

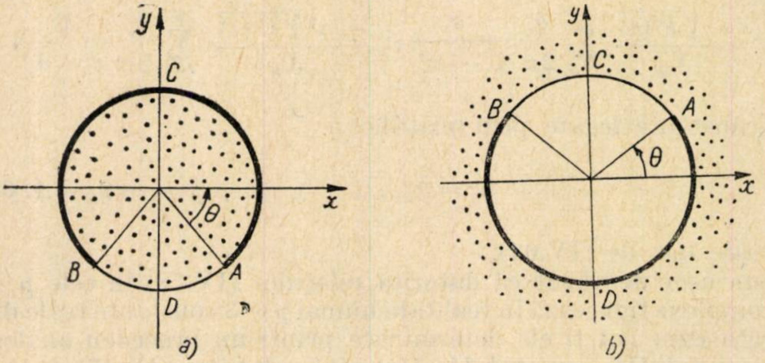


Fig. 3

Atunci din (IV.64) urmează că $X_0 = \sqrt{i}$, iar din (IV.66)

$$M_1(z) = -\frac{q}{2\pi\sqrt{i}}\sqrt{(z_0 - e^{-i\theta})(z_0 + e^{i\theta})};$$

$$M_2(z) = -\frac{q}{2\pi\sqrt{i}}\,\frac{\sqrt{(e^{i\theta} - \bar{z}_0)(e^{-i\theta} + \bar{z}_0)}}{1 - z\bar{z}_0}.$$

Înlocuind în (IV.70) obţinem

$$\text{(IV.80)}\quad \frac{df}{dz} = -\frac{q}{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{(z-e^{-i\theta})(z+e^{i\theta})}}\left[\frac{\sqrt{(z_0 - e^{-i\theta})(z_0 + e^{i\theta})}}{z - z_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{(e^{i\theta} - \bar{z}_0)(e^{-i\theta} + \bar{z}_0)}}{1 - z\bar{z}_0}\right].$$

Dacă vom face în această relaţie transformarea $z = \dfrac{R}{Z}$, domeniul $|z| < 1$ se reprezintă conform pe exteriorul cercului cu centrul în origine şi de rază R. Porţiunea impermeabilă va ocupa arcul ADB (fig. 3b), afixele punctelor A şi B fiind respectiv $a_1 = Re^{i\theta}$, $b_1 = Re^{i(\pi-\theta)}$. Atunci din (IV.76) obţinem renotînd Z cu z

$$\text{(IV.81)}\quad \frac{df}{dz} = -\frac{q}{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{(z-Re^{i\theta})(z+Re^{-i\theta})}}\left[\frac{\sqrt{(z_0 - Re^{i\theta})(z_0 + Re^{-i\theta})}}{z - z_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{R\sqrt{(Re^{-i\theta} - \bar{z}_0)(Re^{i\theta} + \bar{z}_0)}}{R^2 - z\bar{z}_0}\right].$$

Evident această expresie s-ar fi putut obţine şi fără utilizarea reprezentării conforme prin aplicarea formulei (IV.76). Calculele ar fi fost întrucîtva mai lungi, necesitînd dezvoltările în serie despre care am amintit în paragraful precedent.

Luînd pe arcul impermeabil $\psi = 0$ iar $a_0 = a_1$, vom obţine prin integrare

$$f(z) = \frac{q}{2\pi}\ln\frac{[R^2 - zz_0 + iR(z+z_0)\sin\theta - \sqrt{P(z_0)}\sqrt{P(z)}](R^2 - z\bar{z}_0)}{[R(z-\bar{z}_0) - i(R^2 + z\bar{z}_0)\sin\theta + \sqrt{\overline{-P(z_0)}}\sqrt{\overline{P(z)}}]R(z - z_0)},$$

(IV.82)

unde

$$\text{(IV.83)}\quad P(z) = (z - Re^{i\theta})(z + Re^{-i\theta}).$$

Să presupunem în particular că $z_0 = di$ cu d real și că raza puțului este δ. Pentru calculul debitului vom utiliza relațiile (I.21) și (I.22) în care $Z(z) = Z$. Dezvoltînd potențialul (IV.82) în vecinătatea lui z_0, obținem pentru constanta A valoarea

$$|A| = \frac{R(d+R)(1-\sin\theta)}{2(d-R)(d^2+R^2-2dR\sin\theta)}, \tag{IV.84}$$

și atunci rezultă

$$q = \frac{2\pi kH}{\ln\dfrac{2(d-R)(d+R-2dR\sin\theta)}{R(R+d)(1-\sin\theta)}}, \tag{IV.85}$$

formulă echivalentă cu cea obținută în [8] pe o cale mai complicată.

11. Soluția (IV.82) poate fi bineînțeles utilizată pentru domenii care pot fi reprezentate pe exteriorul cercului. Dacă în această relație, în care facem $R = 1$, punem de exemplu

$$z = \frac{1}{a+b}\left[Z + \sqrt{Z^2 - c^2}\,\right], \tag{IV.86}$$

obținem soluția mișcării în domeniul situat în exteriorul elipsei cu centrul în origine și de semiaxe a și b ($c^2 = a^2 - b^2$) din figura 4, unghiul α fiind dat de relația

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}\theta\right)\cdot \tag{IV.87}$$

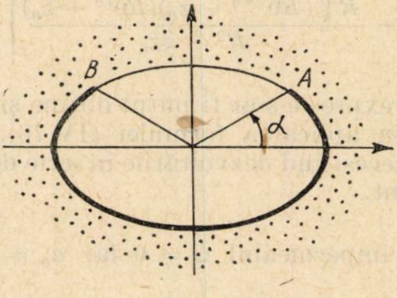


Fig. 4

Utilizînd din nou relațiile (I.21), (I.22) împreună cu (IV.86), obținem pentru debit expresia

$$q = \frac{2\pi kH}{\ln\dfrac{2}{d^*\delta}\dfrac{(d^*-1)(d^*+1-2\sin\theta)\sqrt{d^2+c^2}}{d^*+1}} \tag{IV.88}$$

unde $Z_0 = di$ este afixa izvorului şi

$$d^* = \frac{1}{a+b}\left(d + \sqrt{d^2 + c^2}\right), \quad \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}\alpha\right). \tag{IV.89}$$

În particular dacă facem ca $\alpha \to -\frac{\pi}{2}$ obţinem din (IV.88) debitul corespunzător elipsei complet permeabile [7].

CAPITOLUL V

1. În acest ultim capitol vom încerca să arătăm cum se pot aplica rezultatele obţinute în capitolele precedente, la studiul unei alte probleme importante din hidrodinamica mediilor poroase, anume problema mişcărilor în prezenţa cavităţilor, care, mai ales în ultimii ani, a căpătat o dezvoltare deosebită.

Mai precis, vom considera mişcări în prezenţa unor cavităţi umplute cu un fluid presupus a fi perfect, adică vom trata ceea ce a fost denumită „problema redusă" relativă la cavităţi, [38]. Sub această formă problema a fost considerată la început într-un caz particular de V. P. Pilatovski, [39], care a tratat cazul plan al unei cavităţi circulare şi apoi eliptice, cînd mişcarea are loc în prezenţa unei surse, cu scopul de a generaliza bine cunoscuta formulă a lui Dupuit. Mai tîrziu au fost tratate şi cîteva mişcări axial simetrice în prezenţa unor cavităţi de grosime neglijabilă (fisuri), [40], [41], [42]. O tratare sistematică şi sub o formă generală a fost întreprinsă de Şt. I. Gheorghiţă care a obţinut soluţia completă pentru problema redusă şi prima problemă restrînsă pentru cavităţi circulare, [43] şi sferice, [44], obţinînd în cazul problemei reduse două importante teoreme relative la debitul ce trece prin cavitate, [45].

Tot Şt. I. Gheorghiţă a iniţiat studiul mişcărilor în prezenţa cavităţilor parţial obturate rezolvînd efectiv un caz de astfel de mişcare, [46].

În acest capitol vom formula în general problema redusă pentru cazul cavităţilor parţial obturate, şi vom arăta cum poate fi redusă această problemă la o problemă la limită de tipul celei considerate în această lucrare şi pentru care se pot utiliza soluţiile obţinute.

§ 1. FORMULAREA PROBLEMEI ŞI REDUCEREA EI LA O PROBLEMĂ LA LIMITĂ DE TIP HILBERT

2. Să considerăm mişcarea plană în prezenţa unei cavităţi ce ocupă domeniul D_1, interiorul curbei L din planul $z = x + iy$ în timp ce domeniul D_2 exteriorul lui L este ocupat de un mediu poros omogen, avînd coeficientul de filtraţie k. Curba L se bucură de proprietăţile specificate la capitolul I. Admitem că în interiorul cavităţii se pot găsi nişte corpuri impermeabile, care sînt în contact cu frontiera L de-a lungul anumitor arce. Păstrînd notaţiile din capitolele precedente, vom nota cu C_j arcele $\overset{\frown}{A_j B_j}$ permeabile şi cu C'_j arcele $\overset{\frown}{B_j A_{j+1}}$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ în contact cu

corpurile impermeabile. Singularităţile mişcării care provin din prezenţa unui curent uniform la mari distanţe, precum şi din existenţa unor surse în anumite puncte situate la distanţă finită şi avînd afixele z_s ($s = 1, 2, \ldots, n$) se găsesc în D_2.

În aceste condiţii dacă în mediul poros este valabilă legea lui Darcy, problema se reduce la următoarea :

Să se determine o funcţie $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, analitică în D_2 astfel încît

a) Diferenţa

$$f(z) - W_0 z - \sum_{s=1}^{n} \frac{q_s}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{z - z_s}\right) \tag{V.1}$$

este olomorfă în D_2 cu excepţia eventuală a punctului de la infinit unde poate avea o singularitate logaritmică,

$$\text{b)} \quad \varphi(P) = 0, \qquad P \in C_j, \tag{V.2}$$

$$\text{c)} \quad \psi(P) = K_j, \qquad P \in C'_j. \tag{V.3}$$

Am notat prin

$$W_0 = V_0 e^{-i\alpha}, \tag{V.4}$$

viteza complexă a curentului uniform şi prin q_s debitele surselor.

Dacă vom introduce viteza complexă

$$w(z) = \frac{df}{dz} = u(x, y) - iv(x, y), \tag{V.5}$$

atunci datorită formei condiţiilor (V.2) şi (V.3) vom ajunge, urmînd în întregime raţionamentul făcut la capitolul I, la următoarea problemă :

Să se determine funcţia (V.5) astfel încît

a) Funcţia

$$w(z) + \frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^{n} q_s \frac{1}{z - z_s}, \tag{V.6}$$

este olomorfă în D_2 inclusiv în punctul de la infinit.

b) În vecinătatea punctului $z = \infty$ admite o dezvoltare de forma

$$w(z) = W_0 + \frac{d_1}{z} + \frac{d_2}{z^2} + \ldots. \tag{V.7}$$

c) Pe frontiera L este îndeplinită condiţia

$$a(P)u(P) + b(P)v(P) = 0, \tag{V.8}$$

unde a şi b sînt două funcţii de clasă H_0 a căror expresie este dată de relaţiile (I.11).

Recunoaştem în problema la care am ajuns pe cea formulată la capitolul I, deosebirea dintre ele constînd numai în comportamentul soluţiei la infinit, exprimat respectiv prin relaţiile (V.7) şi (I.14).

Vom arăta mai jos că pe baza rezultatelor obţinute în capitolul precedent sîntem în măsură să rezolvăm problema în cazul cînd D_2 este exteriorul unui cerc. Ţinînd seama de cele spuse la capitolul I este evident faptul că din soluţia acestei probleme se poate obţine soluţia pentru orice domeniu care se poate reprezenta conform pe exteriorul cercului cu corespondenţa punctelor de la infinit.

§ 2. MIŞCAREA ÎN PREZENŢA UNEI CAVITĂŢI CIRCULARE ÎN CAZUL UNUI CURENT UNIFORM LA MARI DISTANŢE

3. Vom considera în acest paragraf că frontiera L este un cerc cu centrul în origine iar mişcarea este datorată numai unui curent uniform la mari distanţe, adică toate debitele q_s care figurează în (V.6) sînt nule. Deoarece în acest caz dezvoltarea potenţialului complex în vecinătatea punctului de la infinit este de forma

$$f(z) = W_0 z + A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \ldots, \tag{V.9}$$

rezultă că în (V.7) va trebui să luăm $d_1 = 0$.

Soluţia problemei se obţine din relaţia (IV.76) în care va trebui să facem $M_1(z) = M_2(z) \equiv 0$,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{2}\frac{X_0}{\sqrt{P(z)}}\left[\beta_{-2}\frac{1}{z^2} + \beta_{-1}\frac{1}{z} + \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ldots + \beta_p z^p\right], \tag{V.10}$$

unde constantele β_j satisfac relaţiile

$$\beta_j = \bar{\beta}_{p-j-2} \qquad (j = -2, -1, 0, \ldots, p), \tag{V.11}$$

iar

$$X_0 = \sqrt[4]{P(0)}. \tag{V.12}$$

Am văzut la capitolul IV (punctul **9**) că datorită relaţiilor (V.11) în constantele β_j figurează $p + 3$ constante arbitrare reale. Determinarea lor se poate face în modul următor. Fie că în vecinătatea lui $z = \infty$ avem

$$\sqrt{P(z)} = z^p + \mu_{p-1} z^{p-1} + \mu_{p-2} z^{p-2} + \ldots + \mu_0 + \mu_{-1}\frac{1}{z} + \ldots \tag{V.13}$$

Atunci

$$\frac{\sum_{j=-2}^{p} \beta_j z^j}{\sqrt{P(z)}} = \lambda_0 + \lambda_1 \frac{1}{z} + \lambda_2 \frac{1}{z^2} + \ldots, \tag{V.14}$$

de unde rezultă ușor

$$\beta_p = \lambda_0, \ \beta_{p-1} = \lambda_0 \mu_{p-1} + \lambda_1. \tag{V.15}$$

Ținînd seama de (V.7), în care acuma $d_1 = 0$, rezultă că $\frac{X_0}{2} \lambda_0 = W_0$ și $\lambda_1 = 0$ ceea ce implică

$$\beta_p = \frac{2W_0}{X_0}, \ \beta_{p-1} = \frac{2W_0}{X_0} \mu_{p-1}. \tag{V.16}$$

În acest mod din (V.10) și (V.11) obținem

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{X_0}{2\sqrt{P(z)}} \Big[\frac{2\overline{W}_0}{\overline{X}_0} \frac{1}{z^2} + \frac{2\overline{W}_0}{\overline{X}_0} \overline{\mu}_{p-1} \frac{1}{z} + \tag{V.17}$$

$$+ \beta_0 + \beta_1 z + \ldots + \beta_{p-2} z^{p-2} + \frac{2W_0}{X_0} \mu_{p-1} z^{p-1} + \frac{2W_0}{X_0} z^p \Big].$$

Această relație este, în ceea ce privește constantele $\beta_0, \ldots, \beta_{p-2}$, identică cu (IV.68) și din acest motiv aceste constante se pot determina din sistemul (IV.72).

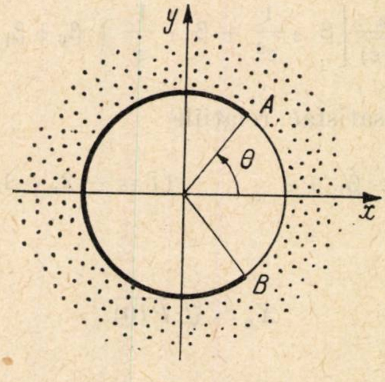


Fig. 5

În acest mod problema este complet rezolvată pînă la efectuarea unor cuadraturi.

4. Ca aplicație a celor expuse mai sus să considerăm cazul din figura 5, deci cînd există o singură porțiune obturată care ocupă arcul $|z| = 1, \ \theta < \arg z < 2\pi - \theta$.

Vom avea în acest caz

$$\text{(V.18)}\qquad \sqrt{P(z)} = \sqrt{(z - e^{i\theta})(z - e^{-i\theta})} = \sqrt{z^2 - 2z\cos\theta + 1}\,;\; X_0 = 1,$$

şi dezvoltînd în vecinătatea punctului de la infinit rezultă uşor $\mu_{p-1} = \mu_0 = -\cos\theta$. Atunci formula (V.17) ne dă

$$\text{(V.19)}\qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{\sqrt{P(z)}}\left[\overline{W}_0\frac{1}{z^2} - \overline{W}_0\frac{1}{z}\cos\theta - W_0\cos\theta + W_0 z\right].$$

Calculînd pe $f(z)$ din relaţia

$$\text{(V.20)}\qquad f(z) = \int_{e^{i\theta}}^{z} w(z)\,\mathrm{d}z,$$

adică luînd $\psi = 0$ pe arcul obturat, se găseşte fără dificulate că

$$\text{(V.21)}\qquad f(z) = W_0\sqrt{P(z)} - \overline{W}_0\frac{\sqrt{P(z)}}{z}.$$

Prin transformarea $Z = zR$ domeniul $|z| > 1$ se reprezintă conform pe domeniul $|Z| > R$. Operînd această transformare în (V.21), renotînd pe Z cu z şi ţinînd seama de modul cum se modifică vitezele asimptotice printr-o reprezentare conformă, obţinem soluţia pentru cavitatea de rază R sub forma

$$\text{(V.22)}\qquad f(z) = \left(W_0 - \overline{W}_0\frac{R}{z}\right)\sqrt{z^2 - 2Rz\cos\theta + R^2},$$

unde prin radical se înţelege o ramură a sa, olomorfă în planul prevăzut cu o tăietură de-a lungul arcului $\overset{\frown}{ADB}$ şi care ia valoarea $2R\sin\theta$ în punctul $z = R$. Pentru cazul cînd în expresia lui W_0, $\alpha = 0$ sau $\alpha = \frac{\pi}{2}$, se regăseşte rezultatul obţinut în [46].

§ 3. PROBLEMA REDUSĂ PENTRU CAVITATEA CIRCULARĂ ÎN CAZUL UNUI CURENT UNIFORM ŞI AL UNEI SURSE

5. Să presupunem că mişcarea în prezenţa cavităţii circulare $|z| = 1$ parţial obturată de-a lungul arcelor C'_j, are loc datorită unui curent uniform la mari distanţe de viteza complexă $W_0 = V_0 e^{-i\alpha}$, peste care se suprapune acţiunea unei surse (puţ sau izvor) plasată în punctul de afixă z_0 şi de debit q dat.

Deoarece în acest caz potențialul complex este de forma

$$f(z) = W_0 z - \frac{q}{2\pi} \ln (z - z_0) + \text{parte regulată}, \tag{V.23}$$

rezultă că dezvoltarea vitezei complexe în vecinătatea punctului de la infinit este

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = W_0 - \frac{q}{2\pi}\frac{1}{z} + \frac{d_2}{z^2} + \ldots, \tag{V.24}$$

adică în relația (V.7) trebuie să luăm $d_1 = -\frac{q}{2\pi}\cdot$

Soluția acestei probleme se obține cu ajutorul formulelor (IV.76), (IV.77) și (IV.78) în care va trebui să determinăm forma numerelor β_j și care, după cum am văzut, conțin $p + 3$ constante reale. Această determinare se face printr-un procedeu pe care l-am întrebuințat și la punctul **3**.

Se constată ușor că în vecinătatea punctului de la infinit este valabilă o dezvoltare de forma

$$\frac{1}{\sqrt{P(z)}}\left\{\frac{1}{z^2}\left[M_1(z) + M_2(z)\right] + z^p\left[\overline{M_1\left(\frac{1}{\bar z}\right) + M_2\left(\frac{1}{z}\right)}\right]\right\} = \gamma_0 + \gamma_1\frac{1}{z} + \gamma_2\frac{1}{z^2} + \ldots \tag{V.25}$$

precum și dezvoltarea (V.14) cu precizările aduse de (IV.13) și (IV.15). Atunci prin comparație cu (V.25) urmează că

$$\frac{X_0}{2}\left[\gamma_0 + \beta_p\right] = W_0 \;\text{ și }\; \frac{X_0}{2}\left[\gamma_1 + \beta_{p-1} - \beta_p\,\mu_{p-1}\right] = -\frac{q}{2\pi}\cdot \tag{V.26}$$

De aici se deduc valorile lui β_{p-1} și β_p și prin urmare, și valorile lui β_{-2} și β_{-1}. Rămîn ca necunoscute constantele $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{p-2}$ care se determină printr-un sistem de tipul (IV.72) așa cum s-a făcut de mai multe ori.

6. Ca aplicație să reluăm cazul din figura 5, deci cînd sînt valabile relațiile (V.18). Determinînd $M_1(z)$ și $M_2(z)$ în conformitate cu (IV.77) și înlocuind în (IV.76) găsim după efectuarea unor calcule simple

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{q}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{P(z)}}&\left[z_0^2\sqrt{P(z_0)}\,\frac{1}{z^2(z - z_0)} + \frac{\overline{\sqrt{P(z_0)}}}{\bar z_0^2}\,\frac{1}{z^2(1 - z\bar z_0)} + \right.\\ &\left.+ \frac{\sqrt{P(z_0)}}{z_0^2}\,\frac{z^2}{z - z_0} + \bar z_0^2\,\overline{\sqrt{P(z_0)}}\,\frac{z^2}{1 - z\bar z_0}\right] + \frac{1}{2\sqrt{P(z)}}\left[\frac{\bar\beta_1}{z^2} + \frac{\bar\beta_0}{z} + \beta_0 + \beta_1 z\right]\cdot\end{aligned} \tag{V.27}$$

Efectuînd dezvoltările cerute de (V.13) şi (V.25) şi rezolvînd sistemul (V.26) se găseşte că

$$\text{(V.28)}\qquad \begin{aligned} \beta_0 &= -2W_0\cos\theta + \frac{q}{2\pi}\left[\frac{\sqrt{P(z_0)}}{z_0} - \overline{\sqrt{P(z_0)}} - 2\right],\\ \beta_1 &= 2W_0 + \frac{q}{2\pi}\left[\frac{\sqrt{P(z_0)}}{z_0^2} - \frac{\overline{\sqrt{P(z_0)}}}{\bar z_0}\right], \end{aligned}$$

şi prin aceasta viteza complexă este complet determinată.

Considerînd din nou că pe arcul obturat avem $\psi = 0$, potenţialul complex se va determina calculînd integrala (V.20). Efectuarea calculelor nu prezintă dificultate şi în cele din urmă ajungem la următoarea formă pentru potenţialul complex :

$$\text{(V.29)}\qquad \begin{aligned} f(z) &= \left(W_0 - \frac{\overline{W}_0}{z}\right)\sqrt{P(z)} - \frac{q}{2\pi}\ln\frac{z(\sqrt{P(z)} + z - \cos\theta)}{\sqrt{P(z)} - z.\cos\theta + 1} + \\ &+ \frac{q}{2\pi}\ln\frac{[zz_0 + 1 - (z + z_0)\cos\theta + \sqrt{P(z_0)}\sqrt{P(z)}](z\bar z_0 - 1)}{[z + \bar z_0 - (z\bar z_0 + 1)\cos\theta + \overline{\sqrt{P(z_0)}}\sqrt{P(z)}](z - z_0)}. \end{aligned}$$

Pentru a obţine soluţia în cazul cercului de rază R, operăm în (V.29) transformarea $Z = zR$ şi după ce renotăm Z cu z şi noua viteză asimptotică prin $W_0 = V_0\,e^{-i\alpha}$ obţinem

$$\text{(V.30)}\qquad \begin{aligned} f(z) &= \left(W_0 - \overline{W}_0\frac{R}{z}\right)\sqrt{P(z)} - \frac{q}{2\pi}\ln\left[\frac{z}{R}\,\frac{\sqrt{P(z)} + z - R\cos\theta}{\sqrt{P(z)} - z\cos\theta + R}\right] + \\ &+ \frac{q}{2\pi}\ln\frac{[zz_0 + R^2 - (z + z_0)R\cos\theta + \sqrt{P(z_0)}\sqrt{P(z)}](z\bar z_0 - R^2)}{[(z + \bar z_0)R - (z\bar z_0 + R^2)\cos\theta + \overline{\sqrt{P(z_0)}}\sqrt{P(z)}\,]R(z - z_0)}. \end{aligned}$$

unde

$$\text{(V.31)}\qquad \sqrt{P(z)} = \sqrt{(z - Re^{i\theta})(z - Re^{-i\theta})}$$

este luat cu determinaţia precizată la sfîrşitul § 2.

Să facem unele particularizări în soluţia (V.30). În primul rînd dacă luăm $q = 0$ regăsim, aşa cum era de aşteptat, soluţia (V.22) corespunzătoare cazului cînd există numai un curent uniform la mari distanţe.

Dacă luăm $W_0 = 0$, se obţine o generalizare a rezultatului lui Pilatovski, [41], care, aşa cum am mai amintit, a considerat mişcarea datorită unei surse în prezenţa unei cavităţi circulare cu frontiera complet permeabilă. Într-adevăr, dacă facem în (V.30) ca $\theta \to \pi$, rezultă că $\sqrt{P(z)} \to z + R$ şi obţinem, abstracţie făcînd de o constantă aditivă pur imaginară care nu prezintă nici o importanţă,

$$f(z) = -\frac{q}{2\pi} \ln \frac{z(z-z_0)}{R^2 - z\bar{z}_0}. \tag{V.32}$$

Această soluţie echivalentă în fond cu cea a lui Pilatovski se poate regăsi imediat aplicînd teorema cercului.

În fine, din forma soluţiei (V.30) se constată că în cazul existenţei mai multor surse, soluţia se obţine luînd în locul ultimilor doi termeni sume de astfel de termeni extinse asupra tuturor afixelor surselor.

Primită la redacţie la 13 februarie 1969

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Calea Griviţei nr. 21, Bucureşti 12

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE QUELQUES CLASSES DE MOUVEMENTS DANS LES MILIEUX POREUX

(RÉSUMÉ)

Ce travail a comme point de départ le problème de la théorie de filtration suivant : considérons un milieu poreux homogène remplissant le domaine $\mathfrak{D}$ situé dans le plan $z = x + iy$ et dont la frontière est une courbe L fermée ou ouverte ayant certaines propriétés de régularité. Supposons que les arcs $C_j' : \overset{\frown}{B_jA_{j+1}}$ ($j = 1, 2, \ldots p$, $A_{p+1} \equiv A_1$) de L sont imperméables et qu'un fluide incompressible s'infiltre dans $\mathfrak{D}$ par les arcs $C_j : \overset{\frown}{A_jB_j}$ ($j = 1, 2, \ldots p$), en mouvement plan, horizontal et permanent, vers des puits circulaires ayant les centres aux points z_s et les débits q_s ($s = 1, 2, \ldots n$). Si l'on suppose que l'écoulement est soumis à la loi de Darcy, il existe un potentiel complexe $f(z) = \varphi + i\psi$, où φ est le potentiel des vitesses et ψ la fonction de courant, ayant des singularités logarithmiques dans z_s et qui doit être déterminé par la condition que l'on ait $\varphi = 0$ sur $C = \bigcup_j C_j$ et $\psi = K_j$ sur $\bigcup_j C_j'$, K_j étant des constantes dont seulement une est connue par avance.

Dans le premier chapitre on démontre que pour la vitesse complexe $w(z) = \dfrac{df}{dz}$ on aboutit au problème de Hilbert (I.12) à coefficients discontinus (I.11), la solution possédant dans $\mathfrak{D}$ des pôles simples. Par une représentation conforme on peut se réduire au cas où $\mathfrak{D}$ est un domaine canonique et étudier de même le cas où L a un nombre fini de points anguleux.

L'étude théorique générale du problème de Hilbert à singularités données et à coefficients discontinus est faite dans les trois chapitres suivants où sont présentées de même quelques-unes de ses applications. En supposant que $\mathfrak{D}$ est un demi-plan ou un cercle, ce problème est réduit dans tous les cas au problème de Riemann à singularités données et à coefficients discontinus.

Dans le deuxième chapitre on résout le problème de Riemann à singularités données, les coefficients discontinus étant de la forme (II.4), (§ §. 1,3). La solution correspondante est donnée

par (II.21). En utilisant cette solution on résout ensuite le problème de Hilbert pour le demi-plan à singularités données, les coefficients ayant la forme (II.46) ou (II.59), (§. 4). Quoique les solutions (II.54), respectivement (II.64) de ces problèmes soient obtenues dans un cas qui n'est pas le plus général, elles contiennent, en particulier, la solution de quelques problèmes importants, à savoir, dans le §. 5 on déduit la solution du problème de Volterra pour le demi-plan à singularités données qui généralise celle de Signorini, et ensuite on résout d'une façon complète le problème des mouvements des eaux artésiennes au cas où $\mathfrak{D}$ est un demi-plan (§. 6). Pour ce dernier problème nous avons fait des calcules effectifs dans quelques cas particuliers (§. 7).

Les problèmes de Riemann et de Hilbert à singularités données et à coefficients discontinus pour le demi-plan sont repris dans le troisième chapitre sans imposer aux coefficients aucune restriction. Les solutions respectives sont données par les formules (III.20), (III.32). A titre d'application on déduit, en particulier, la solution du problème de Dirichlet pour le demi-plan à singularités données, une autre forme de la solution du problème de Volterra, ainsi que la solution du problème des mouvements des eaux artésiennes.

Dans le quatrième chapitre les mêmes problèmes de Riemann et de Hilbert sont traités dans le cas des domaines limités par des frontières fermées. Le problème de Riemann est considéré dans le cas général des domaines multiplement connexes. Pour le problème de Hilbert nous nous bornerons au cas où $\mathfrak{D}$ est l'intérieur ou l'extérieur d'une circonférence (§.§. 2.3). La solution intérieure du problème de Hilbert nous sert dans le §. 4 pour résoudre le problème de Volterra à singularités données. La solution complète du problème des mouvements des eaux artésiennes au cas où $\mathfrak{D}$ est l'intérieur ou l'extérieur d'une circonférence est obtenue dans le §. 5, et dans §. 6 nous avons développé les calculs pour certains cas particuliers de tels écoulements.

Le dernier chapitre est consacré entièrement aux applications des résultats obtenus dans les chapitres précédents à l'étude d'un autre problème important de la théorie de filtration, lié au problème des eaux artésiennes. Il s'agit des écoulements dans les milieux poreux en présence des cavités partiellement obturées et remplies d'un fluide parfait. On montre que pour la détermination de la vitesse complexe on aboutit de nouveau au problème de Hilbert rencontré au premier chapitre, à cela près qu'on modifie le comportement de la solution dans le voisinage du point à l'infini (§. 1). A l'aide des résultats obtenus dans le chapitre précédent on résout le problème général pour une cavité circulaire, en supposant que dans le milieu il existe seulement un courant uniforme (§. 2), ou bien une courant uniforme et une source (§.3).

BIBLIOGRAFIE

1. ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, *Metode matematice în hidrogazodinamica subterană*. Bucureşti, 1966.
2. M. MUSKAT, *The flow of homogeneous fluids through porous media*. Michigan, 1946.
3. A. HOUPEURT, *Eléments de Mécanique des fluides dans les milieux poreux*. Paris, 1958.
4. H. ENE, *Generalizarea unei probleme din mişcarea apelor arteziene*. St. cerc. mec. apl., **19**, *4*, 1043 (1965).
5. H. ENE, *Asupra unor probleme din mişcarea apelor arteziene*. St. cerc. mat., **19**, *1*, 55 (1967).
6. ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, *Asupra mişcării apelor arteziene*. Anal. Univ. Buc. seria Şt. Naturii, *15*, 51 (1957).
7. S. GOGONEA, *Cîteva mişcări în medii poroase în prezenţa unor contururi de alimentare finite*. St. cerc. mat., **15**, *7*, 825 (1964).
8. S. GOGONEA, *Sur les mouvements plans dans les milieux poreux en présence d'une classe de frontières d'alimentation*. Journal de Mécanique, **5**, *3*, 309 (1966).

9. S. Gogonea, *Sur les mouvements des eaux artésiennes en présence des quelques contours d'alimentation partiellement obturés.* Rev. Roum. Math. pures et appl., **12**, *7*, 955 (1967).

10. S. Gogonea, *Asupra mişcării apelor arteziene în anumite domenii concave.* St. cerc. matem., **19**, *9*, 1259 (1967).

11. П. Я. Полубаринова-Кочина, *Теория движения грунтовых вод,* Москва, 1952.

12. C. Iacob, *Introduction mathématique à la mécaniques des fluides.* Bucarest—Paris, 1959.

13. Л. И. Седов, *Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики.* Москва — Ленинград, 1950.

14. H. I. Muschelischwili, *Singuläre Integralgleichungen Akademie.* Verlag, Berlin, 1965.

15. Şt. I. Gheorghiţă, *Asupra interferenţei izvoarelor în medii poroase neomogene.* Analele Univ. Buc. Seria Şt. Naturii mat., fiz., **12**, *40*, 15.

16. В. П. Пилатовский, *Определение дебита батарей скважин дренирующих конических пласт.* ДАН СССР, **87**, *6*, 877 —890 (1952).

17. И. А. Черный, *Подземная гидромеханика.* Москва, 1948.

18. D. Hilbert, *Göttinger Nachrichten*, 307, 1935.

19. D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* Leipzig—Berlin, 1912.

20. F. Noether, *Über eine Klasse singulären Integralgleichungen*, Math. Annalen, *82*, 42 (1921).

21. C. Iacob, *Sur la détermination des fonctions harmoniques conjuguées par certaines conditions aux limites.* Mathematica, *11*, 58 (1935).

22. C. Iacob, *Sur le problème de la dérivée oblique de Poincaré et sa connexion avec le problème de Hilbert.* Bull. Math. Soc. Roum. Sci., *42* (2), 9 (1940).

23. H. Villat, *Leçons sur l'Hydrodynamique.* Paris, 1920.

24. Н. И. Мусхелишвили, Д. А. Квеселава, *Сингулярные интегральные уравнения с ядрами типа Коши на разомкнутых контурах*, Тр. Тбил. матем.ин-та, **XI**, 141—172 (1942).

25. Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи.* Москва, 1958.

26. C. Iacob, *Asupra soluţiilor cu singularităţile date ale problemelor lui Riemann şi Hilbert.* St. cerc. mat., **10**, *2*, 255 (1959).

27. К. Якоб, *О решении задачи Римана и Гильберта с заданными особенностями.* Revue Math. Pures et Appl., **5**, *1*, 5 (1960).

28. V. Volterra, *Sopra alcune condizioni caratteristiche per le funzioni di variabile complessa.* Annali di Mat., série 2, *11*, 1 (1883).

29. H. Schwarz, Jahrbuch über die Fortschritte der Math., *15*, 361 (1885).

30. A. Signorini, *Sopra una problèma al contorno nella teoria delle funzioni di variabila complessa.* Annali di Mat., série 3, *25*, 253 (1916).

31. C. Iacob, *Sur une interpretation des conditions de compatibilité dans le problème mixte de Volterra.* Revue Roum. Math. pures et appl., **12**, *1*, 87 (1967).

32. V. Vâlcovici, *Sur un problème mixte de Dirichlet.* Bull. de la Sect. Scient. de l'Acad. Roum., IVe année, *1*, 20 (1915).

33. V. Vâlcovici, *Sur un problème mixte de Dirichlet.* Bull. de la Sect. Scient. de l'Acad. Roum., IVe année, *4*, 161 (1915).

34. B. Demtchenko, *Problèmes mixtes harmoniques en mécanique des fluides parfaits.* Paris, 1933.

35. М. В. Келдыш, Л. И. Седов, *Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций.* ДАН СССР, **XVI**, *1*, 7 (1937).

36. Şt. I. Gheorghiţă, *On the application of conformal mappings to the flow of artesian waters.* Mathematica, *6* (29), 207 (1964).

37. B. Demtchenko, *Sur un problème mixte.* C. R. Acad. Sci. Paris, *190*, 415 (1930).

38. Șt. I. Gheorghiță, *Asupra mișcării în medii poroase cu caverne*. Com. Acad. R.P.R., **9**, 13, 789 (1963).

39. В. П. Пилатовский, *Фильтрация жидкостей в несовершенной пласте*. Изв. АН СССР, ОТН, **4**, 121 (1954).

40. М. И. Швидлер, *Приток жидкости к скважине с трещиной в призабойной зоне*. Изв. АН СССР, ОТН, **11**, 95 (1955).

41. В. Н. Николаевский, *Приток жидкости к горизонтальной трещине в пласте*. Изв. АН СССР, ОТН, **7**, 126 (1958).

42. Ю. Н. Васильев, А. И. Башкиров, *Приближенное решение задачи о притоке к скважине с горизонтальной трещиной*, Изв. АН СССР, ОТН **5**, 183 (1941).

43. Șt. I. Gheorghiță, *On the steady flow through porous media in presence of a cylindrical cavity*. Gonita, *16*, 7 (1965).

44. Șt. I. Gheorghiță, *On the motion of fluids in a unbounded porous medium having a spherical cavity*. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **9**, *5*, 425 (1964).

45. Șt. I. Gheorghiță, *Sur le mouvement dans un milieux poreux homogéne ayant une cavité*. C. R. Acad. Sci. Paris, *260*, 21, 5457 (1960).

46. Șt. I. Gheorghiță, *Sur les mouvements dans les milieux poreux ayant des cavités*. Proc-VIIth Symposiun on Advances Problems and Methods in Fluid Dynamics, Jurata 1965.

PROBLEMA LUI RIEMANN GENERALIZATĂ ÎN CLASA FUNCŢIILOR ANALITICE

DE

VASILE IONESCU şi CIPRIAN COZMA

Se studiază o problemă la limită de tip Riemann care conţine, în afară de valorile limită $\Phi^{+}(t)$ şi $\Phi^{-}(t)$ pe linia de salt L ale funcţiei căutate $\Phi(z)$, valorile lor conjugate în relaţie liniară cu coeficienţi hölderieni pe L. Studiul este limitat la cazul unui domeniu simplu conex mărginit de o curbă simplă închisă de tip Liapunov. Problema este redusă la o ecuaţie integrală singulară cu nucleu de tip Cauchy care, prin regularizare, poate fi adusă la o ecuaţie de tip Fredholm.

INTRODUCERE

Este bine cunoscută problema lui Riemann în clasa funcţiilor olomorfe pe porţiuni : să se determine în planul complex funcţia $\Phi(z)$, olomorfă pe porţiuni, cu linia de salt (L), atunci cînd această funcţie satisface pe (L) condiţia la limită :

$$\Phi^{+}(t) + G(t)\cdot\Phi^{-}(t) = g(t), \tag{1}$$

unde $\Phi^{+}(t)$ şi $\Phi^{-}(t)$ sînt valorile limită ale lui $\Phi(z)$ pe (L) cînd $z \to t$ ($t \in L$) venind din D^{+} respectiv D^{-}, iar $G(t)$ şi $g(t)$ sînt funcţii hölderiene pe (L) şi $G(t) \neq 0$. Nu insistăm asupra notaţiilor şi terminologiei utilizate întrucît acestea se găsesc în orice tratat de specialitate (de ex. [1], [2]).

În numeroase aplicaţii apar probleme la limită, în clasa funcţiilor olomorfe pe porţiuni, mai generale decît (1) avînd, ca şi aceasta, o formă liniară. În lucrarea [3] noi am întîlnit în studiul unei probleme de dislocuire a unui fluid într-un mediu poros omogen problema determinării unei funcţii olomorfe pe porţiuni cu linia de salt (L) (satisfăcînd condiţiile lui Liapunov [2]) pe care este îndeplinită condiţia :

$$\Phi^{+}(t) + A\Phi^{-}(t) + B\overline{\Phi^{-}(t)} = g(t), \tag{2}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 9, P. 1369–1391, BUCUREŞTI, 1969

în care A şi B sînt constante iar $g(t)$ o funcţie care satisface pe (L) condiţia lui Hölder.

În lucrările [4], [5] sînt studiate probleme definite de condiţii la limită similare cu (2) în clasa funcţiilor analitice şi analitice generalizate, pe alte căi decît cea expusă în lucrarea de faţă.

Întrucît aceste condiţii la limită, care generalizează liniar problema lui Riemann, sînt impuse de studiul unor fenomene fizice şi prezintă în plus interes matematic intrinsec, ne vom ocupa în această lucrare de studiul problemei în cazul condiţiei la limită de forma :

$$\Phi^+(t) + A(t)\cdot\Phi^-(t) + B(t)\overline{\Phi^+(t)} + C(t)\overline{\Phi^-(t)} = g(t), \tag{3}$$

în care $A(t)=\gamma_1(s)+i\delta_1(s)$, $B(t)=\gamma_2(s)+i\,\delta_2(s)$, $C(t)=\gamma_3(s)+i\delta_3(s)$ şi $g(t)$ sînt funcţii hölderiene pe (L), supuse în plus unor condiţii ce vor rezulta din cele ce urmează, iar s este abscisa curbilinie a punctului de afixă t. Ne limităm la cazul cînd (L) este o curbă simplă închisă care împarte planul complex în domeniile complementare D^+ şi D^-. Vom face abstracţie de cazul cînd coeficienţii condiţiei (3) au anumite singularităţi.

Vom reduce studiul problemei generale la rezolvarea unei ecuaţii integrale singulare care poate fi soluţionată prin metodele cunoscute, în care coeficienţii depind de cei ai condiţiei (3) şi de curba (L). În afară de metoda generală aplicată în cazul propus, ne vom opri şi asupra unor cazuri particulare care se rezolvă mai simplu pe căi mai directe, comparînd rezultatele obţinute pe cele două căi. Aceste cazuri particulare sînt determinate fie de forma particulară a coeficienţilor, fie de forma particulară a curbei (L). În unele din aceste cazuri se poate evita apariţia ecuaţiilor integrale singulare care după cum se ştie prezintă anumite dificultăţi de rezolvare.

PARTEA I

METODA GENERALĂ DE REZOLVARE

Considerăm aşadar în planul complex curba (L) care satisface condiţiile enunţate, pe care funcţia olomorfă pe porţiuni $\Phi(z)$ satisface condiţia

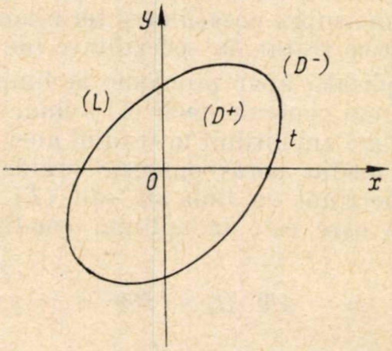


Fig. 1.

lui Riemann generalizată liniar (3). Ţinînd seama de expresiile coeficienţilor $A(t)$, $B(t)$ şi $C(t)$, precum şi de expresia $\Phi(t) = \varphi(s) + i\,\psi(s)$, vom separa în condiţia la limită partea reală şi imaginară. Se obţine :

$$
(3') \qquad
\begin{aligned}
&\varphi^{+}(1+\gamma_2) + \varphi^{-}(\gamma_1+\gamma_3) + \delta_2\psi^{+} + \psi^{-}(\delta_3-\delta_1) = \frac{g+\bar{g}}{2},\\
&\delta_2\cdot\varphi^{+} + \varphi^{-}(\delta_1+\delta_3) + \psi^{+}(1-\gamma_2) + \psi^{-}(\gamma_1-\gamma_3) = \frac{g-\bar{g}}{2i}.
\end{aligned}
$$

Sistemul de mai sus împreună cu relaţiile integrale care leagă pe $\psi^{+}(s)$ de $\varphi^{+}(s)$ şi pe $\psi^{-}(s)$ de $\varphi^{-}(s)$, constituie un sistem de patru ecuaţii cu patru necunoscute pe care urmează să-l rezolvăm.

Să deducem mai întîi relaţiile integrale amintite.

Vom pleca de la formula lui Schwarz-Villat [6] care determină o funcţie olomorfă în interiorul cercului unitar din planul Z în funcţie de valorile părţii sale reale pe frontieră,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\,\frac{e^{i\theta}+Z}{e^{i\theta}-Z}\,d\theta + i\beta,$$

sau, sub altă formă,

$$F(Z) = \frac{1}{\pi i}\int_C \varphi(\theta)\,\frac{d\zeta}{\zeta - Z} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(\theta)\,\frac{d\zeta}{\zeta} + i\beta$$

în care prin (C) s-a notat circumferinţa unitară de integrare şi unde $\zeta = e^{i\theta}$. Cea de-a doua integrală din relaţia de mai sus este o constantă reală φ_0, valoarea funcţiei φ în centrul cercului, după cum se poate verifica ţinînd seama de teorema de medie a funcţiilor armonice. Efectuînd o transformare conformă a interiorului cercului pe interiorul domeniului D^{+} cu ajutorul funcţiei $Z = \alpha(z)$, corespondenţa frontierelor fiind $\zeta = \alpha(\tau)$, formula de mai sus devine

$$F(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \varphi(\sigma)\,\frac{\alpha'(\tau)\,d\tau}{\alpha(\tau)-\alpha(z)} - \varphi_0 + i\beta,$$

unde σ este abscisa curbilinie a punctului de afixă τ pe (L).

În relaţia de mai sus vom trece la limită către punctul t de pe curba (L). Pentru aceasta vom introduce funcţia

$$S(\tau, z) = \frac{\alpha(\tau)-\alpha(z)}{\tau - z}.$$

Această funcţie este olomorfă în D^+ pentru orice $\tau \in L$, continuă în raport cu τ şi după cum se poate observa imediat,

$$S(\tau, \tau) = \alpha'(\tau).$$

În plus, $S(\tau, z)$ nu se anulează în nici un punct din D^+ aşa cum rezultă din expresia sa de mai sus.

Cu aceasta $F(z)$ se scrie

$$F(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\sigma)\alpha'(\tau)}{S(\tau, z)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z} - \varphi_0 + i\beta,$$

unde distribuţia integralei de tip Cauchy este olomorfă în raport cu z în D^+. Integrala din membrul drept al relaţiei de mai sus diferă de o integrală obişnuită de tip Cauchy prin aceea că distribuţia depinde şi de variabila z. Acest fapt nu schimbă cu nimic comportarea integralei în apropierea lui (L).

Pentru a demonstra afirmaţia făcută mai sus, să considerăm integrala

$$A(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau, z)}{\tau - z} d\tau$$

care defineşte o funcţie olomorfă în domeniul D^+ dacă $\varphi(\tau, z)$ este hölderiană în raport cu τ pe (L) şi olomorfă în D^+ în raport cu z. Scriem funcţia $A(z)$ sub forma

$$A(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau, z) - \varphi(\tau, \tau)}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau, \tau)}{\tau - z} d\tau.$$

În prima integrală din membrul drept se poate trece la limită direct ([1], pag. 41) iar a doua este singulară de tip Cauchy, obişnuită căreia i se pot aplica formulele lui Plemelj. Obţinem

$$A^+(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau, t) - \varphi(\tau, \tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{\varphi(t, t)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau, \tau)}{\tau - t} d\tau,$$

sau reducînd termenii asemenea

$$A^+(t) = \frac{\varphi(t, t)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau, t)}{\tau - t} d\tau.$$

Remarcăm că nu se poate scrie o expresie similară pentru $A^-(t)$, deoarece funcţia $\varphi(\tau, z)$ nu este definită în D^- şi deci nici $A(z)$ nu există în acest domeniu.

Aplicînd considerațiile de mai sus funcției $F(z)$, ajungem la expresia

$$F^{+}(t) \equiv \varphi^{+} + \mathrm{i}\psi^{+} = \varphi^{+} + \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_{L} \frac{\varphi^{+}(\sigma)\, \alpha'(\tau)}{S(\tau, t)} \cdot \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau - t} - \varphi_0 + \mathrm{i}\beta$$

sau, după reducere,

$$\psi^{+}(s) = -\frac{1}{\pi} \int_{L} \varphi^{+}(\sigma) \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \mathrm{d}\tau + C_1 \tag{4}$$

cu $C_1 = \beta + \mathrm{i}\, \varphi_0$.

În mod cu totul asemănător se deduce și formula

$$\psi^{-}(s) = \frac{1}{\pi} \int_{L} \varphi^{-}(\sigma) \frac{\alpha_1'(\tau)}{\alpha_1(\tau) - \alpha_1(t)} \mathrm{d}\tau + C_2 \tag{4'}$$

referitoare la domeniul D^{-}, unde $Z = \alpha_1(z)$ este funcția de reprezentare conformă a exteriorului cercului unitar pe D^{-} iar C_2 este o constantă complexă.

Se verifică imediat că membrii drepți ai relațiilor (4) și (4′) sînt reali. Dacă calculăm partea imaginară a membrului drept în (4) avem

$$\mathrm{Im}\left\{-\frac{1}{\pi} \int_{L} \varphi^{+}(\sigma) \frac{\alpha'(\tau)\, \mathrm{d}\tau}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} + c_1\right\} = -\frac{1}{\pi} \mathrm{Im} \int_{C} \varphi^{+}(\theta) \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - \zeta_0} + \varphi_0,$$

în care s-a făcut schimbarea de variabilă $\zeta = \alpha(\tau)$ și care transformă curba (L) în cercul unitar. În plus, $\zeta_0 = \alpha(t)$; $|\zeta_0| = 1$. Punînd $\zeta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ și $\zeta_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$, deducem, după calcule imediate,

$$-\frac{1}{\pi} \mathrm{Im} \int_{C} \varphi^{+}(\theta) \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - \zeta_0} + \varphi_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \varphi^{+}(\theta) \mathrm{Im} \left\{\frac{\mathrm{i}\,[1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta - \theta_0)}]}{1 - \cos(\theta - \theta_0)}\right\} \mathrm{d}\theta + \varphi_0 =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \varphi^{+}(\theta)\, \mathrm{d}\theta + \varphi_0 = 0.$$

Aceeași proprietate este valabilă și pentru formula (4′). Din demonstrația de mai sus reiese că partea imaginară a integralelor de forma (4) este constantă, fapt care este util, deoarece astfel de integrale intervin și în continuare.

Pentru rezolvarea sistemului format din ecuațiile (3′), (4) și (4′) vom scrie sistemul (3′) sub forma :

$$\begin{aligned} &L_1 \varphi^{+} + M_1 \varphi^{-} + N_1 \psi^{-} = Q_1, \\ &L_2 \varphi^{+} + M_2 \varphi^{-} + N_2 \psi^{+} = Q_2, \end{aligned} \tag{5}$$

echivalent cu (3′), dedus din acesta fie prin eliminarea lui ψ^{+} fie a lui ψ^{-}.

S-au făcut următoarele notații :

$$L_1 = 1 - \gamma_2^2 - \delta_2^2 ; \qquad L_2=(1+\gamma_2^2)(\gamma_1-\gamma_3)+\delta_2(\delta_1-\delta_3) ;$$

$$M_1 = (1 - \gamma_2)(\gamma_1 + \gamma_3) - \delta_2(\delta_1 + \delta_3) ; \quad M_2=\gamma_1^2-\gamma_3^2+\delta_1^2-\delta_3^2 ;$$

$$N_1 =(1 - \gamma_2)(\delta_3 - \delta_1) - \delta_2(\gamma_1 - \gamma_3) ; \quad N_2=\delta_2(\gamma_1-\gamma_3)+(1-\gamma_2)(\delta_1-\delta_3) ;$$

$$Q_1 = \frac{1 - \gamma_2}{2}(g + \bar{g}) - \frac{\delta_2}{2\mathrm{i}}(g - \bar{g}) ; Q_2 = \frac{\gamma_1 - \gamma_3}{2}(g + \bar{g}) +$$

$$+ \frac{\delta_1 - \delta_3}{2\mathrm{i}}(g - \bar{g}).$$

Trecerea de la sistemul (3′) la sistemul (5) a fost efectuată pentru simplificarea calculelor ulterioare. Ținînd seama în (5) de relațiile integrale (4) și (4′), obținem :

$$L_1\varphi^+ + M_1\varphi^- + \frac{N_1}{\pi}\int_L \frac{\varphi^-(\sigma)\,\alpha_1'(\tau)}{\alpha_1(\tau) - \alpha_1(t)}\mathrm{d}\tau = Q_1 - c_2 N_1 ,$$

$$L_2\varphi^+ + M_2\varphi^- - \frac{N_2}{\pi}\int_L \frac{\varphi^+(\sigma)\,\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\mathrm{d}\tau = Q_2 - c_1 N_2 .$$

Relația a doua mai poate fi scrisă sub forma :

$$\varphi^-(s) = \frac{N_2(s)}{\pi M_2(s)}\int_L \varphi^+(\sigma)\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\mathrm{d}\tau - \frac{L_2(s)}{M_2(s)}\varphi^+(s) + \frac{Q_2(s) - c_1 N_2(s)}{M_2(s)},$$

de care vom ține seama în prima și vom obține o relație care nu conține decît funcția necunoscută $\varphi^+(s)$,

$$\left(L_1 - \frac{L_1 M_1}{M_2}\right)\varphi^+ + \frac{M_1 N_2}{\pi M_2}\int_L \frac{\varphi^+(\sigma)\,\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\mathrm{d}\tau + \frac{N_1}{\pi}\int_L \frac{\varphi^+(\sigma)L_2(\sigma)\alpha_1'(\tau)\mathrm{d}\tau}{[\alpha_1(\tau)-\alpha_1(t)]M_2(\sigma)} +$$

(6)

$$+I_1=Q_1-c_2N_1- \frac{M_1(Q_2 - c_1 N_2)}{M_2} - \frac{N_1}{\pi}\int_L \frac{\alpha_1'(\tau)}{\alpha_1(\tau) - \alpha_1(t)}\,\frac{Q_2(\sigma)-c_1N_2(\sigma)}{M_2(\sigma)}\mathrm{d}\tau,$$

unde s-a introdus notația :

$$I_1 = \frac{N_1(s)}{\pi^2}\int_L \frac{\alpha_1'(\tau)}{\alpha_1(\tau) - \alpha_1(t)}\,\frac{N_2(\sigma)}{M_2(\sigma)}\mathrm{d}\tau\int_L \varphi^+(s_1)\frac{\alpha'(t_1)}{\alpha(t_1) - \alpha(\tau)}\mathrm{d}t_1.$$

Relaţia (6) este o ecuaţie integrală pentru $\varphi^+(s)$ pe care o vom aduce a o formă deja studiată în literatură, punînd în evidenţă partea caracteristică şi cea regulată a ei. Vom analiza din acest punct de vedere fiecare termen în parte. Putem scrie în primul rînd :

$$\int_L \frac{\varphi^+(\sigma)\,\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\,d\tau=\int_L \varphi^+(\sigma)F(\tau,t)\,d\tau+\int_L\frac{\varphi^+(\sigma)}{\tau-t}\,d\tau,$$

unde am notat

$$F(\tau,t)=\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}-\frac{1}{\tau-t}.$$

Cea de-a doua integrală din membrul drept este singulară iar prima are o singularitate slab polară, după cum se poate verifica uşor (vezi [2], pag. 146). În acest mod am pus în evidenţă partea regulată şi cea caracteristică din (6). Al doilea termen din (6) poate fi scris sub forma :

$$\int_L \frac{\varphi^+(\sigma)L_2(\sigma)\,\alpha_1'(\sigma)\,d\tau}{[\alpha_1(\tau)-\alpha_1(t)]\,M_2(\sigma)}=\int_L \varphi^+(\sigma)\frac{L_2(\sigma)F_1(\tau,t)}{M_2(\sigma)}\,d\tau+$$

$$+\int_L \varphi^+(\sigma)F_2(\tau,t)\,d\tau+\frac{L_2(s)}{M_2(s)}\int_L\frac{\varphi^+(\sigma)}{\tau-t}\,d\tau,$$

în care s-au introdus notaţiile :

$$F_1(\tau,t)=\frac{\alpha_1'(\tau)}{\alpha_1(\tau)-\alpha_1(t)}-\frac{1}{\tau-t};\qquad F_2(\tau,t)=\frac{1}{\tau-t}\left[\frac{L_2(\sigma)}{M_2(\sigma)}-\frac{L_2(s)}{M_2(s)}\right].$$

Funcţiile de mai sus sînt de asemenea nuclee slab polare în virtutea demonstraţiei amintite.

Pentru studiul integralei I_1 vom utiliza o formulă de schimbare a ordinii de integrare mai generală decît formula lui Poincaré-Bertrand, şi anume :

$$(7)\quad \int_L\frac{d\tau}{Q(\tau,t)}\int_L\frac{P(\tau,t_1)}{\omega(\tau,t_1)}\,dt_1=-\pi^2\frac{P(t,t)}{Q'_\tau(t,t)\,\omega'_\tau(t,t)}+\int_L dt_1\int_L\frac{P(\tau,t_1)\,d\tau}{Q(\tau,t)\,\omega(\tau,t_1)}.$$

Funcţiile care intră în expresia de mai sus sînt supuse condiţiilor :

1. Funcţia $\omega(\tau,t_1)$ este continuă în raport cu t_1, derivabilă în raport cu τ, această derivată satisfăcînd condiţia lui Hölder în raport cu ambele variabile. În plus $\omega(t_1,t_1)=0$ dar $\omega'_\tau(t_1,t_1)$ nu este nulă.

2. Funcţia $P(\tau,t_1)$ este hölderiană în raport cu ambele variabile.

3. Funcţia $Q(\tau,t)$ are derivată în raport cu t care satisface condiţia lui Hölder iar în punctele în care $Q(\tau,t)=0$, $Q'_t(\tau,t)$ este diferită de zero.

Conform lui I_1,

$$Q(\tau, t) = \frac{\alpha_1(\tau) - \alpha_1(t)}{\alpha_1'(\tau)} \cdot \frac{M_2(\sigma)}{N_2(\sigma)},$$

$$P(\tau, t_1) = \varphi^+(s_1)$$

satisfac condiţiile enumerate mai sus.

Datorită formulei menţionate putem scrie

$$I_1 = -N_1(s) \frac{\varphi^+(s) N_2(s)}{M_2(s)} +$$

$$+ \frac{N_1(s)}{\pi^2} \int_L \varphi^+(s_1) \mathrm{d}t_1 \int_L \frac{\alpha_1'(\tau)\, \alpha'(t_1)\, N_2(\sigma)\, \mathrm{d}\tau}{M_2(\sigma)[\alpha_1(\tau) - \alpha_1(t)]\,[\alpha(t_1) - \alpha(\tau)]}.$$

Pentru a pune în evidenţă partea caracteristică şi cea regulată din I_1, vom folosi expresiile :

$$\alpha_1(\tau) - \alpha_1(t) = (\tau - t)\, s_1(\tau, t),$$

(8)

$$\alpha(t_1) - \alpha(\tau) = (t_1 - \tau)\, s_2(t_1, \tau),$$

unde $s_1(\tau, t)$ şi $s_2(t_1, \tau)$ satisfac condiţia lui Hölder şi în plus $s_1(\tau, \tau) = \alpha_1'(\tau)$, $s_2(t_1, t_1) = \alpha'(t_1)$ (pentru demonstraţie vezi [2] pag. 88).

Cu aceasta I_1 va avea forma :

$$I_1 = -N_1(s) \frac{\varphi^+(s) N_2(s)}{M_2(s)} +$$

$$+ \frac{N_1(s)}{\pi^2} \int_L \frac{\varphi^+(s_1)\, \mathrm{d}t_1}{t_1 - t} \int_L \frac{\alpha_1'(\tau)\, N_2(\sigma)\, \alpha'(t_1)}{M_2(\sigma)\, s_1(\tau, t)\, s_2(t_1, \tau)} \left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{1}{\tau - t_1}\right] \mathrm{d}\tau,$$

în care numitorul s-a descompus în fracţii simple. În virtutea proprietăţilor funcţiilor $s_1(\tau, t)$ şi $s_2(t_1, \tau)$ enunţate mai sus, expresia

$$P(\tau, t, t_1) = \frac{\alpha_1'(\tau)\, N_2(\sigma)\, \alpha'(t_1)}{M_2(\sigma)\, s_1(\tau, t)\, s_2(t_1, \tau)}$$

este o funcţie hölderiană în raport cu toate variabilele şi de aceea integrala

$$I_2(t, t_1) = \int_L P(\tau, t, t_1) \left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{1}{\tau - t_1}\right] \mathrm{d}\tau$$

va fi de asemenea o funcție hölderiană în raport cu t și t_1, fiind o diferență de valori limită ale integralelor de tip Cauchy cu distribuții care satisfac inegalitatea lui Hölder.

Remarcăm faptul că

$$I_2(t, t) = 0.$$

Cu aceasta I_1 va avea expresia :

$$I_1(t) = -\pi^2 \frac{\varphi^+(s) N_2(s)}{M_2(s)} + \int_L \varphi^+(s_1) \frac{I_2(t, t_1)}{t_1 - t} \mathrm{d}t_1.$$

Funcția

$$I_3(t, t_1) = \frac{I_2(t, t_1)}{t_1 - t}$$

este un nucleu slab polar după cum rezultă imediat din proprietățile funcției $I_2(t, t_1)$ și deci termenul $I_1(t)$ va contribui la ecuația integrală cu un termen în $\varphi^+(s)$ și cu un termen integral cu singularitate slab polară.

Ținînd seama de expresiile deduse pentru termenii din membrul stîng al ecuației (6), ea se scrie sub forma :

$$(9) \quad f_1(s)\varphi^+(s) + \frac{f_2(s)}{\pi} \int_L \frac{\varphi^+(\sigma)}{\tau - t} \mathrm{d}\tau + \frac{1}{\pi} \int_L \varphi^+(\sigma) f_3(\tau, t) \mathrm{d}\tau + f_4(s) = 0,$$

în care s-au făcut notațiile :

$$f_1(s) = L_1(s) M_2(s) - L_2(s) M_1(s) - N_1(s) N_2(s),$$

$$f_2(s) = M_1(s) N_2(s) - N_2(s) L_2(s),$$

$$f_3(\tau, t) = M_1(s) N_2(s) F(\tau, t) - N_1(s) M_2(s) \left[\frac{L_2(\sigma)}{M_2(\sigma)} F_1(\tau, t) + F_2(\tau, t)\right] +$$

$$+ \frac{N_1(t) M_2(t)}{\pi} I_3(t, \tau),$$

$$f_4(s) = M_1(s)[Q_2(s) - c_1 N_2(s)] + \frac{N_1(s) M_2(s)}{\pi} \int_L \frac{\alpha_1'(\tau)}{\alpha_1(\tau) - \alpha_1(t)} \frac{Q_2(\sigma) - c_1 N_2(\sigma)}{M_2(\sigma)} \mathrm{d}\tau$$

$$- Q_1(s) M_2(s) + c_2 N_1(s) M_2(s).$$

Ecuația integrală (9) rezolvată pe calea regularizării duce la cunoașterea funcției $\varphi^+(s)$. Prin rezolvarea unei probleme Dirichlet interioare se deduce funcția $\Phi^+(z)$. Cunoașterea funcțiilor $\varphi^+(s)$ și $\psi^+(s)$ permite rezolvarea sistemului (3′) sau (5) în raportul cu $\varphi^{-}(s)$ și $\psi^{-}(s)$, de aici rezultînd funcția $\Phi^{-}(z)$. Funcția $\psi^{+}(s)$ poate fi dedusă și din relația integrală care o leagă de $\varphi^{+}(s)$, cunoscîndu-se astfel funcția $\Phi^{+}(t)$. Cu această distribuție se deduce dintr-o integrală Cauchy funcția $\Phi^{+}(z)$. În felul acesta, pe o cale sau alta, problema este complet rezolvată. Ea are o soluție sau mai multe în funcție de indicele ecuației integrale (9).

Cazul coeficienților reali. Din rezultatele expuse mai sus se observă că metoda pentru rezolvarea problemei cu condiția la limită (3) nu este aplicabilă în cazul în care coeficienții sînt reali. Într-adevăr, în acest caz ecuația (9) se reduce la o identitate, toți coeficienții $f_1(s)$, $f_2(s)$, $f_3(\tau, t)$ și $f_4(s)$ fiind identic nuli după cum se poate verifica ușor din expresiile lor. Această situație are loc deoarece la trecerea de la sistemul (3′) la sistemul (5) s-a efectuat operația de înmulțire a celei de-a doua ecuații din (3′) cu δ_2 respectiv $\delta_1 - \delta_3$, care în acest caz sînt nuli. Rezultă deci că dacă coeficienții relației (3), $A(t)$, $B(t)$ și $C(t)$, sînt reali, raționamentul trebuie început de la sistemul (3′). Pentru cazul coeficienților complecși este totuși avantajos să se introducă sistemul (5) în care nu figurează în aceeași ecuație termeni în ψ^{+} și ψ^{-}, ceea ce simplifică în mod considerabil calculele.

Deși în principiu rezolvarea problemei în cazul coeficienților reali este asemănătoare cu cea expusă în paragraful anterior, o vom relua totuși, deoarece calculele diferă și conduc la o ecuație ce nu se deduce din (9).

În cazul nostru particular sistemul (3′) are forma :

$$\begin{aligned} &\varphi^{+}(1+\gamma_2) + \varphi^{-}(\gamma_1+\gamma_3) = \frac{g+\overline{g}}{2}, \\ (3'') \qquad & \\ &\psi^{+}(1-\gamma_2) + \psi^{-}(\gamma_1-\gamma_3) = \frac{g-\overline{g}}{2i}. \end{aligned}$$

Raționînd ca în cazul precedent, scriem sistemul (3″) într-o altă formă,

$$\varphi^{-} = \frac{1}{\gamma_1+\gamma_3}\,\frac{g+\overline{g}}{2i} - \frac{1+\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_3}\,\varphi^{+}\,; - \frac{1-\gamma_2}{\pi}\int_L \frac{\varphi^{+}(\sigma)\,\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\,d\tau +$$

$$+ \frac{\gamma_1-\gamma_3}{\pi}\int_L \frac{\varphi^{-}(\sigma)\,\alpha_1'(\tau)}{\alpha_1(\tau)-\alpha_1(t)}\,d\tau = \frac{g-\overline{g}}{2i} + c,$$

în care s-au folosit relațiile integrale (4) și (4′) deduse anterior, constanta C înglobînd constantele C_1 și C_2.

Dacă în ultima ecuație se ține seama de precedenta, se obține o ecuație integrală pentru funcția $\varphi^{+}(s)$. Calculele sînt imediate deoarece nu mai este necesară formula de inversare a ordinii de integrare. Pentru a ușura scrierea vom face notațiile

$$M_3 = \gamma_1 + \gamma_3\,; \qquad M_4 = 1 + \gamma_2$$

$$N_3 = \gamma_1 - \gamma_3\,; \qquad N_4 = 1 - \gamma_2$$

după care ecuaţia amintită se scrie :

$$
\begin{aligned}
&\frac{N_4(s)}{\pi}\int_L \frac{\varphi^+(\sigma)\,\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\,\mathrm{d}\tau + \frac{N_3(s)}{\pi}\int_L \frac{M_4(\sigma)}{M_3(\sigma)}\,\frac{\varphi^+(\sigma)\,\alpha_1'(\tau)}{\alpha_1(\tau)-\alpha_1(t)}\,\mathrm{d}\tau = \\
(10)\quad &= \frac{N_3(s)}{2\pi}\int_L \frac{g(\tau)+\overline{g(\tau)}}{M_3(\sigma)}\,\frac{\alpha_1'(\tau)}{\alpha_1(\tau)-\alpha_1(t)}\,\mathrm{d}\tau - \frac{g(t)-\overline{g(t)}}{2\mathrm{i}} + c.
\end{aligned}
$$

Urmînd calea din cazul precedent vom pune integralele din membrul stîng al relaţiei de mai sus sub o formă care să evidenţieze părţile caracteristice şi cele regulate. Prima integrală a ecuaţiei (10) se scrie sub forma :

$$\int_L \frac{\varphi^+(\sigma)\,\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\,\mathrm{d}\tau = \int_L \varphi^+(\sigma)\,F(\tau,t)\,\mathrm{d}\tau + \int_L \frac{\varphi^+(\sigma)\,\mathrm{d}\tau}{\tau - t},$$

în care funcţia $F(\tau, t)$ a fost deja folosită în paragraful anterior. A doua integrală se scrie :

$$
\begin{aligned}
E &= \int_L \frac{M_4(\sigma)}{M_3(\sigma)}\,\frac{\varphi^+(\sigma)\,\alpha_1'(\tau)}{\alpha_1(\tau)-\alpha_1(t)}\,\mathrm{d}\tau = \\
&= \int_L \varphi^+(\sigma)\,\frac{M_4(\sigma)}{M_3(\sigma)}\,F_1(\tau,t)\,\mathrm{d}\tau + \int_L \frac{M_4(\sigma)}{M_3(\sigma)}\,\frac{\varphi^+(\sigma)}{\tau - t}\,\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}
$$

în care $F_1(\tau, t)$ a fost de asemenea introdusă în paragraful precedent. Integralele de mai sus nu sînt încă aduse la forma propusă; introducem pentru aceasta notaţiile :

$$F_3(\tau,t) = \frac{1}{\tau - t}\left[\frac{M_4(\sigma)}{M_3(\sigma)} - \frac{M_4(s)}{M_3(s)}\right];\ F_4(\tau,t) = \frac{M_2(\sigma)}{M_1(\sigma)}\,F_1(\tau,t) + F_3(\tau,t)$$

după care E are succesiv expresiile :

$$
\begin{aligned}
E &= \int_L \varphi^+(\sigma)\frac{M_4(\sigma)}{M_3(\sigma)}\,F_1(\tau,t)\,\mathrm{d}\tau + \int_L \varphi^+(\sigma)\,F_3(\tau,t)\,\mathrm{d}\tau + \\
&+ \frac{M_4(s)}{M_3(s)}\int_L \frac{\varphi^+(\sigma)}{\tau - t}\,\mathrm{d}\tau = \int_L \varphi^+(\sigma)\,F_4(\tau,t)\,\mathrm{d}\tau + \frac{M_4(s)}{M_3(s)}\int_L \frac{\varphi^+(\sigma)}{\tau - t}\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
$$

Funcţiile $F_3(\tau, t)$ şi $F_4(\tau, t)$ sînt nuclee slab polare în virtutea celor deja arătate.

Avînd în vedere relaţiile de mai sus, ecuaţia integrală (10) se scrie

$$\frac{h_2(s)}{\pi}\int_L \frac{\varphi^+(\sigma)}{\tau - t}\,\mathrm{d}\tau + \int_L \varphi^+(\sigma)\,h_3(\tau, t)\,\mathrm{d}\tau = h_4(s), \tag{11}$$

unde coeficienţii au expresiile :

$$h_2(s) = N_4(s) + \frac{N_3(s)\,M_4(s)}{M_3(s)},$$

$$\pi h_3(\tau, t) = N_4(s)\,F(\tau, t) + N_3(s)\,F_4(\tau, t),$$

$$h_4(s) = -\frac{g(t) - \overline{g(t)}}{2\mathrm{i}} - c + \frac{N_3(s)}{2\pi}\int_L \frac{g(\tau) + \overline{g(\tau)}}{M_3(\sigma)}\;\frac{\alpha_1'(\tau)}{\alpha_1(\tau) - \alpha_1(t)}\,\mathrm{d}\tau.$$

Din ecuaţia integrală (11) se deduce funcţia necunoscută φ^{+} (s şi de aici pe calea expusă la problema precedentă se găseşte funcţia olomorfă pe porţiuni $\Phi(z)$.

PARTEA A II-A

CAZURI PARTICULARE REZOLVABILE ŞI PRIN ALTE METODE

Aşa cum am arătat în introducere, în unele cazuri particulare este indicat să părăsim metoda generală de rezolvare a problemei întrucît soluţiile pot fi obţinute mai simplu pe alte căi.Este chiar indicat să căutăm cazurile particulare în care problema poate fi soluţionată direct evitînd dificultăţile pe care le implică rezolvarea ecuaţiilor integrale singulare din cazul general. Există o clasă de probleme la limită, care, deşi se rezolvă cu ajutorul ecuaţiilor integrale, evită reprezentarea conformă a domeniului mărginit de curba (L) pe interiorul cercului unitar, ceea ce reprezintă de asemenea o simplificare.

În această parte a lucrării ne vom ocupa cu sistematizarea acestor cazuri particulare, expunerea metodelor de rezolvare şi compararea rezultatelor acolo unde metodele paralele permit acest lucru.

1. *Cazul conturului circular şi coeficienţii condiţiei la limită constanţi, reali sau complecşi.* În acest caz, datorită faptului că (L) este cercul unitar (C) al planului z, transformarea conformă nu mai are sens, iar coeficienţii constanţi permit rezolvarea problemei fără ecuaţii integrale.

Vom determina deci funcţia olomorfă pe porţiuni $\Phi(z)$ cu linia de salt cercul unitar (C) al planului z pe care valorile limită ale funcţiei din cele două domenii în care curba împarte planul satisfac relaţia :

$$\Phi^+(t) + A\Phi^-(t) + B\,\overline{\Phi^+(t)} + C\,\overline{\Phi^-(t)} = g(t), \tag{12}$$

în care A, B și C sînt constante. Pentru a nu lucra cu funcţiile conjugate, vom introduce funcţia olomorfă pe porţiuni [1]

$$\Phi_*(z) = \overline{\Phi\left(\frac{1}{\bar z}\right)},$$

care are proprietatea că valorile limită a ramurii ei din D^+ sînt egale cu conjugatele valorilor limită din D^- a funcţiei $\Phi(z)$ şi invers. Condiţia la limită (12) se scrie atunci

$$[\Phi^+(t) + C\Phi_*^+(t)] + [A\Phi^-(t) + B\Phi_*^-(t)] = g(t).$$

Funcţia $g(t)$ care în conformitate cu ipotezele problemei satisface condiţia lui Hölder, poate fi scrisă :

$$g(t) = g^+(t) - g^-(t),$$

unde

$$g^+(t) = \frac{g(t)}{2} + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{g(\tau)}{\tau - t}\,\mathrm{d}\tau,$$

$$g^-(t) = -\frac{g(t)}{2} + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{g(\tau)}{\tau - t}\,\mathrm{d}\tau.$$

Condiţia la limită se poate scrie deci sub forma :

$$[\Phi^+(t) + C\,\Phi_*^+(t)] + [A\Phi^-(t) + B\Phi_*^-(t)] = g^+(t) - g^-(t),$$

sau

$$[\Phi^+(t) + C\Phi_*^+(t) - g^+(t)] = -[A\Phi^-(t) + B\Phi_*^-(t) + g^-(t)].$$

Deoarece mărimile A, B, C sînt constante, membrul stîng şi cel drept al egalităţii precedente reprezintă valorile limită pe circumferinţa cercului unitar a două funcţii olomorfe diferite în D^+, respectiv D^-. În consecinţă egalitatea nu poate avea loc decît dacă ambii membri sînt egali cu o constantă (pe care o luăm egală cu zero) dacă ne limităm la cazul cînd $\Phi(z)$ are ordin nul la infinit. Se pot scrie deci relaţiile :

$$\Phi^+(z) + C\,\Phi_x^+(z) = g^+(z) \tag{12_1}$$

$$A\Phi^-(z) + B\,\Phi_*^-(z) = -g^-(z) \tag{12_2}$$

în care funcţiile analitice $g^+(z)$ și $g^-(z)$ sînt definite respectiv în domeniile D^+ și D^- de integrala Cauchy

$$g(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{g(\tau)}{\tau - z}\,\mathrm{d}\tau.$$

Ne vom servi de sistemul de relaţii (12_1) şi (12_2) pentru determinare funcţiilor $\Phi^+(z)$ şi $\Phi^-(z)$. Remarcăm în acest scop că din definiţia funcţie $\Phi_*(z)$ rezultă egalităţile :

$$[\Phi_*^+(z)]_* = \Phi^-(z) ; \qquad [\Phi_*^-(z)]_* = \Phi^+(z).$$

Aplicînd relaţiei (12_1) operaţia $[\quad]_*$, obţinem :

$$\Phi_*^-(z) = g_*^-(z) - C\Phi^-(z),$$

pe care o introducem în relaţia (12_2) din care deducem :

$$(13_1) \qquad \Phi^-(z) = -\frac{1}{A - BC}[Bg_*^-(z) + g^-(z)].$$

În mod asemănător, din (12_2) după aplicarea operaţiei $[\quad]_*$ se găseşte relaţia :

$$\Phi_*^+(z) = -\frac{1}{A}g_*^+(z) - \frac{B}{A}\Phi^+(z),$$

iar după introducerea în (12_1), relaţia :

$$(13_2) \qquad \Phi^+(z) = \frac{1}{A - BC}[Ag^+(z) + Cg_*^+(z)].$$

Egalităţile (13_1) şi (13_2) constituie soluţia problemei. Se poate arăta uşor că ele verifică relaţia (12).

Vom rezolva acum aceeaşi problemă prin metoda ecuaţiilor integrale cu scopul de a compara cele două metode şi de a demonstra coincidenţa soluţiilor. Pentru a nu complica în mod inutil calculele ne vom ocupa de cazul coeficienţilor reali. Partea reală a soluţiei (13_2) va coincide cu soluţia ecuaţiei (11) cînd coeficienţii condiţiei la limită (3) sînt constanţi şi reali iar curba de integrare este cercul unitar.

Coeficienţii ecuaţiei (11) se scriu imediat

$$h_2(s) = \frac{M_3N_4 + N_3M_4}{M_3} = \frac{2(A - BC)}{A + C},$$

$$h_3(\tau, t) \equiv 0,$$

$$h_4(s) = -\frac{g(t) - \overline{g(t)}}{2i} + \frac{A - C}{2\pi(A + C)}\int_C \frac{g(\tau) + \overline{g(\tau)}}{\tau - t} - C_0.$$

Ecuaţia (11) va avea deci forma :

$$(11') \qquad \frac{2(A - BC)}{\pi(A + C)}\int_C \frac{\varphi^+(\sigma)\,\mathrm{d}\tau}{\tau - t} = -\frac{g(t) - \overline{g(t)}}{2i} +$$

$$+ \frac{A - C}{2\pi(A + C)}\int_C \frac{g(\tau) + \overline{g(\tau)}}{\tau - t}\,\mathrm{d}\tau,$$

unde s-a neglijat constanta C_0, deoarece o constantă aditivă a fost neglijată şi la deducerea lui $\Phi(z)$. Sub forma (11′) ecuaţia se rezolvă imediat cu ajutorul formulei de inversare a integralei de tip Cauchy pe o curbă, deducînd direct expresia funcţiei necunoscute $\varphi^+(s)$. Se găseşte :

$$\text{(14)}\qquad \frac{2(A-BC)}{A+C}\,\varphi^+(s)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C\frac{g(\tau)-\overline{g(\tau)}}{\tau-t}\,\mathrm{d}\tau-$$

$$-\frac{A-C}{2\pi^2(A+C)}\int_C\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau_1-t}\int_C\frac{g(\tau)+\overline{g(\tau)}}{\tau-\tau_1}\,\mathrm{d}\tau.$$

Ultimul termen al relaţiei de mai sus se calculează folosind formula de inversare a integralei duble a lui Poincaré-Bertrand. Obţinem :

$$\frac{A-C}{2\pi^2(A+C)}\int_C\frac{\mathrm{d}\tau_1}{\tau_1-t}\int_C\frac{g(\tau)+\overline{g(\tau)}}{\tau-\tau_1}\,\mathrm{d}\tau=-\frac{A-C}{A+C}\,\frac{g(t)+\overline{g(t)}}{2}+$$

$$+\frac{A-C}{2\pi^2(A+C)}\int_C\left[g(\tau)+\overline{g(\tau)}\right]\mathrm{d}\tau\int_C\frac{\mathrm{d}\tau}{(\tau_1-t)(\tau-\tau_1)}.$$

După cum se poate verifica imediat, integrala din membrul drept al relaţiei precedente este nulă deoarece

$$\int_C\frac{\mathrm{d}\tau_1}{(\tau_1-t)(\tau-\tau_1)}=0$$

iar relaţia (11) capătă forma :

$$2(A-BC)\,\varphi^+(s)=(A-C)\,\frac{g(t)+\overline{g(t)}}{2}+\frac{A+C}{2\pi \mathrm{i}}\int_C\frac{g(\tau)-\overline{g(\tau)}}{\tau-t}\,\mathrm{d}\tau,$$

pe care o vom scrie sub o formă mai convenabilă pentru calculele ulterioare şi anume :

$$\text{(15)}\qquad 2(A-BC)\,\varphi^+(s)=A\left[\frac{g(t)}{2}+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C\frac{g(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{\tau-t}\right]-A\left[-\frac{\overline{g(t)}}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C\frac{\overline{g(\tau)}}{\tau-t}\,\mathrm{d}\tau\right]+C\left[-\frac{g(t)}{2}+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C\frac{g(\tau)}{\tau-t}\,\mathrm{d}\tau\right]-C\left[\frac{\overline{g(t)}}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C\frac{\overline{g(\tau)}\,\mathrm{d}\tau}{\tau-t}\right].$$

Ţinînd seama de formulele lui Plemelj se vede că prima şi a treia paranteză dreaptă din relaţia precedentă sînt tocmai funcţiile $g^+(t)$ respectiv $g^-(t)$ deja utilizate mai sus.

Funcţia $\overline{g(t)}$ îndeplineşte de asemenea condiţia lui Hölder cu acelaşi indice ca $g(t)$. Pentru ea vor fi valabile relaţii de aceeaşi formă

$$\frac{\overline{g(t)}}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{g(\tau)}}{\tau - t}\,d\tau = [\overline{g(t)}]^+,$$

$$-\frac{\overline{g(t)}}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{g(\tau)}}{\tau - t}\,d\tau = [\overline{g(t)}]^-.$$

Cu acestea relaţia (15) se scrie

$$2(A - BC)\,\varphi^+(s) = Ag^+(t) - A[\overline{g(t)}]^- + Cg^-(t) - C[g(t)]^+. \tag{16}$$

Pentru ceea ce ne interesează avem nevoie să exprimăm funcţiile $[\overline{g(t)}]^+$ şi $[\overline{g(t)}]^-$ prin intermediul funcţiilor $\overline{g^+(t)}$ şi $\overline{g^-(t)}$. Pentru aceasta vom ţine seama că aceste funcţii sînt date pe cercul unitar. Vom porni de la expresia lui $\overline{g^+(t)}$

$$\overline{g^+(t)} = \frac{\overline{g(t)}}{2} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{g(\tau)}}{\bar{\tau} - \bar{t}}\,\overline{d\tau}.$$

Pe cercul unitar pot fi scrise relaţiile :

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\tau}; \quad \bar{t} = \frac{1}{t}; \quad d\bar{\tau} = -\,ie^{-i\theta}\,d\theta; \quad \overline{d\tau} = -\frac{d\tau}{\tau^2}$$

şi de aceea relaţia pentru $\overline{g^+(t)}$ devine :

$$\overline{g^+(t)} = \frac{\overline{g(t)}}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{g(\tau)}}{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{t}}\,\frac{d\tau}{\tau^2} = \frac{\overline{g(t)}}{2} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{g(\tau)}}{\tau - t}\,d\tau + k_1.$$

Din termenii extremi ai egalităţii precedente se deduce :

$$\overline{g^+(t)} = -\,[\overline{g(t)}]^- + k_1.$$

Într-un mod asemănător, plecînd de la relaţia pentru $\overline{g^-(t)}$, obţinem :

$$\overline{g^-(t)} = -\,[\overline{g(t)}]^+ + k_2.$$

Vom folosi ultimele două egalităţi după neglijarea constantelor k_1 k_2 în relaţia (16) care va căpăta forma :

7) $$\varphi^+(s) = \frac{1}{A - BC}\left[A\,\frac{g^+(t) + \overline{g^+(t)}}{2} + C\,\frac{g^-(t) + \overline{g^-(t)}}{2}\right]$$

care este soluţia căutată. Coincidenţa cu partea reală a lui (13_2) luată limită pe cercul unitar devine evidentă dacă se ţine seama în (13_2) de laţia :

$$g_*^+(t) = \overline{g^-(t)}.$$

Se vede din cele de mai sus că în cazul particular în care (L) este n cerc şi coeficienţii condiţiei la limită sînt constanţi, procedeul direct onduce mult mai uşor la rezultat decît metoda generală.

2. *Cazul coeficienţilor constanţi şi reali, curba* (L) *oarecare.* În cazul articular la care ne oprim, revenim la o curbă oarecare (L) pe care este ată condiţia la limită şi impunem în plus coeficienţilor condiţia de a fi eali. Ca diferenţă de cazul studiat în prima parte a acestei lucrări, vom onsidera curba (L) dată prin ecuaţia

$$\overline{\tau} = \beta(\tau)$$

u $\tau \in L$, unde am presupus că L este o curbă analitică. Această modificare n punerea problemei, evită reprezentarea conformă a domeniului D^+ pe nteriorul cercului unitar şi reduce problema la rezolvarea unei ecuaţii redholm.

Vom considera condiţia

$$\Phi^+(t) + A\Phi^-(t) + B\overline{\Phi^+(t)} + C\overline{\Phi^-(t)} = g(t),$$

ată pe curba simplă, închisă şi netedă (L), coeficienţii A, B şi C fiind onstante reale. Condiţia de mai sus poate fi scrisă evident şi sub forma :

$$(1 - B)\,\Phi^+ - (C - A)\,\Phi^- = g(t) - 2B\varphi^+ - 2C\varphi^-.$$

ntroducem funcţia olomorfă pe porţiuni

$$F(z) = \begin{cases} (1 - B)\,\Phi(z) & \text{în } D^+ \\ (C - A)\,\Phi(z) & \text{în } D^- \end{cases}$$

upă care condiţia precedentă devine :

$$F^+(t) - F^-(t) = g(t) - 2B\varphi^+(s) - 2C\varphi^-(s).$$

Funcţia $F(z)$ va fi dedusă din integrala Cauchy

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{\tau - z}\,d\tau - \frac{B}{\pi i}\int_L \frac{\varphi^+(\sigma)}{\tau - z}\,d\tau - \frac{C}{\pi i}\int_L \frac{\varphi^-(\sigma)}{\tau - z}\,d\tau.$$

Vom căuta să deducem o ecuaţie integrală pentru funcţia $\varphi^+(s)$. Pentr aceasta vom trece la limită relaţia precedentă din D^+ pe (L) şi vom reţin numai partea reală a ei. După cîteva calcule simple se deduce :

$$\varphi^+(s) = \frac{g^+(t) + \overline{g^+(t)}}{2} - \frac{B}{\pi i}\int_L \varphi^+(\sigma)\left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{\beta'(\tau)}{\beta(\tau) - \beta(t)}\right] d\tau - C\varphi^-(s) -$$

$$-\frac{C}{2\pi i}\int_L \varphi^-(\sigma)\left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{\beta'(\tau)}{\beta(\tau) - \beta(t)}\right] d\tau,$$

în care funcţia $\overline{\tau} = \beta(\tau)$ este ecuaţia complexă a conturului (L). Pe d altă parte, separînd partea reală în ecuaţia iniţială se deduce a dou ecuaţie între φ^+ şi φ^-

$$\varphi^-(s) = \frac{g(t) + \overline{g(t)}}{2(A + C)} - \frac{1 + B}{A + C}\,\varphi^+(s).$$

Eliminînd acum pe φ^- între cele două relaţii, se obţine ecuaţia integral

$$(A - BC)\,\varphi^+(s) + \frac{AB - C}{2\pi i}\int_L \varphi^+(\sigma)\left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{\beta'(\tau)}{\beta(\tau) - \beta(t)}\right] d\tau =$$

$$= \frac{A + C}{2}\left[g^+(t) + \overline{g^+(t)}\right] -$$

$$- C\left\{\frac{g(t) + \overline{g(t)}}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[g(\tau) + \overline{g(\tau)}\right]\left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{\beta'(\tau)}{\beta(\tau) - \beta(t)}\right] d\tau\right\},$$

care după introducerea notaţiilor

$$G_1 = \frac{AB - C}{A - BC},$$

$$G_2(s) = \frac{A + C}{2(A - BC)}\left[g^+(t) + \overline{g^+(t)}\right] -$$

$$- \frac{C}{A - BC}\left\{\frac{g(t) + \overline{g(t)}}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[g(\tau) + \overline{g(\tau)}\right]\left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{\beta'(\tau)}{\beta(\tau) - \beta(t)}\right] d\tau\right\},$$

apătă forma :

$$\text{18)}\qquad \varphi^+(s) + \frac{G_1}{2\pi i}\int_L \varphi^+(\tau)\left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{\beta'(\tau)}{\beta(\tau) - \beta(t)}\right] d\tau = G_2(s),$$

cărei rezolvare ne dă soluţia problemei. Din forma nucleului ecuaţiei le mai sus se vede că el este slab polar (fiind de aceeaşi formă cu nucleul (τ, t) despre care am arătat acest lucru).

Pentru a putea face comparaţie cu rezultatele anterioare, să aplicăm netoda în cazul în care conturul (L) este cercul unitar. Ecuaţia comlexă a cercului unitar fiind

$$\tau\bar{\tau} = 1$$

uncţia $\beta(\tau)$ are expresia :

$$\beta(\tau) = \frac{1}{\tau}\cdot$$

Nucleul integralei din ecuaţia (13) devine în acest caz :

$$\frac{1}{\tau - t} - \frac{\beta'(\tau)}{\beta(\tau) - \beta(t)} = \frac{1}{\tau - t} - \frac{t}{\tau(\tau - t)} = \frac{1}{\tau - t} - \left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{1}{\tau}\right] = \frac{1}{\tau},$$

iar integralele din ambii membri ai ecuaţiei (18) se reduc la constante. Soluţia este :

$$\varphi^+(s) = \frac{1}{2(A - BC)}\{(A + C)[g^+(t) + \overline{g^+(t)}] - C[g^-(t) + \overline{g^-(t)}]\},$$

în care s-au neglijat constantele aditive.

Pentru a evidenţia coincidenţa cu relaţia (17) să punem :

$$g(t) = g^+(t) - g^-(t)\,; \qquad \overline{g(t)} = [\overline{g(t)}]^+ - [\overline{g(t)}]^-$$

şi avînd în vedere relaţiile deja deduse pe circumferinţă

$$[\overline{g(t)}]^+ = -\overline{g^-(t)}\,; \qquad [\overline{g(t)}]^- = -\overline{g^+(t)},$$

soluţia devine

$$\varphi^+(s) = \frac{1}{2(A - BC)}\{A[g^+(t) + \overline{g^+(t)}] + C[g^-(t) + \overline{g^-(t)}]\},$$

identică cu (17).

Observaţie. Necesitatea ca coeficienţii A, B, C să fie reali a apăr la deducerea celei de-a doua relaţii între φ^+ şi φ^-. Dacă însă doi din aceş coeficienţi sînt nuli (de ex. A şi B), se poate deduce de la început o relaţi pentru una din aceste funcţii, iar coeficientul rămas poate fi comple Vom exemplifica pentru condiţia la limită pe (L)

$$\Phi^+(t) + C\overline{\Phi^-(t)} = g(t). \tag{19}$$

Condiţia precedentă este echivalentă cu :

$$\overline{\Phi^+(t)} + \overline{C}\Phi^-(t) = \overline{g(t)},$$

care poate fi scrisă şi sub forma :

$$\Phi^+(t) - \overline{C}\Phi^-(t) = -\overline{g(t)} + 2\varphi^+(s).$$

Introducînd acum funcţia olomorfă pe porţiuni

$$F(z) = \begin{cases} \Phi^+(z) & \text{în } D^+ \\ \overline{C}\Phi^-(z) & \text{în } D^- \end{cases}$$

relaţia precedentă ne dă posibilitatea să scriem :

$$F(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{g(\tau)}}{\tau - z}\,d\tau + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi^+(\sigma)}{\tau - z}\,d\tau.$$

Pentru a deduce ecuaţia integrală căutată vom trece la limită relaţia precedentă pe (L) din D^+ şi vom lua numai partea reală. Se deduce :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi^+(\sigma)\left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{\beta'(\tau)}{\beta(\tau) - \beta(t)}\right]d\tau = \operatorname{Re}\,[\overline{g(t)}]^+, \tag{18'}$$

care este un caz particular al ecuaţiei (18).

Procedeul nu poate fi aplicat cînd curba (L) este un cerc. În acest caz funcţia $\overline{\Phi^-(t)}$ ia aceleaşi valori pe circumferinţă ca şi $\Phi_*^+(t)$ şi membrul stîng al relaţiei (19) reprezintă limita unei funcţii olomorfe din interior şi care nu poate fi egală cu $g(t)$ supusă singurei condiţii de a îndeplini inegalitatea lui Hölder. Dacă funcţia $g(t)$ este limita unei funcţii olomorfe din interior, atunci în relaţia (19) apar două funcţii necunoscute $\Phi^+(t)$ şi $\Phi_*^+(t)$ şi problema nu poate fi rezolvată.

3. *Cazul cînd* (L) *este oarecare*, $A = B = 0$ *și* C *variabil*. Condiția

$$\Phi^+(t) + C(t)\,\overline{\Phi^-(t)} = g(t) \tag{20}$$

în care $C(t)$ este o funcție hölderiană care nu se anulează pe (L), poate fi scrisă ca și mai sus sub forma :

$$\Phi^+(t) - \overline{C(t)}\,\Phi^-(t) = 2\varphi^+(s) - \overline{g(t)}.$$

Pentru rezolvarea acestei probleme folosim proprietatea că orice funcție hölderiană care nu se anulează pe (L), poate fi scrisă ca raportul a două funcții de, asemenea hölderiene, una extensibilă la D^+ și cealaltă la D^-

$$\overline{C(t)} = \frac{X^-(t)}{X^+(t)}.$$

Afirmația se justifică observînd că $X^+(t)$ și $X^-(t)$ sînt soluțiile canonice ale problemei lui Riemann

$$X^+(t) = \frac{1}{\overline{C(t)}}\,X^-(t).$$

Condiția la limită se poate scrie :

$$X^+(t)\,\Phi^+(t) - X^-(t)\,\Phi^-(t) = 2\varphi^+(t)\,X^+(t) - \overline{g(t)}\,X^+(t).$$

Vom introduce funcția olomorfă pe porțiuni :

$$F(z) = \begin{cases} X^+(z)\,\Phi^+(z) \\ X^-(z)\,\Phi^-(z) \end{cases}$$

care în conformitate cu relația precedentă are expresia :

$$F(z) = \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{X^+(\tau)\,\varphi^+(\sigma)}{\tau - z}\,\mathrm{d}\tau - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{\overline{g(\tau)}\,X^+(\sigma)}{\tau - z}\,\mathrm{d}\tau.$$

Efectuînd trecerea la limită $z \to t$ $(t \in L\,;\ z \in D^+)$, se obține după operații elementare

$$\mathrm{i}\psi^+(s) = \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{X^+(\tau)}{X^+(t)}\,\frac{\varphi^+(\sigma)}{\tau - t}\,\mathrm{d}\tau - \frac{1}{X^+(t)}\,[g(t)\,X^+(t)]^+, \tag{21}$$

unde s-a notat

$$[\overline{g(t)}\,X^+(t)]^+ = \frac{\overline{g(t)}\,X^+(t)}{2} + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\overline{g(\tau)}\,X^+(\tau)}{\tau - t}\,\mathrm{d}\tau.$$

Separînd în relaţia (21) partea reală, se obţine ecuaţia integrală :

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \varphi^+(\tau)\left[\frac{X^+(\tau)}{X^+(t)}\,\frac{1}{\tau - t} - \frac{\overline{X^+(\tau)}}{\overline{X^+(t)}}\,\frac{\beta'(\tau)}{\beta(\tau) - \beta(t)}\right]\mathrm{d}\tau =$$

$$= \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{X^+(t)}\,[\overline{g(t)}\,X^+(t)]^+\right\},$$

despre care vom arăta că este de tip Fredholm. În adevăr,

$$J(\tau, t) = \frac{X^+(\tau)}{X^+(t)}\,\frac{1}{\tau - t} - \frac{\overline{X^+(\tau)}}{\overline{X^+(t)}}\,\frac{\beta'(\tau)}{\beta(\tau) - \beta(t)}$$

poate fi scris succesiv

$$J(\tau, t) = \frac{\overline{X^+(\tau)}}{X^+(t)}\left[\frac{X^+(\tau)}{\overline{X^+(\tau)}}\,\frac{1}{\tau - t} - \frac{X^+(t)}{\overline{X^+(t)}}\,\frac{\beta'(\tau)}{\beta(\tau) - \beta(t)}\right]$$

$$J(\tau, t) = \frac{\overline{X^+(\tau)}}{X^+(t)}\left\{\frac{X^+(t)}{\overline{X^+(t)}}\left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{\beta'(\tau)}{\beta(\tau) - \beta(t)}\right] + \frac{1}{\tau - t}\left[\frac{X^+(\tau)}{\overline{X^+(\tau)}} - \frac{X^+(t)}{\overline{X^+(t)}}\right]\right\}.$$

Din ultima egalitate se vede că $J(\tau, t)$ este slab polar după un raţionament utilizat pînă acum de multe ori.

În cele de mai sus am rezolvat în cazul general problema la limită care generalizează liniar problema lui Riemann şi am atras atenţia asupra unor cazuri particulare în care este recomandabil să se utilizeze şi alte metode mai directe. Rezolvarea problemei în cazul general a fost posibilă deoarece condiţia la limită considerată introduce liniar tot necunoscutele $\varphi^+(s)$, $\varphi^-(s)$, $\psi^+(s)$, şi $\psi^-(s)$ iar acestea nu sînt independente după cum s-a arătat.

Punctul de vedere adoptat în rezolvarea problemei poate fi urmărit şi în rezolvarea unor probleme la limită similare în clasa funcţiilor analitice generalizate, chestiune de care ne vom ocupa în altă lucrare.

Primită la redacţie la 15 ianuarie 1969

Institutul de mecanica fluidelor al Academiei
Republicii Socialiste România

LE PROBLÈME DE RIEMANN GÉNÉRALISÉ DANS LA CLASSE DES FONCTIONS ANALYTIQUES

(RÉSUMÉ)

On propose une solution pour le problème de Riemann généralisé, dans lequel interviennent les valeurs limites de $\Phi(z)$ sur la ligne de saut L, $\Phi^{+}(t)$, $\Phi^{-}(t)$ et leurs conjugués en combinaison linéaire à coefficients hölderiens sur L. Toutes les considérations sont limitées an cas d'un domaine simplement connexe, limité par une courbe simple, fermée, satisfaisant aux conditions de Liapounoff ; les coefficients sont sans singularités.

Dans les conditions ci-dessus le problème est réduit à l'intégration d'une équation singulière à noyau du type de Cauchy qui peut être amenée à une équation de Fredholm.

L'intérêt de ces problèmes est déterminé par la généralisation mathématique qu'ils représentent pour les problèmes de Riemann et Hilbert dans les domaines simplement connexes et pour leurs applications à l'étude de divers phénomènes physiques rancontrés fréquemment en pratique. En particulier, ils s'appliquent dans l'étude du déplacement d'un fluide par un autre dans un milieu poreux homogène.

BIBLIOGRAFIE

1. Ф. Д. ГАХОВ, *Краевые задачи*. Издание второе. Москва 1963.
2. N. I. MUSHELIȘVILI, *Ecuații integrale singulare*. Litografiat.
3. V. IONESCU și C. COZMA, *Dislocuirea integrală a fluidelor în medii poroase omogene*. St. cerc. mec. apl., **27**, *6* (1968).
4. Л. Г. МИХАЙЛОВ, *Точные теоремы о разрешимости задач сопряжения с производными*. Сборник ,,Исследования по краевым задачам''.
5. Г. С. БАРХИН и З. Д. УСМАНОВ, *Задача Гильберта для кусочно-регулярной обобщенной аналитической функции*. Сборник ,,Исследования по краевым задачам''.
6. CAIUS IACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*. Bucarest – Paris, 1959.

ASUPRA REPREZENTĂRII ECUAȚIILOR CU PATRU VARIABILE PRIN NOMOGRAME COMPUSE CU PUNCTE ALINIATE (I)[1]

DE

MARIA MIHOC

(Cluj)

În lucrare se cercetează condiţiile în care ecuaţia cu patru variabile (1) se poate reprezenta cu ajutorul unei nomograme compuse formate din două nomograme cu puncte aliniate cu scări regulate şi cu o scară comună.

În această lucrare vom cerceta reprezentarea ecuaţiilor cu patru variabile cu ajutorul nomogramelor compuse formate din două nomograme cu puncte aliniate cu scări rectilinii regulate, avînd o scară comună.

Fie ecuaţia cu patru variabile de forma :

$$\begin{aligned} & A_0 xyz + A_1 xyu + A_2 xzu + A_3 yzu + B_0 xy + B_1 xz + \\ (1) \qquad & + B_2 xu + B_3 yz + B_4 yu + B_5 zu + C_0 x + C_1 y + \\ & + C_2 z + C_3 u + D_0 = 0. \end{aligned}$$

Se caută în ce condiţii ecuaţia (1) se poate reprezenta cu ajutorul unei nomograme compuse formate din două nomograme cu puncte aliniate, cu scări rectilinii regulate avînd o scară comună.

---

[1] Lucrarea a fost comunicată la Colocviul tinerilor matematicieni de la Institutul de calcul, Cluj, 9 mai 1968.

ST. CERCET. MAT., TOM. 21, Nr. 9, P. 1393-1402, BUCUREŞTI, 1969

În acest caz ecuațiile lui Soreau sînt următoarele :

$$\begin{vmatrix} a'w + b' & c'w + d' & 1 \\ e'x + f' & g'x + h' & 1 \\ i'y + j' & k'y + l' & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

$$\begin{vmatrix} a'w + b' & c'w + d' & 1 \\ m'z + n' & p'z + r' & 1 \\ s'u + t' & \varepsilon'u + \theta' & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

Cu ajutorul unei transformări afine corespunzătoare, ecuațiile (2), (3) se pot aduce la forma :

$$\begin{vmatrix} \rho w + \varepsilon & 0 & 1 \\ 0 & \nu x + a & 1 \\ by + c & dy + e & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

$$\begin{vmatrix} \rho w + \varepsilon & 0 & 1 \\ fz + g & \mu z + h & 1 \\ iu + j & lu + m & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

unde a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,l,m, ρ, ε, ν, μ sînt parametrii scărilor nomogramei. Pentru simplificarea calculelor să considerăm $\nu = \mu = 1$ (cel puțin un parametru din fiecare pereche ν, a și μ, h este diferit de zero).

Dezvoltînd în acest caz determinanții din membrul stîng al ecuațiilor (4) respectiv (5) obținem :

$$\begin{aligned} & bxyz - blxyu - (i - fl)\,xzu + d\,(i - fl)\,yzu + b\,(h - m)\,xy + \\ & + [c - (j - fm)]\,xz - [-cl + (hi - lg)]\,xu + [ab + d\,(j - \\ & - fm)\,]\,yz + [-abl + d\,(hi - lg)]\,yu - (a - e)\,(i - fl)\,zu + \\ & + [c\,(h - m) - (hj - gm)]\,x + [ab\,(h - m) + d\,(hj - gm)]\,y + \\ & + [ac - (a - e)\,(j - fm)]\,z - [-acl + (a - e)\,(hi - lg)]\,u + \\ & + [ac\,(h - m) - (a - e)\,(hj - gm)] = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Pentru aflarea condiţiilor în care o ecuaţie cu patru variabile se poate reprezenta prin nomograme de felul menţionat mai sus se identifică coeficienţii ecuaţiilor (1) şi (6). Se obţine astfel sistemul :

$$
\begin{array}{ll}
b = A_0, & -abl + d(hi - gl) = B_4, \\
bl = -A_1, & (a-e)(i-fl) = -B_5, \\
i - fl = -A_2, & c(h-m) - (hj - gm) = C_0, \\
d(i - fl) = A_3, & ab(h-m) + d(hj - gm) = C_1, \\
b(h - m) = B_0, & ac - (a-e)(j - fm) = C_2, \\
c - (j - fm) = B_1, & acl + (a-e)(hi - gl) = -C_3, \\
cl + (hi - gl) = -B_2, & ac(h-m) - (a-e)(hj - gm) = D_0, \\
ab + d(j - fm) = B_3. &
\end{array}
\tag{7}
$$

Pentru simplitatea scrierii notăm cu :

$$\Delta_1 = (A_0 B_5 + A_2 B_3 - A_3 B_1)^2 - 4 A_0 A_2 (B_3 B_5 - A_3 C_2),$$

$$\Delta_2 = [A_0 (A_1 B_3 + A_3 B_0 - A_0 B_4)]^2 - 4 A_0^2 A_1 A_3 (B_0 B_3 - A_0 C_1).$$

Se disting următoarele cazuri :

1. $A_0 \neq 0, \quad A_3 \neq 0.$

1.1. Dacă $\Delta_1 \geqslant 0$, $\Delta_2 \geqslant 0$, $A_1 \neq 0$, soluţiile sistemului (7) sînt :

$$
\begin{gathered}
a = \frac{(A_0 B_5 + A_2 B_3 - A_3 B_1) \pm \sqrt{\Delta_1}}{2 A_0 A_2}; \quad b = A_0; \\
c = \frac{A_0 A_2 a + A_3 B_1 - A_2 B_3}{A_3}; \quad d = -\frac{A_3}{A_2}; \quad e = a - \frac{B_5}{A_2}; \\
g = \frac{A_1 f + A_0 A_2}{A_0} \left(\frac{B_0}{A_0} + m \right) + \frac{A_0 A_2}{A_1 A_3} (A_1 a - B_4); \quad h = \frac{B_0}{A_0} + m; \\
i = -\frac{A_1 f + A_0 A_2}{A_0}; \quad j = \frac{A_2}{A_3} (A_0 a - B_3) + fm; \quad l = -\frac{A_1}{A_0}; \\
m = \frac{-A_0 (A_3 B_0 + A_1 B_3 - A_0 B_4) \pm \sqrt{\Delta_2}}{2 A_0^2 A_3},
\end{gathered}
\tag{8}
$$

unde f este un parametru arbitrar.

Soluţiile (8) au loc dacă mai sînt îndeplinite şi următoarele condiţii care coincid cu condiţiile de separare ale lui Goursat pentru ecuaţia (1) :

$$\begin{aligned}
&\frac{A_2C_3 - B_2B_5}{A_2C_2 - B_1B_5} = \frac{A_1}{A_0}, \qquad \frac{A_2D_0 - B_5C_0}{A_2C_2 - B_1B_5} = \frac{B_0}{A_0},\\
(9)\qquad &\\
&\frac{A_2B_4 - A_3B_2}{A_2B_3 - A_3B_1} = \frac{A_1}{A_0}, \qquad \frac{A_2C_1 - A_3C_0}{A_2B_3 - A_3B_1} = \frac{B_0}{A_0}.
\end{aligned}$$

1.2. Dacă $A_1 = 0$, soluţiile sistemului (7) sînt cele date de formulele (8) cu condiţiile (9), unde parametrul g ia valoarea :

$$g = \frac{A_0A_2}{A_3}a - \frac{A_0A_2}{A_3} \cdot \frac{B_2B_3 - A_2C_1}{A_0B_2 - A_2B_0} + \frac{B_2}{A_2}f.$$

Notăm

$$\Delta_3 = [B_0(A_2B_3 - A_0B_5) + A_0(A_0C_3 - B_2B_3) - A_1(A_0C_2 -$$

$$- B_1B_3)]^2 - 4A_0(A_2B_3 - A_0B_5)[A_1(A_0D_0 - B_3C_0) -$$

$$- B_0(A_1C_2 - B_1B_4)].$$

2. $A_0 \neq 0,\ A_2 \neq 0,\ A_3 = 0.$

2.1. Dacă $\Delta_3 \geqslant 0$, $A_1 \neq 0$, sistemul (7) admite următoarele soluţii :

$$a = \frac{B_3}{A_0}; \quad b = A_0; \quad c = \frac{A_0(A_2C_2 - B_1B_5)}{A_2B_3 - A_0B_5}; \quad d = 0;$$

$$e = \frac{A_2B_3 - A_0B_5}{A_0A_2};$$

$$\begin{aligned}
&g = \frac{(B_0 + A_0m)(A_0A_2 + A_1f)(A_2B_3 - A_0B_5) + A_0^2A_2(A_0C_3 - B_2B_3)}{A_0A_1(A_2B_3 - A_0B_5)};\\
(10)\qquad &\\
&h = \frac{B_0}{A_0} + m; \quad i = -\frac{A_0A_2 + A_1f}{A_0};\\
&f = \frac{A_2(A_0C_0 - B_1B_3)}{A_2B_3 - A_0B_5} + fm; \quad l = -\frac{A_1}{A_0};
\end{aligned}$$

$$m = \frac{-[B_0(A_2B_3 - A_0B_5) + A_0(A_0C_3 - B_2B_3) - A_1(A_0C_2 - B_1B_3)] + \sqrt{\Delta_3}}{2A_0(A_2B_3 - A_0B_5)},$$

unde f este un parametru arbitrar.

Soluţiile (10) au loc dacă mai sînt îndeplinite condiţiile :

$$A_1B_3 = A_0B_4, \qquad A_0C_1 = B_0B_3, \tag{11}$$
$$\frac{A_2C_3 - B_2B_5}{A_2C_2 - B_1B_5} = \frac{A_1}{A_0}, \qquad \frac{A_2D_0 - B_5C_0}{A_2C_2 - B_1B_5} = \frac{B_0}{A_0}.$$

2.2. Dacă $A_1 = 0$, rezultă $B_4 = 0$; atunci soluţiile sistemului (7) sînt soluţiile (10), dacă sînt îndeplinite condiţiile (11), unde parametrul g se calculează după formula :

$$g = \frac{A_0A_2\,[B_2(A_0C_2 - B_1B_3) - A_2(A_0D_0 - B_3C_0)]}{(A_2B_3 - A_0B_5)(A_0B_2 - A_2B_0)} + \frac{B_2}{A_2}f.$$

Notăm cu

$$\Delta_4 = (B_1B_4 - B_2B_3 + A_2C_1 - A_3C_0)^2 + 4\,(A_2B_4 - A_3B_2)(B_3C_0 - B_1C_1).$$

3. $A_0 = 0$ rezultă $A_1 = B_0 = 0$, $A_3 \neq 0$.

3.1. Dacă $A_2B_4 - A_3B_2 \neq 0$ şi $\Delta_4 \geqslant 0$, soluţiile sistemului (7) sînt :

$$a = \frac{A_3C_2 - B_3B_5}{A_3B_1 - A_2B_3}; \quad b = 0; \quad c = \frac{A_3B_1 - A_2B_3}{A_3}; \quad d = -\frac{A_3}{A_2};$$

$$e = \frac{A_3}{A_2} \cdot \frac{A_2C_2 - B_1B_5}{A_3B_1 - A_2B_3};$$

$$g = \frac{A_2B_4}{A_3} \cdot \frac{A_3B_1 - A_2B_3}{A_2B_4 - A_3B_2} - \frac{A_2(A_3C_0 - A_2C_1)}{A_2B_4 - A_3B_2} -$$
$$- \frac{A_2(A_3B_1 - A_2B_3)}{A_2B_4 - A_3B_2}m + \frac{A_3C_0 - A_2C_1}{A_3B_1 - A_2B_3}f + fm; \tag{12}$$

$$h = \frac{A_3C_0 - A_2C_1}{A_3B_1 - A_2B_3} + m; \quad i = -A_2 + \frac{A_2B_4 - A_3B_2}{A_3B_1 - A_2B_3}f$$

$$j = -\frac{A_2B_3}{A_3} + fm; \quad l = \frac{A_2B_4 - A_3B_2}{A_3B_1 - A_2B_3};$$

$$m_{1,2} = \frac{(B_1B_4 - B_2B_3 + A_2C_1 - A_3C_0) \pm \sqrt{\Delta_4}}{2(A_3B_1 - A_2B_3)},$$

unde f rămîne un parametru arbitrar.

Soluţiile (12) au loc dacă sînt îndeplinite condiţiile (13) :

$$(13)\qquad \begin{aligned} \frac{A_2D_0 - B_5C_0}{A_2C_2 - B_1B_5} &= \frac{A_3C_0 - A_2C_1}{A_3B_1 - A_2B_3},\\ \frac{B_2B_5 - A_2C_3}{A_2C_2 - B_1B_5} &= \frac{A_2B_4 - A_3B_2}{A_3B_1 - A_2B_3}. \end{aligned}$$

3.2. Dacă $A_2B_4 - A_3B_2 = 0$, soluţiile sistemului (7) sînt date de formulele (12), dacă sînt îndeplinite condiţiile (13), parametrul g calculîndu-se după formula :

$$g = \frac{(A_3B_1 - A_2B_3)(A_2C_1 - B_2B_3)}{A_3(B_1B_4 - B_2B_3 + A_2C_1 - A_3C_0)} + \frac{B_2}{A_2}f.$$

Notăm

$$\Delta_5 = (B_2B_3 - B_1B_4 + A_0C_3 - A_1C_1)^2 - 4(A_0B_2 - A_1B_1)(B_3C_3 - B_4C_2).$$

4. $A_1 \neq 0$, $A_2 = 0$, rezultă $A_3 = B_5 = 0$.

4.1. Dacă $A_1B_3 - A_0B_4 \neq 0$, $\Delta_5 \geqslant 0$, soluţiile sistemului (7) sînt în acest caz :

$$a = \frac{B_2B_3 - B_1B_4 + A_0C_3 - A_1C_1 \pm \sqrt{\Delta_5}}{2(A_0B_2 - A_1B_1)}; \quad b = A_0;$$

$$c = \frac{A_0[(B_2B_3 - B_1B_4) - (A_0B_2 - A_1B_1)a]}{A_1B_3 - A_0B_4}; \quad d = \frac{A_1B_3 - A_0B_4}{A_0B_2 - A_1B_1};$$

$$e = a - \frac{A_0C_3 - A_1C_2}{A_0B_2 - A_1B_1};$$

$$(14)\qquad g = \frac{A_1(A_1C_1 - B_0B_4)f - A_0(A_0B_2 - A_1B_1)(A_1a - B_4)}{A_1(A_1B_3 - A_0B_4)};$$

$$h = \frac{A_1C_1 - B_0B_4}{A_1B_3 - A_0B_4}; \qquad i = -\frac{A_1}{A_0}f;$$

$$j = \frac{A_0B_2 - A_1B_1}{A_1B_3 - A_0B_4}(B_3 - A_0a) + \frac{A_1(A_0C_1 - B_0B_3)}{A_0(A_1B_3 - A_0B_4)}f;$$

$$l = -\frac{A_1}{A_0}; \qquad m = \frac{A_1(A_0C_1 - B_0B_3)}{A_0(A_1B_3 - A_0B_4)},$$

unde f este un parametru arbitrar.

Soluţiile (14) au loc dacă mai sînt îndeplinite următoarele condiţii :

$$(15)\qquad \begin{aligned} \frac{A_1B_3 - A_0B_4}{A_0B_2 - A_1B_1} &= \frac{B_0B_3 - A_0C_1}{A_0C_0 - B_0B_1},\\ \frac{A_0C_3 - A_1C_2}{A_0B_2 - A_1B_1} &= \frac{A_0D_0 - B_0C_2}{A_0C_0 - B_0B_1}. \end{aligned}$$

4.2. Dacă $A_1B_3 - A_0B_4 = 0$, soluţiile sistemului (7) sînt atunci următoarele soluţii, dacă sînt îndeplinite condiţiile (15) :

$$
\begin{aligned}
&a = \frac{B_3}{A_0}; \quad b = A_0; \quad c = \frac{A_0(B_2C_2 - B_1C_3)}{B_2B_3 - B_1B_4 + A_1C_2 - A_0C_3};\\
&d = 0; \quad e = \frac{B_2B_3 - B_1B_4 + A_1C_2 - A_0C_3}{A_0B_2 - A_1B_1};\\
&g = \frac{(A_0B_2 - A_1B_1)(A_0C_3 - B_2B_3)}{A_1(B_2B_3 - B_1B_4 + A_1C_2 - A_0C_3)} +\\
&\quad + \frac{B_2C_1 - B_0C_3 - B_4C_0 + A_1D_0}{B_2B_3 - B_1B_4 + A_1C_2 - A_0C_3} f;\\
&h = \frac{B_2C_1 - B_0C_3 - B_4C_0 + A_1D_0}{B_2B_3 - B_1B_4 + A_1C_2 - A_0C_3}; \quad i = -\frac{A_1}{A_0} f;\\
&j = \frac{(A_0B_2 - A_1B_1)(A_0C_2 - B_1B_3)}{A_0(B_2B_3 - B_1B_4 + A_1C_2 - A_0C_3)} +\\
&\quad + \frac{A_1(B_1C_1 - B_0C_2 - B_3C_0 + A_0D_0)}{A_0(B_2B_3 - B_1B_4 + A_1C_2 - A_0C_3)} f;\\
&l = -\frac{A_1}{A_0}; \quad m = \frac{A_1(B_1C_1 - B_0C_2 - B_3C_0 + A_0D_0)}{A_0(B_2B_3 - B_1B_4 + A_1C_2 - A_0C_3)}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

5. $A_0 = 0$, $A_2 = 0$, rezultă $A_1 = A_3 = 0$, $B_0 = B_5 = 0$.
În acest caz soluţiile sistemului (7) sînt :

$$
\begin{aligned}
&a = \frac{B_3C_3 - B_4C_2}{B_2B_3 - B_1B_4}; \quad b = 0; \quad c = \frac{B_1d + B_3}{d};\\
&e = \frac{B_2C_2 - B_1C_3}{B_2B_3 - B_1B_4} d; \quad g = \frac{B_2C_1 - B_4C_0}{B_2B_3 - B_1B_4} f + \frac{B_4}{d} \cdot \frac{B_1d + B_3}{B_2d + B_4};\\
&h = \frac{B_2C_1 - B_4C_0}{B_2B_3 - B_1B_4}; \quad i = -\frac{B_2d + B_4}{B_1d + B_3} f;\\
&j = \frac{B_3}{d} + \frac{B_1C_1 - B_3C_0}{B_2B_3 - B_1B_4} \cdot \frac{B_2d + B_4}{B_1d + B_3} f; \quad l = -\frac{B_2d + B_4}{B_1d + B_3};\\
&m = \frac{B_1C_1 - B_3C_0}{B_2B_3 - B_1B_4} \cdot \frac{B_2d + B_4}{B_1d + B_3},
\end{aligned}
\tag{17}
$$

unde d şi f rămîn parametri arbitrari.

Soluţiile (17) au loc dacă mai este îndeplinită condiţia :

$$B_4(C_0C_2 - B_1D_0) + B_2(B_3D_0 - C_1C_2) + C_3(B_1C_1 - B_3C_0) = 0. \tag{18}$$

Exemplu. Să se reprezinte nomografic ecuaţia :

$$xyz + xyu + xzu + yzu + 2xy - xz - 5xu + 3yz - yu + 2zu -$$

$$- 7x + y + z - 7u - 8 = 0.$$

În acest caz avem :

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 1, \quad A_3 = 1, \quad B_0 = 2, \quad B_1 = -1,$$

$$B_2 = -5, \quad B_3 = 3, \quad B_4 = -1, \quad B_5 = 2,$$

$$C_0 = -7, \quad C_1 = 1, \quad C_2 = 1, \quad C_3 = -7, \quad D_0 = -8,$$

$\Delta_1 = 16$, $\Delta_2 = 16$ şi condiţiile (9) sînt îndeplinite.
Parametrii scărilor nomogramei se calculează după formulele (8) :

$$a_1 = 5, \; b_1 = 1, \; c_1 = 1, \; d_1 = -1, \; e_1 = 3,$$

$$g_1 = f + 7, \; h_1 = 1, \; i_1 = -(f + 1), \; j_1 = 2 - f, \; l_1 = -1, \; m_1 = -1.$$

$$a_2 = 1, \; b_2 = 1, \; c_2 = -3, \; d_2 = -1, \; e_2 = -1, \; g_2 = f + 3, \; h_2 = 1,$$

$$i_2 = -(f + 1), \; j_2 = -(2 + f), \; l_2 = -1, \; m_2 = -1.$$

$$a_3 = 5, \; b_3 = 1, \; c_3 = 1, \; d_3 = -1, \; e_3 = 3, \; g_3 = 3(1 - f),$$

$$h_3 = -3, \; i_3 = -(f + 1), \; j_3 = 2 - 5f, \; l_3 = -1, \; m_3 = -5.$$

$$a_4 = 1, \; b_4 = 1, \; c_4 = -3, \; d_4 = -1, \; e_4 = -1, \; g_4 = -(1 + 3f),$$

$$h_4 = -3, \; i_4 = -(f + 1), \; j_4 = -(2 + 5f), \; l_4 = -1, \; m_4 = -5.$$

Ecuaţiile lui Soreau corespunzătoare acestor patru sisteme de valori ale parametrilor sînt :

$$\begin{vmatrix} \rho w+\varepsilon & 0 & 1 \\ 0 & x+5 & 1 \\ y+1 & -y+3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \rho w+\varepsilon & 0 & 1 \\ fz+f+7 & z+1 & 1 \\ -(f+1)u+2-f & -u-1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \rho w+\varepsilon & 0 & 1 \\ 0 & x+1 & 1 \\ y-3 & -(y+1) & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \rho w+\varepsilon & 0 & 1 \\ fz+f+3 & z+1 & 1 \\ -(f+1)u-(2+f) & -(u+1) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \rho w+\varepsilon & 0 & 1 \\ 0 & x+5 & 1 \\ y+1 & -y+3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \rho w+\varepsilon & 0 & 1 \\ fz+3-3f & z-3 & 1 \\ -(f+1)z+2-5f & -(u+5) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \rho w+\varepsilon & 0 & 1 \\ 0 & x+1 & 1 \\ y-3 & -(y+1) & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \rho w+\varepsilon & 0 & 1 \\ fz-1-3f & z-3 & 1 \\ -(f+1)z-2-5f & -(u+5) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Primită la redacţie la 21 martie 1969

Academia Republicii Socialiste România—
Filiala Cluj
Institutul de calcul

SUR LA REPRÉSENTATION DES ÉQUATIONS À QUATRE VARIABLES PAR DES NOMOGRAMMES COMPOSÉS À POINTS ALIGNÉS (I)

(RÉSUMÉ)

Soit l'équation à quatre variables de la forme (1).

On étudie dans quelles conditions l'équation (1) peut être représentée à l'aide d'un nomogramme composé constitué par deux nomogrammes à points alignés et à échelles rectilignes régulières qui possèdent une échelle commune.

Les équations de Soreau après une transformation affine et une simplification possible s'écrivent sous la forme (4), (5), où $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, l, m, \rho, \varepsilon$ sont les paramètres des échelles du nomogramme.

Dans l'article on donne de manière explicite les valeurs des paramètres de l'échelle du nomogramme qui sont les solutions d'un système d'équation non linéaire (7). A cette fin on examine les différents cas qui peuvent se présenter selon les valeurs des coefficients de l'équation (1).

BIBLIOGRAFIE

1. BAL, L., MIHOC, M., *Sur une classe de nomogrammes à échelles de type donné.* Mathematica, **8** (**31**), *2*, p. 199–216 (1966).
2. ГЛАГОЛЕВ, Н. А., *Курс номографии*, Изд. 2-е, М. Гос. изд-во Высшая школа", Москва, 1961.

FUNCTORUL SURSĂ GENERALIZAT

DE

GHEORGHE GH. RADU

(Iași)

Se generalizează functorul sursă [2] și se dau proprietăți ale sale.

Fie $\mathcal{U} \neq \emptyset$ un univers fixat, Cat, categoria $\mathcal{U}$-categoriilor mici, $\mathcal{C}$ un obiect din Cat, $\mathcal{C}^\wedge = \mathrm{Hom}(\mathcal{C}^\wedge, \mathcal{U} - \mathrm{Ens})$, $\mathcal{U}$-categoria prefasciculelor definite pe $\mathcal{C}$ cu valori în $\mathcal{U} - \mathrm{Ens}$ și $h : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^\wedge$ imersiunea canonică.

Dacă F este un obiect din $\mathcal{C}^\wedge$, notăm prin $\mathcal{C}/F$ categoria obiectelor din $\mathcal{C}$ care prin h sînt duse deasupra lui F, adică categoria ale cărei obiecte sînt perechi (X, α) cu $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ și $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(h_X, F)$ și ale cărei morfisme sînt evidente; analog notăm prin $\mathcal{C}_F$ categoria obiectelor F — punctate din $\mathcal{C}$, adică categoria ale cărei obiecte sînt acele perechi (X, x) cu $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ astfel încît $F(X) \neq \emptyset$ și $x \in F(X)$ și ale cărei morfisme se definesc în mod natural.

Evident, $\mathcal{C}/F$ și $\mathcal{C}_F$ sînt obiecte din Cat iar din teorema Yoneda-Grothendieck rezultă că cele două categorii sînt izomorfe, oricare ar fi obiectul F din $\mathcal{C}^\wedge$; mai mult, $\mathcal{C}/F$ și prin urmare și $\mathcal{C}_F$ este o subcategorie plină a categoriei $\mathcal{C}^\wedge/F$ a obiectelor din $\mathcal{C}^\wedge$ deasupra lui F.

Există un factor canonic

$$s_F : \mathcal{C}/F \to \mathcal{C}, \quad ((X, \alpha) \rightsquigarrow X)$$

și o diagramă carteziană de $\mathcal{U}$-categorii

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}/F \arrow[r, "s_F"] \arrow[d, "h/F"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "h"] \\
\mathcal{C}^\wedge/F \arrow[r, "j_F"] & \mathcal{C}^\wedge
\end{tikzcd}$$

unde h/F este functorul de incluziune deplin fidel și j_F functorul sursă.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 9, P. 1403–1410, BUCUREȘTI, 1969

Dacă în particular F este reprezentabil, $F \approx h_X$, $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, atunci $\mathcal{C}/h_X$ se identifică cu $\mathcal{C}/X$ iar functorul s_{h_X} cu functorul sursă $j_X : \mathcal{C}/X \to \mathcal{C}$, motiv pentru care vom numi functorul s_F *functorul sursă generalizat.*

Evident, dacă $F \approx h_X$, atunci h/h_X este functorul h/X indus de h și se are diagrama carteziană de $\mathcal{U}$-categorii

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}/X \arrow[r, "j_X"] \arrow[d, "h/X"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "h"] \\
\mathcal{C}^\wedge/h_X \arrow[r, "j_{h_X}"] & \mathcal{C}^\wedge
\end{tikzcd}$$

În cele ce urmează demonstrăm cîteva proprietăți ale functorului sursă generalizat.

PROPOZIȚIA 1. *Pentru orice obiect F din $\mathcal{C}^\wedge$, functorul sursă generalizat s_F este fidel, conservativ și deplin fidel.*

Demonstrație. Dacă $\dot{f} : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$ este un morfism în $\mathcal{C}/F$ adică diagrama

$$\begin{tikzcd}
h_X \arrow[d, "h_f"] \arrow[dr, "\alpha"] & \\
h_Y \arrow[r, "\beta"'] & F
\end{tikzcd}$$

este comutativă în $\mathcal{C}^\wedge$, atunci $s_F(\dot{f}) = f$ și prima afirmație rezultă imediat din faptul că h este deplin fidel.

A doua afirmație constă în a arăta că $s_F(\dot{f})$ este izomorfism în $\mathcal{C}$ dacă și numai dacă $\dot{f}$ este izomorfism în $\mathcal{C}/F$.

Presupunem că $s_F(f)$ este izomorfism în $\mathcal{C}$ și fie $f^{-1} : Y \to X$ un invers al său. Deoarece h este deplin fidel, $h_f - 1 = (h_f)^{-1}$ și evident $\dot{f}^{-1}$ este un invers al lui $\dot{f}$ în $\mathcal{C}/F$; reciproca este valabilă pentru orice functor.

Ultima afirmație afirmă că pentru orice obiect (X, α) din $\mathcal{C}/F$, functorul

$$s_F/(X, \alpha) : (\mathcal{C}/F)/(X, \alpha) \to \mathcal{C}/s_F(X, \alpha) = \mathcal{C}/X$$

$$((Y, \beta), \dot{f}) \rightsquigarrow (Y, f))$$

indus de s_F este izomorfism de categorii.

Precizăm că a da un morfism $\ddot{u}$ în categoria $(\mathcal{C}/F)/(X, \alpha)$, înseamnă a da o diagramă comutativă în $\mathcal{C}/F$ de forma

$$\begin{tikzcd}
(Y, \beta) \arrow[r, "\dot{f}"] \arrow[d, "\dot{u}"] & (X, \alpha) \\
(Z, \gamma) \arrow[ur, "\dot{g}"'] &
\end{tikzcd}$$

iar imaginea morfismului $\dot{u}$ prin functorul $s_F/(X, \alpha)$ este morfismul u din $\mathcal{C}$ ce face comutativă diagrama

(*)
$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & X \\
Z \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Evident, $s_F/(X, \alpha)$ este un functor fidel căci h este deplin fidel. Să presupunem acum că există diagrama comutativă (*), unde f şi g sînt imaginile morfismelor $\dot{f}$ şi $\dot{g}$ prin s_F. Pentru a arăta că $s_F/(X, \alpha)$ este deplin fidel, va fi suficient să arătăm că există diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
h_Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "h_u"] & F \\
h_Z \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

Pentru demonstraţie, fie $\rho : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(h_Y, F) \xrightarrow{\sim} F(Y)$ izomorfismul din teorema Yoneda-Grothendieck care la orice transformare naturală $\varphi : h_Y \to F$ asociază elementul

$$\rho(\varphi) = \varphi_Y(1_Y) \text{ din } F(Y).$$

În cazul nostru, $\rho(\beta) = \beta_Y(1_Y) = \alpha_Y h_f(1_Y) = \alpha_Y(f)$ şi $\rho(\gamma \cdot h_u) = (\gamma h_u)(1_Y) = \gamma_Y(u) = \alpha_Y(gu) = \alpha_Y(f)$ adică $\rho(\beta) = \rho(\gamma_0 hu)$ şi deci $\beta = \gamma \cdot hu$ ceea ce probează că functorul $s_F/(X, \alpha)$ este deplin fidel.

În sfîrşit, dacă $f : Y \to X$ este un obiect din $\mathcal{C}/X$, atunci $(Y, \alpha \cdot h_f)$ este un obiect din $(\mathcal{C}/F)$ iar $(Y, \alpha h_f) \xrightarrow{\dot{f}} (X, \alpha)$ un obiect din $(\mathcal{C}/F)/(X, \alpha)$ cu proprietatea că $s_F/(X, \alpha)(\dot{f}) = f$ şi ultima afirmaţie a propoziţiei este complet demonstrată.

Observaţie. Dată fiind o $\mathcal{U}$-categorie mică $\mathcal{C}$, se poate defini un functor

$$\Phi : \mathcal{C}^\wedge \to \mathrm{Cat}$$

şi anume functorul care la orice obiect F din $\mathcal{C}^\wedge$ asociază categoria $\mathcal{C}/F$ şi la orice morfism $m : F \to G$ din $\mathcal{C}^\wedge$ functorul $\Phi(m) : \mathcal{C}/F \to \mathcal{C}/G$ care la orice obiect (X, α) din $\mathcal{C}/F$ asociază obiectul $(X, m\alpha)$ din $\mathcal{C}/G$.

Mai mult, functorul $\Phi(m)$ face următoarea diagramă comutativă

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}/F \arrow[rr, "\Phi(m)"] \arrow[dr, "s_F"'] & & \mathcal{C}/G \arrow[dl, "s_G"] \\
& \mathcal{C} &
\end{tikzcd}$$

PROPOZIȚIA 2. *Familia de functori* $(s_F)_{F\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^\wedge)}$ *definește categoria* $\mathcal{C}$ *ca limita inductivă a functorului* Φ, *adică* $\underset{\mathcal{C}^\wedge}{\underrightarrow{\lim}}\, \Phi = C$.

Demonstrație. Rezultă imediat din faptul că

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \bigcup_{F\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^\wedge)} s_F(\mathrm{Ob})\ (\mathcal{C}/F)) \text{ și } \mathrm{Fl}(\mathcal{C}) = \bigcup_{F\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^\wedge)} s_F(\mathrm{Fl}(\mathcal{C}/F)).$$

PROPOZIȚIA 3. *Dacă* $\mathcal{C}$ *este o* $\mathfrak{U}$*-categorie mică cu produse fibrate, atunci pentru orice obiect* F *din* $\mathcal{C}^\wedge$, *categoria* $\mathcal{C}/F$ *este cu produse fibrate și în plus functorul* $s_F : \mathcal{C}/F \to \mathcal{C}$ *comută cu produsele fibrate.*

Demonstrație. Să arătăm că orice diagramă

$$\begin{tikzcd}
 & (Z, \gamma) \arrow[d, "\dot{g}"] \\
(Y, \beta) \arrow[r, "\dot{f}"] & (X, \alpha)
\end{tikzcd}$$

din $\mathcal{C}/F$ se poate scufunda într-o diagramă carteziană.

În acest scop, considerăm în $\mathcal{C}$ diagrama carteziană

$$\begin{tikzcd}
Y_X \times Z \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & Z \arrow[d, "g"] \\
Y \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}$$

și va fi suficient să arătăm că $(Y_X \times Z,\ \alpha\, h_{fg'}) = (Y_X \times Z,\ \alpha\, h_{gf'}) \approx$ $\approx (Z, \gamma) \underset{(X, \alpha)}{\times} (Y, \beta)$.

Observăm mai întîi că diagramele

$$\begin{tikzcd}
h_{Y_X \times Z} \arrow[r, "\alpha h_{fg'}"] \arrow[d, "h_{f'}"] & F & , & h_{Y_X \times Z} \arrow[r, "\alpha h_{fg'}"] \arrow[d, "h_{g'}"] & F \\
h_Z \arrow[ur, "\gamma"'] & & & h_Y \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

sînt comutative, căci $\alpha h_{fg'} = \alpha h_{f'} h_{g'} = \beta h_{g'}$ și $\alpha h_{fg'} = \alpha h_{gf'} = \alpha h_g h_{f'} =$ $= \gamma h_{f'}$ adică $\dot{f}'$ și $\dot{g}'$ sînt morfisme din $\mathcal{C}/F$.

Evident, diagrama

$$\begin{tikzcd}
(Y_X \times Z,\ \alpha h_{fg'}) \arrow[r, "\dot{f}'"] \arrow[d, "\dot{g}'"'] & (Z, \gamma) \arrow[d, "\dot{g}"] \\
(Y, \beta) \arrow[r, "\dot{f}"] & (X, \alpha)
\end{tikzcd}$$

este comutativă și dacă $\dot{u} : (T, \lambda) \to (Z, \gamma)$ și $\dot{v} : (T, \lambda) \to (Y, \beta)$ sînt două morfisme din $\mathcal{C}/F$ astfel încît $f\dot{v} = g\dot{u}$, atunci $fv = gu$ și prin urmare există $\theta : T \to Y_x \times Z$ unic astfel încît $f'\theta = u$ și $g'\theta = v$

Diagrama

$$\begin{tikzcd}
h_T \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "h_\theta"] & F \\
h_{Y_X \times Z} \arrow[ur, "\alpha h_{fg'}"'] &
\end{tikzcd}$$

este comutativă căci $\alpha h_{fg'} h_\theta = \alpha h_{fg'\theta} = \alpha h_{fv} = \alpha h_f \, h_v = \beta h_v = \lambda$ adică θ definește un morfism $\dot{\theta}$ în $\mathcal{C}/F$ cu proprietatea $f' \cdot \dot{\theta} = \dot{u}$ și $\dot{g}' \dot{\theta} = \dot{v}$ și $\dot{\theta}$ este unic cu această proprietate căci s_F este fidel; prima parte a propoziției este așadar demonstrată, iar a doua parte rezultă din felul cum au fost construite produsele fibrate în $\mathcal{C}/F$ cu ajutorul produselor fibrate din $\mathcal{C}$.

Propoziția 4. *Fie $\mathcal{C}$ o $\mathcal{U}$-categorie mică, F un obiect din $\mathcal{C}^\wedge$, $\mathcal{C}/F$ categoria obiectelor din $\mathcal{C}$ care prin h sînt duse deasupra lui F și $s_F : \mathcal{C}/F \to \mathcal{C}$ functorul sursă generalizat.*

Dacă $s_F^* : (\mathcal{C}/F)^\wedge \to \mathcal{C}^\wedge$ este functorul imagine reciprocă de $\mathcal{U}$-prefascicule de mulțimi indus de s_F, atunci există o diagramă comutativă

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}^\wedge/F \arrow[dr, "j_F"] & \\
(\mathcal{C}/F)^\wedge \arrow[ur, "e^\wedge|F", "\sim"'] \arrow[rr, "s^F"'] & & \mathcal{C}^\wedge
\end{tikzcd} \tag{*}$$

unde $e^\wedge/F$ este o echivalență de categorii iar j_F functorul sursă.

Demonstrație. Din definiția functorului s_F^*, diagrama de categorii și functori

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}/F \arrow[r, "s_F"] \arrow[d, "h'"] & \mathcal{C} \arrow[d, "h"] \\
(\mathcal{C}/F)^\wedge \arrow[r, "s_F^*"] & \mathcal{C}^\wedge
\end{tikzcd}$$

este comutativă, unde h și h' sînt functorii de imersiune canonică.

Reamintim definiția functorului s_F^* din [2].

Pentru orice obiect Y din $\mathcal{C}$ notăm cu $Y/(\mathcal{C}/F, s_F)$ categoria obiectelor din $\mathcal{C}/F$ care prin s_F sînt duse dedesubtul lui Y, cu alte cuvinte obiectele sale sînt diagrame de forma

$$\begin{tikzcd}
h_X \arrow[r, "\alpha"] & F \\
h_Y \arrow[u, "h_m"] &
\end{tikzcd}$$

iar morfismele, diagrame comutative de forma

$$\begin{tikzcd}
h_X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\searrow"] & F \\
h_Y \arrow[u, "h_m"'] \arrow[r, "h_{m'}"'] & h_{X'} \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

Evident, categoria discretă $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(h_Y, F)$ este izomorfă cu subcategoria plină $\mathcal{A}$ a lui $Y/(\mathcal{C}/F, s_F)$ ale cărei obiecte sînt diagrame de forma

$$\begin{tikzcd}
h_Y \arrow[r] & F \\
h_Y \arrow[u, "1_{h_Y}"']
\end{tikzcd}$$

Mai mult, această subcategorie plină este coinițială în $Y/(\mathcal{C}/F, s_F)$. Dacă pr_Y este functorul

$$\mathrm{pr}_Y : Y/(\mathcal{C}/F, s_F) \to \mathcal{C}/F, \ ((X, \alpha), m)) \rightsquigarrow (X, \alpha))$$

și dacă H este un obiect oarecare din $(\mathcal{C}/F)^\wedge$, definim

$$s_F^*(H)(Y) = \varinjlim_{Y/(\mathcal{C}/F, s_F)} H\,\mathrm{pr}_Y \approx \varinjlim_{\mathcal{A}} H\,\mathrm{pr}_Y = \varinjlim_{\beta : h_Y \to F} H((Y, \beta)) =$$

$$= \coprod_{\beta : h_Y \to F} H((Y, \beta)).$$

Să arătăm acum că $s_F^*(H)$ este un obiect din $\mathcal{C}^\wedge/F$, adică există un morfism functorial

$$\omega : s_F^*(H) \to F$$

de unde rezultă comutativitatea diagramei (*).

Pentru aceasta este suficient să considerăm drept ω morfismul functorial de componente $(\omega(Y))_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$, unde

$$\omega(Y) : s_F^*(H)(Y) \to F(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(h_Y, F)$$

se definesc astfel: dacă $Y \in \coprod_{\beta : h_Y \to F} H((Y, \beta))$, atunci $y \in H((Y, \beta))$ pentru un singur indice $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(h_Y, F)$ și definim $\omega(Y)(y) = \beta$.

Se arată ușor că dacă $Y \xrightarrow{g} Y'$ este un morfism din $\mathcal{C}$, atunci diagrama

$$\begin{tikzcd}
s_F^*(H)(Y') \arrow[r, "\omega(Y')"] \arrow[d, "s_F^*(H)(g)"'] & F(Y') \arrow[d, "F(g)"] \\
s_F^*(H)(Y) \arrow[r, "\omega(Y)"] & F(Y)
\end{tikzcd}$$

este comutativă ceea ce probează că $\omega(Y)$, $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ sînt într-adevăr componentele unui morfism functorial ω.

Exact ca în cazul F reprezentabil ([2]), se arată că functorul

$$\alpha_F : \mathcal{C}^\wedge/F \to (\mathcal{C}/F)^\wedge,\ (H \xrightarrow{\omega} F \rightsquigarrow \alpha_F(H,\omega) : hY \xrightarrow{\alpha} F \rightsquigarrow \omega_Y^{-1}(\alpha Y(1Y))$$

este un cvasiinvers al lui $e^\wedge/F$.

Pentru aceasta se observă că

$$\alpha_F(H, \omega)(Y, \alpha) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}/\mathrm{F})\ (hY, \alpha),\ (H, \omega).F).$$

Cu aceasta propoziția este complet demonstrată.

Observații. 1°. Propoziția precedentă exprimă în esență faptul că a da un prefascicul peste $\mathcal{C}/F$ este tot una cu a da un prefascicul H peste $\mathcal{C}$ și un morfism functorial $\omega : H \to F$.

2°. Diagrama de categorii și functori

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}/F \arrow[dl, "h_F"'] \arrow[d, "h/F"] \\
(\mathcal{C}/F)^\wedge \arrow[r, "e^\wedge/F"] & \mathcal{C}^\wedge/F
\end{tikzcd}$$

este comutativă, unde h_F este imersiunea canonică iar h/F este indus în mod canonic de imersiunea canonică $h : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^\wedge$.

PROPOZIȚIA 5. *Cu notațiile de pînă acum, un obiect H din $(\mathcal{C}/F)^\wedge$ este reprezentabil dacă și numai dacă $s_F^*(H)$ este reprezentabil.*

Demonstrație. Să presupunem că H este reprezentat de obiectul (X, α) din $\mathcal{C}/F$.

Afirmăm că $s_F^*(H)$ este reprezentat de obiectul X. Într-adevăr, pentru orice obiect Y din $\mathcal{C}$,

$$s_F^*(H)(Y) = \coprod_{\beta : h_Y \to F} H(Y, \beta) \approx \coprod_{\beta ; h_Y \to F} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/F}((Y, \beta), (X, \alpha))$$

$$\approx \coprod_{\beta : h_Y \to F} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge/F}((Y, \beta),\ (X, \alpha)) = \coprod_{\beta : h_Y \to F} \alpha_F(X,\ \alpha)(Y, \beta) =$$

$$= \coprod_{\beta : h_Y \to F} \alpha_Y^{-1}(\beta_Y(1_Y)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X).$$

Morfismul canonic $s_F^*(H) \to F$ nu este altul, abstracţie făcînd de un izomorfism functorial, decît α.

Reciproc, dacă $s_F^*(H)$ este reprezentabil, adică există un izomorfism-functorial

$$h_X \xrightarrow{\varphi} s_F^*(H), \quad X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$$

şi dacă $\omega : s_F^*(H) \to F$ este morfismul canonic, atunci H este reprezentat de obiectul $(X, \omega\varphi)$ din $\mathcal{C}/F$.

Primită la redacţie la 17 decembrie 1968

Institutul politehnic Iaşi

FONCTEUR SOURCE GÉNÉRALISÉ

(RÉSUMÉ)

On généralise le foncteur source [2] et on donne quelques-unes de ses propriétés.

BIBLIOGRAFIE

1. Jean Giraud, *Méthode de la descente*. Bull. de la Société Math. de France.
2. Verdier Jean-Louis, *Sites et Faisceaux*. Séminaire de Géométrie Algébrique de l'I.H.E.S., 1963–1964.

ASUPRA STĂRII DE TENSIUNE A PLĂCILOR ELASTICE SUBȚIRI ANIZOTROPE

DE

SILVIA RĂDULESCU

Se extinde o teorie bidimensională de precizie ameliorată și se obțin ecuațiile de echilibru ale plăcii plane elastice anizotrope în cazul existenței unui plan de simetrie elastică perpendicular pe axa *oz*.

Se dă soluția sistemului de ecuații în cazul particular al încovoierii cilindrice a plăcii.

În ultimul timp numeroși cercetători au reluat problema construirii unor teorii a învelitorilor și plăcilor elastice, căutînd să elimine contradicțiile interne introduse de ipotezele clasice Love-Kirchhoff. În marea lor majoritate, aceste teorii reduc problema tridimensională la una bidimensională și permit obținerea unei prime corecții la starea de tensiune fundamentală dată de teoria clasică, fiind numite, de aceea, teorii de precizie ameliorată.

În lucrarea de față se extinde teoria bidimensională de precizie ameliorată propusă în [1] și se obține sistemul de ecuații care descrie problema stării elastice a plăcii plane anizotrope în cazul existenței unui plan de simetrie elastică perpendicular pe axa *oz*. Se dă soluția acestui sistem în cazul particular al încovoierii cilindrice a plăcii și se fac unele observații cu privire la influența gradului de anizotropie a materialului asupra modului cum apare efectul de strat limită. Ca aplicație, se rezolvă problema încovoierii cilindrice a unei plăci supuse unei sarcini cu distribuție discontinuă, în cazul cînd marginile plăcii sînt încastrate.

1. PUNEREA PROBLEMEI. RELAȚIILE FIZICO-GEOMETRICE

Se consideră o placă subțire, de grosime $2h$, raportată la un sistem cartezian ortogonal $oxyz$. Planul median al plăcii coincide cu planul $z = 0$. Materialul din care este alcătuită placa se supune legii generalizate a lui

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 9, P. 1411–1428, BUCUREȘTI, 1969

Hooke, admiţînd în fiecare punct un plan de simetrie elastică paralel cu suprafaţa mediană. Dacă se notează cu $\sigma_{ik}(i, k = 1, 2)$, σ_{3i}, σ_{33} componentele tensorului tensiune, cu $\varepsilon_{ii}(i = 1, 2, 3)$, $\gamma_{ij}(i, j = 1, 2, 3,\ i \neq j)$ componentele tensorului deformaţie şi cu $A_{ik}(i, k = 1, 2, \ldots, 6)$ modulii de elasticitate ai materialului, legea generalizată a lui Hooke este :

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= A_{11}\varepsilon_{11} + A_{12}\varepsilon_{22} + A_{13}\varepsilon_{33} + A_{16}\gamma_{12},\\
\sigma_{22} &= A_{12}\varepsilon_{11} + A_{22}\varepsilon_{22} + A_{23}\varepsilon_{33} + A_{26}\gamma_{12},\\
\sigma_{33} &= A_{13}\varepsilon_{11} + A_{23}\varepsilon_{22} + A_{33}\varepsilon_{33} + A_{36}\gamma_{12},\\
\sigma_{23} &= A_{44}\gamma_{23} + A_{45}\gamma_{13},\\
\sigma_{13} &= A_{45}\gamma_{23} + A_{55}\gamma_{13},\\
\sigma_{12} &= A_{16}\varepsilon_{11} + A_{26}\varepsilon_{22} + A_{36}\varepsilon_{33} + A_{66}\gamma_{12}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Pentru componentele vectorului deplasare se consideră expresiile

$$
\begin{aligned}
u_i(x, y, z) &= u_i^0(x, y) + z u_i'(x, y),\\
u_3(x, y, z) &= w(x, y, z).
\end{aligned}
\qquad (i = 1, 2)
\tag{2}
$$

Utilizînd relaţiile geometrice liniare între componentele tensorului deformaţie şi deplasări şi introducînd notaţiile următoare :

$$
\begin{aligned}
S_{ik} &= \int_{-h}^{+h} \sigma_{ik}\,\mathrm{d}z, \quad S_{3i} = \int_{-h}^{+h} \sigma_{3i}\,\mathrm{d}z, \quad S_{33} = \int_{-h}^{+h} \sigma_{33}\,\mathrm{d}z,\\
M_{ik} &= \int_{-h}^{+h} \sigma_{ik}\, z\,\mathrm{d}z, \quad M_{33} = \int_{-h}^{+h} \sigma_{33}\, z\,\mathrm{d}z,
\end{aligned}
\qquad (i, k = 1, 2)
\tag{3}
$$

se obţine

$$
\begin{aligned}
S_{11} &= 2h\,[A_{11}u_{1,1}^0 + A_{12}u_{2,2}^0 + A_{13}\overline{w_{,3}} + A_{16}(u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0)],\\
S_{22} &= 2h\,[A_{12}u_{1,1}^0 + A_{22}u_{2,2}^0 + A_{23}\overline{w_{,3}} + A_{26}(u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0)],\\
S_{33} &= 2h\,[A_{13}u_{1,1}^0 + A_{23}u_{2,2}^0 + A_{33}\overline{w_{,3}} + A_{36}(u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0)],\\
S_{23} &= 2h\,[A_{44}(u_2' + \overline{w_{,2}}) + A_{45}(u_1' + \overline{w_{,1}})],\\
S_{13} &= 2h\,[A_{45}(u_2' + \overline{w_{,2}}) + A_{55}(u_1' + \overline{w_{,1}})],
\end{aligned}
$$

$$S_{12} = 2h\,[A_{16}\,u^0_{1,1} + A_{26}\,u^0_{2,2} + A_{36}\overline{w_{,3}} + A_{66}(u^0_{1,2} + u^0_{2,1})],$$

$$M_{11} = 2h\left[\frac{h^2}{3}A_{11}u'_{1,1} + \frac{h^2}{3}A_{12}u'_{2,2} + A_{13}\,\overline{z\,w_{,3}} + \frac{h^2}{3}A_{16}(u'_{1,2} + u'_{2,1})\right],$$

$$(4)\qquad M_{22} = 2h\left[\frac{h^2}{3}A_{12}u'_{1,1} + \frac{h^2}{3}A_{22}u'_{2,2} + A_{23}\,\overline{z\,w_{,3}} + \frac{h^2}{3}A_{26}(u'_{1,2} + u'_{2,1})\right],$$

$$M_{33} = 2h\left[\frac{h^2}{3}A_{13}\,u'_{1,1} + \frac{h^2}{3}A_{23}u'_{2,2} + A_{33}\overline{z\,w_{,3}} + \frac{h^2}{3}A_{36}(u'_{1,2} + u'_{2,1})\right],$$

$$M_{12} = 2h\left[\frac{h^2}{3}A_{16}\,u'_{1,1} + \frac{h^2}{3}A_{26}u'_{2,2} + A_{36}\overline{zw_{,3}} + \frac{h^2}{3}A_{66}(u'_{1,2} + u'_{2,1})\right].$$

S-a utilizat notația

$$(5)\qquad \bar{f}(x, y) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z.$$

Mărimile (4) reprezintă eforturile, forțele tăietoare și momentele care acționează asupra unui element de suprafață cilindric de generatoare paralelă cu axa *oz*.

Pentru a elimina pe $\overline{w_{,3}}$ și $\overline{z\,w_{,3}}$, care apar în expresiile (4), se iau în considerație condițiile la limită în tensiuni pe fețele plăcii

$$(6)\qquad \begin{aligned} \sigma_{3i}\big|_{z=\pm h} &= \pm\, q_i^{s,j}(x, y), \quad (i = 1, 2)\\ \sigma_{33}\big|_{z=\pm h} &= \pm\, q^{s,j}(x, y). \end{aligned}$$

Se consideră componentele σ_{3i} și σ_{33} ale tensorului tensiune sub forma următoare

$$(7)\qquad \begin{aligned} \sigma_{3i} &= q_i^- + \frac{z}{h}q_i^+ + \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)\Psi_i(x, y, z), \quad (i = 1, 2)\\ \sigma_{33} &= q^- + \frac{z}{h}q^+, \end{aligned}$$

unde

$$(8)\qquad \begin{aligned} q_i^{\pm} &= \frac{q_i^s \pm q_i^j}{2},\\ q^{\pm} &= \frac{q^s \pm q^j}{2}. \end{aligned}$$

Acest fapt impune componentei w a deplasării următorul aspect

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + z w_1(x, y) + z^2 w_2(x, y) + \varphi(x, y, z) \tag{9}$$

şi în cele ce urmează se va presupune că funcţia $\varphi(x, y, z)$ variază puţin în raport cu z, astfel încît ori de cîte ori va fi necesar se va lua

$$\varphi = \varphi^0(x, y). \tag{10}$$

Pe baza acestei ipoteze rezultă imediat

$$\Psi_i = \Psi_i^0(x, y), \quad (i = 1, 2) \tag{11}$$

astfel că

$$\sigma_{3i} = q_i^- + \frac{z}{h} q_i^+ + \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) \Psi_i^0(x, y). \tag{12}$$

Egalînd expresiile care rezultă pentru forţele tăietoare S_{3i} atît din legea generalizată a lui Hooke, cît şi din (12), se obţine

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, y) &= \frac{3}{2}[A_{45}(u_2' + \overline{w_{,2}}) + A_{55}(u_1' + \overline{w_{,1}}) - q_1^-], \\ \Psi_2(x, y) &= \frac{3}{2}[A_{44}(u_2' + \overline{w_{,2}}) + A_{45}(u_1' + \overline{w_{,1}}) - q_2^-]. \end{aligned} \tag{13}$$

Procedînd în acelaşi mod cu S_{33} şi cu M_{33}, se deduce că

$$\begin{aligned} \overline{w_{,3}} &= \frac{1}{A_{33}}[q^- - A_{13} u_{1,1}^0 - A_{23} u_{2,2}^0 - A_{36}(u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0)], \\ \overline{z w_{,3}} &= \frac{h}{3 A_{33}}[q^+ - h A_{13} u_{1,1}' - h A_{23} u_{2,2}' - h A_{36}(u_{1,2}' + u_{2,1}')], \end{aligned} \tag{14}$$

Expresiile (4) devin :

$$\begin{aligned} S_{11} &= 2h\left[B_{11} u_{1,1}^0 + B_{12} u_{2,2}^0 + B_{16}(u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0) + \frac{A_{13}}{A_{33}} q^-\right], \\ S_{22} &= 2h\left[B_{12} u_{1,1}^0 + B_{22} u_{2,2}^0 + B_{26}(u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0) + \frac{A_{23}}{A_{33}} q^-\right], \\ S_{33} &= 2h q^-, \end{aligned} \tag{15}$$

$$S_{23} = 2h\,[A_{44}(u'_2 + \overline{w_{,2}}) + A_{45}(u'_1 + \overline{w_{,1}})],$$

$$S_{13} = 2h\,[A_{45}(u'_2 + \overline{w_{,2}}) + A_{55}(u'_1 + \overline{w_{,1}})],$$

$$S_{12} = 2h\left[B_{16}u^0_{1,1} + B_{26}u^0_{2,2} + B_{66}(u^0_{1,2} + u^0_{2,1}) + \frac{A_{36}}{A_{33}}q^-\right],$$

$$M_{11} = \frac{2h^2}{3}\left[B_{11}h\,u'_{1,1} + B_{12}h\,u'_{2,2} + B_{16}h(u'_{1,2} + u'_{2,1}) + \frac{A_{13}}{A_{33}}q^+\right], \tag{15}$$

$$M_{22} = \frac{2h^2}{3}\left[B_{12}h\,u'_{1,1} + B_{22}h\,u'_{2,2} + B_{26}h(u'_{1,2} + u'_{2,1}) + \frac{A_{23}}{A_{33}}q^+\right],$$

$$M_{33} = \frac{2h^2}{3}q^+,$$

$$M_{12} = \frac{2h^2}{3}\left[B_{16}h\,u'_{1,1} + B_{26}h\,u'_{2,2} + B_{66}h(u'_{1,2} + u'_{2,1}) + \frac{A_{36}}{A_{33}}q^+\right],$$

unde

$$B_{ij} = A_{ij} - \frac{A_{i3}A_{j3}}{A_{33}}, \qquad (i, j = 1, 2, 4, 5, 6). \tag{16}$$

S-au obținut astfel relațiile fizico-geometrice ale teoriei plăcilor elastice subțiri anizotrope, transcrise în eforturi, forțe tăietoare și momente. Acestea depind de cinci funcții de două variabile: $u^0_i(x, y)$, $u'_i(x, y)$ și $\overline{w}\,(x, y)$.

2. ECUAȚIILE DE ECHILIBRU ȘI CONDIȚIILE LA LIMITĂ

Plecînd de la ecuațiile de echilibru

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, \qquad (i, j = 1, 2, 3), \tag{17}$$

unde F_i sînt componentele forței de volum, prin integrare pe grosimea plăcii, în raport cu z și ținînd seama de relațiile fizico-geometrice (15), se obține următorul sistem de ecuații al problemei stării elastice a plăcii anizotrope, în cazul existenței unui plan de simetrie elastică perpendicular pe axa oz:

$$L_{11}(B_{ij})\,u^0_1 + L_{12}(B_{ij})\,u^0_2 + L_{13}(A_{ij})\,q^- + \overline{F}_1 + \frac{1}{h}q^+_1 = 0, \tag{18}$$

$$L_{12}(B_{ij})u_1^0 + L_{22}(B_{ij})u_2^0 + L_{23}(A_{ij})q^- + \overline{F}_2 + \frac{1}{h}q_2^+ = 0, \tag{19}$$

$$L_{31}(A_{ij})u_1' + L_{32}(A_{ij})u_2' + L_{33}(A_{ij})\overline{w} + \overline{F}_3 + \frac{1}{h}q^+ = 0, \tag{20}$$

$$\begin{gathered}\left[\frac{h^2}{3}L_{11}(B_{ij}) - A_{55}\right]u_1' + \left[\frac{h^2}{3}L_{12}(B_{ij}) - A_{45}\right]u_2' - L_{31}(A_{ij})\overline{w} + \\ + \frac{h}{3}L_{13}(A_{ij})q^+ + \overline{F_1 z} + q_1^- = 0,\end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered}\left[\frac{h^2}{3}L_{12}(B_{ij}) - A_{45}\right]u_1' + \left[\frac{h^2}{3}L_{22}(B_{ij}) - A_{44}\right]u_2' - L_{32}(A_{ij})\overline{w} + \\ + \frac{h}{3}L_{23}(A_{ij})q^+ + \overline{F_2 z} + q_2^- = 0,\end{gathered} \tag{22}$$

unde

$$\begin{aligned} L_{11}(B_{ij}) &= B_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B_{16}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + B_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{12}(B_{ij}) &= B_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66})\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + B_{26}\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{22}(B_{ij}) &= B_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B_{26}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + B_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{13}(A_{ij}) &= \frac{1}{A_{33}}\left(A_{13}\frac{\partial}{\partial x} + A_{36}\frac{\partial}{\partial y}\right), \\ L_{23}(A_{ij}) &= \frac{1}{A_{33}}\left(A_{36}\frac{\partial}{\partial x} + A_{23}\frac{\partial}{\partial y}\right), \\ L_{31}(A_{ij}) &= A_{55}\frac{\partial}{\partial x} + A_{45}\frac{\partial}{\partial y}, \\ L_{32}(A_{ij}) &= A_{45}\frac{\partial}{\partial x} + A_{44}\frac{\partial}{\partial y}, \\ L_{33}(A_{ij}) &= A_{55}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{45}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + A_{44}\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \end{aligned} \tag{23}$$

Acest sistem de cinci ecuații cu derivate parțiale, avînd drept necunoscute funcțiile u_i^0, u_i', $\overline{w}$ $(i = 1, 2)$, se poate descompune în două sisteme care se rezolvă în mod independent. Sistemul alcătuit din primele două ecuații (18) și (19), avînd drept necunoscute funcțiile u_i^0, descrie starea de tensiune plană generalizată și nu ne va preocupa, iar sistemul alcătuit din ecuațiile (20), (21), (22), avînd drept necunoscute funcțiile u_i' și $\overline{w}$, descrie starea de încovoiere a plăcii.

Funcțiile necunoscute u_i^0, u_i' și $\overline{w}$ trebuie să satisfacă atît sistemul de ecuații cu derivate parțiale, cît și condițiile la limită (sau condițiile de margine) pe suprafața laterală a plăcii. Dacă se notează cu $\mathcal{L}$ frontiera domeniului bidimensional ocupat de placă în planul median, se consideră problema la limită mixtă (a se vedea [2], cap. 6, § 3):

$$\tag{24} \begin{cases} u_i \big|_{\mathcal{L}'} = g_i(x, y, z), \\ w \big|_{\mathcal{L}'} = g_3(x, y, z), \end{cases} \quad (i = 1, 2) \qquad \begin{cases} \sigma_{ni} \big|_{\mathcal{L}''} = f_i(x, y, z), \\ \sigma_{n3} \big|_{\mathcal{L}''} = f_3(x, y, z), \end{cases}$$

unde $\mathcal{L}' \cup \mathcal{L}'' = \mathcal{L}$, $\mathcal{L}' \cap \mathcal{L}'' = \emptyset$.

Presupunînd că forțele de volum și forțele superficiale sînt de așa natură încît să nu apară fenomenul de încovoiere, din datele la limită mixte (24) integrate pe grosimea plăcii, se obțin cele două condiții la limită ale problemei stării plane de tensiune generalizată:

$$\tag{25} \begin{aligned} u_0^i &= \overline{g}_i \quad \text{pe } \mathcal{L}', \\ S_{ik} n_k &= 2 h \overline{f}_i \quad \text{pe } \mathcal{L}''. \end{aligned}$$

În mod analog se obțin condițiile la limită pentru starea de încovoiere a plăcii

$$\tag{26} \begin{aligned} &\overline{w} = \overline{g}_3, \quad u_i' = \frac{3}{h^2} \overline{g_i z} \quad \text{pe } \mathcal{L}' \\ &M_{ik} n_k = 2 h \overline{f_i z}, \quad S_{3k} n_k = 2 h \overline{f}_3 \quad \text{pe } \mathcal{L}''. \end{aligned}$$

3. STAREA DE ÎNCOVOIERE CILINDRICĂ

Prin solicitarea de încovoiere cilindrică a unei plăci se înțelege acea solicitare care face ca în urma deformării planul median să devină o suprafață cilindrică. Pentru a realiza starea de încovoiere cilindrică este suficient ca sarcina și momentele exterioare

$$hF_3 + q^+$$

și

$$\overline{F_1 z} + q_1^-,$$

precum şi condiţiile la limită, să fie funcţii de o singură variabilă, de exemplu x, iar

$$\overline{F_2 z} + \bar{q}_2 \equiv 0. \tag{27}$$

Lungimea plăcii după oy trebuie să fie infinită.

În aceste condiţii, sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale (20), (21), (22) devine

$$\begin{gathered}
A_{55}\frac{\mathrm{d}u_1'}{\mathrm{d}x} + A_{45}\frac{\mathrm{d}u_2'}{\mathrm{d}x} + A_{55}\frac{\mathrm{d}^2\overline{w}}{\mathrm{d}x^2} + q(x) = 0,\\
\frac{h^2}{3}B_{11}\frac{\mathrm{d}^2u_1'}{\mathrm{d}x^2} - A_{55}u_1' + \frac{h^2}{3}B_{16}\frac{\mathrm{d}^2u_2'}{\mathrm{d}x^2} - A_{45}u_2' - A_{55}\frac{\mathrm{d}\overline{w}}{\mathrm{d}x} + r(x) = 0, \qquad (28)\\
\frac{h^2}{3}B_{16}\frac{\mathrm{d}^2u_1'}{\mathrm{d}x^2} - A_{45}u_1' + \frac{h^2}{3}B_{66}\frac{\mathrm{d}^2u_2'}{\mathrm{d}x^2} - A_{44}u_2' - A_{45}\frac{\mathrm{d}\overline{w}}{\mathrm{d}x} + s(x) = 0,
\end{gathered}$$

unde

$$\begin{gathered}
q(x) = \overline{F}_3 + \frac{1}{h}q^+,\\
r(x) = \frac{h}{3}\frac{A_{13}}{A_{33}}q^+_{,1} + \overline{F_1 z} + \bar{q}_1, \qquad (29)\\
s(x) = \frac{h}{3}\frac{A_{36}}{A_{33}}q^+_{,1},
\end{gathered}$$

sînt funcţii definite în intervalul $[0, l]$, care reprezintă deschiderea plăcii.

Sistemul de ecuaţii diferenţiale (28) al stării elastice a plăcii subţiri anizotrope supuse la încovoiere cilindrică se integrează utilizînd transformata Laplace

$$F(p) = \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x = \mathfrak{L} f(x), \quad \text{cu} \quad p = \gamma + i\,\delta. \tag{30}$$

Se presupune că funcţiile $u_i'(x, y)$ şi $\overline{w}(x, y)$, derivatele lor de primele două ordine, precum şi funcţiile $q(x)$, $r(x)$ şi $s(x)$ satisfac condiţiile necesare pentru a li se aplica transformata Laplace.

Sistemul (28) transformat este:

$$\begin{gathered}
A_{55}pU_1'(p) + A_{45}pU_2'(p) + A_{55}p^2\overline{W}(p) + f(p) = 0,\\
\left(\frac{h^2}{3}B_{11}p^2 - A_{55}\right)U_1'(p) + \left(\frac{h^2}{3}B_{16}p^2 - A_{45}\right)U_2'(p) - A_{55}p\overline{W}(p) + g(p) = 0, \qquad (31)\\
\left(\frac{h^2}{3}B_{16}p^2 - A_{45}\right)U_1'(p) + \left(\frac{h^2}{3}B_{66}p^2 - A_{44}\right)U_2'(p) - A_{45}p\overline{W}(p) + h(p) = 0,
\end{gathered}$$

unde

$$U_1'(p) = \mathfrak{L}u_1'(x),\ U_2'(p) = \mathfrak{L}u_2'(x),\ \overline{W}(p) = \mathfrak{L}\overline{w}(x),$$

(32)

$$Q(p) = \mathfrak{L}q(x),\ R(p) = \mathfrak{L}r(x),\ S(p) = \mathfrak{L}s(x),$$

iar

$$f(p) = A_{45}[u_2'(l)\mathrm{e}^{-pl} - u_2'(0)] + A_{55}\ \{[u_1'(l) + \overline{w}_{,1}|_{x=l} +$$

$$+ p\overline{w}(l)]\mathrm{e}^{-pl} - [u_1'(0) + \overline{w}_{,1}|_{x=0} + p\overline{w}(0)]\} + Q(p),$$

$$g(p) = \frac{h^2}{3} B_{11}\{[u_{1,1}'|_{x=l} + pu_1'(l)]\mathrm{e}^{-pl} - [u_{1,1}'|_{x=0} + pu_1'(0)]\} +$$

(33)

$$+ \frac{h^2}{3} B_{16}\{[u_{2,1}'|_{x=l} + pu_2'(l)]\mathrm{e}^{-pl} - [u_{2,1}'|_{x=0} + pu_2'(0)]\} -$$

$$- A_{55}[\overline{w}(l)\,\mathrm{e}^{-pl} - \overline{w}(0)] + R(p),$$

$$h(p) = \frac{h^2}{3} B_{16}\ \{[u_{1,1}'|_{x=l} + pu_1'(l)]\mathrm{e}^{-pl} - [u_{1,1}'|_{x=0} + pu_1'(0)]\} +$$

$$+ \frac{h^2}{3} B_{66}\{[u_{2,1}'|_{x=l} + pu_2'(l)]\mathrm{e}^{-pl} - [u_{2,1}'|_{x=0} + pu_2'(0)]\} -$$

$$- A_{45}[\overline{w}(l)\mathrm{e}^{-pl} - \overline{w}(0)] + S(p).$$

Din sistemul (31) se deduc funcțiile $U_1'(p)$, $U_2'(p)$ și $\overline{W}(p)$, prin inversarea cărora se obțin $u_1'(x)$, $u_2'(x)$ și $\overline{w}(x)$:

$$u_1'(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} U_1'(p)\mathrm{e}^{px}\,\mathrm{d}p = \mathfrak{L}^{-1}U_1'(p),$$

(34)

$$u_2'(x) = \mathfrak{L}^{-1}\ U_2'(p),\ \overline{w}(x) = \mathfrak{L}^{-1}\ \overline{W}(p).$$

Soluția sistemului de ecuații diferențiale cu coeficienți constanți (28) este

$$u_1'(x) = -\ \frac{B_{16}}{B_{11}}\ u_2'(x) - \frac{3}{h^2 B_{11}}\left[\frac{c_0}{2}\ x^2 + (c_1 + c_2)x + c_3 +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_0^x (x - \tau)^2\ q(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_0^x (x - \tau)r(\tau)\mathrm{d}\tau\right],$$

$$
\begin{aligned}
u_2'(x) = {} & \frac{3}{h^2E_0}\left(-\frac{E_1}{A_{55}}c_1 + B_{16}c_2 - B_{11}c_4\right)\frac{\mathrm{sh}\,ax}{a} - \\
& -\left(\frac{E_1}{B_{11}E_2}c_0 - \frac{3B_{16}}{h^2E_0}c_3 + \frac{3B_{11}}{h^2E_0}\cdot c_5\right)\mathrm{ch}\,ax + \frac{E_1}{B_{11}E_2}c_0 + \\
& + \frac{3}{h^2E_0}\int_0^x \frac{\mathrm{sh}\,a(x-\tau)}{a}\left[B_{16}r(\tau) - B_{11}s(\tau)\right]\mathrm{d}\tau - \\
& - \frac{E_1}{B_{11}E_2}\int_0^x \left[\mathrm{ch}\,a(x-\tau) - 1\right]q(\tau)\mathrm{d}\tau, \\
\overline{w}(x) = {} & \frac{E_1}{A_{55}B_{11}}\left(\frac{E_1}{B_{11}E_2}c_0 - \frac{3B_{16}}{h^2E_0}c_3 + \frac{3B_{11}}{h^2E_0}c_5\right)\frac{\mathrm{sh}\,ax}{a} - \\
& - \frac{E_1}{B_{11}^2E_2}\left(-\frac{E_1}{A_{55}}c_1 + B_{16}c_2 - B_{11}c_4\right)\mathrm{ch}\,ax + \\
& + \frac{1}{2h^2B_{11}}c_0x^3 + \frac{3}{2h^2B_{11}}(c_1 + c_2)x^2 + \frac{1}{B_{11}}\left(\frac{3}{h^2}c_3 - \frac{E_3}{B_{11}E_2}c_0\right)x - \\
& - \frac{1}{B_{11}^2E_2}(E_3c_1 + B_{16}c_2 + B_{11}E_1c_4) + \\
& + \frac{E_1^2}{A_{55}B_{11}^2E_2}\int_0^x \frac{\mathrm{sh}\,a(x-\tau)}{a}q(\tau)\mathrm{d}\tau - \\
& - \frac{E_1}{B_{11}^2E_2}\int_0^x \left[\mathrm{ch}\,a(x-\tau) - 1\right]\left[B_{16}r(\tau) - B_{11}s(\tau)\right]\mathrm{d}\tau + \\
& + \frac{1}{2h^2B_{11}}\int_0^x (x-\tau)^3 q(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{3}{2h^2B_{11}}\int_0^x (x-\tau)^2 r(\tau)\mathrm{d}\tau - \\
& - \frac{E_3}{B_{11}^2E_2}\int_0^x (x-\tau)q(\tau)\,\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}
\tag{35}
$$

unde s-a notat

$$
a^2 = \frac{3}{h^2}\,\frac{B_{11}}{A_{55}}\,\frac{A_{44}A_{55} - A_{45}^2}{B_{11}B_{66} - B_{16}^2},
\tag{36}
$$

$\left(\text{pentru placa izotropă } a^2 = \dfrac{3}{h^2}\right)$,

$$
\begin{aligned}
&E_0 = B_{11}B_{66} - B_{16}^2,\\
&E_1 = A_{45}B_{11} - A_{55}B_{16},\\
(37)\qquad &E_2 = A_{44}A_{55} - A_{45}^2,\\
&E_3 = A_{44}B_{11}^2 - 2A_{45}B_{11}B_{16} + A_{55}B_{16}^2,
\end{aligned}
$$

şi

$$
\begin{aligned}
&c_0 = -\,A_{45}u_2'(0) - A_{55}[u_1'(0) + \overline{w}_{,1}|_{x=0}],\\
&c_1 = -\,A_{55}\overline{w}(0),\\
&c_2 = A_{55}\overline{w}(0) - \frac{h^2}{3}[B_{11}u_{1,1}'|_{x=0} + B_{16}u_{2,1}'|_{x=0}],\\
(38)\qquad &c_3 = -\,\frac{h^2}{3}[B_{11}u_1'(0) + B_{16}\,u_2'(0)],\\
&c_4 = A_{45}\overline{w}(0) - \frac{h^2}{3}[B_{16}u_{1,1}'|_{x=0} + B_{66}u_{2,1}'|_{x=0}],\\
&c_5 = -\,\frac{h^2}{3}[B_{16}u_1'(0) + B_{66}u_2'(0)].
\end{aligned}
$$

Constantele de integrare se determină cu ajutorul condiţiilor de margine.

4. APLICAŢIE

Se utilizează rezultatul obţinut la punctul precedent într-un caz concret şi anume pentru soluţionarea problemei plăcii supuse unei sarcini exterioare normale la planul median şi cu distribuţie discontinuă, placa avînd cele două laturi paralele cu axa *oy* încastrate şi de lungime infinită.

Se face abstracţie de forţele de volum, iar condiţiile la limită pe feţe sînt

$$
(39)\qquad
\begin{aligned}
&q_1^-(x) = 0,\; q^s(x) = \sigma_{33}|_{z=+h} = 0,\\
&q^j(x) = -\,\sigma_{33}|_{z=-h} = \begin{cases} 2hq_0, & 0 < x < x_0,\\ 0\;, & x_0 < x < l. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Rezultă

$$q(x)=\frac{1}{h}\,q^{+}=\begin{cases} q_0, & 0<x<x_0,\\ 0, & x_0<x<l.\end{cases} \tag{40}$$

Utilizînd funcția $\delta(x)$ a lui Dirac, funcția $\varepsilon(x)$ a lui Heaviside și ținînd seama de (29), se poate scrie

$$\begin{aligned} q(x) &= q_0[\varepsilon(x)-\varepsilon(x-x_0)],\\ r(x) &= r_0[\delta(x)-\delta(x-x_0)],\\ s(x) &= s_0[\delta(x)-\delta(x-x_0)], \end{aligned} \tag{41}$$

unde

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{h^2}{3}\,\frac{A_{13}}{A_{33}}\,q_0,\\ s_0 &= \frac{h^2}{3}\,\frac{A_{36}}{A_{33}}\,q_0. \end{aligned} \tag{42}$$

Transformatele Laplace ale funcțiilor (41) sînt :

$$\begin{aligned} Q(p) &= \frac{q_0}{p}\,(1-\mathrm{e}^{-px_0}),\\ R(p) &= r_0(1-\mathrm{e}^{-px_0}),\\ S(p) &= s_0(1-\mathrm{e}^{-px_0}). \end{aligned} \tag{43}$$

Soluția problemei puse este dată de funcțiile (35), în care constantele trebuie să fie înlocuite cu valorile lor determinate de condițiile la capete

$$\begin{aligned} u_1'(0) &= u_1'(l)=0,\\ u_2'(0) &= u_2'(l)=0,\\ \overline{w}(0) &= \overline{w}(l)=0. \end{aligned} \tag{44}$$

Pentru a calcula integralele care intervin în (35), se procedează astfel. În expresiile funcților $U_1'(p)$, $U_2'(p)$ și $\overline{W}(p)$ se notează cu $U_1'^{*}(p)$, $U_2'^{*}(p)$ și $\overline{W}^{*}(p)$ contribuția termenilor care depind de $Q(p)$, $R(p)$, $S(p)$, adică de forțele de volum și de datele la limită în tensiuni pe fețele plăcii :

$$U_1'^{*}(p)=-\frac{B_{16}}{B_{11}}\,U_2'^{*}(p)-\frac{3}{h^2B_{11}}\,\frac{Q(p)}{p^3}-\frac{3}{h^2B_{11}}\,\frac{R(p)}{p^2},$$

$$U_2'^{*}(p)=-\frac{3E_1}{h^2A_{55}E_0}\,\frac{Q(p)}{p(p^2-a^2)}+\frac{3B_{16}}{h^2E_0}\,\frac{R(p)}{p^2-a^2}-\frac{3B_{11}}{h^2E_0}\,\frac{S(p)}{p^2-a^2},$$

$$
\begin{aligned}
\overline{W}^{*}(p) = & -\frac{1}{A_{55}}\frac{Q(p)}{p^2-a^2}+\frac{3(A_{44}B_{11}+A_{55}B_{66}-2A_{45}B_{16})}{h^2A_{55}E_0}\frac{Q(p)}{p^2(p^2-a^2)}- \\
& -\,-\frac{9E_2}{h^4A_{55}E_0}\frac{Q(p)}{p^4(p^2-a^2)}+\frac{3(A_{55}B_{66}-A_{45}B_{16})}{h^2A_{55}E_0}\frac{R(p)}{p(p^2-a^2)}- \\
& -\frac{9E_2}{h^4A_{55}E_0}\frac{R(p)}{p^3(p^2-a^2)}+\frac{3E_1}{h^2A_{55}E_0}\frac{S(p)}{p(p^2-a^2)}.
\end{aligned}
\tag{45}
$$

În expresiile (35) ale componentelor deplasării, contribuția termenilor care depind de forțele de volum și de datele la limită în tensiuni pe fețele plăcii s-a dedus folosind teorema relativă la produsul de convoluție a două funcții. Pentru a afla pe $u_1'^{*}(x)$, $u_2'^{*}(x)$ și $\overline{w}^{*}(x)$ în cazul de față, se va înlocui (43) în (45). După aplicarea transformării inverse $\mathfrak{L}^{-1}$ rezultă :

$$
\begin{aligned}
u_1'^{*}(x) = & -\frac{q_0}{B_{11}}\left[\frac{1}{2h^2}x^3+\left(\frac{B_{16}E_1}{B_{11}E_2}+\frac{A_{13}}{A_{33}}\right)x-\right. \\
& \left.-\frac{B_{16}}{B_{11}E_0}\left(\frac{E_0E_1}{E_2}-\frac{A_{13}B_{16}}{A_{33}B_{11}}+\frac{A_{36}}{A_{33}}\right)\frac{\operatorname{sh}ax}{a}\right], \\
u_2'^{*}(x) = & \frac{q_0}{B_{11}E_0}\left[\frac{E_0E_1}{E_2}x-\left(\frac{E_0E_1}{E_2}-\frac{A_{13}B_{16}}{A_{33}B_{11}}+\frac{A_{36}}{A_{33}}\right)\frac{\operatorname{sh}ax}{a}\right], \\
\overline{w}^{*}(x) = & \frac{q_0}{B_{11}E_2}\left[\frac{E_2}{8h^2}x^4-\frac{1}{2}\left(\frac{E_3}{B_{11}}-\frac{A_{13}E_2}{A_{33}}\right)x^2+\right. \\
& \left.+\frac{h^2E_1}{3}\left(\frac{E_1E_0}{B_{11}^2E_2}-\frac{A_{13}B_{16}}{A_{33}B_{11}}+\frac{A_{36}}{A_{33}}\right)(\operatorname{ch}ax-1)\right],
\end{aligned}
\tag{46}
$$

pentru $0 < x < x_0$ și

$$
\begin{aligned}
u_1'^{*}(x) = & -\frac{q_0}{B_{11}}\left\{\frac{1}{2h^2}[x^3-(x-x_0)^3]+\left(\frac{B_{16}E_1}{B_{11}E_2}+\frac{A_{13}}{A_{33}}\right)x_0-\right. \\
& \left.-\frac{B_{16}}{B_{11}E_0}\left(\frac{E_0E_1}{E_2}-\frac{A_{13}B_{16}}{A_{33}B_{11}}+\frac{A_{36}}{A_{33}}\right)\frac{\operatorname{sh}ax-\operatorname{sh}a(x-x_0)}{a}\right\}, \\
u_2'^{*}(x) = & \frac{q_0}{B_{11}E_0}\left[\frac{E_0E_1}{E_2}x_0-\left(\frac{E_0E_1}{E_2}-\frac{A_{13}B_{16}}{A_{33}B_{11}}+\frac{A_{36}}{A_{33}}\right)\frac{\operatorname{sh}ax-\operatorname{sh}a(x-x_0)}{a}\right], \\
\overline{w}^{*}(x) = & \frac{q_0}{B_{11}E_2}\left\{\frac{E_2}{8h^2}[x^4-(x-x_0)^4]-\frac{1}{2}\left(\frac{E_3}{B_{11}}-\frac{A_{13}E_2}{A_{33}}\right)[x^2-(x-x_0)^2]+\right. \\
& \left.+\frac{h^2E_1}{3}\left(\frac{E_1E_0}{B_{11}^2E_2}-\frac{A_{13}B_{16}}{A_{33}B_{11}}+\frac{A_{36}}{A_{33}}\right)[\operatorname{ch}ax-\operatorname{ch}a(x-x_0)]\right\},
\end{aligned}
\tag{47}
$$

pentru $x_0 < x < l$.

Soluţia problemei puse este:

$$
(48)\quad
\begin{aligned}
u_1'(x) &= -\frac{B_{16}}{B_{11}}\,u_2'(x) - \frac{3}{h^2 B_{11}}\left[\frac{\varkappa_0}{2}\,x^2 + (\varkappa_1 + \varkappa_2)\,x\right] + u_1'^*(x),\\
u_2'(x) &= \frac{3}{h^2 E_0}\left(-\frac{E_1}{A_{55}}\,\varkappa_1 + B_{16}\varkappa_2 - B_{11}\varkappa_3\right)\frac{\mathrm{sh}\,ax}{a} -\\
&\quad - \frac{E_1}{B_{11}E_2}\,\varkappa_0(\mathrm{ch}\,ax - 1) + u_2'^*(x),\\
\overline{w}(x) &= \frac{E_1^2}{A_{55}B_{11}^2E_2}\,\varkappa_0\,\frac{\mathrm{sh}\,ax}{a} - \frac{E_1}{B_{11}^2E_2}\left(-\frac{E_1}{A_{55}}\,\varkappa_1 + B_{16}\varkappa_2 -\right.\\
&\quad \left. - B_{11}\varkappa_3\right)\mathrm{ch}\,ax + \frac{1}{2h^2B_{11}}\,\varkappa_0 x^3 + \frac{3}{2h^2B_{11}}\,(\varkappa_1 + \varkappa_2)x^2 -\\
&\quad - \frac{E_3}{B_{11}^2E_2}\,\varkappa_0\,x - \frac{1}{B_{11}^2E_2}\,(E_3\varkappa_1 + B_{16}\varkappa_2 + B_{11}E_1\varkappa_3) + \overline{w}^*(x),
\end{aligned}
$$

unde

$$
(49)\quad
\begin{aligned}
\varkappa_0 &= \frac{2h^2B_{11}E_2}{l}\,\frac{D_{\varkappa_0}}{D},\\
\varkappa_1 &= \frac{2h^2A_{55}B_{16}(1 + E_1)}{3l}\,\frac{D_{\varkappa_1}}{D},\\
\varkappa_2 &= -\frac{B_{11}^2E_2}{A_{55}B_{16}\,(1 + E_1)}\,\varkappa_1,\\
\varkappa_3 &= -\frac{h^2}{3l\,A_{55}\,B_{11}}\,\frac{D_{\varkappa_3}}{D},
\end{aligned}
$$

iar

$$
\begin{aligned}
D &= 3lB_{11}E_2\,\{4h^2B_{11}^2E_2E_3 - 2h^2B_{16}(1 + E_1)\,(B_{11}^2E_2 + E_1^2 +\\
&\quad + A_{55}E_3) + l^2B_{11}E_2[B_{11}^2E_2 - A_{55}B_{16}\,(1 + E_1)]\}\,\frac{\mathrm{sh}\,al}{a} -\\
&\quad - 8h^4\,E_0E_1^2[B_{11}^2E_2 - A_{55}B_{16}(1 + E_1)]\,(\mathrm{ch}\,al - 1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{\varkappa_0} = {} & [3l^2B_{11}^3E_2^2 + B_{16}(1 + E_1)(2h^2A_{55}E_3 - 2h^2B_{11}^2E_2 - \\
& - 2h^2E_1^2 - 3l^2A_{55}B_{11}E_2)]\,\frac{\mathrm{sh}\,al}{a}\,[B_{11}u_1'^*(l) + B_{16}u_2'^*(l)] + \\
& + 2h^2lE_0E_1[B_{11}^2E_2 - A_{55}B_{16}(1 + E_1)]\,(\mathrm{ch}\,al - 1)u_2'^*(l) + \\
& + 6lB_{11}^2E_2[B_{11}^2E_2 - A_{55}B_{16}(1 + E_1)]\,\frac{\mathrm{sh}\,al}{a}\,\overline{w}^*(l), \\
D_{\varkappa_1} = {} & B_{11}\Big[- 3lB_{11}E_2(2h^2E_3 - l^2B_{11}E_2)\,\frac{\mathrm{sh}\,al}{a} + \\
& + 4h^4E_0E_1^2\,(\mathrm{ch}\,al - 1)\Big]u_1'^*(l) + \\
& + \Big[- 3lB_{11}B_{16}E_2(2h^2E_3 - l^2B_{11}E_2)\,\frac{\mathrm{sh}\,al}{a} + \\
& + h^2E_0E_1(4h^2B_{16}E_1 + 3l^2B_{11}E_2)(\mathrm{ch}\,al - 1)\Big]\,u_2'^*(l) + \\
& + 9l^2B_{11}^3E_2^2\,\frac{\mathrm{sh}\,al}{a}\,\overline{w}^*(l),
\end{aligned}
\tag{50}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{\varkappa_3} = {} & - 6lA_{55}B_{11}^2B_{16}E_2(2h^2E_3 - l^2B_{11}E_2)\,[B_{11}^2E_2 + \\
& + E_1(1 + E_1)]\,\frac{\mathrm{sh}\,al}{a}\,u_1'^*(l) + 2h^2A_{55}B_{11}E_0E_1[B_{11}^2E_2(2h^2B_{16}E_1 - \\
& - 2h^2B_{16} + 3l^2B_{11}E_2) + B_{16}(1 + E_1)\,(2h^2A_{55}E_3 + 2h^2E_1^2 - \\
& - 3l^2A_{55}B_{11}E_2)]\,(\mathrm{ch}\,al - 1)\,u_1'^*(l) - 6lB_{11}E_2[B_{11}^2E_2(2h^2A_{55}B_{16}^2E_3 - \\
& - 2h^2E_0E_1^2 - l^2A_{55}B_{11}B_{16}^2E_2) + A_{55}B_{16}E_1(1 + E_1)\,(2h^2B_{16}E_3 + \\
& + 2h^2E_0E_1 - l^2B_{11}B_{16}E_2)]\,\frac{\mathrm{sh}\,al}{a}\,u_2'^*(l) + \\
& + 2h^2A_{55}B_{16}E_0E_1[2B_{11}^2E_2(h^2B_{16}E_1 - h^2B_{16} + 3l^2B_{11}E_2) + \\
& + (1 + E_1)(2h^2A_{55}B_{16}E_3 + 2h^2B_{16}E_1^2 - 3l^2A_{55}B_{11}B_{16}E_2 +
\end{aligned}
$$

$$+ 3l^2B_{11}E_1E_2)]\,(\mathrm{ch}\, al - 1)\, u_2'^*(l) +$$

$$+ 3l^2A_{55}B_{11}E_0E_2\,[\,B_{11}^2E_2(2h^2B_{16}E_1 + 2h^2B_{16} - 4h^2E_3 - l^2B_{11}E_2) +$$

$$+ B_{16}(1 + E_1)\,(2h^2A_{55}E_3 + 2h^2E_1^2 + l^2A_{55}B_{11}E_2)]\, u_2'^*(l) +$$

$$+ 18l^2\, A_{55}B_{11}^3B_{16}E_2^2\,[\,B_{11}^2E_2 + E_1(1 + E_1)]\, \frac{\mathrm{sh}\, al}{a}\, \overline{w}^*(l) +$$

$$+ 12h^2l\, A_{55}B_{11}^2E_0E_1E_2\,[\,B_{11}^2E_2 - A_{55}B_{16}(1 + E_1)](\mathrm{ch}\, al - 1)\overline{w}^*(l).$$

În încheiere, este interesant să se remarce existența în expresiile (35) și (48) ale componentelor vectorului deplasare, a unor termeni cu variație rapidă, care reprezintă acea parte a soluției care are caracter de strat limită. În cele ce urmează se studiază dacă efectul de strat limită poate să apară sau nu independent de celelalte efecte ce rezultă ca urmare a încovoierii cilindrice a plăcii și în ce condiții s-ar produce separarea acestor efecte. Fără a restrînge generalitatea raționamentului, se presupune că sarcinile care acționează pe fețele plăcii sînt nule.

Punînd condiția ca în (35) să apară numai efectul de strat limită, se obține

$$c_0 = 0, \quad c_1 + c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = \frac{B_{16} - E_3}{B_{11}\, E_1}\, c_1. \tag{51}$$

Se deduce soluția căutată

$$u_1'(x) = -\frac{B_{16}}{B_{11}}\, u_2'(x),$$

$$u_2'(x) = -\frac{3}{h^2\, E_0}\, k_1\, \frac{\mathrm{sh}\, ax}{a} - k_2\, \mathrm{ch}\, ax, \tag{52}$$

$$\overline{w}(x) = \frac{E_1}{A_{55}\, B_{11}}\, k_2\, \frac{\mathrm{sh}\, ax}{a} + \frac{E_1}{B_{11}^2E_2}\, k_1\, \mathrm{ch}\, ax,$$

unde

$$k_1 = \frac{A_{55}\, B_{16}\, (1 + E_1) - B_{11}^2\, E_2}{A_{55}\, E_1}\, c_1, \qquad k_2 = \frac{3\, B_{11}}{h^2\, E_0}\, c_5. \tag{53}$$

Existența soluțiilor cu caracter de strat limită fiind dovedită, este util să se vadă căror date la limită le corespunde condiția (51).

Forța tăietoare S_{13}, momentul încovoietor M_{11} și momentul de torsiune M_{12} au în acest caz forma

$$\begin{aligned} &S_{13} = 0, \\ (54)\qquad &M_{11} = 0, \\ &M_{12} = -2h\left(\frac{1}{B_{11}}k_1 \operatorname{ch} ax + \frac{E_2}{A_{55}} k_2 \frac{\operatorname{sh} ax}{a}\right). \end{aligned}$$

Ținînd seama de aceste expresii, precum și de cele ale deplasărilor, nu este greu de văzut că soluția cu caracter de strat limită (52) nu poate fi găsită în cazuri uzuale de solicitare a plăcii. Într-adevăr, condiția (51) este echivalentă cu

$$\begin{aligned} &M_{11}\big|_{x=0,l} = 0, \\ (55)\qquad &\left(\overline{w} + \frac{E_1}{2h\,B_{11}E_2} M_{12}\right)_{x=0,l} = 0, \end{aligned}$$

care nu are o semnificație practică (decît pentru placa ortotropă pentru care $E_1 = 0$). Acest rezultat apare ca urmare a faptului că s-a presupus că materialul din care este alcătuită placa prezintă un grad avansat de anizotropie. Dacă se consideră sistemul de ecuații diferențiale pe care îl satisfac componentele deplasărilor la încovoierea cilindrică a plăcii ortotrope, soluția sistemului este

$$\begin{aligned} &u_1'(x) = -\frac{3}{h^2 B_{11}}\left[\frac{c_0}{2}x^2 + (c_1 + c_2)x + c_3\right], \\ &u_2'(x) = -\frac{3}{h^2 B_{66}}\left(c_4 \frac{\operatorname{sh} ax}{a} + c_5 \operatorname{ch} ax\right), \\ (56)\qquad &\overline{w}(x) = \frac{1}{2h^2 B_{11}} c_0 x^3 + \frac{3}{2h^2 B_{11}}(c_1 + c_2)x^2 + \\ &\qquad + \frac{1}{B_{11}}\left(\frac{3}{h^2}c_3 - \frac{B_{11}}{A_{55}}c_0\right)x - \frac{1}{A_{55}}c_1. \end{aligned}$$

Ea are caracter de strat limită dacă

$$(57)\qquad c_0 = 0, \quad c_1 + c_2 = 0, \quad c_3 = 0.$$

Pentru ca să se obţină (57), este suficient, de exemplu, să se impună

$$M_{11}|_{x=0,l} = 0, \qquad \overline{w}|_{x=0,l} = 0. \tag{58}$$

Se ajunge deci la o condiţie cu caracter fizic evident şi anume la condiţia ca placa să fie simplu rezemată. Prin urmare, într-o placă izotropă sau ortotropă (enumerarea nu este exhaustivă), atît efectul de strat limită, cît şi celelalte efecte provocate de încovoierea cilindrică, se manifestă în mod independent şi pot fi obţinute separat.

S-a dovedit astfel că creşterea gradului de anizotropie a materialului determină în soluţia problemei apariţia simultană şi interdependenţa efectului de strat limită şi a celorlalte efecte ale încovoierii.

Primită la redacţie la 18 ianuarie 1969

Institutul de Matematică al Academiei
Republicii Socialiste România, Calea Griviţei
nr. 21, Bucureşti 12

РЕЗЮМЕ

Распространяется двухмерная уточненная теория и получаются уравнения равновесия анизотропной упругой пластины в случае существования плоскости упругой симметрии, перпендикулярной к оси *oz*. Приводится решение этой системы уравнений в частном случае цилиндрического изгиба пластины и делаются некоторые замечания относительно влияния степени анизотропии материала на эффект пограничного слоя.

BIBLIOGRAFIE

1. MANEA V., *Cîteva probleme ale teoriei plăcilor plane elastice.* Edit. Academiei, Bucureşti, 1966.
2. SOLOMON L., *Elasticité linéaire.* Masson et Cie, Paris, 1968.
3. SNEDDON I., *Fourier Transforms.* New York — Toronto — London, 1951.
4. АМБАРЦУМЯН С. А., *Теория анизотропных пластин.* Изд. „Наука'', Москва, 1967.
5. — *Теория анизотропных оболочек.* Физматгиз, Москва, 1961.

ASUPRA UNEI GENERALIZĂRI A INEGALITĂŢII LUI HŐLDER

DE

I. SĂCUIU

Într-o lucrare anterioară am dat o generalizare a inegalităţii lui Hölder din care obţinem o generalizare a inegalităţii lui Schwarz.
În Nota de faţă se extinde acest rezultat şi se dau condiţiile necesare şi suficiente ca inegalitatea să se transforme în egalitate.

În lucrarea [3] am arătat că este adevărată

Lema 1. *Dacă* $X_1, \ldots, X_n$ *sînt* n *variabile aleatoare care satisfac condiţiile*

$$E(|X_1X_2\ldots X_n|) < \infty,\ E(|X_1|^{p_1}) < \infty, E(|X_2|_{q_1q_2}) < \infty,\ E(|X_3|^{q_1q_2p_3}) < \infty$$

$$\ldots, E(|X_{n-1}|^{q_1q_2\cdots q_{n-2}p_{n-1}}) < \infty, E(|X_n|^{q_1q_2\cdots q_{n-2}q_{n-1}}) < \infty,$$

unde

$$\frac{1}{p_j} + \frac{1}{q_j} = 1,\ p_j > 1,\ 1 \leqslant j \leqslant n-1$$

atunci

$$E(|X_1X_2\ldots X_n|) \leqslant E^{1/p_1}(|X_1|^{p_1})\, E^{1/q_1p_2}(|X_2|^{q_1p_2})\, E^{1/q_1q_2p_3}(|X_3|^{q_1q_2p_3})\ldots$$

$$\ldots E^{1/q_1q_2\cdots q_{n-2}p_{n-1}}(|X_{n-1}|^{q_1q_2\cdots q_{n-2}p_{n-1}})\, E^{1/q_1q_2\cdots q_{n-2}q_{n-1}}(|X_n|^{q_1q_2\cdots q_{n-2}q_{n-1}})$$

Demonstraţia rezultă printr-o aplicare succesivă a inegalităţii lui Hölder obişnuite.

S .CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 9, P. 1429–1433, BUCUREŞTI, 1969

Din această inegalitate generală, pe care am numit-o inegalitatea Hölder generalizată, prin particularizarea sistemului de numere p_j, q_j, $1 \leqslant j \leqslant n-1$ după cum urmează:

$$p_1 = n,\ q_1 = \frac{n}{n-1};\ p_2 = n-1,\ q_2 = \frac{n-1}{n-2};\ p_3 = n-2,\ q_3 = \frac{n-2}{n-3};\ \ldots;\ p_{n-1} = 2,\ q_{n-1} = 2$$

rezultă următorul

COROLAR. *Dacă* $E(|X_1X_2 \ldots X_n|) < \infty$, $E(|X_j|^n) < \infty\ 1 \leqslant j \leqslant n$, *atunci*

$$E(|X_1X_2 \ldots X_n|) \leqslant \prod_{j=1}^{n} E^{1/n}(|X_j|^n)$$

Dacă în condițiile lemei 1 se înlocuiește condiția $p_j > 1$ $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ cu condiția $p_j < 1$ $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$, atunci se obține o inegalitate Hölder generalizată, contrară celei obținute. Avem astfel

LEMA 2. *Dacă* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *sînt* n *variabile aleatoare care satisfac relațiile:*

$$E(|X_1X_2 \ldots X_n|) < \infty,\ E(|X_1|^{p_1}) < \infty,\ E(|X_2|^{q_1p_2}) < \infty,$$
$$E(|X_3|^{q_1q_2p_3}) < \infty, \ldots, E(|X_{n-1}|^{q_1q_2\ldots q_{n-2}p_{n-1}}) < \infty,$$
$$E(|X_n|^{q_1q_2\ldots q_{n-2}q_{n-1}}) < \infty,$$

unde

$$\frac{1}{p_j} + \frac{1}{q_j} = 1,\ p_j < 1,\quad 1 \leqslant j \leqslant n-1$$

atunci

$$E(|X_1X_2 \ldots X_n|) \geqslant E^{1/p_1}(|X_1|^{p_1})\, E^{1/q_1p_2}(|X_2|^{q_1p_2}) \cdot E^{1,q_1q_2p_3}(|X_3|^{q_1q_2p_3}) \ldots$$
$$\ldots E^{1/q_1q_2\ldots q_{n-2}q_{n-1}}(|X_{n-1}|^{q_1q_2\ldots q_{n-2}p_{n-1}})\, E^{1/q_1q_2\ldots q_{n-2}q_{n-1}}(|X_n|^{q_1q_2\ldots q_{n-2}q_{n-1}})$$

Demonstrația se face la fel ca pentru cazul $p_j > 1$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$ aplicînd succesiv inegalitatea lui Hölder obișnuită, de data aceasta pentru cazul cînd $p_j < 1$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$.

Să vedem acum în ce condiții inegalitatea lui Hölder generalizată se transformă în egalitate.

Pentru aceasta să observăm că aplicînd pentru prima dată inegalitatea lui Hölder obișnuită, rezultă că avem egalitate dacă și numai dacă

$$(*) \qquad |X_2X_3 \ldots X_n|^{q_1} = |\lambda_1|\, |X_1|^{p_1}.$$

Aplicînd pentru a doua oară inegalitatea lui Hölder obişnuit rezultă că obţinem egalitate dacă şi numai dacă

$$(^{**}) \qquad |X_3X_4 \dots X_n|^{q_1q_2} = |\lambda_2|\,|X_2|^{q_1p_2}.$$

Repetînd succesiv acest raţionament rezultă că aplicînd ultima dată inegalitatea lui Hölder obişnuită se obţine egalitate dacă şi numai dacă

$$(^*{}_*{}^*) \qquad |X_n|^{q_1q_2\dots q_{n-2}q_{n-1}} = |\lambda_{n-1}|\,|X_{n-1}|^{q_1q_2\dots q_{n-2}p_{n-1}},$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ sînt constante aproape sigur.

Din relaţiile (*) şi (**) rezultă că putem scrie

$$|X_2|^{q_1}|X_3 \dots X_n|^{q_1} = |\lambda_1|\,|X_1|^{p_1}$$

sau

$$|X_2|^{q_1}\,|\lambda_2|^{1/q_2}\,|X_2|^{q_1\frac{p_2}{q_2}} = |\lambda_1|\,|X_1|^{p_1}$$

adică

$$|\lambda_2|^{1/q_2}\,|X_2|^{q_1(1+\frac{p_2}{q_2})} = |\lambda_1|\,|X_1|^{p_1}$$

de unde se obţine în definitiv că

$$|X_2|^{q_1p_2} = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|^{1/q_2}}\,|X_1|^{p_1}.$$

Mai departe, relaţia

$$|X_4X_5 \dots X_n|^{q_1q_2q_3} = |\lambda_3|\,|X_3|^{q_1q_2p_3}$$

combinată cu relaţia

$$|X_3|^{q_1q_2}\,|X_4X_5 \dots X_n|^{q_1q_2} = |\lambda_2|\,|X_2|^{q_1p_2}$$

ne conduce la

$$|X_3|^{q_1q_2}\,|\lambda_3|^{1/q_3}\,|X_3|^{q_1q_2\frac{p_3}{q_3}} = |\lambda_2|\,\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|^{1/q_2}}\,|X_1|^{p_1}$$

sau

$$|X_3|^{q_1q_2p_3} = |\lambda_1|\,|\lambda_2|^{1/p_2}\,\frac{1}{|\lambda_3|^{1/q_3}}\,|X_1|^{p_1}.$$

Procedînd în mod analog obţinem

$$|X_4|^{q_1q_2q_3p_4} = |\lambda_1|\,|\lambda_2|^{1/p_2}\,|\lambda_3|^{1/p_3}\,\frac{1}{|\lambda_4|^{1/b_4}}\,|X_1|^{p_1}$$

și tot așa mai departe

$$|X_{n-1}|^{q_1 q_2 \ldots q_{n-2} p_{n-1}} = |\lambda_1|\, |\lambda_2|^{1/p_2} \ldots |\lambda_{n-2}|^{1/p_{n-2}} \frac{1}{|\lambda_{n-1}|^{1/q_{n-1}}} |X_1|^{p_1}$$

precum și

$$|X_n|^{q_1 q_2 \ldots q_{n-2} q_{n-1}} = |\lambda_1|\, |\lambda_2|^{1/p_2} \ldots |\lambda_{n-2}|^{1/p_{n-2}} |\lambda_{n-1}|^{1/p_{n-1}} |X_1|^{p_1}.$$

Dacă notăm acum

$$|\nu_1| = |\lambda_1|$$

$$|\nu_2| = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|^{1/p_2}}$$

$$|\nu_3| = |\lambda_1|\, |\lambda_2|^{1/p_2} \frac{1}{|\lambda_3|^{1/q_3}}$$

$$|\nu_4| = |\lambda_1|\, |\lambda_2|^{1/p_2} |\lambda_3|^{1/p_3} \frac{1}{|\lambda_4|^{1/q_4}}$$

. . . .

$$|\nu_{n-1}| = |\lambda_1|\, |\lambda_2|^{1/p_2} \ldots |\lambda_{n-2}|^{1/p_{n-2}} \frac{1}{|A_{n-1}|^{1/q_1}}$$

$$|\nu_n| = |\lambda_1|\, |\lambda_2|^{1/p_2} \ldots |\lambda_{n-2}|^{1/p_{n-2}} |\lambda_{n-1}|^{1/p_{n-1}}$$

obținem condiția necesară și suficientă ca inegalitatea Hölder generalizată să se transforme în egalitate dată de următoarele relații :

$$|X_2|^{q_1 q_2} = |\nu_2|\, |X_1|^{p_1}$$

$$|X_3|^{q_1 q_2 p_3} = |\nu_3|\, |X_1|^{p_1}$$

. . . .

$$|X_{n-1}|^{q_1 q_2 \ldots q_{n-2} p_{n-1}} = |\nu_{n-1}|\, |X_1|^{p_1}$$

$$|X_n|^{q_1 q_2 \ldots q_{n-2} q_{n-1}} = |\nu_n|\, |X_1|^{p_1}$$

Particularizînd acum valorile p_j, q_j, $p_j > 1$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$ prin cele care ne-au condus la inegalitatea Schwartz generalizată, obținem condiția necesară și suficientă ca această inegalitate să devină egalitate.

Această condiţie este dată de relaţiile

$$|X_2|^n = |\nu_2|\ |X_1|^n$$
$$|X_3|^n = |\nu_3|\ |X_1|^n$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$|X_{n-1}|^n = |\nu_{n-1}|\ |X_1|^n$$
$$|X_n|^n = |\nu_n|\ |X_1|^n$$

cu $|\nu_2|, |\nu_3|, \dots, |\nu_n|$ obţinute adecvat prin particularizarea indicată.

Primită la redacţie la 24 decembrie 1968

Centrul de statistică matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Calea Griviţei nr. 21,
Bucureşti 12

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE L'INÉGALITÉ DE HÖLDER

(RÉSUMÉ)

Dans cette note on complète un résultat concernant l'inégalité de Hölder obtenu dans [3].

On indique aussi la condition nécessaire et suffisante pour que les inégalités généralisées de Hölder et Schwartz deviennent des égalités.

BIBLIOGRAFIE

1. Beckenbach, E. F., Bellman R., *Inequalities.* Springer-Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1961.
2. Loeve, M., *Probability Theory.* Third Edition ,,Van Nostrand", Princeton—Toronto — New York, 1963.
3. Săcuiu, I., *Sur la notion de fonction de corrélation d'un processus aléatoire.* (sub tipar).

ASUPRA OPERATORILOR DISIPATIVI CU COMPONENTA IMAGINARĂ COMPLET CONTINUĂ

DE

NICOLAE ŢIŢĂ

(Braşov)

Se dă o condiţie ca şirul bazelor ortonormale ale subspaţiilor proprii $\mathfrak{Z}_{\lambda_i}$ ale unui operator disipativ să formeze o bază p-apropiată de o bază ortonormală pentru $\mathfrak{Z}$ (învelişul liniar al lui $\mathfrak{Z}_{\lambda_i}$).

În cursul lucrării se vor folosi în general notaţiile şi noţiunile din [1] şi [3].

Fie A un operator mărginit din spaţiul Hilbert H. Acest operator se va numi disipativ dacă $\operatorname{Im}(A\varphi, \varphi) \geqslant 0$ (ceea ce revine, în cazul operatorilor mărginiţi, la faptul că $A_{\mathfrak{J}}$ — componenta imaginară — să fie nenegativă).

Fie $\{\lambda_j\}$ sistemul valorilor proprii nenule şi diferite ale operatorului A cu componenta imaginară complet continuă. Fie $\{\mathfrak{L}_j\}$ subspaţiile rădăcina corespunzătoare. Este ştiut [2] că în aceste condiţii $\{\lambda_j\}$ sînt izolate şi $\mathfrak{L}_j$ este de dimensiune finită.

Luăm $r_k > 0 (k = 1, 2, \ldots)$, astfel ca $|\lambda - \lambda_k| < r_k$ să nu conţină valori proprii $\lambda_j \neq \lambda_k$. Atunci

$$P_k = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda - \lambda_k| = r_k} (A - \lambda I)^{-1}\, d\lambda \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

este un proiector $(P_k H = \mathfrak{L}_k,\ P_k \mathfrak{L}_j = 0,\ j \neq k)$

Se poate arăta că

PROPOZIŢIA 1. *Şirul* $\{\psi_j\}$ *format din bazele tuturor subspaţiilor* $\mathfrak{L}_j$ *este* ω*-liniar independent.*

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 9, P. 1435–1439, BUCUREŞTI, 1969

Demonstrație. Dacă $\sum c_j \psi_j = 0$, atunci $P_k(\sum c_j \psi_j) = \sum\limits_{j=m_k+1}^{m_{k+1}} c_j \psi_j = 0$, unde $\{\psi_j\}$, $(j = m_k + 1,\ m_k + 2, \ldots,\ m_{k+1})$, este baza lui $\mathfrak{L}_k$ şi deci $c_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots)$.

Fie $\mathfrak{Z}_\lambda$ subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii λ.

TEOREMA 1. *Dacă A este un operator liniar mărginit disipativ cu componenta imaginară complet continuă și $\{\lambda_j\}$ sistemul valorilor proprii diferite și dacă există relația*

$$\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{\infty} \min(n_j, n_k) \left(\frac{\sqrt{Im\,\lambda_j Im\,\lambda_k}}{|\lambda_j - \overline{\lambda}_k|}\right)^p < \infty \quad (n_j = \dim \mathfrak{Z}_{\lambda_j}),$$

atunci șirul format din bazele ortonormale ale subspațiilor $\mathfrak{Z}_{\lambda_j}$ formează o bază p-apropiată de o bază ortonormală în $\mathfrak{Z}$ (învelișul linear al lui $\{\mathfrak{Z}_{\lambda_i}\}$), $p \geqslant 2$.

Demonstrație. Menţionăm mai întîi că pentru operatorii disipativi subspaţiul propriu $\mathfrak{Z}_{\lambda_j}$ corespunzător unei valori reale λ_j este ortogonal cu fiecare din celelalte subspaţii proprii (se poate vedea [3], cap. V).

Vom presupune deci că λ_j nu sînt reale şi deci $\mathfrak{Z}_{\lambda_j}$ vor fi de dimensiune finită. Aplicînd formei bilineare pozitive $(A_{\mathfrak{J}}\, \varphi, \psi)$ inegalitatea Cauchy-Buniakovski se obţine:

$$|(A_{\mathfrak{J}}\, \varphi, \psi)| \leqslant \sqrt{(A_{\mathfrak{J}}\, \varphi, \varphi)\,(A_{\mathfrak{J}}\, \psi, \psi)}.$$

Dacă φ şi ψ sînt axe din subspaţiile $\mathfrak{Z}_{\lambda_j}$, $\mathfrak{Z}_{\lambda_k}$ respectiv, se obţine

$$(A_{\mathfrak{J}}\, \varphi, \psi) = \frac{1}{2i}\,[(A\, \varphi, \psi) - (\varphi, A\, \psi)] = \frac{1}{2i}\,(\lambda_j - \overline{\lambda}_k)\,(\varphi, \psi)$$

şi

$$(A_{\mathfrak{J}}\, \varphi, \varphi) = \operatorname{Im}\,(A\, \varphi, \varphi) = \operatorname{Im}\, \lambda_j, \quad (A_{\mathfrak{J}}\, \psi, \psi) = \operatorname{Im}\, \lambda_k.$$

Deci

$$|(\varphi, \psi)|^p \leqslant \frac{\sqrt{\operatorname{Im}\, \lambda_j\, \operatorname{Im}\, \lambda_k}^{\,p}}{|\lambda_j - \overline{\lambda}_k|^p} \cdot 2^p = c_{jk}.$$

Notăm cu $\varphi_r (r = 1, 2, \ldots, n_j)$ şi $\psi_q (q = 1, 2, \ldots, n_k)$, bazele ortonormale în $\mathfrak{Z}_{\lambda_j}$, $\mathfrak{Z}_{\lambda_k}$. Atunci vectorul $\psi = \sum\limits_q (\varphi_r, \psi_q)\, \psi_q \in \mathfrak{Z}_{\lambda_k}$ şi $\varphi_r \in \mathfrak{Z}_{\lambda_j}$.

Vom avea

$$c_{jk} \geqslant |(\psi, \varphi_r)|^p = \sum_{q=1}^{n_k} |(\psi_2, \varphi_r)|^p \qquad (r = 1, 2, \ldots, n_j).$$

Deci

$$\sum_{r=1}^{n_j} \sum_{q=1}^{n_k} |(\psi_q, \varphi_r)|^p \leqslant n_j \, c_{ik}.$$

Schimbînd rolurile se obţine în final

$$\sum_{r=1}^{n_j} \sum_{q=1}^{n_k} |(\psi_q, \varphi_r)|^p \leqslant \min(n_j, n_k) \frac{2^p \sqrt{\operatorname{Im} \lambda_j \operatorname{Im} \lambda_k}^{\,p}}{|\lambda_j - \bar{\lambda}_k|^p} < \infty.$$

Dacă notăm cu A matricea Gramm a şirului obţinut prin reuniunea tuturor bazelor ortonormale din $\mathfrak{Z}_{\lambda_j}$, se observă că $\mathfrak{A} - I$ generează un operator de clasă $\mathfrak{S}_p$ şi deci din [4] rezultă că $\{\psi_j\}$ este o bază p-apropiată de o bază ortonormală în $\mathfrak{Z}$.

Vom prezenta un rezultat pentru bazele din subspaţiile rădăcină.

TEOREMA 2. *Fie A un operator mărginit disipativ cu componenta imaginară complet continuă ale cărui valori proprii sînt λ_j ($\lambda_j \neq \lambda_k$). Dacă sînt îndeplinite condiţiile*

$$\sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{m_j m_k \operatorname{Im} \lambda_j \operatorname{Im} \lambda_k}}{(\lambda_j - \bar{\lambda}_k)} \right)^p < \infty \quad ^{1)}$$

şi

$$\overline{\lim_{\substack{j,k \to \infty \\ j \neq k}}} \, (m_j - 1) \frac{\operatorname{Im} \lambda_j}{|\lambda_j - \bar{\lambda}_k|} < \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

atunci şirul subspaţiilor rădăcină $\mathfrak{L}_{\lambda_j}$ formează o bază a învelişului lor linear $\mathfrak{L}$, p-apropiată de o bază ortogonală ($p \geqslant 2$).

Demonstraţie. Este ştiut [1] că

$$\cos \varphi(\mathfrak{L}_{\lambda_1}, \mathfrak{L}_{\lambda_2}) \leqslant \frac{2\sqrt{m_1 m_2 \operatorname{Im} \lambda_1 \operatorname{Im} \lambda_2}}{|\lambda_1 - \bar{\lambda}_2|} \sum_{j=0}^{m_1 - 1} a_1^j \sum_{k=0}^{m_2 - 1} a_2^k,$$

---

1) $m_j = m_{\lambda_j} \sup_{\varphi \in \mathfrak{L}_{\lambda_j}} m_\varphi$ (m_φ este ordinul vectorului rădăcină φ, adică cel mai mic număr natural pentru care $(A - \lambda I)^m \varphi = 0$.

unde

$$a_k = \frac{2\sqrt{2}\,(m_k - 1)\operatorname{Im}\lambda_k}{|\lambda_1 - \bar{\lambda}_2|}.$$

Fără a restrînge generalitatea vom presupune $\lambda_j\,(j = 1, 2, \ldots)$, nereale; atunci $\mathcal{L}_{\lambda_j}$ vor fi de dimensiune finită.

Din ipoteze rezultă că mulțimea numerelor

$$M_{jk} = \sum_{r=1}^{m_j - 1} a_{jk}^r (j, k = 1, 2, \ldots) \text{ cu } a_{jk} = \frac{2\sqrt{2}\,(m_j - 1)\operatorname{Im}\lambda_j}{|\lambda_j - \bar{\lambda}_k|}$$

este mărginită.

Fie

$$M = \sup_{j,\,k} M_{jk}$$

Rezultă că

$$\cos^p \varphi(\mathcal{L}_{\lambda_j}, \mathcal{L}_{\lambda_k}) \leqslant M^{2p} \frac{2^p \sqrt{m_j\, m_k \operatorname{Im}\lambda_j \operatorname{Im}\lambda_k}^{\,p}}{|\lambda_j - \bar{\lambda}_k|^p}$$

Ținînd seama de enunț, se obține $\sum_{\substack{j,\,k=1\\ j\neq k}}^{\infty} \cos^p \varphi(\mathcal{L}_{\lambda_j}, \mathcal{L}_{\lambda_k}) < \infty.$

În baza teoremei 3 din [4] rezultă că $\{\mathcal{L}_{\lambda_j}\}$ formează o bază p-apropiată de o bază ortogonală.

Primită la redacție la 23 decembrie 1968

Institutul politehnic Brașov

SUR LES OPÉRATEURS DISSIPATEURS À COMPOSANTE IMAGINAIRE COMPLÈTEMENT CONTINUE

(RÉSUMÉ)

On donne une condition pour laquelle la séquence des bases ortho-normales des sous-espaces propres $\mathfrak{Z}_{\lambda_i}$ d'un opérateur dissipateur détermine une base p-approchée d'une base ortho-normale pour $\mathfrak{Z}$ (l'enveloppe linéaire de $\mathfrak{Z}_{\lambda_i}$).

BIBLIOGRAFIE

1. А. С. Маркус, *О базисе из корневых векторов диссипативного оператора.* ДАН СССР, *3* (1960).
2. F. Riesz, B. Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle.* Acad. des sciences de Hongrie, 1953.
3. И. Т. Гохберг, М. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.* Moscova, 1965.
4. N. Ţiţă, *În legătură cu bazele de subspaţii.* Annalele universităţii Bucureşti (sub tipar).
5. N. Ţiţă, *Asupra bazelor p-apropiate de o bază ortonormală în spaţii Hilbert.* St. cerc. mat. **21**, *2* (1969).

VECTORI PROBABILISTICI ÎN SPAȚIUL DE CURBURĂ CONSTANTĂ NEGATIVĂ

DE

G. G. VRĂNCEANU

Se demonstrează că pe planul Bolyai-Lobacevsky există cîmpuri de probabilitate definite în întreg planul, depinzînd de una sau de două variabile.

Se știe [1] că un proces Markov continuu de n stări este definit printr-un sistem de n vectori independenți contravarianți $\mu^i_a(s)$, $(1 \leqslant i, a \leqslant n)$, unde s variază într-un interval oarecare.

Probabilitățile fundamentale sînt atunci definite prin formulele

$$P^i_j(s, t) = \sum_{a=1}^{n} \mu^i_a(s)\, \lambda^a_j(t), \qquad (1 \leqslant i, j \leqslant n), \tag{1}$$

unde λ^a_j sînt componentele covariante ale sistemului dual și avem condițiile [2]

$$\mu^i_a(s)\, \lambda^a_j(s) = \delta^i_j. \tag{2}$$

Trebuie ca $P^i_j(s, t)$ să fie pozitive pentru $s \leqslant t$.

Se pot considera în locul singurei variabile s, n variabile s^1, $s^2, \ldots, s^n$ și la fel pentru variabila t. În acest caz, vectorii $\mu^i_a(s)$ sînt vectori independenți într-o regiune oarecare a spațiului $V_n(s^1, s^2, \ldots, s^n)$ cu n dimensiuni și probabilitățile $P^i_j(s, t)$ trebuie să fie pozitive pentru două puncte $Q(s^i)$ și $R(t^i)$ dacă $s \leqslant t$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Presupunem că avem ca sistem vectori contravarianți μ^i_a, sistemul definit prin formulele [3]

$$\left\{ \begin{aligned} \mu^i_a &= \frac{1}{n} - e^{s^a}, \qquad i \neq a \\ \mu^i_i &= \frac{1}{n} - e^{s^i} + \Delta \end{aligned} \right. \tag{3}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, Nr. 9, P. 1441–1446, BUCUREȘTI, 1969

unde am notat

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} e^{s^i} \tag{4}$$

și unde Δ este în același timp determinantul $|\mu^i_a|$, deci sistemul de vectori μ^i_a este independent în tot spațiul.

În ceea ce privește vectorii covarianți duali, componentele lor se scriu

$$\left\{\begin{aligned} \lambda^a_i &= \frac{1}{\Delta}\left(\mathrm{e}^{s^i} - \frac{1}{n}\right), \qquad a \neq i \\ \lambda^i_i &= \frac{1}{\Delta}\left(\mathrm{e}^{s^i} + \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Metrica asociată se scrie în acest caz

$$\mathrm{d}\sigma^2 = a_{ij}\,\mathrm{d}s^i\,\mathrm{d}s^j, \qquad (d_{ij} = \lambda^a_i\,\lambda^a_j)$$

sau

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \frac{1}{n\Delta^2}\left[\Phi + n^2(\mathrm{e}^{s^i}\,\mathrm{d}s^i)^2\right] \tag{6}$$

unde am notat cu Φ forma pătratică

$$\Phi = (n-1)\,(\mathrm{d}s^i)^2 - 2\mathrm{d}s^j\,\mathrm{d}s^k, \qquad j \neq k.$$

Cum discriminantul acestei forme pătratice în diferențialele $\mathrm{d}s^i$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$, se scrie

$$\begin{vmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix},$$

acest determinant este nul, deci forma pătratică Φ se poate scrie sub forma

$$\Phi = (\mathrm{d}y^1)^2 + (\mathrm{d}y^2)^2 + \dots + (\mathrm{d}y^{n-1})^2,$$

unde $y^1, y^2, \dots, y^{n-1}$ sînt combinații liniare ale variabilelor $s^1, s^2, \dots, s^n$. Punînd de asemenea

$$y^n = n(\mathrm{e}^{s^1} + \mathrm{e}^{s^2} + \dots + \mathrm{e}^{s^n})$$

metrica (6) se scrie

$$\mathrm{d}\sigma^2 = n\frac{(\mathrm{d}y^1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}y^n)^2}{(y^n)^2},$$

ceea ce ne spune că metrica este de curbură constantă negativă.

Rezultă deci că procesul Markov este valabil în tot spațiul.

În ceea ce privește probabilitățile fundamentale, acestea sînt date de formulele

$$P_1^1(s, t) = \frac{\mathrm{e}^{s^2} + \mathrm{e}^{s^3} + \ldots + \mathrm{e}^{s^n} + \mathrm{e}^{t^1}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t^i}}, \quad P_2^1(s, t) = \frac{\mathrm{e}^{t^2} - \mathrm{e}^{s^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t^i}}, \ldots,$$

$$P_n^1(s, t) = \frac{\mathrm{e}^{t^n} - \mathrm{e}^{s^n}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t^i}}$$

$$P_1^2(s, t) = \frac{\mathrm{e}^{t^1} - \mathrm{e}^{s^1}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t^i}},$$

$$P_2^2(s, t) = \frac{\mathrm{e}^{s^1} - \mathrm{e}^{s^3} + \ldots + \mathrm{e}^{s^n} + \mathrm{e}^{t^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t^i}}, \ldots, P_n^2(s, t) = \frac{\mathrm{e}^{t^n} - \mathrm{e}^{s^n}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t^i}}$$

. . . .

$$P_1^n(s, t) = \frac{\mathrm{e}^{t^1} - \mathrm{e}^{s^1}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t^i}}, \quad P_2^n = \frac{\mathrm{e}^{t^2} - \mathrm{e}^{s^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t^i}}, \ldots, \quad P_n^n = \frac{\mathrm{e}^{s^1} + \ldots + \mathrm{e}^{s^n} + \mathrm{e}^{t^n}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t^i}}$$

În cazul $n = 2$, metrica naturală, adică metrica asociată sistemului probabilistic corespunzător, este cu curbură constantă negativă pentru $\varphi = \psi$. Avem

$$\mathrm{d}\sigma^2 = a_{11}(\mathrm{d}s^1) + 2a_{12}\,\mathrm{d}s^1\,\mathrm{d}s^2 + a_{22}(\mathrm{d}s^2)^2$$

sau

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \frac{(\mathrm{d}s^1 - \mathrm{d}s^2)^2 + 4(\psi \mathrm{d}s^1 + \varphi \mathrm{d}s^2)^2}{2(\varphi + \psi)^2}.$$

Luînd $\varphi = \mathrm{e}^{s^1}$, $\psi = \mathrm{e}^{s^2}$, se găsește un sistem probabilistic.

Metrica devine

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \frac{(\mathrm{d}s^1 - \mathrm{d}s^2) + 4[\mathrm{d}(\mathrm{e}^{s^1} + \mathrm{e}^{s^2})]^2}{2(\mathrm{e}^{s^1} + \mathrm{e}^{s^2})^2} \tag{7}$$

Este suficient să se pună

$$x = s^1 - s^2, \qquad y = 2(e^{s^1} + e^{s^2}) \tag{8}$$

pentru ca metrica să devină

$$d\sigma^2 = 2\,\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

şi coincide, abstracţie făcînd de factorul 2, cu metrica semiplanului Poincaré, deci a planului Lobacevsky-Bolyai.

Formulele care ne dau probabilităţile fundamentale se scriu

$$\begin{cases} P_1^1(s, t) = \dfrac{e^{t^1} + e^{s^2}}{e^{t^1} + e^{t^2}}, & P_2^1(s, t) = \dfrac{e^{t^2} - e^{s^2}}{e^{t^1} + e^{t^2}}, \\[2ex] P_1^2(s, t) = \dfrac{e^{t^1} - e^{s^1}}{e^{t^1} + e^{t^2}}, & P_2^2(s, t) = \dfrac{e^{t^2} + e^{s^1}}{e^{t^1} + e^{t^2}}, \end{cases}$$

$P_j^i(s, t)$ fiind pozitive dacă $s^1 \leqslant t^1$, $s^2 \leqslant t^2$. Avem

TEOREMĂ. *Pe planul Bolyai-Lobacevsky, există cîmpuri de probabilităţi definite în întreg planul, depinzînd de una sau două variabile.*

Într-adevăr, la orice punct (x, y) cu $y > 0$, corespunde un punct (s^1, s^2) definit de inversele formulelor (8)

$$e^{s^1} = \frac{y\, e^x}{2(1 + e^x)}, \qquad e^{s^2} = \frac{y}{2(1 + e^x)}.$$

Dacă se notează cu x', y' valorile corespunzătoare pentru t^1, t^2, avem

$$e^{t^1} = \frac{y'\, e^x}{2(1 + e^x)}, \qquad e^{t^2} = \frac{y'}{2(1 + e^x)},$$

probabilităţile fundamentale fiind date de formulele

$$\begin{cases} P_1^1(x, y\,;\, x', y') = \dfrac{y}{y'}\,\dfrac{1}{1 + e^x} + \dfrac{1}{1 + e^{-x'}} \\[2ex] P_2^1(x, y\,;\, x', y') = -\,\dfrac{y}{y'}\,\dfrac{1}{1 + e^x} + \dfrac{1}{1 + e^{x'}} \\[2ex] P_1^2(x, y\,;\, x', y') = \dfrac{y}{y'}\,\dfrac{1}{1 + e^{-x}} + \dfrac{1}{1 + e^{-x'}} \\[2ex] P_2^2(x, y\,;\, x', y') = \dfrac{y}{y'}\,\dfrac{1}{1 + e^{-x}} + \dfrac{1}{1 + e^{x'}} \end{cases}$$

Se observă că P_1^1, P_2^2 sînt întotdeauna pozitive dacă y, y' sînt pozitive, adică dacă sîntem în semiplanul lui Poincaré. În ceea ce priveşte P_2^1, P_1^2, acestea sînt de asemenea pozitive, dacă

$$\frac{y'}{1+e^{x'}} \geqslant \frac{y}{1+e^{x}}, \quad \frac{y'}{1+e^{-x'}} \geqslant \frac{y}{1+e^{-x}}.$$

Dacă se consideră curbele

$$u = \frac{y}{1+e^{x}}, \quad v = \frac{y}{1+e^{x}}, \tag{10}$$

atunci $u = u_0$ şi $v = v_0$ sînt curbe coordonate (u_0, v_0 constante pozitive). Ele sînt deci asimptotele dreptei $y = u_0$, $y = v_0$ şi intersectează axa x în puncte avînd ca ordonate $y = 2u_0$, $y = 2y_0$, $v = v_0$.

În coordonatele u, v metrica (7) se scrie

$$d\sigma^2 = \frac{v du^2 + u dv^2}{uv(u+v)}$$

Aceasta ne dă deci o metrică a curburii constante negative în sfertul de plan $u > 0$, $v > 0$. În variabilele u, v probabilităţile se scriu

$$\begin{cases} P_1^1(u, v\,;\, u', v') = \dfrac{u'+v}{u'+v'}, & P_2^1(u, v\,;\, u', v') = \dfrac{v'-v}{u'+v'} \\[2ex] P_2^2(u, v\,;\, u', v') = \dfrac{u'-u}{u'+v'}, & P_2^2(u, v\,;\, u', v') = \dfrac{u+v'}{u'+v'} \end{cases}$$

Geodezicele semiplanului lui Poincaré sînt semicercuri

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2,$$

deci avem

$$x = a + r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

unde θ este un unghi cuprins între 0 şi π

Cum din (10) rezultă

$$x = \ln\frac{u}{v}, \quad y = u + v,$$

un punct $P(u, v)$ al geodezicei, reprezintă punctul iniţial al unui sistem de probabilităţi numai pentru punctele $P'(u', v')$ pentru care $u' + v' > u + v$ sau $\sin\theta' > \sin\theta$ deci punctul P' se poate găsi pe arcul geodezic care se găsește sub dreapta $Y = y$ semiplanului Poincaré. Deci avem

TEOREMĂ. *Dacă presupunem că* (x, y) *sînt punctele unei geodezice, punctele* (x', y') *corespunzătoare unui sistem de probabilități trebuie să se găsească în interiorul cercului sub coarda* $Y = y$.

Primită la redacție la 12 decembrie 1968

Institutul de construcții București

VECTEURS PROBABILISTIQUES DANS L'ESPACE DE COURBURE CONSTANTE NÉGATIVE

(RÉSUMÉ)

On démontre que sur le plan de Bolyai-Lobacevsky, il y a des champs probabilistiques définis dans le plan entier qui dépend d'une ou de deux variables.

BIBLIOGRAFIE

1. M. FRÉCHET, *Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités.* T. II, Gauthier-Villars, Paris, 1952.
2. G. G. VRĂNCEANU, *Interpretări geometrice în teoria proceselor Markov.* St. cerc. mat., **15** (1964).
3. G. G. VRĂNCEANU, *Interprétation géométrique des processus probabilistiques continus.* Mém. de Sci. Mat., Gauthier-Villars, Paris, 1969.

ORSZÁGOS MŰSZ. KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

NOTĂ CATRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date din text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale. Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa Comitetului de redacţie, Calea Griviţei nr. 21, Bucureşti 12.

1969 OKT 2 41

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI
REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

P. CARAMAN. **Homeomorfismele evasiconforme *n*-dimensionale**, 1967, 594 p., 31 lei.
I. COLOJOARĂ, **Elemente de teorie spectrală**, 1968, 311 p., 19,50 lei.
I. CUCULESCU, **Procese Markov și funcții excesive**, 1968, 356 p., 19 lei.
LAZĂR DRAGOȘ, **Magnetodinamica fluidelor**, 1969, 476 p., 27 lei.
ȘT. I. GHEORGHIȚĂ, **Introducere în hidrodinamica corpurilor poroase**, 1969, 212 p., 8 lei.
ALEXANDRU GHIKA, **Opera matematică**, 1968, 955 p., 50 lei.
S. GUIAȘU, **Aplicații ale teoriei informației (Sisteme dinamice-cibernetice)**, 1968, 350 p., 17 lei.
A. HALANAY, D. WEXLER, **Teoria calitativă a sistemelor cu impulsuri**, 1968, 313 p., 13 lei.
M. IOSIFESCU și P. TĂUTU, **Procese stohastice și aplicații în biologie și medicină**, 1968,
345 p., 22 lei.
BÉLA JANKÓ, **Rezolvarea ecuațiilor operaționale în spații Banach** 1969, 298 p., 9 lei.
L. LIVOVSCHI, **Circuite cu contacte de relee**, 1969, 246 p., 9,50 lei.
MANEA MĂNESCU, ANATOL MĂCRIȘ și VINCENȚIU DUMITRU, **Metode matematice moderne aplicate în planificarea lucrărilor de construcție și montaj**, 1969, 256 p., 14 lei.
T. MOROZAN, **Stabilitatea sistemelor cu parametri aleatori**, 1969, 121 p., 8,50 lei.
RADU ROȘCA, **Geometria diferențială în spațiul eliptic**, 1969, 208 p., 9,75 lei.
N. RADU, **Inele locale**, vol. I, 1968, 377 p., 19 lei.
SIMION SANIELEVICI, **Opera matematică**, 1968, 298 p., 15,50 lei.
I. SUCIU, **Algebre de funcții**, 1969, 240 p., 7 lei.
G. VRANCEANU, **Lecții de geometrie diferențială**, vol. IV, 1968, 268 p., 11 lei.
* * *, **Relațiile dintre matematică și științele naturii și societății**, 1969, 190 p., 10,50 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 9, P. 1263—1446, BUCUREȘTI, 1969

I. P. „Informația" — c. 3620

43831

Lei 20.—

F 762 9-04-001

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

10

TOMUL 21

1969

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACŢIE

Acad. MIRON NICOLESCU — **redactor responsabil;**
Acad. GR. C. MOISIL — **redactor responsabil adjunct;**
Acad. GH. MIHOC;
Acad. G. VRĂNCEANU;
Acad. CAIUS IACOB;
Acad. TIBERIU POPOVICIU;
Acad. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, **membru corespondent al** Academiei Republicii Socialiste România
CIPRIAN FOIAŞ — **secretar de redacţie.**

La revue „STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE" paraît 10 fois par an. Le prix d'un abonnement annuel est de $ 10. — ; £ 4.4.0 ; F.F.49.— ; D.M.40.—.
Toute commande de l'étranger sera adressée à CARTIMEX, Boîte postale 134—135, Bucarest, Roumanie, ou à ses représentants à l'étranger En Roumanie, vous pourrez vous abonner par les bureaux de poste ou chez votre facteur.
În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondenţă, se trimit la Comitetul de redacţie al revistei pe adresa: Calea Griviţei nr. 21, Bucureşti 12.

TOM. 21, Nr. 10
1969

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

SUMAR

Pag.

L. BĂDESCU, M. MOROIANU, Caracterizarea morfismelor unei scheme în Proj $\mathcal{S}$ şi aplicaţii la fascicule ample 1449

IULIAN BEJU, Asupra dinamicii mediilor continui, cu momente cinetice de ordin superior 1465

MIRCEA GEANĂU, Asupra unor proprietăţi ale spaţiilor afine . . 1473

VASILE IONESCU, CIPRIAN COZMA, Problema lui Riemann generalizată în clasa funcţiilor analitice generalizate . . . 1485

IOAN A. RUS, Asupra unei probleme bilocale 1511

C. SĂVULESCU, AL. ŞCHIOP, Asupra minimizării pierderilor de energie din reţelele electrice 1523

OCTAVIAN STĂNĂŞILĂ, Proprietăţi ale algebrelor analitice şi ale algebrelor cvasianalitice 1533

INDEX ALFABETIC 1595

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 10, P. 1447–1600, BUCUREŞTI, 1969

MŰSZAKI KÖNYV

CARACTERIZAREA MORFISMELOR UNEI SCHEME ÎN PROJ $\mathcal{S}$ ŞI APLICAŢII LA FASCICULE AMPLE

DE

L. BĂDESCU şi M. MOROIANU

În lucrare se studiază morfismele unei Y – scheme X în Proj $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ fiind o $\mathcal{O}_Y$ – Algebră graduată şi cvasicoerentă. Se obţine un rezultat care extinde propoziţia E G A II (4.2.3). Aceste consideraţii permit o prezentare naturală a noţiunilor de ,,fascicul inversabil amplu'' şi ,,fascicul inversabil foarte amplu''. În fine se studiază perechile $(\mathcal{T}, \varphi)$ formate dintr-o $\mathcal{O}_X$ – Algebră graduată şi cvasicoerentă şi un morfism de algebre graduate $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ care îndeplinesc anumite proprietăţi, perechi corespunzătoare Y-morfismelor lui X în Proj $\mathcal{S}$.

INTRODUCERE

După cîteva preliminarii de geometrie inelată se dă o teoremă de caracterizare a morfismelor unei Y-scheme X în Proj $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ fiind o $\mathcal{O}_Y$-algebră graduată şi cvasicoerentă. Această teoremă are cîteva consecinţe la studiul fasciculelor inversabile ample, obţinîndu-se un criteriu de amplitudine.

În ultima parte a lucrării se studiază proprietăţi ale perechilor $(\mathcal{T}, \varphi)$ asociate unui morfism $f : X \to Y$ de scheme şi unei $\mathcal{O}_Y$-Algebre graduate, cvasicoerente $\mathcal{S}$, formate dintr-o $\mathcal{O}_X$-Algebră graduată, cvasicoerentă $\mathcal{T}$ şi un $\mathcal{O}_Y$-morfism de algebre graduate $\varphi : \mathcal{S} \to f_*(\mathcal{T})$ cu anumite condiţii satisfăcute, perechi care sînt strîns legate de Y-morfismele lui X în Proj $\mathcal{S}$.

Menţionăm că notaţiile sînt cele folosite în *Eléments de Géométrie Algébrique* de A. Grothendieck şi J. Dieudonné, cu deosebirea că pentru preschemă (respectiv schemă în sens EGA) se foloseşte denumirea de schemă (respectiv schemă separată în sens EGA).

§ 1. Fie $(X, \mathcal{O}_X)$, $(P, \mathcal{O}_P)$ două spaţii inelate în inele locale, $r : X \to P$ un morfism de spaţii inelate în inele locale, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_P$-modul

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 10, P. 1449–1463, BUCUREŞTI, 1969

cvasicoerent. Fie $\rho : \mathcal{F} \to r_* r^* \mathcal{F}$ morfismul canonic care induce aplicația (notată tot prin ρ) :

$$\rho : \ \Gamma(P, O_P) \to \Gamma(X, r^*\mathcal{F}).$$

Dacă $s \in \Gamma(P, F)$, prin P_s vom înțelege mulțimea punctelor $p \in P$ așa încît $s_p \notin m_p F_p$, unde prin m_p am notat idealul maximal al lui O_p. Putem vorbi de secțiunea $\rho(s) \in \Gamma(X, r^*\mathcal{F})$ și deci de mulțimea $X_{\rho(s)}$. Fie $k(p)$ corpul rezidual al inelului local O_p; atunci $\mathcal{F}_p \otimes_{O_p} k(p) = \mathcal{F}_p / m_p \mathcal{F}_p$, prin urmare $p \in P_s \Leftrightarrow \varphi_p(s_p) \neq 0$, unde prin φ_p am notat aplicația canonică $\mathcal{F}_p \to \mathcal{F}_p \otimes_{O_p} k(p)$. La fel $x \in X_{\rho(s)} \Leftrightarrow \varphi_x(\rho(s)_x) \neq 0$, unde φ_x este aplicația canonică $(r^*\mathcal{F})_x \to (r^*\mathcal{F})_x \otimes_{O_x} k(x) = (\mathcal{F}_{r(x)} \otimes_{O_{r(x)}} O_x) \otimes_{O_x} k(x) = \mathcal{F}_{r(x)} \otimes_{O_{r(x)}} k(x)$.

Lema 1. *Oricare ar fi* $s \in \Gamma(P, \mathcal{F})$ *avem :*

$$X_{\rho(s)} = r^{-1}(P_s).$$

Demonstrația rezultă din definițiile precedente și din diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{r(x)} \arrow[r, "\rho_x"] \arrow[d, "\varphi_{r(x)}"'] & (r^*\mathcal{F})_x = \mathcal{F}_{r(x)} \otimes_{O_{r(x)}} O_x \arrow[d, "\varphi_x"] \\
\mathcal{F}_{r(x)} \otimes_{O_{r(x)}} k(r(x)) \arrow[r, "1 \otimes \theta^x"'] & (r^*\mathcal{F})_x \otimes_{O_x} k(x) = \mathcal{F}_{r(x)} \otimes_{O_{r(x)}} k(x)
\end{tikzcd}$$

în care ρ_x este aplicația $t \to t \otimes 1$ și $1 \otimes \theta^x$ este un monomorfism deoarece corespunde injecției de corpuri $\theta^x : k(r(x) \to k(x)$ în care $k(r(x))$ — spațiul vectorial $E = \mathcal{F}_{r(x)} \otimes_{O_{r(x)}} k(r)(x))$ se scufundă în $E \otimes_{k(r(x))} k(x) = \mathcal{F}_{r(x)} \otimes_{O_{r(x)}} k(x)$.

Fie acum S un inel graduat (pozitiv), f un element omogen de grad d din S_+. Considerăm morfismul canonic

$$\alpha : \ S \to \bigoplus_{m \geqslant 0} \Gamma(P, O_p(m))$$

cu $P = \operatorname{Proj} S$. Atunci α este un morfism de inele graduate, iar $\alpha(f) \in \Gamma(P, O_p(d))$.

Lema 2. *Dacă* $P = \operatorname{Proj} S$, *atunci* $D_+(f) = P_{\alpha(f)}$.

Fie $p \in \operatorname{Proj} S$. Din definiția lui α avem $\alpha(f)|_{D_+(f)} = f/1 \in S_f$, iar pe de altă parte fibra $S_{(p)}$ a lui O_P în punctul p are ca ideal maximal $pS_{(p)}$ (prin $S_{(p)}$ înțelegem toate fracțiile omogene de grad 0 cu numitor în afara idealului prim p). Lema rezultă imediat din relațiile

$$p \notin P_{\alpha(f)} \Leftrightarrow f/1 \notin (pS_{(p)})\,(S_p)_a \subset pS_p \Leftrightarrow f \notin p \Leftrightarrow p \notin D_+(f).$$

A kölcsönkért mű Studii Anui

szerzője 1959-1969

KÉRŐLAP

F 762

raktári jelzete

címe:

Kiadvan

A kölcsönző neve; Dácser

kölcsönzőjegy száma:

Kelt: X. 19.

PROPOZIȚIA 1. *Fie X o schemă, $P = \operatorname{Proj} S$ și $r : X \to P$ un morfism de scheme. Atunci $r^{-1}(D_+(f)) = X_{\varphi_r}(f)$, unde φ_r este morfismul compus*

$$S \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{m \geqslant 0} \Gamma(P, O_p(m)) \xrightarrow{\rho} \bigoplus_{m \geqslant 0} \Gamma(X, r^*O_p(m)).$$

Propoziția rezultă imediat din lemele 1 și 2.

LEMA 3. *Fie A un inel comutativ, unitar, $A[z]$ inelul polinoamelor cu coeficienți în A în nedeterminata z, graduat prin graduarea obișnuită. Atunci $A[z]_{(z)}$ este canonic izomorf cu A.*

Izomorfismul este dat de aplicația $a \in A \to \dfrac{az^n}{z^n}$.

COROLAR. *Fie I o A-algebră graduată, $\alpha > 0$ și pentru orice $m \geqslant 0$ un izomorfism de A-module $\rho_{md} : A \to T_{md}$ așa încît $\rho_{md}(1) = (\rho_d(1))^m$. Atunci, notînd $\rho_d^{(1)} = f$, avem un izomorfism canonic $\lambda_f : T_{(f)} \to A$.*

În adevăr, putem presupune $d = 1$, deoarece în caz contrar înlocuim pe T cu $T^{(d)}$ (fracțiile de grad 0 în raport cu f rămînînd aceleași). În acest caz algebra T este canonic izomorfă cu $A\ [z]$ și restul rezultă din lema 3.

LEMA 4. *Fie X un spațiu inelat în inele locale, $\mathcal{T}$ o O_X-Algebră graduată, cvasicoerentă, $d > 0$ și $s \in \Gamma(X, \mathcal{T}_d)$ o secțiune cu proprietatea că X_s este deschis și înmulțirea cu $(s/x_s)^m$ stabilește un izomorfism între O_X/X_s și $\mathcal{T}_{md}/X_s$ oricare ar fi $m \geqslant 0$. Există atunci un izomorfism canonic:*

$$\lambda_s : (\bigoplus_{m \geqslant 0} \Gamma(X_s, \mathcal{T}_m))_{(s/X_s)} \to \Gamma(X_s, O_X).$$

Demonstrația rezultă imediat din corolarul lemei 3 luînd $A = \Gamma(X_s, O_X)$, $T = \bigoplus_{m \geqslant 0} \Gamma(X, \mathcal{T}_m)$ și $f = s/X_s$.

Rezultă că în condițiile lemei 4 există un homomorfism canonic

$$\beta_s : (\bigoplus_{m \geqslant 0} \Gamma(X, T_m))_{(s)} \to \Gamma(X_s, O_X)$$

care se obține compunînd morfismul de restricție

$$(\bigoplus_{m \geqslant 0} \Gamma(X, \mathcal{T}_m))_{(s)} \to (\bigoplus_{m \geqslant 0} \Gamma(X_s, \mathcal{T}_m))_{(s/X_s)}$$

cu izomorfismul λ_s din lema 4.

Fie mai departe $r : A \to A'$ un homomorfism de inele unitare, T o A-algebră graduată, T' o A'-algebră graduată, $\varphi : T \to T'$ un r-homomorfism de inele graduate. Fie ρ_{md}, ρ'_{md} (pentru orice $m \geqslant 0$ și pentru $d > 0$ fix) niște izomorfisme ca în corolarul lemei 3 și $f = \rho_d(1)$, $f' = \rho'_d(1)$ așa încît diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\rho_{md}"'] & A' \arrow[d, "\rho'_{md}"] \\
T_{md} \arrow[r, "\varphi_{md}"'] & T'_{md}
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă. Atunci evident diagrama următoare este comutativă :

$$\begin{tikzcd} T_{(f)} \arrow[r, "\lambda_f"] \arrow[d, "\varphi(f)"'] & A \arrow[d, "r"] \\ T'_{(f')} \arrow[r, "\lambda'_{f'}"'] & A' \end{tikzcd}$$

Fie $r : X \to P$ un morfism de spații inelate în inele locale, $\mathcal{T}$ o O_P-Algebră graduată, cvasicoerentă care îndeplinește toate condițiile lemei 4 relativ la secțiunea $s \in \Gamma(P, \mathcal{T}_d)$.

Este ușor de verificat că atunci O_X-Algebra $r^*\mathcal{T}$ îndeplinește de asemenea toate condițiile lemei 4 pentru secțiunea $\varphi(s) \in \Gamma(X, r^*\mathcal{T}_d)$.

În plus observațiile precedente ne conduc la comutativitatea următoarei diagrame :

$$\begin{tikzcd} (\bigoplus\limits_{m\geqslant 0} \Gamma(P, \mathcal{T}_m))_{(s)} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\beta_s"'] & (\bigoplus\limits_{m\geqslant 0} \Gamma(X, r^* \mathcal{T}_m))_{(\rho(s))} \arrow[d] \\ \Gamma(P_s, O_P) \arrow[r, "r"'] & \Gamma(X_{\rho(s)}, O_P) \end{tikzcd}$$

§ 2. În cele ce urmează fie X o schemă oarecare, S o A-algebră graduată, așa încît X să fie Y = Spec (A) -schemă, P = Proj S. Vom considera O_P-algebra graduată și cvasicoerentă $\mathcal{S}_P^{\geqslant} = \bigoplus\limits_{m \geqslant 0} O_P.(m)$. Scopul paragrafului de față este de a caracteriza Y -morfismele lui X în P = Proj S.

Fie $r : X \to P$ un astfel de morfism, r pune în evidență perechea $(\mathcal{T}^r, \varphi_r)$ formată din O_X-algebra graduată și cvasicoerentă

$$\mathcal{T}^r = r^*(\mathcal{S}_P^{\geqslant}) = \bigoplus_{m \geqslant 0} r^* O_P(m)$$

și homomorfismul de A-algebre graduate :

$$\varphi_r : S \to \bigoplus_{m \geqslant 0} \Gamma(X, \mathcal{T}^r_m)$$

care constă din compunerea

$$S \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{m \geqslant 0} \Gamma(P, O_P(m)) \xrightarrow{\rho} \bigoplus_{m \geqslant 0} \Gamma(X, r^* O_P(m))$$

$$(r^* O_P(m) = \mathcal{T}^r_m \text{ și } \mathcal{T}^r_0 = O_X)$$

Deoarece $r^{-1}(D_+(f)) = X_{\varphi_r(f)}$ (propoziția 1), rezultă, ținînd cont că r este continuă, că $X_{\varphi_r(f)}$ este deschis, pentru orice element omogen $f \in S$ de grad $d > 0$.

În plus, dacă f şi g sînt două elemente omogene din S, deoarece $D_+(f\cdot g) = D_+(f) \cap D_+(g)$ avem :

$$X_{\varphi_r(fg)} = X_{\varphi_r(f)} \cap X_{\varphi_r(g)}.$$

Pe de altă parte, restricţiile

$$\mathcal{O}_X|_{X_{\varphi_r(f)}} \text{ şi } \mathcal{T}^r_{md}|_{X_{\varphi_r(f)}}$$

sînt izomorfe prin înmulţire cu secţiunea $(\varphi_r(f))^m$ deoarece se ştie că $\mathcal{O}_P|_{D_+(f)}$ şi $\mathcal{O}_P(md)|_{D_+(f)}$ sînt izomorfe prin înmulţire cu secţiunea $(\alpha(f))^m$ Dacă notăm prin X_d deschisul $\bigcup_{f\in S_d} X_{\varphi_r(f)}$, atunci,

$$X = \bigcup_{d>0} X_d$$

deoarece deschişii $D_+(f)$ formează o acoperire a lui P.

Reciproc, considerăm o pereche $(\mathcal{T}, \varphi)$ formată dintr-o $\mathcal{O}_X$-algebră graduată şi cvasicoerentă (aşa încît $\mathcal{T}_0 = \mathcal{O}_X$) şi φ un A-homomorfism de algebre graduate

$$\varphi : S \to \bigoplus_{m\geqslant 0} \Gamma(X, \mathcal{T}_m)$$

cu proprietăţile :

a) Pentru orice element omogen f de grad $d>0$ din S mulţimea $X_{\rho(s)}$ este deschis, iar dacă g este un alt element omogen de grad $e>0$ din S avem

$$X_{\varphi(fg)} = X_{\varphi(f)} \cap X_{\varphi(g)}.$$

b) $\mathcal{O}_X|_{X_{\varphi(f)}}$ şi $\mathcal{T}_{md}|_{X_{\varphi(f)}}$ sînt izomorfe printr-un izomorfism, care se obţine prin înmulţire cu secţiunea $(\varphi(f))^m$.

c) $X = \bigcup_{d>0} X_d$, unde prin X_d am notat deschisul $\bigcup_{f\in S_d} X_{\varphi(f)}$.

Observaţie. Condiţiile b) şi c) afirmă că $\mathcal{T}_{md}|_{X_d}$ $(m \geqslant 0,\ d>0)$ este un $\mathcal{O}_{X_d}$-modul inversabil.

O astfel de pereche $(\mathcal{T}, \varphi)$ satisfăcînd condiţiile a), b) şi c) defineşte pentru fiecare element omogen $f \in S_d$ Y-morfismul

$$r_f : X_{\varphi(f)} \to D_+(f) = \operatorname{Spec} S_{(f)}$$

care se asociază în mod canonic homomorfismului de inele :

$$\omega_f : S_{(f)} \to (\bigoplus_{m\geqslant 0} \Gamma(X, \mathcal{T}_m))_{(\varphi(f))}$$

construit în felul următor : se consideră homomorfismul $\varphi_{(f)} : S_{(f)} \to (\bigoplus_{m\geqslant 0} \Gamma(X, \mathcal{T}_m))_{(\varphi(f))}$ care se compune cu morfismul $\beta_f = \beta_{\varphi(f)}$ a cărui existenţă a fost pusă în evidenţă la lema 4.

Faptul că $r_f|_{X_{\varphi(f)}\cap X_{\varphi(g)}} = r_g|_{X_{\varphi(f)}\cap X_{\varphi(g)}}$ X rezultă imediat din condiţia a).

Obţinem deci un Y-morfism notat $r_{\mathcal{T},\varphi} : \bigcup_{\substack{f\in S_d\\ d>0}} X_{\varphi(f)} \to P$ adică ţinînd cont de condiţia c), un Y-morfism $r_{\mathcal{T},\varphi} : X \to P$.

În mulţimea tuturor perechilor $(\mathcal{T}, \varphi)$ care îndeplinesc condiţiile a), b), c) introducem următoarea relaţie de echivalenţă:

$$(\mathcal{T}, \varphi) \sim (\mathcal{T}', \varphi')$$

dacă pentru fiecare element omogen $f \in S_+$ avem $X_{\varphi(f)} = X_{\varphi'(f)}$ (de unde deducem că X_d este acelaşi pentru ambele perechi) şi dacă există pentru fiecare $d > 0$ un izomorfism

$$\sigma_d : \mathcal{T}_d|_{X_d} \to \mathcal{T}'_d|_{X_d}$$

astfel încît diagrama următoare să fie comutativă

(*)
$$\begin{tikzcd}
 & \Gamma(X_{\varphi(f)}, \mathcal{T}_d) \arrow[dd, "\sigma_d"] \\
S_d \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & \\
 & \Gamma(X_{\varphi'(f)}, \mathcal{T}'_d)
\end{tikzcd}$$

unde am notat tot cu φ şi φ' homomorfismele compuse:

$$S_d \xrightarrow{\varphi} \Gamma(X, \mathcal{T}_d) \to \Gamma(X_{\varphi(f)}, \mathcal{T}_d)$$

$$S_d \xrightarrow{\varphi'} \Gamma(X, \mathcal{T}'_d) \to \Gamma(X_{\varphi'(f)}, \mathcal{T}'_d)$$

Se vede imediat că dacă perechile $(\mathcal{T},\varphi)$ şi $(\mathcal{T}', \varphi')$ sînt echivalente, atunci $r_{\mathcal{T},\varphi} = r_{\mathcal{T}',\varphi'}$, ţinînd pur şi simplu cont de definiţia acestor morfisme.

Pe de altă parte, dacă $(\mathcal{T}, \varphi')$ şi $(\mathcal{T}', \varphi')$ sînt două perechi satisfăcînd condiţiile a), b) şi c) aşa încît $r_{\mathcal{T},\varphi} = r_{\mathcal{T}',\varphi'} = r$, atunci, din modul cum au fost construite $r_{\mathcal{T},\varphi}$ şi $r_{\mathcal{T}',\varphi'}$, rezultă că $X_{\varphi(f)} = r^{-1}(D_+(f)) = X_{\varphi'(f)}$ pentru orice element omogen $f \in S_+$. Deducem pentru fiecare element omogen un izomorfism

$$\sigma_{d,f} : \mathcal{T}_d|_{X_{\varphi(f)}} \to \mathcal{T}'_d|_{X_{\varphi(f)}}$$

care face diagrama următoare comutativă:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{T}_d|X_{\varphi(f)} \arrow[d, "\sigma_{d,f}"] \\
\mathcal{O}_X|X_{\varphi(f)} \arrow[ur, "\varphi(f)", "\sim"'] \arrow[dr, "\sim", "\varphi'(f)"'] & \\
 & \mathcal{T}'_d|X_{\varphi'(f)}
\end{tikzcd}$$

Dacă $f, g \in S_d$ se vede imediat că

$$\varphi(g)|X_{\varphi(f)}\cap X_{\varphi(g)} = \omega_f\left(\frac{g}{f}\right)|X_{\varphi(f)}\cap X_{\varphi(g)} \cdot \varphi(f)|X_{\varphi(f)}\cap X_{\varphi(g)}$$

$$\varphi'(g)|X_{\varphi(f)}\cap X_{\varphi(g)} = \omega_f\left(\frac{g}{f}\right)|X_{\varphi(f)}\cap X_{\varphi(g)} \cdot \varphi'(f)|X_{\varphi(f)}\cap X_{\varphi(g)}$$

care ne conduc la

$$\varphi'(g)\cdot(\varphi(g))^{-1}|X_{\varphi(f)}\cap X_{\varphi(g)} = \varphi'(f)\cdot(\varphi(f))^{-1}|X_{\varphi(f)}\cap X_{\varphi(g)}$$

de unde obţinem:

$$\sigma_{d,f}|X_{\varphi(f)}\cap X_{\varphi(g)} = \sigma_{d,g}|X_{\varphi(f)}\cap X_{\varphi(g)}\,.$$

Familia de izomorfisme $\{\sigma_{d,f}\}_{f\in S_d}$ ne dă deci izomorfismul

$$\sigma_d : \mathcal{T}_d|X_d \to \mathcal{T}'_d|X_d\,.$$

Diagrama (*) este comutativă, fapt ce rezultă din însăşi construcţia lui σ_d.

Am dovedit deci că fiind date două perechi $(\mathcal{T}, \varphi)$, $(\mathcal{T}', \varphi')$ care îndeplinesc condiţiile a), b) şi c)

$$(\mathcal{T}, \varphi) \sim (\mathcal{T}', \varphi') \Leftrightarrow r_{\mathcal{T},\varphi} = r_{\mathcal{T}',\varphi'}\,.$$

Fie mai departe $r : X \to P$ un Y-morfism. Vrem să dovedim că, dacă notăm cu $r' = r_{\mathcal{T}^r,\varphi_r}$, atunci $r' = r$.

Observăm mai întîi că $r'^{-1}(D_+(f)) = X_{\varphi_r(f)} = r^{-1}(D_+(f))$. Pentru a arăta că $r' = r$, este suficient deci să arătăm că

$$r'|_{X_{\varphi_r(f)}} = r|_{X_{\varphi_r(f)}}$$

adică homomorfismele de inele corespunzătoare

$$\omega'_{(f)}, \omega_f : S_{(f)} \to \Gamma(X_{\varphi_r(f)}, \mathcal{O}_X)$$

coincid. Să considerăm că în acest scop diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(S_{(f)} \arrow[r, "\alpha_{(f)}"] & (\oplus \Gamma(P, \mathcal{O}_p(m)))_{(\alpha(f))} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\beta_f"'] & (\oplus \Gamma(X, r^*\mathcal{O}_p(m)))_{(\varphi_r(f))} \arrow[d, "\beta''"] \\
& S_{(f)} = \Gamma(P_{\alpha(f)}, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "\omega_f"'] & \Gamma(X_{\varphi_r(f)}, \mathcal{O}_x)
\end{tikzcd}$$

în care pătratul este comutativ datorită ultimei diagrame din § 1. Avem

$$\omega'_f = \beta'' \circ \rho \circ \alpha_{(f)} = \omega_f \circ \beta_f \circ \alpha_{(f)}.$$

Pentru a termina va fi suficient de arătat că $\beta_f \circ \alpha_{(f)} = 1_{S(f)}$.

În adevăr, fie $h/f^m \in S_{(f)}$.

Ținînd cont de definiția lui β_f avem succesiv:

$$(\beta_f \circ \alpha_{(f)})(h/f^m) = \beta_f(\alpha(h)/\alpha(f^m)) = \lambda_f(\alpha(h) \mid D_+(f)/\alpha(f^m) \mid D_+(f)) =$$

$$= \lambda_f(h_{/1}/f^m/1) = \lambda_f((h/f^m)\cdot(f^m/1/f^m/1) = h/f^m.$$

În acest mod am demonstrat următoarea teoremă:

TEOREMA 1. *Fie* X *o* $Y = \operatorname{Spec}(A)$*-schemă,* S *o* A*-algebră graduată. Asocierile* $\to (\mathcal{T}^r, \varphi_r)$ *și* $(\mathcal{T}, \varphi) \to r_{\mathcal{T},\varphi}$ *realizează o corespondență bijectivă între mulțimea* Y*-morfismelor* $r : X \to \operatorname{Proj} S$ *și mulțimea claselor de echivalență de perechi* $(\mathcal{T}, \varphi)$, *unde* $\mathcal{T}$ *este o* $\mathcal{O}_x$*-algebră graduată și cvasicoerentă, iar* $\varphi : S \to \bigoplus_{m \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{T}_m)$ *este un* A*-homomorfism de algebre cu proprietățile:*

a) *Pentru orice element omogen* $f \in S_+$ *mulțimea* $X_{\varphi(f)}$ *este deschisă, iar dacă* g *este un alt element omogen din* S_+ *avem:*

$$X_{\varphi(fg)} = X_{\varphi(f)} \cap X_{\varphi(g)}$$

b) $\mathcal{O}_{X_{\varphi(f)}}$*-modulele* $\mathcal{O}_X|_{X_{\varphi(f)}}$ și $\mathcal{T}_{md}|_{X_{\varphi(f)}}$ *sînt izomorfe prin înmulțire cu secțiunea* $(\varphi(f))^m$

c) $X = \bigcup_{d>0} X_d$ *cu* $X_d = \bigcup_{f \in S_d} X_{\varphi(f)}$

două astfel de perechi $(\mathcal{T}, \varphi)$ *și* $(\mathcal{T}', \varphi')$ *fiind echivalente dacă:*

i) *Pentru orice element omogen* $f \in S_+$ *avem* $X_{\varphi(f)} = X_{\varphi'(f)}$.

ii) *Există pentru fiecare* $d > 0$ *un izomorfism* $\sigma_d : \mathcal{T}_d|_{X_d} \to \mathcal{T}'_d/X_d$ *astfel încît diagrama următoare*

(*)
$$\begin{tikzcd}
& \Gamma(X_{\varphi(f)}, \mathcal{T}_d) \arrow[dd, "\sigma_d"] \\
S_d \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & \\
& \Gamma(X_{\varphi'(f)}, \mathcal{T}'_d)
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă.

Globalizarea acestui rezultat în raport cu Y se face după cum rezultă imediat din cîteva observații.

Fie Y o schemă, $\mathcal{S}$ o O_Y-algebră graduată, cvasicoerentă, X o schemă, $f: X \to Y$ un morfism de scheme. Pe Proj $\mathcal{S} = P$ vom avea din nou O_P-algebra graduată, cvasicoerentă $\mathcal{S}_P^{\geqslant} = \bigoplus\limits_{m \geqslant 0} O_P(m)$.

În plus avem morfismul canonic :

$$\alpha : \mathcal{S} \to \bigoplus_{m \geqslant 0} p_*(O_P(m)),$$

unde $p : P \to Y$ este morfismul structural.

Fie dat Y-morfismul $r : X \to P$. Pentru fiecare deschis afin U din Y vom nota $X_U = f^{-1}(U)$, $P_U = \mathrm{Proj}(\Gamma(U, \mathcal{S}))$. Rezultă imediat că $r|_{X_U} : X_U \to P_U$ și deci $r|_{X_U}$ pune în evidență perechea $(\mathcal{T}_U^r, \varphi_r^U)$ formată din O_{X_U}-algebra graduată și cvasicoerentă $\mathcal{T}_U^r$ și O_U-morfismul de algebre graduate $\varphi_r^U : \mathcal{S}|_U \to f_*(\mathcal{T}_U^r)$ care îndeplinește condițiile a), b), c) din teorema precedentă.

Pe de altă parte, se observă imediat că familia de algebre $\mathcal{T}_U^r$ pe X_U pentru fiecare deschis afin U din Y pune în evidență prin lipire O_X-algebra graduată, cvasicoerentă $\mathcal{T}^r = r^*(\mathcal{S}_P^{\geqslant})$, iar familia de morfisme φ_r^U -morfismul

$$\varphi_r : \mathcal{S} \longrightarrow f_*(\mathcal{T}^r)$$

care mai poate fi descris în felul următor : considerăm morfismul $\alpha^{\#} : p^*(\mathcal{S}) \to \mathcal{S}_P^{\geqslant}$ care induce morfismul $\psi = r^*(\alpha^*) : r^* p^*(\mathcal{S}) \to r^*(\mathcal{S}_P^{\geqslant})$, adică $\psi : f^*(\mathcal{S}) \to \mathcal{T}^r$; atunci $\varphi_r = \psi^b$.

Reciproc, orice pereche $(\mathcal{T}, \varphi)$ formată dintr-o O_X-algebră graduată ($\mathcal{T}_0 = O_X$), cvasicoerentă și un O_Y-morfism de algebre graduate $\varphi : \mathcal{S} \to f_*(\mathcal{T})$cu proprietatea că pentru orice deschis afin U din Y, perechea $(\mathcal{T}_U, \varphi^U)$, unde $\mathcal{T}_U = \mathcal{T}|_U$ iar $\varphi^U : \mathcal{S}|_U \to f_*(\mathcal{T}_U)$ satisface condițiilor a), b), c) din teorema 1, pune în evidență pentru fiecare deschis afin U din Y, U-morfismul

$$r_{\mathcal{T}_U, \varphi^U} : X_U \longrightarrow \mathrm{Proj}\,(\Gamma(U, \mathcal{S})) = P_U$$

cu proprietatea că dacă $V \subset U$ este un alt deschis afin, atunci $r_{\mathcal{T}_U, \varphi^U}|_{X_V} = r_{\mathcal{T}_V, \varphi^V}$. Cu alte cuvinte, obținem un Y-morfism bine determinat $r_{\mathcal{T}, \varphi} : X \to P$ astfel încît $r_{\mathcal{T}, \varphi}|_{X_U} = r_{\mathcal{T}_U, \varphi^U}$

Enunțul general al teoremei 1 va fi următorul :

Teorema 2. *Fie* X și Y *două scheme*, $f : X \to Y$ *un morfism de scheme și* $\mathcal{S}$ o O_Y-*algebră graduată și cvasicoerentă. Asocierile* $r \to \overline{(\mathcal{T}^r, \varphi_r)}$ *și* $\overline{(\mathcal{T}, \varphi)} \to r_{\mathcal{T}, \varphi}$ *realizează o corespondență bijectivă între mulțimea Y-morfismelor* $r : X \to \mathrm{Proj}\,\mathcal{S}$ *și mulțimea claselor de echivalență de perechi* $(\mathcal{T}, \varphi)$, *unde* $\mathcal{T}$ *este o* O_X-*algebră graduată, cvasicoerentă, iar* $\varphi : \mathcal{S} \to f_*(\mathcal{T})$ *un* O_Y-*morfism de algebre graduate cu proprietatea că pentru fiecare deschis* *din U din Y, perechea $(\mathcal{T}|_{f^{-1}(U)},\ \varphi_U)$ satisface condițiilor a), b), c) din teorema 1, două perechi $(\mathcal{T},\ \varphi'), (\mathcal{T}',\ \varphi')$ fiind echivalente dacă pentru orice deschis afin U din Y perechile $(\mathcal{T}|_{f^{-1}(U)};\ \varphi_U)$ și $(\mathcal{T}'|_{f^{-1}(U)},\ \varphi'_U)$ sînt echivalente.*

În cazul cînd $\mathcal{O}_Y$ algebra $\mathcal{S}$ este generată de $\mathcal{S}_1$, enunțul de mai sus se poate explicita în felul următor: în acest caz $\mathcal{O}_P$-modulele $\mathcal{O}_P^{(n)}$ sînt inversabile și $\mathcal{O}_P^{(n)} = (\mathcal{O}_P(1)^{\otimes n}$, deci o pereche $(\mathcal{T},\ \varphi)$ constă dintr-o $\mathcal{O}_X$-algebră graduată simetrică $\mathcal{T} = S_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L})$, unde $\mathcal{L}$ este un $\mathcal{O}_X$-modul inversabil. Condițiile a) și b) sînt în acest caz de prisos, iar condiția c) se reduce la următoarea: pentru orice deschis afin U din Y, avem:

$$(**) \qquad \bigcap_{f\in\Gamma(U,\,\mathcal{S}_1)} [f^{-1}(U)]_{\varphi(f)} = f^{-1}(U).$$

Obținem:

COROLARUL 1. *Fie $f: X \to Y$ un morfism de scheme, $\mathcal{S}$ o $\mathcal{O}_Y$-algebră graduată cvasicoerentă generată de $\mathcal{S}_1$. Asocierile $r \to (\mathcal{L}_r,\ \varphi_r)$ și $(\mathcal{L},\ \varphi) \to \to r_{\mathcal{L},\varphi}$ realizează o corespondență bijectivă între mulțimea Y-morfismelor $r: X \to$ Proj $\mathcal{S}$ și mulțimea claselor de echivalență de perechi $(\mathcal{L},\ \varphi)$ formate dintr-un $\mathcal{O}_X$-modul inversabil $\mathcal{L}$ și un $\mathcal{O}_Y$-morfism de algebre graduate $\varphi: \mathcal{S} \to \bigoplus_{m\geqslant 0} f_*(\mathcal{L}^{\otimes m})$ astfel încît, pentru orice deschis afin U din Y, condiția (**) să fie îndeplinită, două perechi $(\mathcal{L},\ \varphi), (\mathcal{L}',\ \varphi')$ fiind echivalente dacă există un $\mathcal{O}_X$-izomorfism $\sigma: \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ așa încît $\varphi'_1 = \sigma_0\ \varphi_1$.*

Dacă $\mathcal{S} = S_{\mathcal{O}_Y}(E)$, unde E este un $\mathcal{O}_Y$-modul cvasicoerent, atunci morfismul $\varphi: \mathcal{S} \to \bigoplus_{m\geqslant 0} f_*(\mathcal{L}^{\otimes n})$ este perfect determinat dacă se dă morfismul

$$\varphi_1: E \longrightarrow f_*(\mathcal{L})$$

adică dacă se dă morfismul

$$\varphi_1^{\#}: f^*(E) \longrightarrow \mathcal{L}$$

condiția (**) fiind echivalentă în acest caz cu faptul că morfismul $\varphi_1^{\#}$ este surjectiv (ceea ce rezultă remarcînd că $\alpha_1^{\#}: p^*(E) \to \mathcal{O}_P(1)$ este surjectiv). Corolarul 1 se specializează în:

COROLARUL 2. *Fiind date: morfismul de scheme $f: X \to Y$ și un $\mathcal{O}_Y$-modul cvasicoerent E, aplicațiile: $r \to (\mathcal{L}^r,\ \psi_r)$ (punînd $\psi_r = (\varphi_r)_1^{\#}$)* și *$(\mathcal{L},\ \psi) \to r_{\mathcal{L},\psi}$ realizează o corespondență bijectivă între mulțimea Y-morfismelor $r: X \to P(E) =$* Proj *$S(E)$ și mulțimea claselor de echivalență de perechi $(\mathcal{L},\ \psi)$ formate dintr-un $\mathcal{O}_X$-modul inversabil $\mathcal{L}$ și un $\mathcal{O}_X$-morfism surjectiv $\psi: f^*(E) \to \mathcal{L}$, două perechi $(\mathcal{L},\ \psi), (\mathcal{L}',\ \psi')$ fiind echivalente dacă există un $\mathcal{O}_X$-izomorfism $\sigma: \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ așa încît $\psi' = \sigma \circ \psi$.*

Acest corolar reprezintă propoziția (4.2.3).

§ 3. Fie $f: X \to Y$ un morfism separat și cvasicompact de scheme, $\mathcal{L}$ un O_x-modul inversabil. Amintim (după EGA II) următoarele definiții :

DEFINIȚIA 1. Fasciculul $\mathcal{L}$ se numește f-foarte amplu (sau Y-foarte amplu dacă există un O_Y-modul cvasicoerent E și o Y-imersie $r: X \to P = P(E)$ așa încît $\mathcal{L}$ să fie izomorf cu $i^*(O_p(1))$ (sau echivalent după corolarul 2 al teoremei 2, că există un O_Y-modul cvasicoerent E și un homomorfism surjectiv $\psi: f^*(E) \to \mathcal{L}$ așa încît $r_{\mathcal{L}, \psi}$, : $X \to P(E)$ sà fie o imersie).

Se observă imediat că $\mathcal{L}$ este f - foarte amplu dacă și numai dacă există o O_Y -algebră graduată cvasicoerentă $\mathcal{S}$ generată de $\mathcal{S}_1$ și o Y--imersie $r: X \to \operatorname{Proj} \mathcal{S}$ astfel încît $r^*(O_p(1))$ să fie izomorf cu $\mathcal{L}$. Dacă în plus f este presupus de tip finit, rezultă că există chiar un O_Y-modul E cvasicoerent și de tip finit cu proprietățile din definiția 1.

Fie acum O_Y-algebra graduată și cvasicoerentă (deoarece f este separat și cvasicompact) $S' = \bigoplus\limits_{n \geqslant 0} f_*(\mathcal{L}^{\otimes n})$. Considerăm perechea $(\mathcal{T}, \varphi)$ (conf. teoremei 2), unde $\mathcal{T} = \bigoplus\limits_{n \geqslant 0} \mathcal{L}^{\otimes n}$ și $\varphi: \mathcal{S}' \to \bigoplus\limits_{n \geqslant 0} f_*(\mathcal{L}^{\otimes n})$ este izomorfismul identic.

DEFINIȚIA 2. Fasciculul $\mathcal{L}$ se numește f-amplu dacă morfismul $r_{\mathcal{T}, \varphi}$ (cu notațiile de mai sus) este peste tot definit și este o imersie deschisă dominantă a lui X în $\operatorname{Proj} \mathcal{S}' = P$ (sau echivalent, dacă perechea $(\mathcal{T}, \varphi)$ satisface condițiile teoremei 2, sau încă $\mathcal{T} = r^*(\mathcal{S}'_P{}^{\geqslant})$, $\varphi = \varphi_r$ cu $r: X \to \operatorname{Proj} \mathcal{S}$ o-imersie deschisă și dominantă).

PROPOZIȚIA 2. *Fie* $f: X \to Y$ *un morfism separat și cvasicompact de scheme și* $\mathcal{L}$ *un* O_X *-modul inversabil. Atunci următoarele afirmații sînt echivalente* :

i) $\mathcal{L}$ *este* f-*amplu*

(ii) *Există o* O_Y *-algebră graduată, cvasicoerentă* $\mathcal{S}$ *și o* Y *-imersie* $r: X \to \operatorname{Proj} \mathcal{S}$ *astfel încît* $r^*(O(n)) \approx \mathcal{L}^{\otimes n}$ *pentru orice* $n \geqslant 0$.

Implicația i) $\Rightarrow$ ii) este trivială deoarece în rolul lui $\mathcal{S}$ se poate lua algebra $\mathcal{S}'$ din definiția 2.

ii) $\Rightarrow$ i). Problema fiind locală pe Y, putem presupune $Y = \operatorname{Spec}(A)$ afin, $\mathcal{S} = \widetilde{S}$. Atunci (pentru $f \in S_+$ omogen), $r^{-1}(D_+(f)) = X_{\varphi_r(f)}$ cu $\varphi_r(f) \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$. Deoarece deschișii $D_+(f)$ formează o bază pentru topologia lui $P = \operatorname{Proj} S$, iar X se identifică cu un subspațiu al lui P, $X_{\varphi_r(f)}$ cu $f \in S_+$ omogen formează o bază pentru topologia lui X și $\mathcal{L}$ rezultă amplu din (4.5.2) EGA II.

Propoziția 2 și observația care urmează definiției 2 pun în evidență deosebirea dintre cele două noțiuni (de exemplu că orice $\mathcal{L}$ f-foarte amplu este amplu, nu și reciproc).

Facem acum cîteva ipoteze restrictive asupra lui f și schemei Y și anume : f este un morfism de tip finit, iar Y o schemă cvasicompactă.

LEMĂ. *În ipotezele de mai sus fie* $\mathcal{S}$ *o* O_Y *-algebră graduată, cvasicoerentă. Atunci* $\mathcal{S}$ *este limita inductivă a* O_Y*-sub — algebrelor sale graduate și cvasicoerente de tip finit.*

Acest rezultat este imediat, fiind analog celui demonstrat în EGA I (9.4.9).

PROPOZIŢIA 3. *Presupunem* Y *o schemă cvasicompactă,* $f : X \to Y$ *un morfism separat de tip finit,* $\mathcal{L}$ *un* O_X*-modul inversabil amplu relativ la* f.

Există o O_Y*-algebră* $\mathcal{S}$ *de tip finit (graduată și cvasicoerentă ca întotdeauna) și o* Y*-imersie* $r : X \to \operatorname{Proj} \mathcal{S}$ *așa încît* $\mathcal{L}^{\otimes n}$ *să fie canonic izomorf cu* $r^*(O(n))$.

În adevăr, în acest caz $\mathcal{S}' = \underset{\lambda}{\xrightarrow{\lim}} \mathcal{S}'_\lambda \cdot (\mathcal{S}' = \bigoplus\limits_{n \geqslant 0} f_* (\mathcal{L}^{\otimes n})$ din definiţia, 2) unde $\mathcal{S}'_\lambda$ parcurge familia tuturor O_Y-subalgebrelor graduate, cvasicoerente de tip finit. Atunci $r_{\mathcal{T}, \varphi}$ (conf. definiției 2) este peste tot definit şi o imersie dacă şi numai dacă există un λ aşa încît $r_{\mathcal{T}, \varphi\lambda}$ este peste tot definit şi este o imersie, unde $\varphi\lambda : \mathcal{S}'_\lambda \to \bigoplus\limits_{n \geqslant 0} f_* (\mathcal{L}^{\otimes n})$ este $\varphi \circ u_\lambda$ (u_λ fiind morfismul canonic $\mathcal{S}'_\lambda \to \mathcal{S}'$) (EGA II (3.78)).

COROLAR. *Ipotezele sînt cele ale propoziţiei 3. Următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

(i) $\mathcal{L}$ *este* f*-amplu.*

(ii) *există* $n_0 > 0$ *aşa încît* $\mathcal{L}^{\otimes n_0}$ *să fie* f*- foarte amplu.*

Evident (ii) $\Rightarrow$ (i), deoarece atunci $\mathcal{L}^{\otimes n_0}$ este f-amplu, deci $\mathcal{L}$ este f-amplu (EGA II (4.6.9)). (i) $\Rightarrow$ (ii) este demonstrată în EGA II (4.6.1). Iată alt argument : după propoziția 3, există o O_Y-algebră graduată, cvasicoerentă *de tip finit* $\mathcal{S}$ şi o Y-imersie $r : X \to \operatorname{Proj} \mathcal{S} = P$ aşa încît $r^* (\mathcal{S}^{\geqslant}_P) = \bigoplus\limits_{n \geqslant 0} \mathcal{L}^{\otimes n}$. Deoarece Y este schemă cvasicompactă iar $\mathcal{S}$ de tip finit, există $n_0 > 0$ aşa încît $\mathcal{S}_{mn_0} = (\mathcal{S}_{n_0})^m$ pentru orice $m > 0$ (EGA II (2.1.6)), deci algebra $\mathcal{S}'' = \mathcal{S}^{(n_0)}$ este generată de $\mathcal{S}_1$ (unde $\mathcal{S}''_k = \mathcal{S}_{n_0 k}$ $k \geqslant 0$). În plus, Proj $\mathcal{S}''$ este izomorf cu Proj $\mathcal{S}$ printr-un izomorf canonic ε : $\operatorname{Proj} \mathcal{S} \to \operatorname{Proj} \mathcal{S}'' = P''$.

Se observă imediat că $\varepsilon^* (O_{P''}(1)) = O_P\ (n_0)$. Afirmaţia rezultă acum imediat luînd Y-imersia lui X în Proj $\mathcal{S}''$. $\varepsilon \circ r$ care are proprietatea $(\varepsilon \circ r)^* \ (O_{P''}(1) = \mathcal{L}^{\otimes n_0}$. Cum $\mathcal{S}''$ este generată de $\mathcal{S}''_1$, $\mathcal{L}^{\otimes n_0}$ este f-foarte amplu.

§ 4. Considerăm ca în § 2 morfismul de scheme $f : X \to Y$, O_Y-algebra graduată, cvasicoerentă $\mathcal{S}$ aşa încît $\mathcal{S}_0 = O_Y$. Fie $(\mathcal{T}', \varphi')$ o pereche formată dintr-o O_X-algebră graduată, cvasicoerentă aşa încît $\mathcal{T}'_0 = O_X$ şi $\varphi' : \mathcal{S} \to f_* (\mathcal{T}')$ (sau simplu $\varphi' : \mathcal{S} \to \mathcal{T}'$) un f-morfism de algebre graduate. Putem, evident, considera surjecţiile canonice $\mathcal{S} \to O_Y$, $\mathcal{T}' \to O_X$ cărora le corespund imersiile închise

$$\varepsilon_Y : \operatorname{Spec} O_Y = Y \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{S} = C_Y,$$

$$\varepsilon_X : \operatorname{Spec} O_X = X \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{T}' = C_X.$$

Punînd

$$\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}[z] = \mathcal{S} \otimes_{O_Y} O_Y[z], \mathcal{T}' = \mathcal{T}'[z] = \mathcal{T}' \otimes_{O_X} O_X[z],$$

considerăm surjecţiile canonice $\hat{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$, $\hat{\mathcal{T}}' \to \mathcal{T}$ (care se reduc la identitate pe $\mathcal{S}$ şi $\mathcal{T}'$ şi sînt nule pe $z\hat{\mathcal{S}}$ şi $z\hat{\mathcal{T}}$), cărora le corespund imersiile închise :

$$j_Y : \operatorname{Proj} \mathcal{S} = P \longrightarrow \operatorname{Proj} \hat{\mathcal{S}} = \hat{C}_Y$$

$$j_X : \operatorname{Proj} \mathcal{T}' \longrightarrow \operatorname{Proj} \hat{\mathcal{T}}' = \hat{C}_X .$$

În fine mai avem imersiile deschise

$$i_Y : C_Y \longrightarrow \hat{C}_Y$$

$$i_X : C_X \longrightarrow \hat{C}_X$$

care identifică C_Y (respectiv C_X) cu $(\hat{C}_Y)_z = \operatorname{Spec} (\hat{\mathcal{S}}/(z-1)\hat{\mathcal{S}})$ (respectiv cu $(\hat{C}_X)_z = \operatorname{Spec} (\hat{\mathcal{T}}'/(z-1)\hat{\mathcal{T}}'))$ prin izomorfismul canonic

$$\hat{\mathcal{S}}/(z-1)\hat{\mathcal{S}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}$$

$$(\text{respectiv } \hat{\mathcal{T}}'/(z-1)\hat{\mathcal{T}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}')$$

De asemenea vom nota $E_Y = C_Y - \varepsilon_Y(Y)$ (respectiv $E_X = C_X - \varepsilon_X(X)$) şi $\hat{E}_Y = \hat{C}_Y - i_Y \circ \varepsilon_Y(Y)$ (respectiv $\hat{E}_X = \hat{C}_X - i_X \circ \varepsilon_X(X)$) conul afin fără vîrf şi conul proiectiv fără vîrf. Avem diagramele comutative :

$$(*) \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "f"'] & C_X \arrow[d, "\Phi' = \operatorname{Spec}(\varphi'),"] \\ Y \arrow[r, "\varepsilon_Y"'] & C_Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X \circ \varepsilon_X"] \arrow[d, "f"'] & G(\hat{\varphi}') \arrow[d, "\hat{\Phi}' = \operatorname{Proj}(\hat{\varphi}'),"] \\ Y \arrow[r, "i_Y \circ \varepsilon_Y"'] & \hat{C}_Y \end{tikzcd}$$

unde $\hat{\varphi}' : \hat{\mathcal{S}} \to \hat{\mathcal{T}}'$ este morfismul care extinde pe φ' punînd $\hat{\varphi}'(z) = z$.

Se pune problema următoare : în ce condiţii o pereche $(\mathcal{T}', \varphi')$ are proprietatea că $\Phi'^{-1}(E_Y) = E_X$ şi $\hat{\Phi}'$ este peste tot definit (adică $G(\hat{\varphi}') = \hat{C}_X$) şi $\hat{\Phi}^{-1}(\hat{E}_Y) = \hat{E}_X$?

TEOREMA 3. *Fie* $f : X \to Y$ *un morfism de scheme,* $\mathcal{S}$ o O_Y-*algebră graduată, cvasicoerentă aşa încît* $\mathcal{S}_0 = O_Y$, $(\mathcal{T}, \varphi)$ *o pereche care satisface condiţiile teoremei 2. Există atunci o pereche* $(\mathcal{T}', \varphi')$ *echivalentă (în sensul teoremei 2) cu* $(\mathcal{T}, \varphi)$ *cu proprietatea că în diagramele* $(*)$ $\hat{\Phi}'$ *este peste tot definit şi* $\Phi'^{-1}(E_Y) = E_X$ *şi* $\hat{\Phi}'^{-1}(\hat{E}_Y) = \hat{E}_X$.

Demonstraţie. Fie $r = r_{\mathcal{T}, \varphi} : X \to P = \operatorname{Proj} \mathcal{S}$ Y-morfismul asociat perechii $(\mathcal{T}, \varphi)$ conform teoremei 2. Atunci $\mathcal{T}' = r^*(\mathcal{S}_P^{\geqslant}) = \mathcal{T}_r, \varphi' = \varphi_r$.

Modul în care se obține morfismul φ_r (din $\alpha: \mathcal{S} \to p_*(\mathcal{S}_P^{\geqslant})$ a fost descris înainte de enunțul teoremei 2.

Pentru deomonstrație avem nevoie să arătăm că Proj $(\varphi'): G(\varphi) \to$ Proj $\mathcal{S}$ peste tot definit, căci atunci rezultă totul din EGA II (8.5.2) și (8.5. 4). Ne va fi pentru aceasta necesar următorul rezultat demonstrat în EGA II (8.6.2).

Fie $P = \mathrm{Proj}\,\mathcal{S}$, $C_P = \mathrm{Spec}\,\mathcal{S}_P^{\geqslant}$, $\hat{C}_P = \mathrm{Proj}\,(\hat{\mathcal{S}}_P^{\geqslant})$, i_P, ε_P, j_P morfismele corespunzătoare. Atunci morfismele Proj (α) : Proj $\mathcal{S}_P^{\geqslant} \to$ Proj $\mathcal{S}$ și Proj $(\hat{\alpha}): \hat{C}_P \to \hat{C}_Y$ sînt peste tot definite, și restricțiile ultimului la $\hat{E}_P$ și E_P sînt izomorfisme pe $\hat{E}_Y$ și E_Y respectiv. În plus morfismul structural Proj $\mathcal{S}_P^{\geqslant} \to P$ este un izomorfism.

În cazul nostru, din diagrama carteziană

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Proj}\,\mathcal{T}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Proj}\,\mathcal{S}_P^{\geqslant} \arrow[d, "s"] \\
X \arrow[r, "r"'] & P
\end{tikzcd}$$

rezultă că morfismul structural Proj $\mathcal{T}' \to X$ este izomorfism. Faptul că Proj (φ) : Proj $\mathcal{T}' \to$ Proj $\mathcal{S}$ este peste tot definit este acum deja dovedit.

Observație. Dacă perechea $(\mathcal{T}, \varphi)$ este așa încît $r_{\mathcal{T},\varphi}$ să fie o imersie, rezultă că morfismele Φ', $\hat{\Phi}'$, sînt chiar imersii ale lui E_X și $\tilde{E}_X$ în E_Y și $\hat{E}_Y$ respectiv. Un astfel de caz are loc cînd $\mathcal{T} = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathcal{L}^{\otimes n}$, $\varphi: \mathcal{S} \to f_*(\mathcal{T})$ cînd, dacă $r_{\mathcal{T},\varphi}$ este imersie, (sau echivalent $\mathcal{L}$ este f-amplu) înseamnă că diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "f"'] & C_X = V(\mathcal{L}) \arrow[d, "\mathrm{Spec}\,(\varphi) = \Phi"] \\
Y \arrow[r, "\varepsilon_Y"'] & C_Y
\end{tikzcd}$$

este o contracție în sensul că $\Phi^{-1}(E_Y) = E_X$ și $\Phi / E_X : E_X \to E_Y$ este imersie.

Primită la redacție la 15 ianuarie 1969

— Universitatea din București
Facultatea de matematică — mecanică
str. Academiei nr. 14
— Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România
Calea Griviței nr. 21, București 12

CARACTÉRISATION DES MORPHISMES D'UN SCHÉMA DANS PROJ $\mathcal{S}$ ET APPLICATIONS AUX FAISCEAUX AMPLES

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail on étudie les morphismes d'un Y-schéma X dans Proj S, S étant une O_Y — Algèbre graduée et quasi cohérente. On obtient un résultat qui généralise la proposition EGA II (4.2.3). Ces considérations permettent une présentation naturelle des notions *faisceau invertible ample* et *faisceau invertible très ample*. Enfin on étudie les paires (T, φ) formées d'une O_X— Algèbre graduée et quasi cohérente et d'un morphisme d'Algèbre graduée $\varphi : S \rightarrow T$, satisfaisant à certaines propriétés, qui sont assez liées aux Y-morphismes de X dans Proj S.

ASUPRA DINAMICII MEDIILOR CONTINUI, CU MOMENTE CINETICE DE ORDIN SUPERIOR

DE

IULIAN BEJU

C. Truesdell şi R. Toupin în [1] introduc în cinematica mediilor continui momentele cinetice generalizate, de diferite ordine ([1], Sect. 166, rel. (166.7)). Se stabileşte de asemenea un cadru generalizat al dinamicii mediilor continui, bazat pe ecuaţii şi condiţii la limită ce conţin momente cinetice de ordin superior ([1), Sect. 205, rel. (205.18), (205. 19)).

În acelaşi timp noi teorii pentru mediile continue, clasificate ca medii Cosserat, medii orientate, medii cu microstructură etc., folosesc momente (cupluri) generalizate. În lucrarea de faţă se stabileşte încadrarea acestor teorii în cea dată în [1], Sect. 166 şi 205.

Observaţie: Funcţiile ce apar mai jos vor fi presupuse ca avînd proprietăţile necesare pentru corectitudinea relaţiilor şi calculelor în care sînt folosite.

§ 1. MOMENTE CINETICE GENERALIZATE

Fie un corp $\mathscr{V}$ în sensul din [2], Sect. 15, ale cărui particule X, ocupă în timpul mişcării,

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t), \tag{1}$$

locul $\mathbf{x}$ de coordonate x^k faţă de un sistem cartezian ortogonal de coordonate. $\mathbf{X}$, de coordonate carteziene X^k, este locul particulei X în configuraţia de referinţă ([2], Sect. 21).

Fie $\dot{\mathbf{x}}$ şi $\ddot{\mathbf{x}}$ respectiv viteza şi acceleraţia particulei X la momentul t. Vom introduce momentele cinetice generalizate prin relaţiile ([1], Sect. 166, rel. (166.7)):

$$\mathfrak{M} = \int_{\mathscr{V}} \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \otimes \ldots \otimes \mathbf{x} \otimes \dot{\mathbf{x}} \, \mathrm{d}m \tag{2}$$

$$\mathfrak{N} = \int_{\mathscr{V}} \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \otimes \ldots \otimes \mathbf{x} \otimes \dot{\mathbf{x}} \otimes \dot{\mathbf{x}} \, \mathrm{d}m, \tag{3}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 10, P. 1465–1471, BUCUREŞTI, 1969

unde ⊗ desemnează produsul diadic. Pe componente relațiile (2) și (3) se scriu astfel :

$$\mathfrak{M}^{q_1 q_2 \cdots q_n k} = \int_{\wp} x^{q_1} x^{q_2} \ldots x^{q_n} \dot{x}^k \, \mathrm{d}m \tag{4}$$

$$\mathfrak{N}^{q_1 q_2 \cdots q_n k p} = \int_{\wp} x^{q_1} x^{q_2} \ldots x^{q_n} \dot{x}^k \dot{x}^p \, \mathrm{d}m . \tag{5}$$

Față de un punct oarecare $\mathbf{x}^\circ$, relațiile pentru momentele cinetice generalizate se obțin prin înlocuirea lui $\mathbf{x}$ cu $\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ$ în relațiile (2)—(5).

Se vede imediat că impulsul $\mathbf{H}$, momentul cinetic clasic $\mathbf{K}$ și energia cinetică E, date de relațiile :

$$\mathbf{H} = \int_{\wp} \dot{\mathbf{x}} \, \mathrm{d}m \tag{6}$$

$$\mathbf{K} = \int_{\wp} \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} \, \mathrm{d}m \tag{7}$$

$$E = \frac{1}{2} \int_{\wp} \dot{\mathbf{x}}^2 \, \mathrm{d}m \tag{8}$$

sînt legate de aceste momente cinetice generalizate astfel :

$$H^k = \mathfrak{M}^k \tag{9}$$

$$K^{qk} = \mathfrak{M}^{[qk]} \tag{10}$$

$$2E = \mathfrak{N}^{kk} \tag{11}$$

§ 2. LEGILE DE MIȘCARE

Pe lîngă noțiunile cinematicii și anume particulă, poziție, timp, masă, în cadrul dinamicii clasice se mai introduc noțiunile de forță $\mathbf{F}$ și cuplu $\mathbf{L}$ ([1], Sect. 196). Legile postulate ale mecanicii clasice (legile lui Euler), presupun că există un reper astfel ca

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{H}}, \qquad \mathbf{L} = \dot{\mathbf{K}} \tag{12}$$

pentru orice corp $\wp$.

Altfel spus, legile lui Euler presupun existența unui reper (reper inerțial), astfel ca „încărcările" $\mathbf{F}$ și $\mathbf{L}$ să fie egale cu „reacțiunile" corpului $\dot{\mathbf{H}}$ și $\dot{\mathbf{K}}$.

În mod analog, în cadrul dinamicii generalizate, bazată pe cinematica de la § 1, vom introduce încărcările generalizate pe care le vom nota cu litera $\mathfrak{F}$. Conform cu [1], Sect. 205, ecuațiile fundamentale ale dinamicii se pot scrie sub forma :

$$\mathfrak{F} = \dot{\mathfrak{M}} \tag{13}$$

$$\mathfrak{F}^{q_1 \cdots q_n k} = \dot{\mathfrak{M}}^{q_1 q_2 \cdots q_n k} \tag{13'}$$

În continuare vom renunța la calificativul „generalizat", acesta subînțelegîndu-se din notațiile folosite.

Ecuațiile (12) sînt un caz particular al ecuațiilor (13) și anume cazul în care luăm în considerație doar momentul cinetic de ordinul unu și partea antisimetrică a momentului cinetic de ordinul doi, precum și încărcările corespunzătoare.

Dacă pentru dinamica clasică încărcarea se reduce la forță și cuplu

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\mathbf{F} \tag{14}$$

$$\mathbf{L} = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{x} \times \mathrm{d}\mathbf{F} + \mathrm{d}\mathbf{L}), \tag{15}$$

pentru ecuațiile (13) va trebui să luăm în considerație și alte tipuri de încărcări.

Ecuațiile (13) presupun existența unui reper astfel încît observatorii să poată evalua viteza de variație a momentelor cinetice cu ajutorul forțelor (încărcărilor) ce acționează asupra corpului. Partea dificilă ce urmează constă în a distinge între ele diferitele tipuri de forță (încărcări) și de a le descrie în mod adecvat.

În cele ce urmează vom presupune existența a două tipuri distincte de încărcări și anume :

1) *Încărcări exterioare.* Acestea apar datorită unor cauze exterioare și acționează asupra particulelor corpului.

2) *Încărcări de contact.* Acestea sînt imaginate ca acționînd pe suprafețele de separare între părți ale corpului, fiind echivalente cu încărcarea exercitată de o porțiune a materialului asupra alteia, în caz particular, solicitarea frontierei corpului de mediul înconjurător.

Deci,

$$\mathfrak{F}^{q_1 \cdots q_n k} = \oint_{\mathcal{S}} t^{q_1 \cdots q_n k} \, \mathrm{d}a + \int_{\mathcal{V}} f^{q_1 \cdots q_n k} \, \mathrm{d}m, \tag{16}$$

unde $t^{q_1 \cdots q_n k}$ vor fi numite „tensiuni", iar $f^{q_1 \cdots q_n k}$ „încărcări masice".

Condițiile la limită corespunzătoare tensiunilor și ecuațiile diferențiale sînt respectiv ([1], Sect. 205, rel. (205.19)):

$$\sigma_{(n)}^{q_1 \cdots q_n k} = t^{q_1 \cdots q_n k p} n_p \tag{17}$$

$$t^{q_1 \cdots q_n k p}{}_{,p} + \rho \left(f^{q_1 \cdots q_n k} - \dot{\overline{x^{q_1} x^{q_2} \dots x^{q_n} \dot{x}^k}} \right) = 0, \tag{18}$$

unde $t^{q_1 \cdots q_n k p}$ vor fi numite hipertensiuni. $\sigma_{(n)}^{q_1 \cdots q_n k}$ sînt solicitările frontierei $\mathcal{S}$. Linia orizontală ce apare în ultima relație indică factorii asupra cărora se aplică derivata în raport cu timpul.

În cele de mai sus am stabilit condițiile la limită și ecuațiile diferențiale considerînd momente de un ordin oarecare. Modelul de corp considerat va fi cel ce va hotărî numărul de pași necesari, adică ordinul maxim al momentelor necesare de a fi luate în considerație.

Astfel în cadrul elasticității asimetrice, mediilor cu microstructură, mediilor polare, este suficient a ne limita la momentele de ordinul doi. În cele ce urmează ne vom limita la acest cadru.

Condițiile la limită și ecuațiile diferențiale vor fi în acest caz următoarele :

$$t_{(n)}^{k} = t^{kp} n_p \tag{19}$$

$$\sigma_{(n)}^{qk} = t^{{}^{k}qp} n_p \tag{20}$$

$$\rho \ddot{x}^k = t^{kp}{}_{,p} + \rho f^k \tag{21}$$

$$\rho \dot{\overline{x^q \dot{x}^k}} = t^{qkp}{}_{,p} + \rho f^{qk}, \tag{22}$$

unde $t_{(n)}^{k}$ și $\sigma_{(n)}^{qk}$ sînt funcții date pe $\mathcal{S}$.

Relația (21) este binecunoscuta relație a lui Cauchy, t^{kp} fiind tensorul de tensiune asimetric. Asupra relației (22) vom efectua cîteva schimbări.

După efectuarea derivatei în raport cu timpul, cu ajutorul relației (21), relația (22) devine :

$$\rho \dot{x}^q \dot{x}^k + x^q t^{kp}{}_{,p} + \rho x^q f^k = t^{qkp}{}_{,p} + \rho f^{qk} \tag{23}$$

sau

$$(t^{qkp} - x^q t^{kp})_{,p} + t^{kq} + \rho (f^{qk} - x^q f^k - \dot{x}^q \dot{x}^k) = 0 \tag{24}$$

Dacă t^{qkp} este înlocuit cu suma dintre momentele hipertensiunilor de ordinul doi şi un termen suplimentar, iar f^{qk} cu suma dintre momentele încărcărilor masice şi un termen suplimentar, astfel,

$$t^{qkp} = x^q t^{kp} + \lambda^{qkp}, \quad f^{qk} = x^q f^k + h^{qk}$$

pentru (24) obţinem forma :

$$\lambda^{qkp}{}_{,p} + t^{kq} + \rho(h^{qk} - \dot{x}^q \dot{x}^k) = 0. \tag{25}$$

Pentru mărimile λ^{qkp} condiţiile la limită (20) devin

$$\lambda^{qk}_{(n)} = \lambda^{qkp} n_p, \tag{26}$$

unde

$$\lambda^{qk}_{(n)} = \sigma^{qk}_{(n)} - x^q t^k_{(n)} \tag{27}$$

Deci în ansamblu, vom avea următoarele condiţii la limită şi următoarele ecuaţii diferenţiale :

$$t^k_{(n)} = t^{kp} n_p \tag{28}$$

$$\lambda^{qk}_{(n)} = \lambda^{qkp} n_p \tag{29}$$

$$t^{kp}{}_{,p} + \rho(f^k - \ddot{x}^k) = 0 \tag{30}$$

$$\lambda^{qkp}{}_{,p} + t^{kq} + \rho(h^{qk} - \dot{x}^q \dot{x}^k) = 0 \tag{31}$$

§ 3. CAZUL MEDIULUI MICROELASTIC [3]

Aşa cum am amintit în §2, dificultatea constă acum în a distinge şi a evalua diferitele tipuri de încărcări. Această dificultate este legată de modelul ales. Astfel în cazul mediului microelastic ([3], Sect. 3) încărcările masice sînt :

$$h^{qk} = \dot{x}^q \dot{x}^k + l^{qk} - \frac{1}{\rho} s^{qk} - \dot{\sigma}^{qk}, \tag{32}$$

unde l^{qk} reprezintă „momentul masic" („first body moment", în limbajul din [3]) ; $\dot{\sigma}^{qk}$ reprezintă „spinul inerţial" ; iar $s^{qk} = s^{kq}$ „media microtensiunilor" (v. [3], rel. (3.7)). În cazul acestui model, relațiile (28)—(30) rămîn identice, iar relația (31) capătă forma de mai jos:

$$\lambda^{qkp}{}_{,p} + t^{kq} - s^{kq} + \rho(l^{qk} - \dot{\sigma}^{qk}) = 0 \tag{33}$$

§ 4. CAZUL MATERIALELOR POLARE ([5], [2], Sect. 98)

În cazul în care densitatea acțiunii euclidiene, L, ([2], Sect. 98, rel. (98.2)) are proprietatea

$$L_{\dot{\mathbf{x}}} = \rho_R \dot{\mathbf{x}}, \tag{34}$$

unde ρ_R este densitatea în configurația de referință, atunci primele ecuații ale materialelor polare hiperelastice ([2], Sect. 98, rel. (98.24) și (98.25)), coincid cu relațiile (28)—(30). Ecuația (31) are forma:

$$\lambda^{qkp}{}_{,p} + t^{kq} + \rho(l^{qk} + s^{qk} - \dot{x}^q \dot{x}^k - \dot{\sigma}^{qk}) = 0, \tag{35}$$

unde $s^{qk} = s^{kq}$. Pentru acest model încărcările masice h^{qk} sînt:

$$h^{qk} = l^{qk} + s^{qk} - \dot{\sigma}^{qk} \tag{36}$$

Se vede de aici că cele două modele nu diferă esențial unul de celălalt.

§ 5. MODELUL COSSERAT

Partea antisimetrică a relației (33) are forma

$$m^{qkp}{}_{,p} + t^{[kq]} + \rho(l^{[qk]} - \dot{\sigma}^{[qk]}) = 0 \tag{37}$$

unde am folosit simetria tensorului s^{kq}. Mărimile $m^{qkp} = \lambda^{[qk]p}$ definesc tensorul cuplurilor de tensiune. Ecuația (37) se mai numește și ecuația de balanță a tensorului spin ([2], Sect. 98, rel. (98.26).

Cînd $\dot{\sigma}^{[qk]} = 0$, obținem cunoscutele ecuații ale lui Cosserat pentru balanța momentului ([1], Sect. 205, rel. (205. 10)).

Dacă $m^{qkp} = 0$ și $l^{[qk]} = 0$, atunci relația (37) se reduce la legea a doua a lui Cauchy:

$$t^{[kq]} = 0. \tag{38}$$

Trebuie remarcat aici faptul că partea simetrică a relației (33) sau (35), este mult mai dificil de interpretat. Teoriile cu momente generalizate, în sensul mediului cu microstructură [3], sau mediilor polare [5], pot fi justificate matematic prin faptul că ele remediază nedeterminarea tensiunilor, ce apare în teoria clasică a elasticității asimetrice [(4], § 40).

Primită la redacție la 5 noiembrie 1968

Universitatea din București
Facultatea de matematică-mecanică,
Str. Academiei nr. 14

SOME DYNAMICAL PROBLEMS FOR MATERIALS WITH GENERAL MOMENTS

ABSTRACT

By introducing general moments and using general dynamics the generalized differential equations and boundary conditions for a deformable body are obtained.

One shows that the equations of motion and the boundary conditiones corresponding to Eringen's and Mindlin's microsctructural media, and to Ericksen's, Truesdell's and Toupin's oriented media can be obtained from the generalized dynamical equations, in the case when only the first and second order moments are considered.

BIBLIOGRAFIE

1. Truesdell C., Toupin R., *The Classical Field Theories.* Handbuch der Physik, III/1, Springer-Verlag, 1960.
2. Truesdell, C., Noll, W., *The Nonlinear Field Theories of Mechanics.* Handbuch der Physik, III/3, Springer-Verlag, 1965.
3. Eringer, A. C., Suhubi, E. S., *Nonlinear theory of simple microelastic solids (I).* Int. J. Engng. Sci., **2**, 189—203 (1964).
4. Eringen A. C., *Nonlinear Theory of Continuous Media.* New York, Mc. Graw Hill, 1962.
5. Toupin, R. A., *Theories of elasticity with couple-stress.* Arch. Rat. Mech. Anal., **17**, 85—112 (1964).

ASUPRA UNOR PROPRIETĂȚI ALE SPAȚIILOR AFINE

DE

MIRCEA GEANĂU

În această lucrare ne propunem să studiem limitele proiective și inductive ale spațiilor afine.

I.

DEFINIȚIA 1. Fiind dat un spațiu vectorial stîng (drept) T peste un corp K, se numește *spațiu afin* atașat lui T, orice spațiu omogen E al grupului aditiv T, astfel ca O să fie singurul operator al lui T lăsînd invariante toate elementele lui E. În aceste condiții T se numește spațiul translațiilor lui E.

În cele ce urmează vom considera că T este un spațiu vectorial stîng peste K. În aceste condiții oricare ar fi $t \in T$ și $a \in E$, vom nota cu $a + t$ sau $t + a$ transformatul lui a prin t.

Avem relațiile :

$$s + (t + a) = (s + t) + a, \ 0 + a = a$$

oricare ar fi $s \in T$, $t \in T$, $a \in E$

Din definiția 1 rezultă că aplicația $t \to t + a$ este o bijecție a lui T pe E.

Fiind date două puncte $a, b \in E$, există o translație t și numai una astfel că $b - t + a$; vom nota această translație cu $b - a$. Avem deci :

$$a - a = 0, \ a - b = -(b - a), \ b = (b - a) + a,$$

oricare ar fi $a, b \in E$

Se verifică ușor că fiind dat $a \in E$, aplicația : $x \to x - a$ notată cu u, este o bijecție a lui E pe T.

ST. CERC. MAT., TOM, 21, NR. 10, P. 1473–1483 BUCUREȘTI, 1969

Cînd se identifică E cu T prin bijecția u, se consideră E ca spațiu vectorial obținut luînd pe a ca origină în E.

Fie $\lambda \in K$. λx e acel element din E care corespunde prin bijecția u lui $\lambda(x - a)$.

Fie $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ o familie de spații afine și fie $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$ o familie de spații vectoriale stîngi peste corpul K, T_α fiind spațiul translațiilor lui E_α oricare ar fi $\alpha \in I$.

Fie $\prod\limits_{\alpha \in I} E_\alpha$ și $\prod\limits_{\alpha \in I} T_\alpha$.

Se definește o lege externă de compoziție pe $\prod\limits_{\alpha \in I} E_\alpha$ avînd pe $\prod\limits_{\alpha \in I} T_\alpha$ ca grup de operatori, notată cu $+$, astfel:

Fie

$$x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in \prod_\alpha E_\alpha \text{ și } t = (t_\alpha)_{\alpha \in I} \in \prod_\alpha T_\alpha;$$

vom pune $x + t = (x_\alpha + t_\alpha)_{\alpha \in I}$.

Se verifică că $\prod\limits_{\alpha \in I} E_\alpha$ este un spațiu afin, avînd pe $\prod\limits_{\alpha \in I} T_\alpha$ ca spațiul translațiilor.

Fie u_α bijecția $x_\alpha \to x_\alpha - a_\alpha$ a lui E_α pe T_α

$$x_\alpha \in E_\alpha,\ a_\alpha \in E_\alpha,\ x_\alpha - a_\alpha \in T_\alpha.$$

Fie u extensia aplicațiilor (u_α) la $\prod\limits_{\alpha \in I} E_\alpha$.

u este o bijecție a lui $\prod\limits_{\alpha \in I} E_\alpha$ pe $\prod\limits_{\alpha \in I} T_\alpha$:

$$u : (x_\alpha)_{\alpha \in I} \to (x_\alpha - a_\alpha)_{\alpha \in I}$$

Se notează cu $x - a$ elementul $(x_\alpha - a_\alpha)_{\alpha \in I}$ din $\prod\limits_{\alpha \in I} T_\alpha$. Avem relația

$$x = (x - a) + a.$$

$\prod\limits_{\alpha \in I} E_\alpha$ se consideră ca spațiu vectorial, luînd pe $a = (a_\alpha)_{\alpha \in I}$ ca origină în $\prod\limits_{\alpha \in I} E_\alpha$.

În cele ce urmează se notează cu I o mulțime preordonată, filtrantă la dreapta și nevidă și prin $\alpha \leqslant \beta$, relația de preordine din I. Fie $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ un sistem proiectiv de spații afine și $(T_\alpha, g_{\alpha\beta})$ un sistem proiectiv de K module relativ la I, T_α fiind spațiul translațiilor lui E_α oricare ar fi $\alpha \in I$. Fie

$$E = \underleftarrow{\lim}\, E_\alpha,\ T = \underleftarrow{\lim}\, T_\alpha.$$

Ne punem problema: în ce condiţii E poate fi un spaţiu afin avînd pe T ca spaţiul translaţiilor? Mai precis, restricţia lui u la E să fie o bijecţie a lui E pe T. Fie $u_\alpha : x_\alpha \to x_\alpha - a_\alpha$ bijecţia lui E_α pe T_α, unde a_α este dat în E_α, $x_\alpha \in E_\alpha$.

Punem condiţia

$$f_{\alpha\beta}(x_\beta) - a_\alpha = g_{\alpha\beta}(x_\beta - a_\beta) \tag{1}$$

Aceasta arată că diagrama

$$\begin{tikzcd} E_\beta \arrow[r, "u_\beta"] \arrow[d, "f_{\alpha\beta}"'] & T_\beta \arrow[d, "g_{\alpha\beta}"] \\ E_\alpha \arrow[r, "u_\alpha"'] & T_\alpha \end{tikzcd}$$

este comutativă. Deci (u_α) formează un sistem proiectiv de bijecţii. În aceste condiţii există o aplicaţie a lui E în T notată cu u, şi numai una, făcînd comutativă diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f_\alpha"'] & T \arrow[d, "g_\alpha"] \\ E_\alpha \arrow[r, "u_\alpha"'] & T_\alpha \end{tikzcd}$$

oricare ar fi $\alpha \in I$, unde u este limita proiectivă a aplicaţiilor (u_α) notată $\underleftarrow{\lim}\, u_\alpha$.

(u_α) fiind bijecţii, u este o bijecţie.

Funcţiile g_α şi f_α sînt restricţiile lui pr_α la T, respectiv E.

E este nevid deoarece T este nevid.

Fie $x \in E$.

$$g_\alpha(u(x)) = u_\alpha(f_\alpha(x)) = x_\alpha - a_\alpha \text{ oricare ar fi } \alpha \in I.$$

Deci $u(x) = (x_\alpha - a_\alpha)_{\alpha \in I} = x - a$, unde $a = (a_\alpha)_{\alpha \in I}$. Vom defini o lege de compoziţie pe E, avînd pe T ca grup de operatori astfel: Fie $t \in T$, $x \in E$. Vom pune

$$t + x = u^{-1}(t + u(x)).$$

Se verifică că $E = \underleftarrow{\lim}\, E_\alpha$ este un spaţiu afin, avînd pe $T = \underleftarrow{\lim}\, T_\alpha$ spaţiul translaţiilor. Fie

$$a = (a_\alpha)\ \alpha \in I.$$

Presupunem că

$$a_\alpha = f_{\alpha\beta}\,(a_\beta) \text{ pentru } \beta \geqslant \alpha. \tag{2}$$

Adică $a \in E$. Identificînd E cu T prin bijecția u, E este un spațiu vectorial peste K, luînd ca origine în E pe a, a_α fiind originea lui E_α, oricare ar fi $\alpha \in I$.

Fie $E = \underleftarrow{\lim}\, E_\alpha$ spațiul afin, $(x^i)_{i\in J}$ o familie de puncte ale lui E, $(i_i)_{i\in J}$ o familie de elemente ale lui K, de suport finit, cu

$$\sum_{i\in j} \lambda_i = 1.$$

Dacă a este un punct oarecare al lui E, punctul $x \in E$ definit de

$$x - a = \sum_{i\in J} \lambda_i (x^i - a)$$

independent de a, se numește baricentru și se notează $\sum\limits_{i\in J} \lambda_i x^i$.

TEOREMA 1. *Fie* $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ *și* $(E'_\alpha, f'_{\alpha\beta})$ *două sisteme proiective de spații afine atașate sistemelor proiective* $(T_\alpha,\ g'_{\alpha\beta})$ *și* $(T'_\alpha,\ g'_{\alpha\beta})$ *de* K *module, îndeplinind condițiile* (1) și (2) *și fie* $(u_\alpha)_{\alpha\in T}$ *un sistem proiectiv de aplicații liniar afine ale lui* E_α *în* E'_α *oricare ar fi* $\alpha \in I$.

În aceste condiții, limita proiectivă a aplicațiilor $(u_\alpha)_{\alpha\in I}$ *notată* $\underleftarrow{\lim}\, u_\alpha$, *este o aplicație liniară afină a lui* $E = \underleftarrow{\lim}\, E_\alpha$ *în* $E' = \underleftarrow{\lim}\, E'_\alpha$.

Demonstrație. Pentru ca aplicația $u = \underleftarrow{\lim}\, u_\alpha : E \to E'$ să fie liniar afină, trebuie ca oricare ar fi familia $(x^i)_{i\in J}$ de puncte ale lui E, și familia $(\lambda_i)_{i\in J}$ de scalari de suport finit, cu $\sum\limits_{i\in J} \lambda_i = 1$, să avem

$$u\,(\sum_{i\in J} \lambda_i x^i) = \sum_{i\in J} \lambda_i u(x^i). \text{ Bourbaki [3].}$$

Diagrama

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f_\alpha"'] & E' \arrow[d, "f'_\alpha"] \\
E_\alpha \arrow[r, "u'_\alpha"] & E'_\alpha
\end{tikzcd}$$

pentru or $\alpha \in I$, fiind comutativă, vom avea:

$$(f'_\alpha \circ u)\,(\sum_{i\in J} \lambda_i x^i) = (u_\alpha \circ f_\alpha)\,(\sum_{i\in J} \lambda_i x^i) = u_\alpha\,(\sum_{i\in J} \lambda_i f_\alpha(x^i) =$$

$$= \sum_{i\in J} \lambda_i u_\alpha\,(f_\alpha(x^i)\,) = \sum_{i\in J} \lambda_i f'_\alpha\,(u(x^i)\,) = f'_\alpha\,(\sum_{i\in J} \lambda_i u(x^i))$$

Deci oricare ar fi $\alpha \in I$ avem:

$$f'_\alpha(u(\sum_{i\in J} \lambda_i x^i)) = f'_\alpha(\sum_{i\in J} \lambda_i u(x^i)).$$

Deci

$$u(\sum_{i\in J} \lambda_i x^i) = \sum_{i\in J} \lambda_i u(x^i)$$

Observaţie. f_α şi f'_α sînt liniar afine. Fiecărei aplicaţii $u_\alpha : E_\alpha \to E'_\alpha$ liniar afine i se asociază o aplicaţie liniară $v_\alpha : T_\alpha \to T'_\alpha$ şi numai una, astfel ca

$$u_\alpha(x_\alpha + t_\alpha) = u_\alpha(x_\alpha) + v_\alpha(t_\alpha)$$

oricare ar fi $x_\alpha \in E_\alpha$, $t_\alpha \in T_\alpha$.

Fie a_α arbitrar din E_α. Aplicaţia

$$t_\alpha \to u_\alpha(a_\alpha + t_\alpha) - u_\alpha(a_\alpha)$$

e aplicaţia v_α, care nu depinde de a_α.

Demonstraţia este dată în [3]. Presupunem îndeplinte condiţiile din teorema 1. Fiecărei aplicaţii u_α i se asociază aplicaţia liniară v_α. În general (v_α) nu formează un sistem proiectiv.

Fie $u = \underset{\longleftarrow}{\lim}\, u_\alpha$. Conform teoremei 1, u este o aplicaţie liniar afină a lui $E = \underset{\longleftarrow}{\lim}\, E_\alpha$ în $E' = \underset{\longleftarrow}{\lim}\, E'_\alpha$. Deci există o aplicaţie v a lui $T = \underset{\longleftarrow}{\lim}\, T_\alpha$ în $T' = \underset{\longleftarrow}{\lim}\, T'_\alpha$, cu

$$u(x + t) = u(x) + v(t),$$

oricare ar fi $x \in E$, $t \in T$.

PROPOZIŢIA *1. Diagrama*:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g_\alpha"'] & T' \arrow[d, "g'_\alpha"] \\ T_\alpha \arrow[r, "v_\alpha"'] & T'_\alpha \end{tikzcd}$$

e comutativă, oricare ar fi $\alpha \in T$

Fie $t = (t_\alpha)_{\alpha\in I} \in T$, $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in E$

$$v_\alpha(g_\alpha(t)) = v_\alpha(t_\alpha) = u_\alpha(x_\alpha + t_\alpha) - u_\alpha(x_\alpha) =$$

$$= g'_\alpha(u(x + t) - u(x)) = g'_\alpha(v(t)),$$

$$g'_\alpha(u(x + t) - u(x)) = (f'_\alpha \circ u)(x + t) - (f'_\alpha \circ u)(x) =$$

$$= (u_\alpha \circ f_\alpha)(x + t) - (u_\alpha \circ f_\alpha)(x) = u_\alpha(x_\alpha + t_\alpha) - u_\alpha(x_\alpha).$$

COROLAR. *Dacă* (v_α) *este un sistem proiectiv, atunci* v *este tocmai* $\underset{\longleftarrow}{\lim}\, v_\alpha$.

TEOREMA 2. *Fiind date* $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$. $(T_\alpha, g_{\alpha\beta})$ *două sisteme proiective de spaţii afine şi respectiv* K *module, îndeplinind condiţia* (*1*) *şi fiind date* $(V_\alpha)_{\alpha\in I}$ *un sistem proiectiv de părţi ale lui* (E_α), V_α *fiind o varietate liniară a lui* E_α *oricare ar fi* $\alpha\in I$, *atunci* $V = \underset{\longleftarrow}{\lim}\, V_\alpha$ *este o varietate liniar afină a lui* $E = \underset{\longleftarrow}{\lim}\, E_\alpha$.

Demonstraţie. Dacă V e vid, atunci V e o varietate liniară. Presupunem că V e nevid. Trebuie să arătăm că oricare ar fi familia $(x^i)_{i\in J}$ de puncte ale lui V, şi pentru orice familie $(\lambda_i)_{i\in J}$ de elemente ale lui K, de suport finit, cu $\sum\limits_{i\in J} \lambda_i = 1$, baricentrul $\sum\limits_{i\in J} \lambda_i x^i$ aparţine lui V.Vom folosi următoarea propoziţie dată în [3] :

Pentru ca o parte V, nevidă, a unui spaţiu afin E să fie o varietate liniară, este necesar şi suficient ca V să fie subspaţiu vectorial, pentru structura de spaţiu vectorial al lui E obţinută luînd un punct al lui V ca origine.

Avem

$$V = \underset{\longleftarrow}{\lim}\, V_\alpha = E \cap \prod_{\alpha\in I} V_\alpha.$$

Fie

$$a = (a_\alpha)_{\alpha\in I} \in V.$$

V_α este un subspaţiu al lui E_α, pentru structura de spaţiu vectorial al lui E_α luînd pe $a_\alpha \in V_\alpha$ ca origine. Deci $\prod\limits_{\alpha\in I} V_\alpha$ este un subspaţiu al lui $\prod\limits_{\alpha\in I} E_\alpha$ luînd pe $a = (a_\alpha)_{\alpha\in I}$ ca origine. De asemenea E este un subspaţiu al lui $\prod\limits_{\alpha\in I} E_\alpha$. Deci $E \cap \prod\limits_{\alpha\in I} V_\alpha$ este un subspaţiu al lui $\prod\limits_{\alpha\in I} E_\alpha$ luînd pe $a = (a_\alpha)_{\alpha\in I} \in V$ ca origine.

Avem incluziunile :

$$V \subseteq E \subseteq \prod_{\alpha\in I} E_\alpha.$$

Rezultă că V este un subspaţiu al lui E, luînd pe $a \in V$ ca origine. Deci $V = \underset{\longleftarrow}{\lim}\, V_\alpha$ e o varietate liniar afină a lui $E = \underset{\longleftarrow}{\lim}\, E_\alpha$. Am arătat că putem considera $E = \underset{\longleftarrow}{\lim}\, E_\alpha$ spaţiu afin avînd $T = \underset{\longleftarrow}{\lim}\, T_\alpha$ spaţiul translaţiilor, folosind bijecţia u a lui E pe T şi am considerat E spaţiul vectorial peste K luînd ca origine în E pe $a = (a_\alpha)_{\alpha\in I}$, a_α fiind originea pentru structura de spaţiu vectorial al lui E_α oricare ar fi $\alpha \in I$.

Vom încerca să tratăm această problemă altfel :

Fie $(E_\alpha f_{\alpha\beta})$ un sistem proiectiv de spaţii afine ; $(T_\alpha,\ g_{\alpha\beta})$ un sistem proiectiv de K module relativ la mulţimea I. Mai presupunem că

$f_{\alpha\beta}$ sînt aplicaţii surjective, iar I admite o parte cofinală numărabilă.

De asemenea se cere ca pentru $\beta \geqslant \alpha$ să avem

$$f_{\alpha\beta}(x_\beta + t_\beta) = f_{\alpha\beta}(x_\beta) + g_{\alpha\beta}(t_\beta). \tag{3}$$

Se dotează $\prod\limits_{\alpha\in I} E_\alpha$ cu o lege externă de compoziţie avînd pe $\prod\limits_{\alpha\in I} T_\alpha$ grup de operatori punînd

$$(x_\alpha)_{\alpha\in I} + (t_\alpha)_{\alpha\in I} = (x_\alpha + t_\alpha)_{\alpha\in I}$$

Fie $E = \underset{\longleftarrow}{\lim}\ E_\alpha$ şi $T = \underset{\longleftarrow}{\lim}\ T_\alpha$, E este nevid. E rămîne o parte stabilă a lui $\prod\limits_{\alpha\in I} E_\alpha$ faţă de restricţia operatorilor la T. Se verifică uşor că legea externă e asociativă.

Să arătăm că, fiind date $y = (y_\alpha)_{\alpha\in I} \in E$ şi $x = (x_\alpha)_{\alpha\in I} \in E$, există un element $t \in T$ şi numai unul cu $y = x + t$; oricare ar fi $\alpha \in I$ există t_α şi numai unul cu $g_\alpha = x_\alpha + t_\alpha$. Elementul $t = (t_\alpha)_{\alpha\in I}$ este cel căutat

E este un spaţiu afin, iar T este spaţiul translaţiilor.

Fie $a \in E$ şi fie u aplicaţia $x \to x - a$ care este o bijecţie a lui E pe T.

Fie u_α bijecţia $x_\alpha \to x_\alpha - a_\alpha$ lui E_α pe T_α, unde $a_\alpha = f_\alpha(a)$. Diagrama :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f_\alpha"'] & T \arrow[d, "g_\alpha"] \\
E_\alpha \arrow[r, "u_\alpha"'] & T_\alpha
\end{tikzcd}$$

e comutativă, oricare ar fi $\alpha \in I$.

Rezultatele enunţate rămîn valabile, considerînd E_α spaţiu vectorial, luînd pe $a_\alpha = f_\alpha(a)$ ca origine în E_α, a fiind originea lui E.

II

Fie $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ un sistem inductiv de spaţii afine, $(T_\alpha, g_{\beta\alpha})$ un sistem inductiv de K module, T_α fiind spaţiul translaţiilor lui E_α oricare ar fi $\alpha \in I$, astfel ca pentru $\beta \geqslant \alpha$ să avem :

$$f_{\alpha\beta}(t_\alpha + x_\alpha) = g_{\beta\alpha}(t_\alpha) + f_{\beta\alpha}(x_\alpha), \text{ unde } x_\alpha \in E_\alpha,\ t_\alpha \in T_\alpha. \tag{1}$$

Deci $(f_{\beta\alpha}, g_{\beta\alpha})$ e un dimorfism al lui E_α în E_β. Condiţia (1) arată că aplicaţiile $s_\alpha : T_\alpha \times E_\alpha \to E_\alpha$ $(t_\alpha, x_\alpha) \xrightarrow{s_\alpha} t_\alpha + x_\alpha$ formează un sistem inductiv.

Aplicaţia $s = \underset{\longleftarrow}{\lim}\ s_\alpha : \underset{\longleftarrow}{\lim}\ (T_\alpha \times E_\alpha) \to \underset{\longleftarrow}{\lim}\ E_\alpha = E$ se identifică cu o aplicaţie a lui $T \times E$ în E, unde $T = \underset{\longrightarrow}{\lim}\ T_\alpha$. Bourbaki [3].

S-a definit o lege externă peste tot definită pe E avînd T mulțimea operatorilor, notată $+$.

Fie $f_\alpha : E_\alpha \to E$ și $g_\alpha : T_\alpha \to T$ aplicațiile canonice. Valoarea lui $t + x$ pentru $t \in T$, $x \in E$ se obține astfel:

Există $\alpha \in I$, $t_\alpha \in T_\alpha$, $x_\alpha \in E_\alpha$ astfel, ca $t = g_\alpha(t_\alpha)$, $x = f_\alpha(x_\alpha)$.

Pentru orice sistem $(\alpha, x_\alpha, t_\alpha)$ verificînd aceste condiții avem:

$$t + x = f_\alpha(t_\alpha + x_\alpha).$$

Se verifică imediat proprietatea:

$$s + (t + x) = (s + t) + x \text{ pentru } s \in T,\ t \in T,\ x \in E$$

TEOREMA 1. *Dacă homomorfismele* $g_{\beta\alpha}$ *sînt injective, atunci* E *este spațiul afin, avînd pe* T *spațiul translațiilor.*

Demonstrație. Trebuie să arătăm că fiind date două elemente din E, y și x, există $t \in T$ și numai unul cu $y = t + x$. Elementul t îl vom nota cu $y - x$. Există un $\alpha \in I$, $x_\alpha \in E_\alpha$, $y_\alpha \in E_\alpha$ astfel ca $y = f_\alpha(y_\alpha)$, $x = f_\alpha(x_\alpha)$. Există un singur $t_\alpha \in T_\alpha$ astfel ca $y_\alpha = x_\alpha + t_\alpha$. Elementul $t = g_\alpha(t_\alpha)$ verifică relația

$$y = t + x.$$

Să arătăm că este unic. Presupunem că mai există $s = g_\alpha(s_\alpha)$, $s_\alpha \in T_\alpha$ astfel ca să avem:

$$y = s + x = f_\alpha(s_\alpha + x_\alpha).$$

Deci

$$f_\alpha(s_\alpha + x_\alpha) = f_\alpha(t_\alpha + x_\alpha).$$

Rezultă că există un $\beta \geqslant \alpha$ astfel ca

$$f_{\beta\alpha}(s_\alpha + x_\alpha) = f_{\beta\alpha}(t_\alpha + x_\alpha)$$

ceea ce implică

$$g_{\beta\alpha}(s_\alpha) + f_{\beta\alpha}(x_\alpha) = g_{\beta\alpha}(t_\alpha) + f_{\beta\alpha}(x_\alpha).$$

Deci $g_{\beta\alpha}(s_\alpha) = g_{\beta\alpha}(t_\alpha)$ ceea ce duce la $s_\alpha = t_\alpha$. Deci $s = t$ și teorema e demonstrată.

Avem

$$g_\alpha(y_\alpha - x_\alpha) = f_\alpha(y_\alpha) - f_\alpha(x_\alpha).$$

Fie $a_\alpha \in E_\alpha$, u_α bijecţia $x_\alpha \to x_\alpha - a_\alpha$ a lui E_α pe T_α, oricare ar fi $\alpha \in I$. Fie $a = f_\alpha(a_\alpha)$ şi u bijecţia $x \to x - a$ a lui E pe T. Diagrama:

$$\begin{tikzcd}
E_\alpha \arrow[r, "u_\alpha"] \arrow[d, "f_\alpha"'] & T_\alpha \arrow[d, "g_\alpha"] \\
E \arrow[r, "u"'] & T
\end{tikzcd}$$

e comutativă, oricare ar fi $\alpha \in I$.

TEOREMA 2. *Fie* $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ *un sistem inductiv de spaţii afine,* $(T_\alpha, g_{\beta\alpha})$ *un sistem inductiv de K module, pentru* $\beta \geqslant \alpha$, *homomorfismele* $g_{\beta\alpha}$ *fiind injective, iar* $(f_{\beta\alpha}, g_{\beta\alpha})$ *un dimorfism al lui* E_α *în* E_β. *Fie* $(E'_\alpha, f'_{\beta\alpha})$ *un alt sistem inductiv de spaţii afine,* $(T'_\alpha, g'_{\beta\alpha})$ *un sistem inductiv de K module, pentru* $\beta \geqslant \alpha$, $g'_{\beta\alpha}$ *fiind injective şi* $(f'_{\beta\alpha}, g'_{\beta\alpha})$ *un dimorfism al lui* E'_α *în* E'_β. *Fie* $(u_\alpha)_{\alpha \in I}$ *un sistem inductiv de aplicaţii liniar afine ale lui* E_α *în* E'_α. *Atunci* $u = \varinjlim u_\alpha$ *este o aplicaţie liniar afină ale lui* $E = \varinjlim E_\alpha$ *în* $E' = \varinjlim E'_\alpha$.

Demonstraţie. Trebuie să arătăm că, oricare ar fi familia $(x^i)_{i \in J}$ de puncte ale lui E şi familia $(\lambda_i)_{i \in J}$ de suport finit cu $\sum_{i \in J} \lambda_i = 1$, avem

$$u\Big(\sum_{i \in J} \lambda_i x^i\Big) = \sum_{i \in J} \lambda_i u(x^i).$$

Fie n numărul maxim al elementelor $\lambda_i \neq 0$.

Avem

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Vom arăta că

$$u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(x^i)$$

ceea ce va demonstra teorema.

Diagrama:

$$\begin{tikzcd}
E_\alpha \arrow[r, "u_\alpha"] \arrow[d, "f_\alpha"'] & E'_\alpha \arrow[d, "f'_\alpha"] \\
E \arrow[r, "u"'] & E'
\end{tikzcd}$$

e comutativă oricare ar fi $\alpha \in I$.

Există un $\alpha \in I$ şi un sistem finit $(x^i_\alpha)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ astfel ca $x^i = f_\alpha(x^i_\alpha)$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$, Bourbaki [3],

$$u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i\right) = u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_\alpha(x^i_\alpha)\right) = u\left(f_\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i_\alpha\right)\right) =$$

$$= (f'_\alpha \circ u_\alpha)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i_\alpha\right) = f'_\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_\alpha(x^i_\alpha)\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f^i_\alpha(u_\alpha(x^i_\alpha)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (u \circ f_\alpha)(x^i_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(x^i)$$

$\lambda_i x^i_\alpha$ e elementul care corespunde lui $\lambda_i(x^i_\alpha - a_\alpha)$, $f_\alpha(\lambda_i x^i_\alpha)$ corespunde lui $g_\alpha(\lambda_i(x^i_\alpha - a_\alpha)) = \lambda_i g_\alpha(x^i_\alpha - a_\alpha) = \lambda_i(f_\alpha(x^i_\alpha) - f_\alpha(a_\alpha))$ căruia îi corespunde $\lambda_i f_\alpha(x^i_\alpha)$. Deci $f_\alpha(\lambda_i x^i_\alpha) = \lambda_i f_\alpha(x^i_\alpha)$. Analog se arată că

$$f_\alpha(x^1_\alpha + \ldots + x^n_\alpha) = f_\alpha(x^1_\alpha) + \ldots + f_\alpha(x^n_\alpha)$$

Fiecărei aplicaţii $u_\alpha : E_\alpha \to E'_\alpha$ liniar afină i se asociază o aplicaţie $v_\alpha : T_\alpha \to T'_\alpha$ liniară.

Fie

$$u = \varinjlim u_\alpha : E \to E'.$$

Fie $v : T \to T'$ aplicaţia liniară asociată lui u.

PROPOZIŢIA 1. *Diagrama* :

$$\begin{tikzcd}
T_\alpha \arrow[r, "v_\alpha"] \arrow[d, "g_\alpha"'] & T'_\alpha \arrow[d, "g'_\alpha"] \\
T \arrow[r, "v"'] & T'
\end{tikzcd}$$

e comutativă, oricare ar fi $\alpha \in I$.

Fie $t_\alpha \in T_\alpha$, $x_\alpha \in E_\alpha$

$$v_\alpha(t_\alpha) = v_\alpha(x_\alpha + t_\alpha) - u_\alpha(x_\alpha),$$

$$g'_\alpha(u_\alpha(x_\alpha + t_\alpha) - u_\alpha(x_\alpha)) = f'_\alpha(v_\alpha(x_\alpha + t_\alpha)) - f'_\alpha(u_\alpha(x_\alpha)) =$$

$$= u(f_\alpha(x_\alpha + t_\alpha)) - u(f_\alpha(x_\alpha)) = u(f_\alpha(x_\alpha) + g_\alpha(t_\alpha)) - u(f_\alpha(a_\alpha)) =$$

$$= u(x + g_\alpha(t_\alpha)) - u(x) = (v \circ g_\alpha)(t).$$

Deci $g'_\alpha \circ v_\alpha = v \circ g_\alpha$ *și propoziția e demonstrată.*

COROLAR *Dacă* (v_α) *formează un sistem inductiv, atunci* v *coincide cu* $\varinjlim V_\alpha$.

TEOREMA 3. *Fie* $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ *un sistem inductiv de spații afine,* $(T_\alpha\ g_{\beta\alpha})$ *un sistem inductiv de* K *module, unde* $g_{\beta\alpha}$ *sînt injective și* $(f_{\beta\alpha}, g_{\beta\alpha})$ *este un dimorfism al lui* E_α *în* E_β *pentru* $\beta \geqslant \alpha$.
Fie (V_α) *un sistem inductiv de varietăți liniare ale lui* E_α. *Atunci* $V = \varinjlim V_\alpha$ *este o varietate liniară a lui* $E = \varinjlim E_\alpha$.

Demonstrație. V este nevid, V_α fiind nevide. Fie $a \in V$. Vom arăta că V este un subspațiu vectorial pentru structura de spațiu vectorial a lui E luînd pe $a \in V$ ca origine. Există un $\alpha \in I$ și $a_\alpha \in V_\alpha$ astfel ca $a = f_\alpha(a_\alpha)$. V_α este un subspațiu pentru structura de spațiu a lui E_α, luînd pe $a_\alpha \in V_\alpha$ ca origine. Vom nota cu $+$ legea internă de compoziție a lui E și E_α pentru structurile lor de spații vectoriale.

Fie $x, y \in V$. Avem $x = f_\alpha(x_\alpha)$, $y = f_\alpha(y_\alpha)$, $x_\alpha \in V_\alpha$, $y_\alpha \in V_\alpha$ $x + y = f_\alpha(y_\alpha + y_\alpha) \in V$, deoarece $x_\alpha + y_\alpha \in V_\alpha$, $-x = f_\alpha(-x_\alpha) \in V$ deoarece $-x_\alpha \in V_\alpha$,

$$\lambda x = \lambda f_\alpha(x) = f_\alpha(\lambda\, x\, \alpha_\alpha) \in V.$$

Rezultă că V este un subspațiu al lui E. Deci V este o varietate liniar afină.

Primită la redacție la 20 mai 1968

Institutul politehnic „Gheorghe
Gheorghiu-Dej" București,
Str. Polizu nr. 1

SUR CERTAINES PROPRIÉTÉS DES ESPACES AFFINES

(RÉSUMÉ)

Soit $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ un système projectif respectivement inductif d'espaces affines et soit $(T_\alpha, g_{\alpha\beta})$ un système projectif, respectivement inductif d'espaces vectoriels sur un corps K. On montre que dans certaines conditions la limite projective, respectivement inductive, de ces espaces affines est un espace affine ayant comme espace de translation la limite projective, respectivement inductive de ces espaces vectoriels.

Puis on montre que la limite projective, respectivement inductive, des applications linéaires affines et des variétés affines est une application linéaire affine, respectivement une variété affine.

BIBLIOGRAFIE

1. N. BOURBAKI *Théorie des ensembles.* Chapitre 3.
2. — *Structure algébrique.*
3. — *Algèbre linéaire.*
4. I. CREANGĂ, C. HAIMOVICI *Algebră liniară.*

PROBLEMA LUI RIEMANN GENERALIZATĂ ÎN CLASA FUNCȚIILOR ANALITICE GENERALIZATE

DE

VASILE IONESCU și CIPRIAN COZMA

Se extinde în clasa funcțiilor analitice generalizate studiul problemei lui Riemann generalizate, rezolvată în clasa funcțiilor analitice pe porțiuni, definită de o relație liniară cu coeficienți hölderieni pe linia de salt L, care conține valorile limită $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ ale funcției căutate $\Phi(z)$ și conjugatele lor. Se ia în considerare numai cazul domeniului simplu conex limitat de o curbă de tip Liapunov. Pentru necesitățile studiului se generalizează formula lui Schwarz-Villat pentru funcții analitice generalizate, după care problema este redusă la o ecuație integrală singulară cu nucleu de tip Cauchy.

INTRODUCERE

Ne propunem în lucrarea de față să rezolvăm în clasa funcțiilor analitice generalizate următoarea problemă la limită : fiind dată o curbă închisă, satisfăcînd condițiile lui Liapunov [1] care împarte planul complex $z = x + iy$ în două domenii complementare D^+ și D^-, să se găsească funcția analitică generalizată pe porțiuni $U(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, care satisface în plan ecuația

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = A(z)\, U(z) + B(z)\, \overline{U}(z) + F(z), \tag{1}$$

iar pe frontiera (L) valorile la limită ale lui $U(z)$, $U^+(t)$ și $U^-(t)$ satisfac relația :

$$U^+(t) + A_1(t)\, U^-(t) + B_1(t)\, \overline{U^+(t)} + C_1(t)\, \overline{U^-(t)} = g(t). \tag{2}$$

Nu insistăm asupra notațiilor și terminologiei utilizate întrucît acestea se găsesc în orice tratat de specialitate (de ex. [1], [2]). Coeficienții

. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 10, P. 1485–1510, BUCUREȘTI, 1969

condiției la limită $A_1(t)$, $B_1(t)$, $C_1(t)$ și $g(t)$ sînt funcții hölderiene pe (L) iar $A(z)$, $B(z)$ și $F(z)$ sînt funcții continue în plan sau continue pe porțiuni cu linia de salt (L).

Din formularea problemei dată mai sus, se vede că ea este o generalizare liniară a problemei lui Riemann, în aceeași clasă de funcții [1], [2] definită de condiția la limită :

$$U^+(t) + G(t)\ U^-(t) = g(t).$$

În lucrările [4], [5] sînt studiate probleme definite de condiții la limită mai particulare ca (2) în clasa funcțiilor analitice și analitice generalizate, pe alte căi decît cea expusă în lucrarea de față.

Problemele la limită de forma (2) se impun ca generalizări matematice ale condiției lui Riemann, dar se întîlnesc și în numeroase aplicații ale matematicii în studiul unor fenomene fizice. Putem afirma de pe acum că studiul dislocuirii integrale a unui fluid de către altul într-un mediu poros neomogen, problemă de care ne vom ocupa în altă lucrare, conduce la rezolvarea unei probleme la limită de forma :

$$U^+(t) + a\,U^-(t) + b(t)\,\overline{U^-(t)} = c(t),$$

unde a este o constantă iar $b(t)$ și $c(t)$ funcții ce satisfac condiții ale lui Hölder.

În lucrarea de față, modul de rezolvare a problemei trebuie pus în paralel cu cel expus în lucrarea [3], în care rezolvarea a fost dată pentru cazul funcțiilor olomorfe pe porțiuni. Vom arăta că rezultatele obținute în această lucrare sînt generalizări ale celor obținute în [3].

Înainte a de trece la rezolvarea efectivă a problemei, vom observa că aceasta poate căpăta o formă mai simplă prin faptul că ecuația (1) poate fi adusă la forma canonică (vezi [2]),

$$\frac{\partial V}{\partial \bar z} = \mathcal{A}(z)\,\overline{V(z)}$$

printr-o substituție care nu modifică forma condiției la limită. Pentru a nu complica scrierea, vom reveni la notațiile U, A ($V \equiv U$, $\mathcal{A} \equiv A$). Rezultă că este suficient, fără a restrînge generalitatea, să rezolvăm problema propusă (2), unde $U(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ satisface ecuația :

$$\frac{\partial U}{\partial \bar z} = A(z)\,\overline{U(z)}. \tag{1'}$$

În cele ce urmează vom prezenta metoda generală de rezolvare a problemei la limită (2) în care $U(z)$ satisface în plan ecuația (1'). Pentru aceasta vom adopta un punct de vedere similar cu cel urmat în cazul funcțiilor olomorfe pe porțiuni în lucrarea amintită [3]. În cazul acestei probleme este însă necesară rezolvarea unor probleme auxiliare interesante chiar prin ele înșile, ca generalizări ale unor formule cunoscute din teoria funcțiilor analitice.

METODA GENERALĂ DE REZOLVARE

Vom rezolva așadar problema definită de condiția la limită (2) și ecuația (1′) în condițiile expuse. Presupunînd că :

$$A_1(t) = \alpha_1 + \mathrm{i}\beta_1 ; \; B_1(t) = \alpha_2 + \mathrm{i}\,\beta_2 ; \; c_1(t) = \alpha_3 + \mathrm{i}\,\beta_3$$

și separînd partea reală și imaginară în (2) obținem :

$$\begin{aligned} &(1+\alpha_2)\,u^+ + (\alpha_1+\alpha_3)\,u^- + \beta_2\,v^+ + (\beta_3-\beta_1)\,v^- = \frac{g+\overline{g}}{2}, \\ &\beta_2\,u^+ + (\beta_1+\beta_3)\,u^- + (1-\alpha_2)\,v^+ + (\alpha_1-\alpha_3)\,v^- = \frac{g-\overline{g}}{2\,\mathrm{i}}. \end{aligned} \tag{3}$$

sistem pe care trebuie să-l satisfacă pe (L) funcțiile u^+, v^+, u^- și v^-. Ca și în cazul funcțiilor olomorfe pe porțiuni, vom aduce sistemul (3) la unul mai simplu, echivalent cu el,

$$\begin{aligned} &L_1(s)\,u^+ + M_1(s)\,u^- + N_1(s)\,v^- = Q_1(s), \\ &L_2(s)\,u^+ + M_2(s)\,u^- + N_2(s)\,v^+ = Q_2(s), \end{aligned} \tag{4}$$

unde am notat :

$$L_1(s) = 1 - \alpha_2^2 - \beta_2^2 ; \; M_1(s) = (1-\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_3) - \beta_2(\beta_1+\beta_3) ;$$

$$N_1(s) = (1-\alpha_2)(\beta_3-\beta_1) - \beta_2(\alpha_1-\alpha_3),$$

$$Q_1(s) = \frac{1-\alpha_2}{2}\,[g(t)+\overline{g(t)}] + \frac{\beta_2}{2\mathrm{i}}\,[g(t)-\overline{g(t)}],$$

$$L_2(s) = (1+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3) + \beta_2(\beta_1-\beta_3),$$

$$M_2(s) = \alpha_1^2 - \alpha_3^2 + \beta_1^2 - \beta_3^2 ; \; N_2(s) = \beta_2(\alpha_1-\alpha_3) - (1-\alpha_2)(\beta_3-\beta_1) ;$$

$$Q_2(s) = \frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}\,[g(t)+\overline{g(t)}] + \frac{\beta_1-\beta_3}{2\mathrm{i}}\,[g(t)-\overline{g(t)}].$$

Considerăm relațiile (4) ca un sistem de două ecuații în necunoscutele u^+, v^+, u^-, v^-. Între aceste necunoscute mai putem găsi un sistem de două relaţii astfel ca toate necunoscutele să poată fi determinate. Vom căuta relaţiile între $u^+(s)$ şi $v^+(s)$ pe L respectiv $u^-(s)$ şi $v^-(s)$ pe L care generalizează relaţiile corespunzătoare din teoria funcţiilor analitice pe porţiuni.

Relaţia între $u^+(s)$ *şi* $v^+(s)$. Pentru stabilirea ei vom adapta raţionamentul utilizat în clasa funcţiilor olomorfe la acest caz mai general. Începem prin a observa că soluţia generală a ecuaţiei (1′) se obţine prin rezolvarea ecuaţiei integrale [1], [2]

$$U(z) + \frac{1}{\pi}\iint_{D^+} \frac{A(\xi,\eta)\,\overline{U(\xi,\eta)}}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = \Phi(z),$$

$(\zeta = \xi + \mathrm{i}\,\eta)$ unde $\Phi(z)$ este o funcţie analitică arbitrară în domeniul D^+. Soluţia acestei ecuaţii se obţine prin metoda aproximaţilor succesive. În adevăr, făcînd în ecuaţia de mai sus $\Phi(z) \equiv 0$ şi înlocuind pe $A(\xi,\eta)$ cu $\lambda A(\xi,\eta)$, ea devine,

$$U(z) + \frac{\lambda}{\pi}\iint_{D^+} \frac{A(\xi,\eta)\,.\,\overline{U(\xi,\eta)}}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = 0.$$

Conform cu [1] pag. 439, această ecuaţie integrală omogenă admite numai soluţia identic nulă pentru orice valoare a lui λ şi deci ecuaţia integrală neomogenă este solubilă pentru orice $\Phi(z)$. Putem deci căuta soluţia ei sub forma

$$U(z) = U_0(z) + \frac{\lambda}{\pi}U_1(z) + \frac{\lambda^2}{\pi^2}U_2(z) + \ldots + \frac{\lambda^n}{\pi^n}U_n(z) + \ldots$$

unde se va considera $\lambda = 1$, funcţiile $U_j(z)$ aparţinînd clasei $C_{\bar{z}}$. Introducînd soluţia scrisă în ecuaţia integrală de mai sus şi identificînd puterile egale ale lui $\frac{\lambda}{\pi}$, obţinem

$$U_0(z) = \Phi(z),$$

$$U_1(z) = -\iint_{D^+} \frac{A(\xi,\eta)\,\overline{U_0(\xi,\eta)}}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = -\iint_{D^+} \frac{A(\xi,\eta)}{\zeta - z}\,\overline{\Phi(\zeta)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta,$$

$$U_2(z) = -\iint_{D^+} \frac{A(\xi,\eta)\,\overline{U_1(\zeta)}}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta =$$

$$= \iint_{D^+} \frac{A(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{\zeta - z}\iint_{D^+} \frac{\overline{A(\xi_1,\eta_1)}\;\Phi(\zeta_1)}{\bar{\zeta}_1 - \bar{\zeta}}\,\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\eta_1 =$$

$$= \iint_{D^+} \Phi(\xi_1, \eta_1)\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\eta_1 \iint_{D^+} \frac{A(\xi, \eta)\, \overline{A(\xi_1, \eta_1)}}{(\zeta - z)(\overline{\zeta}_1 - \overline{\zeta})}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta =$$

$$= \iint_{D^+} \Phi(\zeta_1)\, K_2^+(\zeta_1, z)\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\eta_1,$$

$$U_3(z) = -\iint_{D^+} \frac{A(\xi, \eta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta \iint_{D^+} \overline{\Phi(\zeta_1)}\, \overline{K_2^+(\zeta_1, \zeta)}\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\eta_1 =$$

$$= \iint_{D^+} \overline{\Phi(\zeta_1)}\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\eta_1 \iint_{D^+} \frac{\overline{K_2^+(\zeta_1, \zeta)}\, A(\xi, \eta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta =$$

$$= -\iint_{D^+} \overline{\Phi(\zeta_1)}\, K_3^+(\zeta_1, z)\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\eta_1,$$

$$U_4(z) = -\iint_{D^+} \frac{A(\xi, \eta)\, \overline{U_3(\zeta)}}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta =$$

$$= \iint_{D^+} \frac{A(\xi, \eta)}{\zeta - z} \iint_{D^+} \Phi(\zeta_1)\, \overline{K_3^+(\zeta_1, \zeta)}\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\eta_1 =$$

$$= \iint_{D^+} \Phi(\zeta_1)\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\eta_1 \iint_{D^+} \frac{A(\xi, \eta)}{\zeta - z}\, \overline{K_3^+(\zeta_1, \zeta)}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta =$$

$$= \iint_{D^+} \Phi(\zeta_1)\, K_4^+(\zeta_1, z)\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\eta_1,$$

($\zeta_1 = \xi_1 + \mathrm{i}\eta_1$). Cu aceste expresii $U(z)$ devine

$$U(z) = \Phi(z) + \iint_{D^+} \left\{ \Phi(\zeta) \left[\frac{K_2^+(\zeta, z)}{\pi^2} + \frac{K_4^+(\zeta, z)}{\pi^4} + \ldots \right] + \right.$$

$$\left. + \overline{\Phi(\zeta)} \left[-\frac{K_1^+(\zeta, z)}{\pi} - \frac{K_3^+(\zeta, z)}{\pi^3} - \ldots \right] \right\} \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta$$

unde s-a notat :

$$K_1^+(\zeta, z) = \frac{A(\xi, \eta)}{\zeta - z},$$

$$K_2^+(\zeta, z) = \iint_{D^+} K_1^+(\zeta_1, z)\, \overline{K_1^+(\zeta, \zeta_1)}\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\eta_1,$$

$$K_3^+(\zeta, z) = \iint_{D^+} K_1^+(\zeta_1, z)\, \overline{K_2^+(\zeta, \zeta_1)}\, d\xi_1\, d\eta_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K_n^+(\zeta, z) = \iint_{D^+} K_1^+(\zeta_1, z)\, \overline{K_{n-1}^+(\zeta, \zeta_1)}\, d\xi_1\, d\eta_1,$$

sau, încă sub forma:

$$U(z) = \Phi(z) + \iint_{D^+} \Phi(\zeta)\, \Gamma_1^+(\zeta, z)\, d\xi\, d\eta + \iint_{D^+} \overline{\Phi(\zeta)}\, \Gamma_2^+(\zeta, z)\, d\xi\, d\eta, \tag{5}$$

cu notațiile evidente

$$\Gamma_1^+(\zeta, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{K_{2j}^+(\zeta, z)}{\pi^{2j}}; \qquad \Gamma_2^+(\zeta, z) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{K_{2j-1}^+(\zeta, z)}{\pi^{2j-1}},$$

seriile de mai sus fiind uniform convergente [1].

În cele ce urmează avem nevoie de comportarea rezolventelor $\Gamma_1^+(\zeta, z)$ și $\Gamma_2^+(\zeta, z)$ precum și a soluției $U(z)$ legate de ele prin relația (5). Scriem pentru aceasta expresiile nucleelor iterate

$$K_2^+(\zeta, z) = \iint_{D^+} \frac{A(\xi_1, \eta_1)}{\zeta_1 - z}\, \frac{\overline{A(\xi, \eta)}}{\bar\zeta - \bar\zeta_1}\, d\xi_1\, d\eta_1 =$$

$$= \iint_{D^+} \frac{A(\xi_1, \eta_1)\, \overline{A(\xi, \eta)}\, (\zeta - \zeta_1)}{(\zeta_1 - z)(\zeta - \zeta_1)(\bar\zeta - \bar\zeta_1)}\, d\xi_1\, d\eta_1 =$$

$$= \frac{\overline{A(\xi, \eta)}}{\zeta - z} \iint_{D^+} A(\xi_1, \eta_1)\, \frac{\zeta - \zeta_1}{\bar\zeta - \bar\zeta_1} \left[\frac{1}{\zeta_1 - z} + \frac{1}{\zeta - \zeta_1}\right] d\xi_1\, d\eta_1 =$$

$$= \frac{\overline{A(\xi, \eta)}}{\zeta - z}\, h_2^+(\zeta, z),$$

unde s-a notat:

$$h_2^+(\zeta, z) = \iint_{D^+} A(\xi_1, \eta_1)\, \frac{\zeta - \zeta_1}{\bar\zeta - \bar\zeta_1} \left[\frac{1}{\zeta_1 - z} + \frac{1}{\zeta - \zeta_1}\right] d\xi_1\, d\eta_1.$$

Din forma scrisă mai sus se vede că $h_2^+(\zeta, z)$ este continuă în D^+ în raport cu ambele variabile și olomorfă în exterior. Raționînd prin recurență se ajunge la relațiile

$$K_{2n}^+ = \frac{\overline{A(\xi, \eta)}}{\zeta - z}\, h_{2n}^+(\zeta, z); \qquad K_{2n-1}^+ = \frac{A(\xi, \eta)}{\zeta - z}\, h_{2n-1}^+(\zeta, z),$$

unde $h_n^+(\zeta, z)$ sînt funcţii bine determinate continue în D^+ şi olomorfe în exteriorul lui. De aici rezultă imediat expresiile pentru Γ_1^+ şi Γ_2^+,

$$\Gamma_1^+(\zeta, z) = \frac{1}{\pi^2} \frac{\overline{A(\xi, \eta)}}{\zeta - z} H_1^+(\zeta, z)\,; \qquad \Gamma_2^+(\zeta, z) = -\frac{1}{\pi} \frac{A(\xi, \eta)}{\zeta - z} H_2^+(\zeta, z)$$

unde

$$H_1^+(\zeta, z) = h_2^+(\zeta, z) + \frac{1}{\pi^2} h_4^+(\zeta, z) + \ldots. + \frac{1}{\pi^{2n}} h_{2n+2}^+(\zeta, z) + \ldots,$$

$$H_2^+(\zeta, z) = 1 + \frac{1}{\pi^2} h_3^+(\zeta, z) + \ldots + \frac{1}{\pi^{2n}} h_{2u+1}^+(\zeta, z) + \ldots.,$$

seriile de mai sus fiind uniform convergente. Cunoscînd proprietăţile lui $h_n^+(\zeta, z)$, rezultă că funcţiile $H_1^+(\zeta, z)$ şi $H_2^+(\zeta, z)$ vor fi continue în D^+ şi olomorfe în exterior. Formula (5) devine :

$$U(z) = \Phi(z) + \frac{1}{\pi^2} \iint_{D^+} \frac{\Phi(\zeta)\, \overline{A(\xi, \eta)}\, H_1^+(\zeta, z)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta - \tag{6}$$

$$- \frac{1}{\pi} \iint_{D^+} \frac{\overline{\Phi(\zeta)}\, A(\xi, \eta)\, H_2^+(\zeta, z)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta.$$

Scrisă sub această formă se vede că soluţia ecuaţiei (1′) conţine funcţia necunoscută $\Phi(z)$ care trebuie determinată din condiţia la limită.

Problema lui Dirichlet a cărei soluţie ne interesează, o considerăm un caz particular al problemei lui Hilbert

$$\mathcal{Re}[(\alpha - i\beta)\, U^+(t)] \equiv \alpha u^+ + \beta v^+ = \gamma, \tag{7}$$

în care vom face $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Dacă ţinem seama de (5) în condiţia (7), aceasta devine :

$$\mathcal{Re}\Big[\Phi^+(t) + \iint_{D^+} \Phi(\zeta)\, \Gamma_1^+(\zeta, t)\, d\xi\, d\eta + \tag{8}$$

$$+ \iint_{D^+} \overline{\Phi(\zeta)}\, \Gamma_2^+(\zeta, t)\, d\xi\, d\eta\Big] = \gamma(t).$$

Trecerea la limită directă pe (L) este justificată de faptul că $U(z)$ este o funcţie continuă (chiar hölderiană cu indice oricît de apropiat de unu).

Pentru determinarea funcției analitice $\Phi(z)$ vom adopta reprezentarea integrală sub forma

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau - z}\, d\tau + i\,\frac{C}{2}, \qquad [\mu(\sigma)\ \text{real}]$$

(σ este abscisa curbilinie pe (L) a punctului de afixă τ) pe care o introducem în relația (8). Aceasta devine :

$$\mathcal{Re}\left\{\mu(s) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau - t}\, d\tau + iC + \right.$$

$$+ \iint_{D^+} \Gamma_1^+(\zeta, t)\, d\xi\, d\eta \left[\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau - \zeta}\, d\tau + iC\right] -$$

$$\left. - \iint_{D^+} \Gamma_2^+(\zeta, t)\, d\xi\, d\eta \left[\frac{1}{\pi i}\int_{\dot{L}} \frac{\mu(\sigma)}{\bar{\tau} - \bar{\zeta}}\, d\bar{\tau} + iC\right]\right\} = 2\gamma(s).$$

După separarea părții reale se obține:

$$\mu(s) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \mu(\sigma)\left[\frac{d\tau}{\tau - t} - \frac{d\bar{\tau}}{\bar{\tau} - \bar{t}}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\iint_{D^+} \mathcal{Re}\, \Gamma_1^+(\zeta, t)\, d\xi\, d\eta \int_L \mu(\sigma)\left[\frac{d\tau}{\tau - \zeta} - \frac{d\bar{\tau}}{\bar{\tau} - \bar{\zeta}}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\iint_{D^+} \mathcal{Im}\, \Gamma_1^+(\xi, t)\, d\xi\, d\eta \int_L \mu(\sigma)\left[\frac{d\tau}{\tau - \zeta} + \frac{d\bar{\tau}}{\bar{\tau} - \bar{\zeta}}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\iint_{D^+} \mathcal{Re}\, \Gamma_2^+(\zeta, t)\, d\xi\, d\eta \int_L \mu(\sigma)\left[\frac{d\tau}{\tau - \zeta} - \frac{d\bar{\tau}}{\bar{\tau} - \bar{\zeta}}\right] -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\iint_{D^+} \mathcal{Im}\, \Gamma_2^+(\zeta, t)\, d\xi\, d\eta \int_L \mu(\sigma)\left[\frac{d\tau}{\tau - \zeta} + \frac{d\bar{\tau}}{\bar{\tau} - \bar{\zeta}}\right] =$$

$$= 2\gamma + C\iint_{D^+} \mathcal{Im}\, [\Gamma_1^+(\zeta, t) - \Gamma_2^+(\zeta, t)]\, d\xi\, d\eta.$$

Ținînd seama de ecuația curbei (L) scrisă sub forma $\tau = \tau(\sigma)$, se deduce $\bar{\tau} = \bar{\tau}(\sigma)$; $d\tau = \tau'(\sigma)\, d\sigma$; $d\bar{\tau} = \bar{\tau}'\, d\sigma$, iar ecuația devine :

$$\mu(s) + \frac{1}{\pi}\int_L \mu(\sigma)\, \mathcal{Im}\, \frac{\tau'(\sigma)}{\tau - t}\, d\sigma +$$

$$\begin{aligned}
&+\frac{1}{\pi}\iint_{D^+}\mathcal{R}e\,\Gamma_1^+(\zeta,t)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\int_L \mu(\sigma)\,\mathcal{I}m\,\frac{\tau'(\sigma)}{\tau-\zeta}\,\mathrm{d}\sigma+\\
&+\frac{1}{\pi}\iint_{D^+}\mathcal{I}m\,\Gamma_1^+(\zeta,t)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\int_L \mu(\sigma)\,\mathcal{R}e\,\frac{\tau'(\sigma)}{\tau-\zeta}\,\mathrm{d}\sigma+\\
&+\frac{1}{\pi}\iint_{D^+}\mathcal{R}e\,\Gamma_2^+(\zeta,t)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\int_L \mu(\sigma)\,\mathcal{I}m\,\frac{\tau'(\sigma)}{\tau-\zeta}\,\mathrm{d}\sigma-\\
&-\frac{1}{\pi}\iint_{D^+}\mathcal{I}m\,\Gamma_2^+(\zeta,t)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\int_L \mu(\sigma)\,\mathcal{R}e\,\frac{\tau'(\sigma)}{\tau-\zeta}\,\mathrm{d}\sigma=\\
&=2\gamma+C\iint_{D^+}\mathcal{I}m[\Gamma_1^+(\zeta,t)-\Gamma_2^+(\zeta,t)]\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta,
\end{aligned}$$

care este o ecuaţie integrală de tip Fredholm pentru funcţia necunoscută $\mu(s)$. Inversînd ordinea de integrare în relaţia de mai sus, obţinem :

$$\begin{aligned}
&\mu(s)+\frac{1}{\pi}\int_L \mu(\sigma)\,\mathcal{I}m\,\frac{\tau'(\sigma)}{\tau-t}\,\mathrm{d}\sigma+\\
&+\frac{1}{\pi}\int_L \mu(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\iint_{D^+}\mathcal{R}e\,\Gamma_1^+(\zeta,t)\,\mathcal{I}m\,\frac{\tau'(\sigma)}{\tau-\zeta}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta+\\
&+\frac{1}{\pi}\int_L \mu(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\iint_{D^+}\mathcal{I}m\,\Gamma_1^+(\zeta,t)\,\mathcal{R}e\,\frac{\tau'(\sigma)}{\tau-\zeta}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta+\\
(9)\qquad&+\frac{1}{\pi}\int_L \mu(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\iint_{D^+}\mathcal{R}e\,\Gamma_2^+(\zeta,t)\,\mathcal{I}m\,\frac{\tau'(\sigma)}{\tau-\zeta}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta-\\
&-\frac{1}{\pi}\int_L \mu(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\iint_{D^+}\mathcal{I}m\,\Gamma_2^+(\zeta,t)\,\mathcal{R}e\,\frac{\tau'(\sigma)}{\tau-\zeta}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta=\\
&=2\gamma+C\iint_{D^+}\mathcal{I}m[\Gamma_1^+(\zeta,t)-\Gamma_2^+(\zeta,t)]\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta.
\end{aligned}$$

Pentru a nu întrerupe cursul raţionamentului admitem momentan fără demonstraţie că inversarea ordinii de integrare se poate face, urmînd ca să justificăm riguros acest lucru la sfîrşitul paragrafului.

Făcînd notaţiile :

$$N_1(\sigma,s)=\mathcal{I}m\,\frac{\tau'(\sigma)}{\tau-t},$$

$$N_2(\sigma, s) = \iint_{D^+} \mathcal{R}e\,\Gamma_1^+(\zeta, t)\,\mathcal{I}m\,\frac{\tau'(\sigma)}{\tau - \zeta}\,d\xi\,d\eta,$$

$$N_3(\sigma, s) = \iint_{D^+} \mathcal{I}m\,\Gamma_1^+(\zeta, t)\,\mathcal{R}e\,\frac{\tau'(\sigma)}{\tau - \zeta}\,d\xi\,d\eta,$$

$$N_4(\sigma, s) = \iint_{D^+} \mathcal{R}e\,\Gamma_2^+(\zeta, t)\,\mathcal{I}m\,\frac{\tau'(\sigma)}{\tau - \zeta}\,d\xi\,d\eta,$$

$$N_5(\sigma, s) = -\iint_{D^+} \mathcal{I}m\,\Gamma_2^+(\zeta, t)\,\mathcal{R}e\,\frac{\tau'(\sigma)}{\tau - \zeta}\,d\xi\,d\eta,$$

$$N^+(\sigma, s) = N_1(\sigma, t) + N_2^+(\sigma, t) + N_3^+(\sigma, t) + N_4^+(\sigma, t) + N_5^+(\sigma, t),$$

$$q^+(s) = \iint_{D^+} \mathcal{I}m[\Gamma_1^+(\zeta, t) - \Gamma_2^+(\zeta, t)]\,d\xi\,d\eta,$$

(nucleele $N_i^+(\sigma, s)$ $(i = 1, \ldots, 5)$ sînt evident reale), ecuaţia (9) devine:

$$\mu(s) + \frac{1}{\pi}\int_L \mu(\sigma)\,N^+(\sigma, s)\,d\sigma = 2\gamma(s) + Cq^+(s). \tag{10}$$

Să arătăm că nucleul $N^+(\sigma, s)$ este un nucleu slab polar şi deci ecuaţia (10) este de tip Fredholm. În adevăr, putem scrie

$$N^+(\sigma, s) = N_1^+(\sigma, s) + \tag{11}$$
$$+ \mathcal{I}m \iint_{D^+} [\Gamma_1^+(\zeta, t) + \overline{\Gamma_2^+(\zeta, t)}]\,\frac{\tau'(\sigma)}{\tau(\sigma) - \zeta}\,d\xi\,d\eta.$$

Faptul că $N_1^+(\sigma, s)$ este continuu se demonstrează imediat

$$N_1^+(\sigma, s) = \mathcal{I}m\,\frac{\tau'(\sigma)}{\tau(\sigma) - t} = \frac{1}{2i}\left[\frac{\tau'(\sigma)}{\tau(\sigma) - t} - \frac{\overline{\tau'(\sigma)}}{\overline{\tau(\sigma)} - \bar{t}}\right].$$

Scriind ecuaţia curbei (L) sub forma $\bar{\tau} = f(\tau)$ ceea ce presupune că L este analitică, avem

$$\frac{d\bar{\tau}}{d\tau} = f'(\tau)$$

dar de asemenea putem scrie

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \tau'(\sigma) \quad \text{şi} \quad \frac{d\bar{\tau}}{d\sigma} = \overline{\tau'(\sigma)},$$

de unde se deduce

$$f'[\tau(\sigma)] = \frac{\overline{\tau'(\sigma)}}{\tau'(\sigma)}\cdot$$

Dacă ţinem seama şi de faptul că $\bar{t} = f(t)$, relaţia pentru $N_1^+(\sigma, s)$ se scrie :

$$N_1^+(\sigma, s) = \frac{\tau'(\sigma)}{2\mathrm{i}}\left\{\frac{1}{\tau(\sigma) - t} - \frac{f'[\tau(\sigma)]}{f[\tau(\sigma)] - f(t)}\right\},$$

din care se vede că $N_1^+(\sigma, s)$ este un nucleu continuu ([1], pag. 146).

Integrala din membrul drept al expresiei (11) este slab polară după cum rezultă din cele ce urmează :

$$I = \iint_{D^+} [\Gamma_1^+(\zeta, t) + \overline{\Gamma_2^+(\zeta, t)}]\frac{\tau'(\sigma)}{\tau(\sigma) - \zeta}\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta =$$

$$= \iint_{D^+}\left[\frac{\overline{A(\xi, \eta)}\,H_1^+(\zeta, t)}{\pi^2(\zeta - t)} - \frac{\overline{A(\xi, \eta)}\,\overline{H_2^+(\zeta, t)}}{\pi(\bar{\zeta} - \bar{t})}\right]\frac{\tau'(\sigma)}{\tau(\sigma) - \zeta}\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta,$$

conform expresiilor lui $\Gamma_1^+(\zeta, t)$ şi $\Gamma_2^+(\zeta, t)$ stabilite mai sus. După transformări uşor de urmărit, I devine

$$I = \iint_{D^+}\frac{\overline{A(\xi, \eta)}}{\pi}\left[\frac{H_1^+(\zeta, t)}{\pi} - \frac{\overline{H_2^+(\zeta, t)}\,(\zeta - t)}{\bar{\zeta} - \bar{t}}\right]\frac{1}{\zeta - t}\,\frac{\tau'(\sigma)}{\tau(\sigma) - \zeta}\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta =$$

$$= \frac{\tau'(\sigma)}{\tau(\sigma) - t}\iint_{D^+} H^+(\xi, \eta, t)\left[\frac{1}{\zeta - t} + \frac{1}{\tau - \zeta}\right]\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta,$$

unde am notat

$$H^+(\xi, \eta, t) = \frac{\overline{A(\xi, \eta)}}{\pi}\left[\frac{H_1^+(\zeta, t)}{\pi} - \frac{\overline{H_2^+(\zeta, t)}\,(\zeta - t)}{\bar{\zeta} - \bar{t}}\right]$$

şi care este evident o funcţie continuă de ξ, η, t.

Notînd acum

$$F^+(\tau, t) = \iint_{D^+} H^+(\xi, \eta, t)\left[\frac{1}{\zeta - t} + \frac{1}{\tau - \zeta}\right]\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta,$$

integrala I devine

$$I = \frac{\tau'(\sigma)}{\tau(\sigma) - t}F^+(\tau, t).$$

Din expresia de mai sus a lui $F^+(\tau, t)$ se vede că avem

$$F^+(\tau, \tau) = 0$$

şi de asemenea că puteam scrie inegalitatea :

$$|F^+(\tau, \tau) - F^+(\tau, t)| \leqslant M\,|\tau - t|\,|\ln|\,\tau - t||,$$

unde M este o constantă pozitivă (vezi [1] pag. 432). Conform relaţiei precedente,

$$|F^+(\tau, t)| \leqslant M\,|\tau - t|\,|\ln|\,\tau - t||$$

şi ţinînd seama de aceasta în expresia lui I se constată că

$$|I| \leqslant M\,|\tau'(s)|\,|\ln|\tau - t||.$$

Ultima inegalitate arată că $N^+(\sigma, s)$ este un nucleu slab polar.

Pe baza celor demonstrate, soluţia ecuaţiei integrale (10) se scrie sub forma :

$$\mu(s) = 2\gamma(s) + cq^+(s) + \frac{1}{\pi}\int_L R^+(\sigma, s)\,[2\gamma(\sigma) + cq^+(\sigma)]\,d\sigma, \tag{12}$$

unde $R^+(\sigma, s)$ este rezolventa nucleului $N^+(\sigma, s)$. Sub o altă formă $\mu(s)$ se mai scrie :

$$\mu(s) = 2\gamma(s) + \frac{2}{\pi}\int_L R^+(\sigma, s)\,\gamma(\sigma)\,d\sigma + cS^+(s), \tag{13}$$

unde

$$S^+(s) = q^+(s) + \frac{1}{\pi}\int_L R^+(\sigma, s)\,q^+(\sigma)\,d\sigma. \tag{14}$$

Menţionăm relaţiile funcţionale dintre $R^+(\sigma, s)$ şi $N^+(\sigma, s)$ ca rezolventă şi respectiv nucleu a ecuaţiei integrale (10),

$$R^+(\sigma, s) + N^+(\sigma, s) + \frac{1}{\pi}\int_L N^+(\sigma_1, s)\,R^+(\sigma, \sigma_1)\,d\sigma_1 = 0 \tag{15}$$

pe care o vom folosi mai jos.

Pe baza celor arătate putem deduce relaţia căutată între u^+ şi v^+. Pornim de la relaţia (5) în care vom înlocui pe $\Phi(z)$ prin :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau - z}\,d\tau + i\,\frac{c}{2},$$

unde $\mu(s)$ are expresia (13). Se obține :

$$U(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau - z}\,d\tau + i\,\frac{c}{2} + \frac{1}{2\pi i}\iint_{D^+} \Gamma_1^+(\zeta, z)\,d\xi\,d\eta \int_L \frac{\mu(\sigma)\,d\tau}{\tau - \zeta} +$$

$$+ \frac{ic}{2}\iint_{D^+} \Gamma_1^+(\zeta, z)\,d\xi\,d\eta - \frac{1}{2\pi i}\iint_{D^+} \Gamma_2^+(\zeta, z)\,d\xi\,d\eta \int_L \frac{\mu(\sigma)\,d\bar{\tau}}{\bar{\tau} - \bar{\zeta}} -$$

$$-\frac{ic}{2}\iint_{D^+} \Gamma_2^+(\zeta, z)\,d\xi\,d\eta,$$

sau, încă sub forma,

$$U(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau - z}\,d\tau + \frac{ic}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \mu(\sigma)\,d\sigma \iint_{D^+}\left[\Gamma_1^+(\zeta, z)\frac{\tau'(\sigma)}{\tau(\sigma) - \zeta} -\right.$$

$$\left. - \Gamma_2^+ \frac{\overline{\tau'(\sigma)}}{\overline{\tau(\sigma)} - \bar{\zeta}}\right] d\xi\,d\eta + \frac{ic}{2}\iint_{D^+} [\Gamma_1^+(\zeta, z) - \Gamma_2^+(\zeta, z)]\,d\xi\,d\eta,$$

unde s-a schimbat ordinea de integrare. Pentru simplificarea scrierii vom introduce notațiile :

$$\chi^+(\sigma, z) = \iint_{D^+}\left[\Gamma_1^+(\zeta, z)\frac{\tau'(\sigma)}{\tau(\sigma) - \zeta} - \Gamma_2^+ \frac{\overline{\tau'(\sigma)}}{\bar{\tau} - \bar{\zeta}}\right] d\xi\,d\eta, \tag{16}$$

$$h^+(z) = \iint_{D^+} [\Gamma_1^+(\zeta, z) - \Gamma_2^+(\zeta, z)]\,d\xi\,d\eta, \tag{16'}$$

cu care $U(z)$ ia forma.

$$U(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\sigma)\,d\tau}{\tau - z} + \frac{ic}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \mu(\sigma)\,\chi^+(\sigma, z)\,d\sigma + \frac{ic}{2}\,h^+(z). \tag{17}$$

Trecînd la limită pe (L) din D^+ obținem.

$$U^+(t) = \frac{\mu(s)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\sigma)\,d\tau}{\tau - t} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \mu(\sigma)\,\chi^+(\sigma, t)\,d\sigma + \tag{18}$$

$$+ \frac{ic}{2}\,[h^+(t) + 1].$$

Ținînd seama că $\gamma(s) = u^+(s)$ și înlocuind pe $\mu(s)$ din (13) în (18), aceasta devine :

$$
\begin{aligned}
U^+(t) \equiv u^+ + \mathrm{i}v^+ = u^+(s) &+ \frac{1}{\pi}\int_L R^+(\sigma, t)\, u^+(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma + \frac{c}{2}\, s^+(t) + \\
&+ \frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{u^+(\sigma)\,\mathrm{d}\tau}{\tau - t} + \frac{c}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{S^+(\sigma)\,\mathrm{d}\tau}{\tau - t} + \frac{1}{\pi^2\mathrm{i}}\int_L \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau - t}\int_L R^+(\sigma_1, \sigma)\, u^+(\sigma_1)\,\mathrm{d}\sigma_1 + \\
&+ \frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L u^+(\sigma)\,\chi^+(\sigma, t)\,\mathrm{d}\sigma + \frac{c}{2\pi\mathrm{i}}\int_L S^+(\sigma)\,\chi^+(\sigma, t)\,\mathrm{d}\sigma + \\
&+ \frac{1}{\pi^2\mathrm{i}}\int_L \chi^+(\sigma, t)\,\mathrm{d}\sigma\int_L R^+(\sigma_1, \sigma)\, u^+(\sigma_1)\,\mathrm{d}\sigma_1 + \frac{\mathrm{i}c}{2}\,[h^+(t) + 1],
\end{aligned}
$$

sau, folosind formula de schimbare a ordinii de integrare, se obține :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}v^+(s) = &\frac{1}{\pi}\int_L R^+(\sigma, t)\, u^+(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma + \frac{c}{2}\, S^+(s) + \frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{u^+(\sigma)\,\mathrm{d}\tau}{\tau - t} + \\
&+ \frac{c}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{S^+(\sigma)\,\mathrm{d}\tau}{\tau - t} + \frac{1}{\pi^2\mathrm{i}}\int_L u^+(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\int_L R^+(\sigma_1, \sigma)\,\frac{\tau'(\sigma_1)}{\tau(\sigma_1) - t}\,\mathrm{d}\sigma_1 + \\
&+ \frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L u^+(\sigma)\,\chi^+(\sigma, t)\,\mathrm{d}\sigma + \frac{c}{2\pi\mathrm{i}}\int_L S^+(\sigma)\,\chi^+(\sigma, t)\,\mathrm{d}\sigma + \\
&+ \frac{1}{\pi^2\mathrm{i}}\int_L u^+(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\int_L R^+(\sigma_1, \sigma)\,\chi^+(\sigma_1, t)\,\mathrm{d}\sigma_1 + \frac{\mathrm{i}c}{2}\,[h^+(t) + 1],
\end{aligned}
\tag{19}
$$

adică tocmai expresia căutată a lui $v^+(s)$ în funcție de $u^+(s)$. Să observăm ca verificare că partea reală a membrului drept este nulă. Trebuie să arătăm deci că expresia :

$$
\begin{aligned}
E \equiv &\frac{1}{\pi}\int_L R^+(\sigma, s)\, u^+(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma + \frac{c}{2}\, S^+(s) + \frac{1}{\pi}\int_L u^+(\sigma)\,\mathfrak{I}m\,\frac{\tau'(\sigma)}{\tau - t}\,\mathrm{d}\sigma + \\
&+ \frac{c}{2\pi}\int_L S^+(\sigma)\,\mathfrak{I}m\,\frac{\tau'(\sigma)}{\tau - t}\,\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{\pi^2}\int_L u^+(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\int_L R^+(\sigma_1, \sigma)\,\mathfrak{I}m\,\frac{\tau'(\sigma_1)}{\tau(\sigma_1) - t}\,\mathrm{d}\sigma_1 + \\
&+ \frac{1}{\pi}\int_L u^+(\sigma)\,\mathfrak{I}m\,\chi^+(\sigma, t)\,\mathrm{d}\sigma + \frac{c}{2\pi}\int_L S^+(\sigma)\,\mathfrak{I}m\,\chi^+(\sigma, t)\,\mathrm{d}\sigma + \\
&+ \frac{1}{\pi^2}\int_L u^+(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\int_L R^+(\sigma_1, \sigma)\,\mathfrak{I}m\,\chi^+(\sigma_1, t)\,\mathrm{d}\sigma_1 - \frac{c}{2}\,\mathfrak{I}m\, h^+(t),
\end{aligned}
$$

este identic nulă. Pentru aceasta, expresia de mai sus se va scrie sub forma :

$$E = \frac{1}{\pi}\int_L u^+(\sigma)\left\{R^+(\sigma, s) + \mathcal{I}m\left[\frac{\tau'(\sigma)}{\tau(\sigma) - t} + \chi^+(\sigma, t)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\int_L R^+(\sigma_1, \sigma)\, \mathcal{I}m\left[\frac{\tau'(\sigma_1)}{\tau(\sigma_1) - t} + \chi^+(\sigma_1, t)\right] \mathrm{d}\sigma_1\right\} \mathrm{d}\sigma +$$

$$+ \frac{c}{2}\left\{S^+(s) - \mathcal{I}m\, h^+(t) + \frac{1}{\pi}\int_L S^+(\sigma)\, \mathcal{I}m\left[\frac{\tau'(\sigma)}{\tau - t} + \chi^+(\sigma, t)\right] \mathrm{d}\sigma\right\}$$

sau

$$\mathrm{E} = \frac{1}{\pi}\int_L u^+(\sigma) \cdot P(\sigma, s)\, \mathrm{d}\sigma + \frac{c}{2} R_1(s),$$

unde notațiile reprezintă respectiv cantitățile cuprinse în acolade în expresia precedentă. Să observăm acum în conformitate cu (11) și (16) că

$$\mathcal{I}m\left[\frac{\tau'(\sigma)}{\tau(\sigma) - t} + \chi^+(\sigma, t)\right] = N^+(\sigma, s)$$

și de aceea $P(\sigma, s)$ este tocmai membrul stîng al relației (15) și deci este nul. În expresia lui $R\ (s)$ vom introduce relația (14) ; remarcînd că :

$$\mathcal{I}m\, h^+(t) = q^+(s),$$

se obține

$$R_1(s) = q^+(s) + \frac{1}{\pi}\int_L R^+(\sigma, s)\, q^+(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma - q^+(s) + \frac{1}{\pi}\int_L q^+(\sigma)\, N^+(\sigma, s)\, \mathrm{d}\sigma +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2}\int_L N^+(\sigma_1, \sigma)\, \mathrm{d}\sigma \int_L R^+(\sigma_1, s)\, q^+(\sigma_1)\, \mathrm{d}\sigma_1 = \frac{1}{\pi}\int_L q^+(\sigma)\left\{R^+(\sigma, s) + \right.$$

$$\left. + N^+(\sigma, s) + \frac{1}{\pi}\int_L N^+(\sigma_1, s)\, R^+(\sigma, \sigma_1)\, \mathrm{d}\sigma_1\right\} \mathrm{d}\sigma,$$

care este de asemenea nulă tot datorită relației (15). Ținînd seama de egalitatea de mai sus, expresia lui $v^+(s)$ poate fi scrisă sub forma :

$$v^+(s) = -\frac{1}{\pi}\int_L u^+(\sigma)\, \mathcal{R}e\, \frac{\tau'(\sigma)}{\tau(\sigma) - t}\, \mathrm{d}\sigma - \frac{c}{2\pi}\int_L S^+(\sigma)\, \mathcal{R}e\, \frac{\tau'(\sigma)}{\tau(\sigma) - t}\, \mathrm{d}\sigma -$$

$$- \frac{1}{\pi^2}\int_L u^+(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma \int_L R^+(\sigma, \sigma_1)\, \mathcal{R}e\, \frac{\tau'(\sigma_1)}{\tau(\sigma_1) - t}\, \mathrm{d}\sigma_1 - \frac{1}{\pi}\int_L u^+(\sigma)\, \mathcal{R}e\, \chi^+(\sigma, t)\, \mathrm{d}\sigma -$$

$$- \frac{c}{2\pi}\int_L S^+(\sigma)\, \mathcal{R}e\, \chi^+(\sigma, t)\, \mathrm{d}\sigma - \frac{1}{\pi^2}\int_L u^+(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma \int_L R(\sigma; \sigma_1)\, \mathcal{R}e\, \chi^+(\sigma_1, t)\, \mathrm{d}\sigma_1 +$$

$$+ \frac{c}{2}\left[\mathcal{R}e\, h^+(t) + 1\right].$$

Introducînd notațiile :

$$q_1^+(s) = \frac{1}{\pi}\int_L S^+(\sigma)\,\mathcal{R}e\left[\frac{\tau'(\sigma)}{\tau(\sigma)-t} + \chi^+(\sigma, t)\right]d\sigma - \mathcal{R}e\,h^+(t) - 1,$$

$$q_2^+(\sigma, s) = \mathcal{R}e\left\{\chi^+(\sigma, t) + \frac{1}{\pi}\int_L R^+(\sigma, \sigma_1)\left[\frac{\tau'(\sigma_1)}{\tau(\sigma_1)-t} + \chi^+(\sigma_1, t)\right]d\sigma_1\right\},$$

expresia pentru $v^+(s)$ se scrie

$$v^+(s) = -\frac{1}{\pi}\int_L u^+(\sigma)\,\mathcal{R}e\,\frac{\tau'(\sigma)}{\tau(\sigma)-t}\,d\sigma - \frac{1}{\pi}\int_L u^+(\sigma)\,q_2^+(\sigma, s)\,d\sigma - \frac{c}{2}\,q_1^+(s).$$

Din expresiile lui $q_1^+(s)$ și $q_2^+(\sigma, s)$ se vede că $q_1^+(s)$ este o funcție hölderiană pe (L) iar $q_2^+(\sigma, s)$ este slab polară. Pentru a pune în evidență partea caracteristică din expresia de mai sus, vom scrie prima integrală sub forma

$$J = \int_L u^+(\sigma)\,\mathcal{R}e\,\frac{\tau'(\sigma)}{\tau - t}\,d\sigma = \frac{1}{2}\int_L u^+(\sigma)\left[\frac{\tau'(\sigma)}{\tau - t} + \frac{\overline{\tau'(\sigma)}}{\bar{\tau} - \bar{t}}\right]d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2}\int_L u^+(\sigma)\left[\frac{1}{\tau - t} + \frac{f'(\tau)}{f(\tau) - f(t)}\right]\tau'(\sigma)\,d\sigma$$

în care s-a ținut seama de ecuația curbei $\bar{\tau} = f(\tau)$. După cum se știe (vezi [1] pag. 88), expresia $f(\tau) - f(t)$ poate fi pusă sub forma :

$$f(\tau) - f(t) = (\tau - t)\,a(\tau, t),$$

dacă $f(t)$ este o funcție derivabilă cu derivata hölderiană, ceea ce presupunem. În plus funcția $a(\tau, t)$ se bucură de proprietățile

$$f'(t) = a(t, t) \neq 0$$

pentru orice $t \in L$, și $a(\tau, t)$ satisface condiția lui Hölder în raport cu τ și t.

Cu aceasta integrala se scrie :

$$J = \frac{1}{2}\int_L \frac{u^+(\sigma)}{\tau - t}\left[1 + \frac{f'(\tau)}{a(\tau, t)}\right]\tau'(\sigma)\,d\sigma = \frac{1}{2}\int_L \frac{u^+(\sigma)}{\tau - t}\,G(\tau, t)\,d\sigma,$$

unde s-a notat

$$G(\tau, t) = \left[1 + \frac{f'(\tau)}{a(\tau, t)}\right]\tau'(\sigma)$$

cu proprietatea evidentă

$$G(t, t) = 2\tau'(s)$$

Integrala mai poate fi scrisă şi sub forma

$$\mathrm{J} = \tau'(s) \int_L \frac{u^+(\sigma)}{\tau - t} \, d\sigma + \frac{1}{2} \int_L u^+(\sigma) \frac{G(\tau, t) - 2\tau'(s)}{\tau - t} \, d\sigma,$$

în care s-a pus în evidenţă partea caracteristică şi partea regulată, ţinînd seama că funcţia $G(\tau, t)$ este hölderiană. În final expresia lui $v^+(s)$ capătă forma :

$$v^+(s) = -\frac{\tau'(s)}{\pi} \int_L \frac{u^+(\sigma)}{\tau - t} \, d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_L u^+(\sigma) \frac{G(\sigma, t) - 2\tau'(s)}{\tau - t} \, d\sigma -$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_L u^+(\sigma) \, q_2^+(\sigma, t) \, d\sigma - \frac{c}{2} q_1^+(s),$$

sau,

$$v^+(s) = -\frac{\tau'(s)}{\pi} \int_L \frac{u^+(\sigma)}{\tau - t} \, d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_L u^+(\sigma) \left[\frac{G(\sigma, t) - 2\tau'(s)}{2(\tau - t)} + \right.$$

$$\left. + q_2^+(\sigma, t) \right] d\sigma - \frac{C}{2} q_1^+(s).$$

După introducerea notaţiei

$$T^+(\sigma, t) = \frac{G(\sigma, t) - 2\tau'(s)}{2(\tau - t)} + q_2^+(\sigma, t),$$

expresia pentru $v^+(s)$ devine :

$$\text{(20)} \quad v^+(s) = -\frac{\tau'(s)}{\pi} \int_L \frac{u^+(\sigma)}{\tau - t} \, d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_L u^+(\sigma) \, T^+(\sigma, t) \, d\sigma -$$

$$-\frac{c}{2} q_1^+(s),$$

în care $T^+(\sigma, t)$ este un nucleu slab polar.

Formula de mai sus generalizează relaţia dintre $u^+(s)$ şi $v^+(s)$ din cazul funcţiilor olomorfe. Acest lucru se poate verifica urmărind calculele în ipoteza că

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = 0; \qquad [A(z) \equiv 0]$$

(condiţiile lui Cauchy-Riemann în formă complexă). În acest caz se vede imediat că $\Gamma_1^+(\zeta, z) = \Gamma_2^+(\zeta, z) \equiv 0$ ceea ce înseamnă că $U(z)$ exprimat de (15) este o funcţie olomorfă iar condiţia la limită (8) devine

$$\mathcal{Re}\, \Phi^+(t) = \gamma(s),$$

adică problema lui Dirichlet pentru funcţiile olomorfe.

Completare. În raţionamentele făcute mai sus am lăsat în suspensie problema inversării unei integrale de domeniu cu o integrală curbilinie, în cazul cînd integrandul are o singularitate polară. Revenim acum asupra acestei chestiuni.

Ne propunem să demonstrăm că:

$$\iint_D \frac{A(\xi, \eta)}{\zeta - z} \int_L \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - \zeta}\, d\xi\, d\eta = \int_L \varphi(\tau)\, d\tau \iint_D \frac{A(\xi, \eta)}{(\zeta - z)(\tau - \zeta)}\, d\xi\, d\eta,$$

în ipoteza că $z \in D^+ + L$. Facem schimbarea de axe de coordonate

$$\zeta_1 = \zeta - z; \quad \xi_1 = \xi - x; \quad \eta_1 = \eta - y; \quad \tau - \zeta = \tau - (\zeta_1 + z)$$

care aduce originea în z. Egalitatea de mai sus devine:

$$\iint_D \frac{A(\xi_1, \eta_1, x, y)}{\zeta_1} \int_L \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - (\zeta_1 + z)}\, d\xi_1\, d\eta_1 =$$

$$= \int_L \varphi(\tau)\, d\tau \iint_D \frac{A(\xi_1, \eta_1, x, y)}{\zeta_1 [\tau - (\zeta_1 + z)]}\, d\xi_1\, d\eta_1.$$

Faţă de noua origine ecuaţia curbei (L) poate fi scrisă sub forma: $\rho = \rho(\theta)$ şi vom face schimbarea $\xi_1 = k\rho(\theta) \cos \theta$; $\eta_1 = k\rho(\theta) \sin \theta$ k fiind un parametru care variază de la 0 la 1, iar θ variază în intervalul $[0, 2\pi]$ pentru cazul cînd $z \in D^+$ şi în intervalul $[0, \pi]$ cînd $z \in L$. Sistemul de mai sus este o familie de curbe L_k, unde $L_1 \equiv L$; $L_0 \equiv 0$. Prima integrală devine:

$$\mathcal{J} = \iint_D \frac{A(k, \theta, x, y)}{k\, \rho(\theta)\, e^{i\theta}}\, k\rho^2(\theta)\, dk\, d\theta \int_L \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - [k\rho(\theta)\, e^{i\theta} + z]}.$$

Dacă notăm cu t punctul curent pe curba (L),

$$t = \rho(\theta)\, e^{i\theta}$$

şi cu $t_k = t \,.\, k$ punctul curent pe curba L_k, vom avea

$$dt_k = k\,[\rho'(\theta) + i\, \rho\, (\theta)]\, e^{i\theta}\, d\theta,$$

deoarece $k = \text{const.}$ pe curba L_k şi integrala $\mathcal{J}$ se poate scrie sub forma :

$$\mathcal{J} = \int_0^1 dk \int_{L_k} \frac{A\,(k,\, \theta,\, x,\, y)}{e^{2i\theta}}\, \frac{\rho\,(\theta)\, dt_k}{k\,[\rho'(\theta) + i\,\rho(\theta)]} \int_L \frac{\varphi\,(\tau)\, d\tau}{\tau - [k\,\rho\,(\theta) e^{i\theta} + z]}.$$

Integralele pe L_k şi L nu sînt simultan singulare pentru nici o valoare a lui k, deci aplicînd formula cunoscută, integrala devine :

$$\mathcal{J} = \int_0^1 dk \int_L \varphi\,(\tau)\, d\tau \int_{L_k} \frac{A\,(k,\, \theta,\, x,\, y)\, \rho\,(\theta)\, dt_k}{k\, e^{2i\theta}\, [\rho'(\theta) + i\,\rho(\theta)]\, [\tau - (k\rho\, e^{i\theta} + z)]},$$

sau, într-o altă formă,

$$\mathcal{J} = \int_L \varphi(\tau)\, d\tau \int_0^1 dk \int_{L_k} \frac{A\,(k,\, \theta,\, x,\, y)\, \rho\,(\theta)\, dt_k}{k\, e^{2i\theta}[\rho'(\theta) + i\rho(\theta)]\, [\tau - k\rho\, e^{i\theta} - z]}.$$

Dacă vom face transformările de variabile de mai sus în membrul drept al relaţiei pe care vrem s-o stabilim, obţinem acelaşi rezultat (verificarea este imediată) şi formula de inversare este demonstrată.

Relaţia între $u^-(s)$ *şi* $v^-(s)$. Această relaţie se obţine urmînd un raţionament similar cu cel din cazul relaţiei deja stabilite între $u^+(s)$ şi $v^+(s)$. Condiţia la limită (7) devine acum

$$(21) \qquad \mathcal{R}e\, [(\alpha - i\, \beta)\; U^-\,(t)] \equiv \alpha u^- + \beta\, v^- = \delta\,(s),$$

în care vom face $\alpha = 1$ şi $\beta = 0$. Vom ţine seama în relaţia (21) de soluţia $U\,(z)$ dată de (5) în care $\Phi\,(z)$ va fi notată în acest caz cu $\Psi\,(z)$ şi va fi o funcţie olomorfă arbitrară în D^- ; se obţine :

$$(22) \qquad \mathcal{R}e\Big[\Psi(t) + \iint_{D^-} \Psi\,(\zeta)\; \Gamma_1^-\,(\zeta, t)\; d\xi\, d\eta\; +$$

$$+ \iint_{D^-} \overline{\Psi(\zeta)}\; \Gamma_2^-\,(\zeta, t)\; d\xi\; d\eta\Big] = \delta\,(t).$$

Vom adopta pentru funcţia necunoscută $\Psi(z)$ reprezentarea :

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{\nu(\sigma)}{\tau - z} \mathrm{d}\tau + \mathrm{i}\frac{D}{2},$$

pe care o folosim în relaţia (22) care devine :

$$\mathcal{R}e \Big\{ -\nu(s) + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{\nu(\sigma)}{\tau - t} \mathrm{d}\tau + \mathrm{i}D +$$

$$+ \iint_{D^-} \Gamma_1^-(\zeta, t)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta \left[\frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{\nu(\sigma)}{\tau - \zeta} \mathrm{d}\tau + \mathrm{i}D \right] -$$

$$- \iint_{D^-} \Gamma_2^-(\zeta, t)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta \left[\frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{\nu(\sigma)}{\bar{\tau} - \bar{\zeta}} \mathrm{d}\bar{\tau} + \mathrm{i}D \right] \Big\} = 2\,\delta(s).$$

Separînd în relaţia de mai sus partea reală şi urmînd aceleaşi raţionamente ca în paragraful precedent, obţinem ecuaţia integrală pe care o satisface funcţia $\nu(s)$,

$$(23) \qquad -\nu(s) + \frac{1}{\pi} \int_L \nu(\sigma) N^-(\sigma, s)\, \mathrm{d}\sigma = 2\,\delta(s) + Dq^-(s),$$

unde $N^-(\sigma, s)$ şi $q^-(s)$ sînt funcţii definite în paragraful precedent luate pe domeniul D^-. Soluţia acestei ecuaţii Fredholm se scrie

$$\nu(s) = -2\,\delta(s) - Dq^-(s) + \frac{1}{\pi} \int_L R^-(\sigma, s)\, [2\,\delta(\sigma) + D\, q^-(\sigma)]\, \mathrm{d}\sigma,$$

sau, introducînd funcţia $S_1^-(s)$ prin expresia

$$S_1^-(s) = -q^-(s) + \frac{1}{\pi} \int_L R^-(\sigma, s)\, q^-(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma,$$

$\nu(s)$ va avea forma :

$$(24) \qquad \nu(s) = -2\delta(s) + \frac{2}{\pi} \int_L R^-(\sigma, s)\, \delta(\sigma) \mathrm{d}\sigma + DS_1^-(s).$$

În acest caz relaţia funcţională între nucleul $N^-(\sigma, s)$ şi rezolventa $R^-(\sigma, s)$ are forma :

$$(25) \qquad R^-(\sigma, s) + N^-(\sigma, s) - \frac{1}{\pi} \int_L N^-(\sigma, \sigma_1)\, R^-(\sigma_1, s) \mathrm{d}\sigma_1 = 0.$$

Folosind acum reprezentarea integrală a funcției $\Psi(z)$ în expresia (5) deducem :

$$U(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\nu(\sigma)\,\mathrm{d}\tau}{\tau-z}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \nu(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\iint_{D^-}\left[\Gamma_1^-(\zeta,z)\frac{\tau'(\sigma)}{\tau(\sigma)-\zeta}-\right.$$

$$\left.+\Gamma_2\,\overline{\frac{\tau'(\sigma)}{\tau(\sigma)-\zeta}}\right]\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta+\frac{\mathrm{i}D}{2}\iint_{D^-}[\Gamma_1^-(\zeta,z)-\Gamma_2^-(\zeta,z)]\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta+\frac{\mathrm{i}D}{2}\cdot$$

Utilizînd aceleași notații (în care înlocuim pe D^+ prin D^-) și trecînd la limită din D^- pe (L) găsim expresia :

$$U^-(t)=-\frac{\nu(s)}{2}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\nu(\sigma)\,\mathrm{d}\tau}{\tau-\mathrm{t}}+ \tag{26}$$

$$+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \nu(\sigma)\chi^-(\sigma,t)\,\mathrm{d}\sigma+\frac{\mathrm{i}D}{2}[h^-(t)+1],$$

de unde, ținînd seama de expresia lui $\nu(s)$, se deduce :

$$iv^-=-\frac{1}{\pi}\int_L R^-(\sigma,s)\,u^-(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma-\frac{D}{2}S_1^-(s)-\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L u^-(\sigma)\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-t}+$$

$$+\frac{D}{2\pi\mathrm{i}}\int_L S_1^-(\sigma)\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-t}+\frac{1}{\pi^2\mathrm{i}}\int_L u^-(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\int_L R^-(\sigma,\sigma_1)\frac{\tau'(\sigma_1)}{\tau(\sigma_1)-t}\,\mathrm{d}\sigma_1-$$

$$-\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L u^-(\sigma)\chi^-(\sigma,t)\,\mathrm{d}\sigma+\frac{D}{2\pi\mathrm{i}}\int_L S^-(\sigma)\chi^-(\sigma,t)\,\mathrm{d}\sigma+$$

$$+\frac{1}{\pi^2\mathrm{i}}\int_L u^-(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\int_L R^-(\sigma,\sigma_1)\,\chi^-(\sigma_1,t)\,\mathrm{d}\sigma_1+\frac{\mathrm{i}D}{2}[h^-(t)+1].$$

Se verifică într-un mod analog, folosind relația (25), că partea reală a membrului drept este nulă.

Funcția $v^-(s)$ va avea așadar expresia :

$$v^-(s)=\frac{1}{\pi}\int_L u^-(\sigma)\,\mathcal{R}e\left[\frac{\tau'(\sigma)}{\tau(\sigma)-t}\right]\mathrm{d}\sigma-\frac{D}{2}q_1^-(s)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_L u^-(\sigma)\,\mathcal{R}e\left\{\chi^-(\sigma,t)-\frac{1}{\pi}\int_L R^-(\sigma,\sigma_1)\left[\frac{\tau'(\sigma_1)}{\tau(\sigma_1)-t}+\chi^-(\sigma_1,t)\right]\mathrm{d}\sigma_1\right\}\mathrm{d}\sigma,$$

unde $q_1^-(s)$ reprezintă o notație deja făcută. Vom pune prima integrală sub altă formă. Făcînd notația :

$$q_3^-(\sigma,t)=\mathcal{R}e\left\{\chi^-(\sigma,t)-\frac{1}{\pi}\int_L R^-(\sigma,\sigma_1)\left[\frac{\tau'(\sigma_1)}{\tau(\sigma_1)-t}+\chi^-(\sigma_1,t)\right]\mathrm{d}\sigma_1\right\},$$

expresia pentru $v^-(s)$ devine :

$$v^-(s) = \frac{\tau'(s)}{\pi}\int_L \frac{u^-(\sigma)\,d\tau}{\tau - t} + \frac{1}{\pi}\int_L u^-(s)\left[\frac{G(\tau,\ t) - 2\tau'(s)}{2(\tau - t)} + \right.$$

$$\left. + q_3^-(\sigma,\ s)\right]d\sigma - \frac{D}{2}\, q_1^-(s),$$

sau

$$v^-(s) = \frac{\tau'(s)}{\pi}\int_L \frac{u^-(\sigma)}{\tau - t}\,d\tau + \frac{1}{\pi}\int_L u^-(\sigma)\, T^-(\sigma, t)\,d\sigma - \frac{D}{2}\, q_1^-(s), \tag{27}$$

unde s-a notat

$$T^-(\sigma, t) = \frac{G(\tau,\ t) - 2\tau'(s)}{2(\tau - t)} + q_3^-(\sigma,\ s),$$

adică o expresie similară cu (20). Din relația care definește pe $T^-(\sigma,\ t)$ se vede că această funcție este un nucleu slab polar.

Acestea fiind stabilite, se poate trece la rezolvarea problemei la limită propuse (2).

Rezolvarea problemei la limită generale. Vom utiliza pentru aceasta sistemul (4) echivalent cu condiția la limită (2) în care vom introduce expresiile (20) și (27) ale lui $v^+(s)$ și $v^-(s)$. Sisteml (4) devine :

$$L_1(s)\,u^+(s) + M_1(s)\,u^-(s) + N_1(s)\left[\frac{\tau'(s)}{\pi}\int_L \frac{u^-(\sigma)}{\tau - t}\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\int_L u^-(\sigma)\, T^-(\sigma,\ t)\,d\sigma\right] = Q_1(s) + \frac{D}{2}\, N_1(s)\, q_1^-(s);$$

$$L_2(s)\,u^+(s) + M_2(s)\,u^-(s) - N_2(s)\left[\frac{\tau'(s)}{\pi}\int_L \frac{u^+(\sigma)}{\tau - t}\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\int_L u^+(\sigma)\, T^+(\sigma, t)\,d\sigma\right] = Q_2(s) + \frac{c}{2}\, N_2(s)\, q_1^+(s)$$

Rezolvăm a doua ecuație în raport cu $u^-(s)$(presupunem că $M_2(s) \neq 0$ pe (L))

$$u^-(s) = -\frac{L_2(s)}{M_2(s)}\, u^+(s) + \frac{\tau'(s)}{\pi}\,\frac{N_2(s)}{M_2(s)}\int_L \frac{u^+(\sigma)}{\tau - t}\,d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\,\frac{N_2(s)}{M_2(s)}\int_L u^+(\sigma)\, T^+(\sigma,\ t)\,d\sigma + \mathcal{J}_1(s),$$

unde $\mathcal{J}_1\,(s)$ este funcţia hölderiană

$$\mathcal{J}_1(s)=\frac{Q_2(s)+\dfrac{c}{2}N_2(s)\,q_1^+(s)}{M_2(s)}.$$

Introducînd expresia lui $u^-(s)$ în prima relaţie a sistemului obţinem

$$u^+(s)\left[L_1(s)-\frac{L_2(s)\,M_1(s)}{M_2(s)}\right]+\frac{\tau'(s)}{\pi}\,\frac{M_1(s)\,N_2(s)}{M_2(s)}\int_L\frac{u^+(\sigma)\,d\tau}{\tau-t}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_L u^+(\sigma)\left[\frac{M_1(s)\,N_2(s)}{M_2(s)}\,T^+(\sigma,t)-\frac{N_1(s)\,L_2(\sigma)}{M_2(\sigma)}\,T^-(\sigma,t)\right]d\sigma-$$

$$-\frac{\tau'(s)\,N_1(s)}{\pi}\int_L\frac{L_2(\sigma)}{M_2(\sigma)}\,\frac{u^+(\sigma)}{\tau-t}\,d\tau+$$

$$+\frac{\tau'(s)\,N_1(s)}{\pi^2}\int_L\frac{\tau'(\sigma)\,N_2(\sigma)\,d\tau}{M_2(\sigma)\,(\tau-t)}\int_L\frac{u^+(\sigma_1)}{t_1-\tau}\,dt_1+$$

$$+\frac{N_1(s)}{\pi^2}\int_L\frac{N_2(\sigma)\,\tau'(\sigma)}{M_2(\sigma)}\,T^-(\sigma,t)\,d\sigma\int_L\frac{u^+(\sigma_1)\,dt_1}{t_1-\tau}+$$

$$+\frac{\tau'(s)\;N_1(s)}{\pi^2}\int_L\frac{N_2(\sigma)\,d\tau}{M_2(\sigma)\,(\tau-t)}\int_L u^+(\sigma_1)\;T^+(\sigma_1,t)\,d\sigma_1+$$

$$+\frac{N_1(s)}{\pi^2}\int_L\frac{N_2(\sigma)}{M_2(\sigma)}\,T^-(\sigma,t)\,d\sigma\int_L u^+(\sigma_1)\;T^+(\sigma_1,\tau)\,d\sigma_1=\mathcal{J}_2(s),$$

unde am notat

$$\mathcal{J}_2(s)=Q_1(s)+\frac{D}{2}N_1(s)\;q_1^-(s)-M_1(s)\,\mathcal{J}_1(s)-$$

$$\frac{\tau'(s)\;N_1(s)}{\pi}\int_L\frac{\mathcal{J}_1(\sigma)\;d\tau}{\tau-t}-\frac{N_1(s)}{\pi}\int_L\mathcal{J}_1(\sigma)\;T^-(\sigma,t)\;d\sigma$$

care este funcţie hölderiană pe (L). Inversînd ordinea de integrare se ajunge la expresia

$$u^+(s)\left[L_1(s)-\frac{L_2(s)\;M_1(s)}{M_2(s)}\right]+\frac{\tau'(s)\;M_1(s)\;N_2(s)}{\pi\,M_2(s)}\int_L\frac{u^+(\sigma)\,d\tau}{\tau-t}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_L u^+(\sigma)\left\{\frac{M_1(s)\ N_2(s)}{M_2(s)}\ T^+(\sigma,\ t)-\frac{N_1(s)\ L_2(\sigma)}{M_2(\sigma)}\ T^-(\sigma,t)+\right.$$

$$+\frac{\tau'(s)\ N_1(s)}{\pi}\int_L\frac{N_2(\sigma_1)}{M_2(\sigma_1)}\ \frac{T^+(\sigma,\ t_1)}{t_1-t}\,\mathrm{d}t_1+$$

$$+\frac{N_1(s)}{\pi}\int_L\frac{N_2(\sigma_1)}{M_2(\sigma_1)}\ \frac{\tau'(\sigma)\ T^-(\sigma,\ t_1)}{\tau-t_1}\ \tau'(\sigma_1)\,\mathrm{d}\sigma_1+$$

$$\left.+\frac{N_1(s)}{\pi}\int_L\frac{T^+(\sigma,\sigma_1)\ T^-(\sigma_1,\ t)\ N_2(\sigma_1)}{M_2(\sigma_1)}\,\mathrm{d}\sigma_1\right\}\mathrm{d}\sigma-$$

$$-\frac{\tau'(s)\ N_1(s)\ L_2(s)}{\pi\,M_2(s)}\int_L\frac{u^+(\sigma)\,\mathrm{d}\tau}{\tau-t}-\frac{\tau'(s)\ N_1(s)}{\pi}\int_L u^+(\sigma)\left[\frac{L_2(\sigma)}{M_2(\sigma)}-\right.$$

$$\left.-\frac{L_2(s)}{M_2(s)}\right]\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-t}-\frac{[\tau'(s)]^2\ N_1(s)\ N_2(s)}{M_2(s)}\,u^+(s)+$$

$$+\frac{\tau_1(s)\ N_1(s)}{\pi^2}\int_L u^+(\sigma)\ \mathrm{d}\tau\int_L\frac{\tau'(\sigma_1)\ N_2(\sigma_1)\ \mathrm{d}t_1}{M_2(\sigma_1)\ (t_1-t)(\tau-t_1)}=\mathcal{J}_2(s)\,.$$

Ne ocupăm de ultima integrală din membrul stîng :

$$I_1=\frac{\tau'(s)\ N_1(s)}{\pi}\int_L u^+(\sigma)\ \mathrm{d}\tau\,\frac{1}{\pi}\int_L\frac{N_2(\sigma_1)}{M_2(\sigma_1)}\ \frac{\tau'(\sigma_1)}{\tau-t}\left[\frac{1}{t_1-t}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{t_1-\tau}\right]\mathrm{d}t_1=\frac{\tau'(s)\ N_1(s)}{\pi}\int_L u^+(\sigma)\ T_3(\tau,\ t)\ \mathrm{d}\tau,$$

unde expresia lui $T_3\ (\tau,\ t)$ este evidentă, ea fiind funcţie slab polară. Ecuaţia integrală pe care o satisface $u^+\ (s)$ este aşadar

$$f_1(s)\ u^+(s)+f_2(s)\int_L\frac{u^+(\sigma)\,\mathrm{d}\tau}{\tau-t}+$$

$$+\frac{N_1(s)}{\pi}\int_L u^+(\sigma)\,f_3(\sigma,\ t)\ \mathrm{d}\sigma=\mathcal{J}_2(s)\,, \tag{28}$$

unde s-a notat

$$f_1(s)=L_1(s)-\frac{L_2(s)\ M_1(s)}{M_2(s)}-\frac{N_1(s)\ N_2(s)\ [\tau'(s)]^2}{M_2(s)}$$

$$f_2(s) = \frac{M_1(s)\, N_2(s) - N_1(s)\, L_2(s)}{\pi\, M_2(s)}\, \tau'(s)$$

$$f_3(\sigma, t) = \frac{M_1(s)\; N_2(s)}{M_2(s)\; N_1(s)}\, T^+(\sigma, t) - \frac{L_2(s)}{M_2(s)}\, T^-(\sigma, t) +$$

$$+ \frac{\tau'(s)}{\pi} \int_L \frac{N_2(\sigma_1)}{M_2(\sigma_1)}\, \frac{T^+(\sigma, t_1)}{t_1 - t}\, \mathrm{d}t_1 +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_L \frac{N_2(\sigma_1)}{M_2(\sigma_1)}\, \frac{T^-(\sigma, t_1)}{\tau - t_1}\, \tau'(\sigma_1)\, \tau'(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma_1 +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_L \frac{T^+(\sigma, \sigma_1)\; T^-(\sigma_1, t)\; N_2(\sigma_1)}{M_2(\sigma_1)}\, \mathrm{d}\sigma_1 -$$

$$- \frac{\tau'(s)\; \tau'(\sigma)}{\tau - t} \left[\frac{L_2(\sigma)}{M_2(\sigma)} - \frac{L_2(s)}{M_2(s)} \right] + T_3(\sigma, t)\; \tau'(\sigma)\; \tau'(s).$$

Ecuația (28) determină funcția $u^+(s)$ și din (20) se găsește funcția $v^+(s)$. Din sistemul (4) se găsesc imediat funcțiile $u^-(s)$ și $v^-(s)$. Cu aceasta problema poate fi considerată ca rezolvată.

Pe o cale similară cu cea urmată în cazul funcțiilor olomorfe, am reușit să rezolvăm problema la limită liniară care generalizează problema lui Riemann în clasa funcțiilor analitice generalizate, deoarece ca și în cazul funcțiilor analitice, termenii care se adaugă introduc liniar aceleași necunoscute $u^+(s)$, $v^+(s)$, $u^-(s)$ și $v^-(s)$ ca și cele deja existente în condiția clasică. Reușind și în acest caz să stabilim relații între aceste necunoscute, problema a putut fi rezolvată formal pînă la capăt ajungînd la soluții care generalizează pe acelea din [3].

Primită la redacție la 15 ianuarie 1969

Institutul de mecanica fluidelor al Academiei
Republicii Socialiste România

LE PROBLÈME DE RIEMANN GÉNÉRALISÉ DANS LA CLASSE DES FONCTIONS ANALYTIQUES GÉNÉRALISÉES

(RÉSUMÉ)

On étudie dans la classe des fonctions analytiques généralisées le problème de Riemann généralisé qui contient dans la condition aux limites les valeurs $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ et leurs conjuguées, de la fonction cherchée $\Phi(z)$, en combinaison linéaire à coefficients höldériens sur la

ligne L, la frontière du domaine simplement connexe considéré. Quant à la courbe L, on suppose qu'elle satisfait aux conditions de Liapounoff.

Pour les nécessités de l'étude on généralise pour ce cas la formule de Schwarz-Villat et les relations qu'on en déduit entre les parties réelles et imaginaires de la fonction $\Phi(z)$ sur L ; ensuite le problème est ramené à l'intégration d'une équation singuliére à noyau du type de Cauchy.

Le problème étudié présente un intérêt mathématique intrinsèque comme généralisation d'un problème classique. Il intervient dans l'étude de nombreux phénomènes physiques rencontrés en pratique. En particulier il s'applique à l'étude du déplacement d'un fluide par un autre dans un milieu poreux non homogène.

BIBLIOGRAFIE

1. Ф.Е. ГАХОВ, *Краевые задачи.* Издание второе, Москва, 1963.
2. И. Н. ВЕКУА, *Обобщенные аналитические функции*, Москва, 1959.
3. V. IONESCU, C. COZMA, *Problema lui Riemann generalizată în clasa funcţiilor analitice.*
4. Л.Г. МИХАЙЛОВ, *Точные теоремы о разрешимости задачи сопряжения с производными.* Сборник ,,Исследования по краевым задачам''.
5. Г. С. БАРХИН, З.Д. ХУСМАНОВ, *Задача Гильберта для кусочно регулярной обобщенной аналитической функции.* Сборник ,,Исследования по краевым задачам''.

ASUPRA UNEI PROBLEME BILOCALE

DE

IOAN A. RUS

Aplicînd metode calitative ale analizei (principiul maximului, teoreme de comparaţie), se dau condiţii suficiente, pentru unicitatea soluţiei problemelor (0.1)–(0.2), (3.1)–(3.2), (3.7)–(3.8), (3.9)–(3.10), (4.1)–(4.2). Consideraţii analoage se fac asupra sistemelor (5.1) şi (5.2)

Studiul problemelor la limită relative la ecuaţiile diferenţiale ordinare a făcut de mult timp obiectul a o serie de cercetări, începînd cu metodele analizei clasice şi continuînd apoi cu metodele topologice şi ale analizei funcţionale. Literatura în această direcţie este foarte bogată şi ne mulţumim să cităm pentru unele informaţii bibliografice monografiile, G. Sansone [12], J. Leray-J. Schauder [8], J. Cronin [4], S. Agmon [1], R. Conti [3], C. Lanczos [9], S. G. Krein-G. I. Laptev [7], O. Aramă-D. Ripianu [2].

În prezenta lucrare, aplicînd metode calitative ale analizei (principii de maxim, teoreme de comparaţie), ne propunem de a studia următoarea problemă la limită.

Considerăm sistemul

$$L(y) = y'' + B(x)\,y' + C(x)\,y = 0, \tag{0.1}$$

unde $y = (y_1, \ldots, y_n)$, iar $B = B(x)$, $C = C(x)$ sînt matrice pătratice de ordinul n, ale căror elemente sînt funcţii definite şi continue pe un anumit interval $[a, b]$. Ne punem problema de a stabili condiţii asupra coeficienţilor $B(x)$, $C(x)$, astfel ca problema omogenă

$$\begin{aligned} &L(y) = 0 \\ &y(a) = y(b) = 0 \end{aligned} \tag{0.2}$$

să admită numai soluţia banală, $y \equiv 0$.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 10, P. 1511–1521, BUCUREŞTI, 1969

Peste tot în cele ce urmează, prin soluţie, înţelegem soluţia regulară, adică soluţia în sens clasic.

Planul lucrării este următorul. În § 1 se consideră problema formulată mai sus prin prisma principiului maximului iar în § 2 prin prisma teoremelor de comparaţie. Unele din rezultatele stabilite în § 2 se aplică în § 3 la studiul unei anumite probleme bilocale relativă la o ecuaţie diferenţială ordinară de ordinul $2n$. În § 4 se consideră sisteme de ordin superior iar în § 5 se extind unele din rezultatele paragrafelor anterioare la anumite sisteme neliniare.

§ 1. CONSECINŢE ALE PRINCIPIULUI MAXIMULUI

În acest paragraf ne propunem de a stabili unele consecinţe, ale principiului maximului stabilit în [10] (pag. 20), pentru problema bilocală (0.2).

Astfel are loc

Teorema 1.1. *Dacă*

$$e^* Le < 0 \tag*{1.1)}$$

pentru orice $e = (e_1, \ldots, e_n) \in C^2(a, b)$, *astfel ca* $\| e \| = (e_1^2 + \cdots + e_n^2)^{\frac{1}{2}} = 1$, *şi* $x \in (a, b)$, *atunci problema (0.2) admite numai soluţia banală.*

Demonstraţie. Se aplică principiul maximului stabilit în [10].

În continuare vom face cîteva observaţii asupra condiţiei (1.1). Scriem matricea $B(x)$ sub forma

$$B(x) = b(x)\, I + B_1(x)$$

unde $b(x)$ este o funcţie scalară continuă în $[a, b]$, I este matricea unitate de ordinul n, iar $B_1(x)$ o matrice pătratică de ordinul n cu elementele funcţii continue în $[a, b]$.

Se arată cu uşurinţă că condiţia (1.1) se reduce la faptul că matricea de ordinul $2\, n$

$$\begin{pmatrix} I & -\frac{1}{2} B_1^* \\ -\frac{1}{2} B_1 & \overset{s}{C} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

este pozitiv definită, pentru orice $x \in (a, b)$. Prin B_1^* am notat transpusa matricei B_1 iar prin $\overset{s}{C}$, partea simetrică a matricei C. Condiţia (1.2) se poate înlocui cu una mai restrictivă, dar în unele cazuri mai practică. Presupunem că

$$\tau C \tau^* < -\alpha^2 \| \tau \|^2$$

pentru orice $\tau \in R^n$, iar α o constantă pozitivă ce nu depinde de τ. Se arată ușor că afirmația teoremei 1.1 are loc dacă

$$\| B_1 \| < 2\alpha. \tag{1.3}$$

Aici prin $\| B_1 \|$ am notat norma matricei B_1, față de norma euclidiană a lui R^n (Gantmaher [5]). Rezultă de aici că funcția $b(x)$ trebuie aleasă astfel ca $\| B_1 \| = \| B - bI \|$ să aibă valoarea cea mai mică. Ar fi interesant de studiat această problemă în toată generalitatea ei, adică de a studia valorile extreme ale funcției $f(b) = \| B - bI \|$ în raport cu b, B fiind o matrice dată, în general nesimetrică.

§ 2. CONSECINȚE ALE TEOREMELOR DE COMPARAȚIE

Considerăm sistemele

$$L(u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(A(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + B(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + C(x)u = 0 \tag{2.1}$$

$$M(V) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) + Q(x)v_i = 0, \tag{2.2}$$

unde $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $P(x)$, $Q(x)$ sînt matrice pătratice de ordinul n, ce aparțin lui $C[a, b]$.

În [11] am stabilit o teoremă de comparație pentru aceste sisteme (*pentru alte tipuri de teoreme de comparație a se vedea literatura citată în* [*11*]). În aplicații este foarte utilă următoarea variantă, mai particulară, a acestei teoreme de comparație.

Fie

$$P(x) = \begin{pmatrix} P_1(x) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & P_2(x) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_{n-1}(x) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & P_n(x) \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} Q_1(x) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & Q_2(x) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & Q_{n-1}(x) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & Q_n(x) \end{pmatrix},$$

Presupunem că fiecare ecuație a sistemului astfel obținut

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P_i(x)\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}x}\right) + Q_i(x)v_i = 0, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{2.3}$$

este neoscilatorie, adică orice soluție a ecuației (2.3) are cel mult un zero în intervalul închis $[a, b]$. Pe baza unei teoreme a lui Kondratiev [6], rezultă că există o soluție, $v_i = t_i(x)$, a ecuației (2.3) astfel că $t_i(x) \neq 0$, pentru $x \in [a, b]$.

Matricea

$$T = \begin{pmatrix} t_1(x) & 0 \;\ldots & 0 & 0 \\ 0 & t_2(x) & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots t_{n-1}(x) & 0 \\ 0 & 0 \;\ldots & 0 & t_n(x) \end{pmatrix}$$

este o matrice-soluție a sistemului (2.3), al cărei determinant, $|T| \neq 0$, pentru $x \in [a, b]$, iar matricele P, Q, T și $P \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} T^{-1}$ sînt simetrice.

Rezultă de aici că are loc

TEOREMA 2.1. *Dacă aplicăm teorema de comparație sistemelor* (*2.1*) *și* (*2.3*), *atunci condiția 2° din teorema de comparație* ([*11*]) *se poate înlocui cu următoarea*

2°′. *Fiecare ecuație a sistemului* (*2.3*) *este neoscilatorie.*

Această teoremă ne permite să dăm o estimare a lungimii intervalului $[a, b]$, astfel ca problema (0.2) relativă la orice subinterval al intervalului $[a, b]$ să admită numai soluția banală. Vom da un singur exemplu în acest sens.

Comparăm sistemul (0.1) cu ecuația

$$v'' + k^2 v = 0, \tag{2.4}$$

unde k este o constantă pozitivă. Ținînd cont de faptul că distanța dintre două zerouri consecutive ale unei soluții a ecuației (2.4) este $\dfrac{\pi}{K}$, obținem

TEOREMA 2.2. *Dacă* $b - a < \dfrac{\pi}{K}$, *atunci oricare din următoarele condiții sînt suficiente pentru ca problema* (*0.2*) *să admită numai soluția banală* :

i) $$\tau \begin{pmatrix} I & 0 \\ -2B & k^2 I - 2C \end{pmatrix} \tau^* \geqslant 0$$

pentru orice $\tau \in R^{2n}$ *și* $x \in (a, b)$.

ii) $$\tau \begin{pmatrix} I & 2B \\ 0 & k^2 I + 2\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} - 2C \end{pmatrix} \tau^* \geqslant 0$$

pentru orice $\tau \in R^{2n}$ și $x \in (a, b)$.

iii) *Matricea B este simetrică și*

$$\tau\left(k^2 I + \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} - 2C\right)\tau^* \geqslant 0$$

pentru orice $\tau \in R^{2n}$ *și* $x \in (a, b)$.

iv) *Există matricea pătratică, F, de ordinul n,* $F \in C^1[a, b]$ ***astfel ca***

$$\tau \begin{pmatrix} I & F \\ F - 2B & k^2 I + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} - 2C \end{pmatrix} \tau^* \geqslant 0$$

pentru orice $\tau \in R^{2n}$ *și* $x \in (a, b)$.

v) *Există matricea pătratică, F, de ordinul n,* $F \in C^1[a, b]$ ***astfel ca***

$$\tau \begin{pmatrix} I & F + 2B \\ F & k^2 I + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F + 2B) - 2C \end{pmatrix} \tau^* \geqslant 0$$

pentru orice $\tau \in R^{2n}$ *și* $x \in (a, b)$.

vi) *Matricea B este simetrică și există matricea pătratică, F, de ordinul n,* $F \in C^1[a, b]$, *astfel ca*

$$\tau \begin{pmatrix} I & F \\ F & k^2 I - 2C + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} \end{pmatrix} \tau^* \geqslant 0$$

pentru orice $\tau \in R^{2n}$ şi $x \in (a, b)$.

Demonstrație. Aplicăm teorema 2.1 sistemelor

$$2\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + 2B\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + 2\,C u = 0$$

şi (2.4).

Se observă uşor că teorema 2.2 se poate enunţa într-o formă mai puţin generală, dar în unele cazuri mai practică. Astfel condiţia i) se poate înlocui cu următoarea

i′) $\|B\| < \alpha$, unde numărul α este definit prin inegalitatea

$$\tau(k^2 I - 2C)\,\tau^* \geqslant \alpha^2 \|\tau\|^2$$

pentru orice $\tau \in R^n$.

În mod analog se pot transcrie şi celelalte condiţii.

§ 3. CAZUL ECUAŢIILOR DE ORDINUL $2n$

În acest paragraf vom aplica rezultatele din §2, pentru a stabili condiţii suficiente astfel ca problema următoare

$$y^{(2n)} + a_1(x)\, y^{(2n-1)} + \dots + a_{2n-1}(x)\, y' + a_{2n}(x)\, y = 0 \tag{3.1}$$

$$y^{(2k)}(a) = y^{(2k)}(b) = 0, \; k = 0,1, \dots, n-1. \tag{3.2}$$

să admită numai soluţia banală.

Pentru aceasta vom scrie ecuaţia (3.1) sub forma

$$Y'' + BY' + CY = 0, \tag{3.3}$$

unde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots 0 & \dots 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{2n-1} & a_{2n-3} & a_{2n-5} & \dots & a_5 & a_3 & a_1 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ a_{2n} & a_{2n-2} & a_{2n-4} & \dots & a_6 & a_4 & a_2 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Aplicînd teorema de comparaţie sistemului (3.3) şi sistemului

$$Z'' + Q(x)\, Z = 0, \tag{3.6}$$

unde $Q(x)$ este o matrice simetrică de ordinul n, obţinem criterii de unicitate pentru problema (3.1)—(3.2). În cele ce urmează vom da cîteva exemple.

Exemplul 3.1. Considerăm problema la limită

$$y^{\mathrm{IV}} + a_1(x)\, y''' + a_2(x)\, y'' + a_3(x)\, y' + a_4(x)\, y = 0 \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} y(a) &= y(b) = 0 \\ y''(a) &= y''(b) = 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Pe baza consideraţiilor de mai sus şi a teoremei 2.2, obţinem

TEOREMA 3.1. *Dacă* $b - a < \frac{\pi}{k}$, *atunci oricare din următoarele condiţii sînt condiţii suficiente pentru ca problema (3.7) — (3.8) să admită numai soluţia banală*

i) $k^4 - (2a_2 + a_1^2 + a_3^2)\, k^2 - (1 - a_4)^2 \geqslant 0.$

ii) Matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & a_3 & a_1 \\ a_3 & k^2 & 1 + \frac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}x} - a_4 \\ a_1 & 1 + \frac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}x} - a_4 & k^2 + 2\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}x} - 2a_2 \end{pmatrix}$$

este semipozitiv definită în intervalul $[a, b]$.

iv) *Există matricea* $F = (f_{ij})$, $F \in C^1\,[a, b)$, *astfel că matricea*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & f_{11} & f_{12} - a_3 \\ 0 & 1 & f_{12} & f_{22} - a_1 \\ f_{11} & f_{12} & k^2 + \frac{\mathrm{d}f_{11}}{\mathrm{d}x} & 1 - a_4 + \frac{\mathrm{d}f_{12}}{\mathrm{d}x} \\ f_{12} - a_3 & f_{22} - a_1 & 1 - a_4 + \frac{\mathrm{d}f_{12}}{\mathrm{d}x} & k^2 - 2a_2 + \frac{\mathrm{d}f_{22}}{\mathrm{d}x} \end{pmatrix}$$

este semipozitiv definită în intervalul $[a, b]$.

v) *Există matricea* $F = (f_{ij})$, $F \in C^1\,[a, b]$, *astfel că matricea*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & f_{11} & f_{12} \\ 0 & 1 & f_{12} + a_3 & f_{22} + a_1 \\ f_{11} & f_{12} + a_3 & k^2 + \frac{\mathrm{d}f_{11}}{\mathrm{d}x} & 1 + \frac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}f_{12}}{\mathrm{d}x} - a_4 \\ f_{12} & f_{22} + a_1 & 1 + \frac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}f_{12}}{\mathrm{d}x} - a_4 & k^2 + 2\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}f_{21}}{\mathrm{d}x} - 2a_2 \end{pmatrix}$$

este semipozitiv definită în intervalul $[a, b]$.

Demonstrație. Se aplică teorema 2.2 și se ține cont de faptul că în cazul problemei (3.7)—(3.8) avem

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & a_1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ a_4 & a_2 \end{pmatrix}$$

Exemplul 3.2. Considerăm problema la limită (3.1)—(3.2), în cazul particular în care nu apar în ecuație decît derivatele de ordin par, adică problema următoare

$$y^{(2n)} + a_2(x)\, y^{(2n-2)} + \ldots + a_{2n-2}(x)\, y'' + a_{2n}(x)\, y = 0 \tag{3.9}$$

$$y^{(2k)}(a) = y^{(2k)}(b) = 0, \quad k = 0,1, \ldots, n-1. \tag{3.10}$$

Comparînd ecuația (3.9) cu sistemul (3.6) și aplicînd teorema de comparație din [11] obținem

TEOREMA 3.2. *Presupunem că există o matrice-soluție, T, a sistemului* (3.6) *astfel că T este simetrică și $|T| \neq 0$, pentru $x \in [a, b]$. Atunci fiecare din următoarele condiții reprezintă condiții suficiente ca problema* (3.9)—(3.10) *să admită numai soluția banală :*

i) $\tau (Q - C) \tau^* \geqslant 0$, *pentru orice* $\tau \in R^n$ *și* $x \in (a, b)$ (*matricea* C *este dată de* (3.5))

ii) *Există matricea pătratică, F, de ordinul n, $F \in C^1 [a, b]$* (*simetrică*), *astfel ca*

$$\xi\xi^* + 2\,\xi F \eta^* + \eta (Q - 2C)\, \eta^* \geqslant 0$$

pentru orice ξ și $\eta \in R^n$ și $x \in (a, b)$.

§ 4. SISTEME DE ORDIN SUPERIOR

Considerații analoage cu cele din paragrafele anterioare se pot face și asupra problemei bilocale următoare.

Se consideră sistemul de ecuații diferențiale de ordinul $2p$

$$y^{(2p)} + A_1(x)\, y^{(2p-1)} + \ldots + A_{2p-1}(x)\, y' + A_{2p}(x)\, y = 0 \tag{4.1}$$

cu condițiile la limită

$$y^{(2k)}(a) = y^{(2k)}(b) = 0, \quad k = 0,1, \ldots, p-1, \tag{4.2}$$

unde $A_i(x)$ sînt matrice pătratice de ordinul n iar y o funcție vector

$$y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Problema (4.1)—(4.2) se poate scrie sub forma

$$Y'' + BY' + CY = 0 \tag{4.3}$$

$$Y(a) = Y(b) = 0, \tag{4.4}$$

unde B şi C sînt următoarele matrice de ordinul np

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_{2p-1} & A_{2p-3} & A_{2p-5} & \dots & A_5 & A_3 & A_1 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -I \\ A_{2p} & A_{2p-2} & A_{2p-4} & \dots & A_6 & A_4 & A_2 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

Aplicînd teoremele de comparaţie sistemului (4.3) şi sistemului

$$Z'' + Q\,(x) = 0, \tag{4.6}$$

unde Q este o matrice simetrică de ordinul np, obţinem criterii de unicitate pentru problema (4.1)—(4.2). Deoarece problema obţinerii acestor criterii nu prezintă dificultăţi deosebite, ne vom mărgini să punem în evidenţă în cele ce urmează, sub titlu de exemplu, un asemenea criteriu. Astfel pentru cazul p = 2, condiţia i) din teorema 2.2 ia forma :

i') *Matricea de ordinul* $4n$

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & -A_3^* \\ 0 & I & 0 & -A_1^* \\ 0 & 0 & k^2 I & -I-A_4^* \\ -A_3 & -A_1 & -I-A_1 & k^2 I-2\overset{s}{A}_2 \end{pmatrix}$$

este semipozitiv definită în $[a, b]$.

Adică condiția i′) *asigură faptul că dacă* $b-a < \frac{\pi}{k}$, *atunci problema* (4.1) — (4.2) (*cazul* $p = 2$), *relativă la orice subinterval al intervalului* $[a, b]$, *admite numai soluția banală.*

Analog se pot obține și alte criterii utilizînd și celelalte condiții din teorema 2.2.

§ 5. SISTEME NELINIARE DE ORDINUL AL DOILEA

Rezultatele stabilite în paragrafele anterioare se pot extinde la anumite sisteme neliniare, fie folosind principiul liniarizării, fie direct. În cele ce urmează ne vom ocupa numai de sisteme neliniare de forma

$$y'' + B(x, y)\, y' + C(x, y)\, y = 0, \tag{5.1}$$

unde $B(x, y)$, $C(x, y)$ sînt matrice pătratice de ordinul n, definite și continue pe $[a, b] X R^n$, $y = (y_1 \ldots, y_n)$.

Principiul maximului stabilit în [10] (pag. 20) ia forma

TEOREMA 5.1. *Presupunem că*

$$\tau \begin{pmatrix} -I & 0 \\ B_1(x, \eta) & C(x, \eta) \end{pmatrix} \tau^* < 0 \tag{5.2}$$

pentru orice $\eta \in R^n$ *și* $\tau \in R^{2n}$, $\tau \neq 0$, $x \in [a, b]$, *unde* $B(x, y) = \alpha(x, y) I + B_1(x, y)$, I *este matricea unitate de ordinul* n, $\alpha = \alpha(x, y)$ *este o funcție definită și continuă pe* $[a, b] XR^n$. *Atunci, dacă* $y = y(x)$, *este o soluție regulară a sistemului* (5.1), *norma sa*, $\|y\| = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, *nu își atinge valorile maxime pe* $[a, b]$, *în* (a, b).

Demonstrație. Se urmează punct cu punct demonstrația dată teoremei 1 din [10].

De asemenea, teorema de comparație din [11] se poate extinde fără nici-o dificultate, relativ la sistemele

$$\frac{d}{dx}\left(A(x, y)\frac{dy}{dx}\right) + B(x, y)\frac{dy}{dx} + C(x, y)\, y = 0 \tag{5.3}$$

$$\frac{d}{dx}\left(P(x)\frac{dz}{dx}\right) + Q(x)\, z = 0 \tag{5.4}$$

Ca şi în cazul liniar, condiţiile de neoscilaritate din cazul neliniar, se pot exprima cu ajutorul normelor matricelor respective.

Primită la redactie la 3 octombrie 1968.

Universitatea „Babeş-Bolyai" — Cluj
Facultatea de Matematică-Mecanică

SUR UN PROBLÈME BILOCAL

(RÉSUMÉ)

En appliquant des méthodes qualitatives de l'analyse (principe du maximum, théorèmes de comparaison), on donne des conditions suffisantes, pour l'unicité de la solution des problèmes (0.1)–(0.2), (3.1)–(3.2), (3.7)–(3.8), (3.9)–(3.10), (4.1)–(4.2). On fait les mêmes considérations sur les systèmes (5.1) et (5.2).

BIBLIOGRAFIE

1. S. Agmon, *Unicité et convexité dans les problèmes différentiels.* Les Press de l'Université de Montreal, 1965.
2. O. Aramă-D. Ripianu, *Quelques recherches actuelles concernant l'équation de Ch. de la Vallee Poussin relative au problème polylocal dans la théorie des équations différentielles.* Mathematica, **8**, *1*, 19–28 (1966).
3. R. Conti, *Recent trends in theory of boundary value problems for ordinary differential equation* Boll. U.M.I., 22, 135–178 (1967).
4. J. Cronin, *Fixed point and topological degree in nonlinear analysis.* Mathematical Surveys. Nr. 11, 1964.
5. Гантмахер, *Теория матриц*, Москва, 1966.
6. В. А. Кондратьев, *Элементарный вывод необходимое и достаточное условие неколеблемости решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка.* У М Н, **12**, *3*, 159—160 (1957).
7. С. Г. Крейн — Г. И. Лаптев, *Граничные задачи для дифференциальных уравнений второго порядка в Банаховом пространстве: I.* Дифф. Урав., **2**. *3*, 382—390 (1966); II. Дифф. Урав., **2**, *7*, 319 (1966).
8. J. Leray-J. Schauder, *Topologie et équations fonctionnelles.* Ann. Ec. N. Sup., **51**, 45–78 (1934).
9. C. Lanczos, *Linear Differential Operators.* London, 1964.
10. I. A. Rus, *Sur les propriétés des normes des solutions d'un système d'équations différentielles du second ordre.* Stud. Univ. „Babeş-Bolyai", **1**, 19–26 (1968).
11. I. A. Rus, *Théorèmes de comparaison pour les systèmes d'équations différentielles du second ordre.* Boll. U.M.I., *4–5*, 540–542 (1968).
12. G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale.* Bologna, I (1948), II (1949).

ASUPRA MINIMIZĂRII PIERDERILOR DE ENERGIE DIN REȚELELE ELECTRICE

DE

C. SĂVULESCU și AL. ȘCHIOP

În lucrare se propune stabilirea unei căi teoretice de a determina exact sau, eventual, de a încadra, variațiile pierderilor din rețea la variații ale puterilor reactive injectate în noduri. În cazul că aceste variații ale mărimilor nodale sînt egale cu unitatea, rezultă imediat „sensibilitatea" pierderilor la variații ale acestor mărimi.

1. INTRODUCERE

Problema dispatchingului economic în sistemele electroenergetice este binecunoscută și a fost prezentată într-un număr mare de lucrări, soluțiile oferite nefiind însă toate aplicabile, și aceasta datorită dificultăților serioase de calcul pe care le implică. S-au conturat două căi : a) formularea cea mai generală a problemei și rezolvarea ei prin metode de programare neliniară [3], [6], [10] b) calculul repartiției optime a puterilor active și apoi cel al repartiției puterilor reactive cu minimizarea pierderilor de circulație [5], [11], [12], [15], [16].

A apărut astfel tendința de a se renunța la metoda coeficienților „B", aplicată în S.U.A. [13], care comportă dispatching economic al puterilor active și stabilirea puterilor reactive astfel încît în punctele de generare tensiunea să fie menținută la limita superioară (admisă de instalații) și într-o bandă îngustă de variație. Evident, o repartiție optimă a producțiilor de energie reactivă conduce la cheltuieli minime, dar dificultățile de calcul care apar pun sub semnul întrebării necesitatea acesteia, dat fiind faptul că economia suplimentară realizată pare a fi neglijabilă.

Scopul acestei lucrări îl constituie stabilirea unei căi de a aprecia sensibilitatea pierderilor de energie din rețeaua sistemului electroenergetic la variații ale repartiției puterilor reactive injectate (deci ale tensiunilor

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 10, P. 1523 – 1532, BUCUREȘTI, 1969

nodale), vectorul puterilor active fiind optimal, indicaţiile obţinute fiind determinante în alegerea metodei de soluţionare a problemei dispatchingului economic.

2. PREZENTAREA MATEMATICĂ A PROBLEMEI

Fie $x \in R^n$ vectorul variabilelor şi $f: R^n \to R$ o funcţională pe R^n (ale cărei valori în R se studiază), eventual de forma :

(1) $f(x) = < x, Cx > + < p, x < + \alpha$[1]

cu restricţia

(1′) $x \in \mathcal{D}$

C fiind o matrice simetrică pozitiv -definită, p un vector constant, α un scalar constant, $\mathcal{D}$ o mulţime convexă închisă pe care o vom numi „domeniul restricţiilor" :

(2) $\mathcal{D} = \{x \mid (x \in R^n) \,\&\, (Ax \leqslant b)\}.$

Se cere rezolvarea următoarei probleme : fiind dat un vector arbitrar h

(3) $h \in \mathcal{D} \subset R^n$

şi un punct x_0

(3′) $x_0 \in \mathcal{D} \subset R^n$

să se calculeze

(4) $\mathcal{S}(x_0) = f(h) - f(x_0)$

şi

(4′) $\mathcal{S}(x_0) = | f(h) - f(x_0) |,$

unde prin $\mathcal{S}(x_0)$ vom înţelege „sensibilitatea" funcţiei f la o deplasare a lui x din x_0 în h.

În virtutea convexităţii lui $\mathcal{D}$:

(5) $[th + (1 - t)\, x_0] \in \mathcal{D}$

(5′) $\forall t \mid t \in [0, 1]$

(5″) $h \in \mathcal{D}.$

---

[1] Întrucît nu este obligatoriu ca $f(x)$ să fie o formă pătratică, deducerea relaţiilor se va face în cazul general.

Vom studia atunci funcţionala :

$$f(h) = f[th + (1 - t)\, x_0\,] = f[x_0 + t(h - x_0)] \tag{6}$$

cu condiţiile (5′) şi (5″).

Teoremă. *Funcţionala (6) se poate scrie sub forma :*

$$\begin{aligned} f(h) &= f(x_0) + <\nabla f(x_0), (h - x_0)> + \\ &+ \frac{1}{2} <\{\nabla\nabla f(x_0 + 0(h - x_0)]\}\,(h - x_0), (h - x_0)> \end{aligned} \tag{7}$$

cu $\theta \in (0, 1)$, *unde* $\nabla f(x) = \operatorname{grad} f(x)$

Demonstraţie. Fie $\varphi\colon\ [0,1] \to R$

$$\varphi(t) = f[x_0 + t(h - x_0)] \tag{8}$$

o funcţie de variabilă reală t, de două ori derivabilă pe mulţimea de definiţie.

Prin dezvoltarea în serie Taylor avem :

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(\theta), \tag{9}$$

unde $\theta \in (0,1)$

Succesiv :

$$\varphi(1) = f(h) \tag{9′}$$

$$\varphi(0) = f(x_0) \tag{9″}$$

$$\varphi'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f[x_0 + (t + \Delta t)(h - x_0)] - f[x_0 + t(h - x_0)]}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f[(x_0 + t(h - x_0) + \Delta t(h - x_0)] - f[x_0 + t(h - x_0]}{\Delta t}$$

şi, utilizînd derivata Gâteaux,

$$\varphi'(t) = <\nabla f[x_0 + t(h - x_0)], (h - x_0)>$$

$$\varphi'(0) = <\nabla f(x_0), (h - x_0)>. \tag{9‴}$$

În mod analog rezultă

$$(9^{IV}) \qquad \varphi''(\theta) = < \{\nabla\nabla f[x_0 + \theta\,(h - x_0)]\}\ (h - x_0),\ (h - x_0)>.$$

Introducînd (9′), . . ., (9^{IV}) în (9), rezultă (7), q.e.d.
Pentru a evalua ∇f şi $\nabla\nabla f$ ţinem seama de (1) :

$$(10) \qquad \nabla f\,(x_0) = 2Cx_0 + p$$

$$(11) \qquad \nabla\nabla f\,[x_0 + \theta\,(h - x_0)] = 2C.$$

Din (7), (10,) (11) rezultă :

$$(12)\ f(h) = f\,(x_0) + < (2Cx_0 + p), (h - x_0) > + < C(h - x_0), (h - x_0)>.$$

Cu notaţia

$$(13) \qquad \Delta x = h - x_0$$

rezultă :

$$(14) \qquad S(x) = < (Cx_0 + p + C\,\Delta\,x),\ \Delta x >$$

şi

$$(15) \qquad \mathcal{S}(x) \leqslant [\,\|\,2Cx_0 + p\| + \|\,C\Delta\,x\|]\ \|\,\Delta x\,\|\,.$$

Relaţia (5) permite reducerea numărului de operaţii dacă problema se studiază pentru un număr mare de valori ale lui $\triangle x$.

3. INTERPRETAREA REZULTATELOR

În cea mai generală formulare, F fiind funcţia obiectiv, problema dispatchingului economic se pune în felul următor :

$$(16) \qquad \min F\,(P_1,\ \ldots, P_n, Q_1 \ldots, Q_n)$$

cu restricţiile

$$(16') \qquad (P,\,Q) \in \mathcal{A}$$

$$(16'') \qquad U \in \mathcal{B}$$

$$(16''') \qquad \delta \in \mathcal{C}$$

$$(17) \qquad \Phi\,(P, Q,\ U,\ \delta) = 0$$

P, Q, U, δ fiind vectorii necunoscutelor, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ fiind domeniile generate de mulţimea restricţiilor.

Aşa cum s-a arătat în introducere, o cale de rezolvare a problemei o reprezintă determinarea unui vector P_0, soluţie a problemei (16), după care urmează determinarea unui vector Q_0, soluţie a problemei (18) :

$$\min_{Q \in \mathcal{D}} f(Q), \tag{18}$$

unde $f(Q)$ reprezintă pierderile de putere activă datorită circulaţiei puterilor reactive în reţeaua sistemului electro-energetic, Q vectorul puterilor reactive produse (ce urmează a fi determinate) iar $\mathcal{D} \subset R^n$ domeniul restricţiilor

$$\mathcal{D} = \{Q \mid (Q \in R^n) \,\&\, (AQ \leqslant b)\} \tag{18'}$$

A fiind matricea restricţiilor iar b un vector constant.

Trebuie făcută precizarea că funcţia definită de (18) depinde de fapt atît de variabilele Q cît şi de variabilele P, metodele propuse în literatura de specialitate considerînd însă ca satisfăcătoare ipoteza (18). În plus, funcţia f va fi considerată ca fiind o formă pătratică [4], [14].

Se impune şi o precizare asupra domeniului $\mathcal{D}$. Acesta nu trebuie definit în mod obligatoriu ca în (18'), frontiera sa putînd fi şi o mulţime de hipercuadrice, nu numai de hiperplane, singura condiţie necesară fiind aceea a convexităţii lui.

Cu aceste observaţii, problema devine :

$$\min_{Q \in \mathcal{D}} f(Q) = \min_{Q \in \mathcal{D}} [<Q, CQ> + <p, Q> + \alpha], \tag{19}$$

unde C, p, α, Q au semnificaţiile cunoscute.

Fie $Q_0 \in \mathcal{D}$ un punct astfel încît

$$f(Q_0) = \min_{Q \in \mathcal{D}} f(Q). \tag{20}$$

Să apreciem valoarea lui $\mathcal{S}(Q)$ în jurul lui Q_0. Ordinul de mărime al acestei valori va fi edificator asupra necesităţii rezolvării problemei (18), respectiv (19) : o valoare mică a lui $\mathcal{S}(Q)$ indică inutilitatea practică a determinării unui vector Q_0 soluţie a problemei (18), respectiv (19), un vector Q_1 determinat astfel încît tensiunile în punctele de generare să fie constante şi cît mai aproape de plafonul superior conducînd la o funcţionare apropiată — sau foarte apropiată — de cea optimală.

Mai mult, se poate studia $\mathcal{S}(Q)$ în jurul unui punct $\overline{Q}$, soluţie a problemei mai generale (17). În mod analog, se poate deduce de aici cît de departe trebuie împinsă precizia cerută calculelor de repartiţie optimă.

În baza lui (13) şi (16) vom obţine :

$$f(Q) - f(Q_0) = < (2CQ_0 + p + C\Delta Q), \Delta Q > \quad (21)$$

şi

$$\mathcal{S}(Q) \leqslant [\, \| 2CQ_0 + p \| + C\Delta Q \| \,] \cdot \| \Delta Q \|, \quad (22)$$

unde

$$\Delta Q = Q - Q_0 \quad (22')$$

$$Q \in \mathcal{D}. \quad (22'')$$

În anexa A2 se dă o altă expresie a lui $\mathcal{S}(Q)$, utilă atunci cînd se cunosc valorile proprii ale matricei C.

Inspecţia relaţiilor (21) şi (22) arată că sensibilitatea pierderilor de putere activă din reţeaua sistemului electroenergetic la variaţia puterilor reactive injectate în nodurile sistemului depinde de structura fizică a acestuia (elementele matricei C au un rol covîrşitor în stabilirea ordinului de mărime al lui $\mathcal{S}$ (Q)).

4. REZULTATE EXPERIMENTALE. CONCLUZII

În anexa Al este prezentat un exemplu de calcul. Considerîndu-se două posibilităţi de modificare a vectorului Q, s-au calculat valorile lui $\mathcal{S}$ (Q) şi s-a constatat că pierderile cresc, punctul Q_0 corespunzînd valorii minime a lui $f(Q)$, cu cca 2%, confirmînd astfel rezultatele unor calcule de regimuri efectuate anterior la ISPE.

Relaţiile stabilite permit, în plus, aprecierea valorilor maxime ale lui $\mathcal{S}$ (Q) atunci cînd vectorul Q parcurge frontiera lui $\mathcal{D}$.

Se pot desprinde atunci următoarele concluzii :

a) S-a definit noţiunea de ,,sensibilitate'' a pierderilor de circulaţie la variaţia repartiţiei puterilor reactive.

b) S-au stabilit două tipuri de relaţii matematice cu ajutorul cărora se poate evalua această mărime.

c) Printr-o alegere corespunzătoare a vectorului ΔQ se poate studia influenţa oricărei schimbări a repartiţiei puterilor reactive injectate în noduri asupra pierderilor de circulaţie.

d) Ordinul de mărime al lui $\mathcal{S}(Q)$ este dictat de ordinul de mărime al elementelor matricei C, deci de structura reţelei.

ANEXA A—1

Fie $f: R^n \to R$ o funcţională pe R^n cu valori în R :

$$f(x) = <x, Cx> + <p, x> + K \quad (A1-1)$$

cu restricţia

(Al–1′) $$x \in \mathcal{D}, \quad K \in R,$$

unde x este vectorul variabilelor iar

(Al–1″) $$C = [c_{ij}]_{n\times n}$$

o matrice simetrică pozitiv-definită,

(Al–2) $$\mathcal{D} = \{x \mid (x \in R^n) \,\&\, (Ax \leqslant b)\}$$

o mulţime convexă şi închisă.

Să se calculeze :

(Al–3) $$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

cu condiţia

(Al–3′) $$(x_0 \in \mathcal{D}) \,\&\, [(x_0 + \Delta x) \in \mathcal{D})].$$

Fie α matricea diagonală a valorilor proprii ale lui C :

(Al–4) $$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \alpha_2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Avem atunci :

$$f(x) = < x,\ \alpha\, x > + < p,\ x > + K =$$

$$= \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2 + p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n + K$$

Să calculăm :

$$f(x + \Delta\, x) = [x + \Delta\, x]^T \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{bmatrix} [x + \Delta\, x] + p^T[x + \Delta x] + K$$

indicele superior T indicînd transpoziţia.

După efectuarea operaţiilor, şi scăzînd apoi $f(x)$, rezultă :

(Al–5) $$f(x + \Delta x) - f(x) = < \alpha \Delta x,\ (\Delta x + 2x) > + < p,\ \Delta x) >.$$

Aplicînd norma, obţinem în cele din urmă, înlocuind x cu x_0 :

$$\mathcal{S}(x_0) = <\alpha\Delta x,\ (\Delta x + 2x_0)> + <p,\ \Delta x> \tag{A1–6}$$

$$\mathcal{S}(x_0) \leqslant \| \alpha \cdot \Delta x \| \cdot \| \Delta x + 2x_0 \| + \| p \| \cdot \| \Delta x \| \tag{A1–7}$$

ANEXA A–2

Fie

$$f(Q) = <Q.\ CQ> + <p,\ Q> + \alpha(P) \tag{A2–1}$$

cu

$$Q = [Q_1\ \ Q_2\ \ Q_3\ \ Q_4\ \ Q_5]^T\ \ MVAR \tag{A2–2}$$

vectorul injecţiilor de putere reactivă,

$$C = \begin{bmatrix} 70{,}153 & 62{,}054 & 57{,}881 & 51{,}360 & 30{,}883 \\ 62{,}054 & 112{,}14 & 94{,}920 & 65{,}492 & 39{,}246 \\ 57{,}881 & 94{,}920 & 120{,}67 & 73{,}896 & 44{,}311 \\ 51{,}360 & 65{,}492 & 73{,}896 & 88{,}003 & 53{,}244 \\ 30{,}883 & 39{,}246 & 44{,}311 & 53{,}244 & 76{,}417 \end{bmatrix} \times 10^{-5} MW/MVAR^2 \tag{A2–2'}$$

p un vector cu componente nule şi $\alpha\ (P)$ un scalar exprimînd contribuţia puterilor active la pierderile de transport $f\ (Q)$ şi care este considerat constant în vecinătatea optimumului. (Exemplul de calcul se referă la o reţea cu 6 noduri, dintre care 5 independente, studiată în [4].)

Componentele Q_2, Q_4 şi Q_5 sînt constante, iar soluţia problemei (19) este [4] :

$$Q_0 = [40\quad -65\quad 55\quad -50\quad 20]^T\quad MVAR \tag{A2–3}$$

Trebuie estimat $\mathcal{S}(Q)$ pentru diferiţi vectori ΔQ.
Succesiv se calculează :

$$\| 2CQ_0 + p \| = 0{,}055\ MW/MVAR$$

Considerînd

$$\Delta Q_1 = [10\quad 0 - 10\quad 0\quad 0]^T\quad MVAR \tag{A2–4}$$

rezultă :

$$\| \Delta Q_1 \| = 14\quad MVAR$$

$$\| C\Delta Q_1 \| = 0{,}106\ \ MVAR$$

$$\| 2CQ_0 + p \| \cdot \| \Delta Q_1 \| = 0{,}700\ \ MW$$

$$\mathcal{S}(Q_1) \leqslant 0{,}806\ \ MW \tag{A2–5}$$

şi, cum pentru exemplul din [4] se dădea $f(Q_0) = 27\ MW$, va rezulta o creştere a pierderilor cu numai cel mult 2,99%.

Pentru

$$\Delta Q_2 = [10 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -10]^T\ MVAR \tag{A2 −6}$$

rezultă, în mod asemănător,

$$\mathcal{S}(Q_2) \leqslant 0{,}783\ MW \tag{A2−7}$$

adică o creştere mai mică decît 2,9% din pierderile de transport.

Primită la redacţie la 23 octombrie 1963

SUR LA MINIMISATION DES PERTES DE TRANSPORT DANS LES RÉSEAUX D'ÉNERGIE

(RÉSUMÉ)

Le problème du dispatching économique a suscité, au moins au début des recherches beaucoup de commentaires autour desquels les spécialistes se sont divisés : les adeptes de la méthode des coefficients « B » et, de l'autre partie, ceux de la méthode de J. Carpentier, qui appliquent le théorème de Kuhn et Tucker.

Récemment, le problème fut repris dans le sens de la minimisation des pertes de transport dans le réseau. Comme certains spécialistes soutiennent qu'un tel sort d'optimisation soit superflu, on pose la question de la détermination de la sensibilité des pertes lors des variations des puissances réactives injectées aux nœuds du réseau dont la valeur pourrait donner de riches indications sur « l'aplatissement » des pertes à proximité des régimes stationnaires « normaux » des réseaux d'énergie.

Cette étude se propose d'établir une voie théorique pour déterminer exactement, ou avec une certaine approximation, les variations des pertes de transport lors des variations des puissances réactives injectées aux nœuds du réseau.

BIBLIOGRAFIE

1. ANDRONACHE, H., GRIGORIU, G., *Studiu privind necesarul de instalaţii de reglaj şi compensare în SE*. Studiu IRME 1967.
2. BERGE, CL., CHOUILA-HOURI, *Programmes, jeux et réseaux de transport. Théorie générale des programmes convexes*. Dunod, Paris, 1962.
3. CARPENTIER, J., *Contribution à l'étude du dispatching économique*. Bull. de la Soc. Fr. des Electr., Aout, 1962.
4. CHIRCULESCU, N., *Contribuţii la teoria optimizării regimurilor de funcţionare a sistemelor energetice*. Energetica, *10*, 514–520 (1964).
5. CUENOD, M., *Quelques aspects de l'optimalisation de la répartition de la production d'énergie réactive et active dans un réseau électrique par la méthode des injections*. Bull. Sc. del'AIM., *2*, 37–48. (1967).

6. Dauphin, G., Feingold, D., Spohn, D., *Méthode d'optimisation de la production des groupes d'une réseau électrique*. Bull. Nr. 1 de la Dir. Et. Rech. EDF, octobre, 1966.
7. Dimo Paul, *Analiza nodală a sistemelor electroenergetice,* Editura Academiei, Bucureşti, 1968.
8. Dommel, H., Tinney, W. F., *Optimal power-flow solutions.*
9. Dragomirescu, M., Maliţa, M., *Programarea pătratică,* Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1968.
10. Feingold, D., Spohn, D., *Les problèmes de répartition de puissance dans les réseaux électriques maillés.* RGE, Avril, 1967, p. 681—696.
11. Hajdu, L. P. , Peschon, J., Tinney, W. F., Piercy, D. S., *Optimum load-shedding policy for power-systems.* Pow. App. Syst., **PA 87**, 784—795, March 1968.
12. HaNo, J., Chibo, A., Umezu, D. T., *Reglage optimal de la tension et de la puissance réactive dans les réseaux d'énergie.* CIGRE, 1968 Rapp. 32—03.
13. Kirchmayer, L., *Economic operation of power systems,* John Wiley & Sons, New York, 1958.
14. Markovici, L. M., *Obşciaia formula poteri mocinosti v setiah i vîcislenia edelnîh prisostov poteri.* Elektricestvo, *4* (1962).
15. Peschon, J., Piercy, D. S., Tinney, W. F., Tveit, O., Cuenod, M., *Optimum control of reactive power-flow.* Pow. App. Syst., January 1968.
16. Peschon, J., Piercy, D. S., Tinney, W. F., Tveit, O. J., *Sensitivity in power systems.*Proc. PICA Pittsburg, May 1967.
17. Penescu, C., Ionescu, Vl., Rosinger, E., *Programarea matematică în energetică.* Editura Academiei, Bucureşti, 1968.
18. Săvulescu, C., *L'influence des changements de la structure d'un réseau de distribution sur la valeur des pertes de puissance active.* Journées Internationales des Réseaux de Distribution et de Répartition d'Énergie Electrique, Liège, 12—13 mai 1969.
19. Săvulescu, C., Schiop, Al., *Sur la minimisation des pertes d'énergie par l'optimalisation de la répartition de la production d'énergie réactive dans un réseau électriques.* Conf. Mond. de l'Énergie Moscou, Aout 1968.
20. Smith, H. M., Shih-Young Tong, *Minimizing power transmission losses by reactive volt-amper control.* AEII Paper No.CP — 62—1409.
21. Zollenkopf, K., *Load-flow calculation using loss-minimisation techniques.* Proc. IEE, **115** January 1968.

PROPRIETĂȚI ALE ALGEBRELOR ANALITICE ȘI ALE ALGEBRELOR CVASIANALITICE

DE

OCTAVIAN STĂNĂȘILĂ

Dacă $(X,\ O_X)$ este un spațiu analitic peste un corp valuat complet nediscret k și $x \in X$, atunci există o surjecție de k-algebre $k\{X_1,\ X_n\} \to O_{X,x}$. Inelele-cît de inele de serii convergente se zic algebre analitice. În lucrare sînt caracterizate unele clase de astfel de inele și sînt studiate în detaliu algebrele cvasianalitice (k-algebre A pentru care există un morfism finit de k-algebre $k\{X_1, \ldots, X_n\} \to A$). Acestea din urmă intervin în mod natural în legătură cu schimbarea corpului de bază. Rezultatele principale din capitolul I sînt 2.4, 2.5, 5.2, paragrafele 6 și 7, și teorema 8.1 de normalizare cvasianalitică relativ la un șir de ideale. În capitolul II este dată construcția obiectelor de diferențiale cvasianalitice, unele din rezultate sînt cunoscute dar prezentate din dorința de completitudine a expunerii. Proprietățile 1.7, 1.8, 1.11, 2.7, 3.1, 3.4 sînt noi. În paragraful 4 se dă analogul unor consecințe, binecunoscute în Geometria algebrică, ale criteriului Iacobi de regularitate (4.9, 4.10, 4.14). Capitolul III cuprinde cîteva aplicații geometrice ale rezultatelor din capitolele precedente și cîteva exemple remarcabile de algebre analitice.

CAPITOLUL I

ALGEBRE ANALITICE ȘI CVASIANALITICE

§ 1. Fixăm de acum înainte un corp valuat complet nediscret k și notăm $k_n\{X\} = k\{X_1, \ldots, X_n\}$ inelul de serii convergente în n nedeterminate peste k. Prin algebră analitică (respectiv cvasianalitică) peste k se înțelege orice k-algebră nenulă A pentru care există o surjecție de k-algebre $k\{X\} \to A$ (respectiv un morfism finit de k-algebre $k\ \{X\} \to A$). Din proprietățile inelelor $k_n\{X\}$ rezultă că orice algebră analitică A este inel local noetherian cu corpul rezidual $A/\mathfrak{m}_A$ k-izomorf cu k. Notînd cu $\varepsilon : A \to A/\mathfrak{m}_A \simeq k$ augmentația canonică și cu $i : k \to A$ morfismul structural, avem evident $\varepsilon \circ i = \mathrm{id}$, $i \circ \varepsilon \neq \mathrm{id}$, deci $A = \mathfrak{m}_A \oplus i(k)$. Algebrele

ȘT. CERC. MAT., TOM., 21, NR. 10, P. 1533–1594, BUCUREȘTI, 1969

cvasianalitice sînt inele noetheriene, dar în general numai semilocale. Dacă A este o algebră cvasianalitică peste k și $\mathcal{R}(A)$ este radicalul ei Jacobson, atunci $\dim_k A/\mathcal{R}(A) < \infty$ (căci fie $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r$ idealele maximale distincte din A și $B = k\{X\} \to A$ un morfism finit de k-algebre; cum $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r$ stau peste idealul maximal $\mathfrak{m}_B$ din B, extinderile de corpuri $k \to A/\mathfrak{m}_j$, $1 \leqslant j \leqslant r$, sînt finite, deci morfismul de inele $k \to \prod_{j=1}^{r} A/\mathfrak{m}_j$, este finit și avem $A/\mathcal{R}(A) \simeq \prod_{j=1}^{r} A/m_j$). Rezultă atunci că orice morfism de k-algebre cvasianalitice $A \xrightarrow{\varphi} B$ este semilocal. În adevăr, pentru orice ideal maximal $\mathfrak{n}$ din B, $\varphi^{-1}(\mathfrak{n})$ este ideal maximal căci $\dim_k B/\mathfrak{n} < \infty$, deci morfismul compus $k \to A/\varphi^{-1}(\mathfrak{n}) \to B/\mathfrak{n}$ este finit și cum $B/\mathfrak{n}$ este corp, $A/\varphi^{-1}(\mathfrak{n})$ este corp. Dar atunci $\varphi(\mathcal{R}(A)) \subset \varphi(\varphi^{-1}(\mathfrak{n})) \subset \mathfrak{n}$, adică $\varphi(\mathcal{R}(A)) \subset \mathcal{R}(B)$. În cele ce urmează vom nota **A**$/k$ (resp. **QA**$/k$) categoria algebrelor analitice (resp. cvasianalitice) peste k, avînd ca morfisme homomorfismele de k-algebre. Evident, k este obiect nul în categoria **A**$/k$, nu și în **QA**$/k$.

Dacă $(A, \mathfrak{m}_A)$ este o k-algebră locală noetheriană și $x = (x_1, \dots, x_n)$ un sistem de n elemente din idealul maximal m_A atunci morfismul de k-algebre $k[X_1, \dots, X_n] \to A$ care transformă X_i în $x_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ se prelungește unic la un morfism de k-algebre între completate radicale $k[[X_1, \dots, X_n]] \to \hat{A}$. Se poate întîmpla ca diagrama:

$$\begin{tikzcd}
k\{X_1, \dots, X_n\} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & k[[X_1, \dots, X_n]] \arrow[d] \\
A \arrow[r] & \hat{A}
\end{tikzcd}$$

să nu se închidă printr-un k-morfism $k\{X_1, \dots, X_n\} \to A$. Dacă însă A este o algebră analitică avem izomorfismul de k-spații vectoriale [10]:

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(k\{X_1, \dots, X_n\}, A) \xrightarrow{\sim} \underbrace{\mathfrak{m}_A \times \dots \times \mathfrak{m}_A}_{n \text{ ori}} f \leadsto (f(X_j))_{1 \leqslant j \leqslant n}$$

Analog, vom arăta în § 7 (teorema 7.1) că pentru orice $A \in$ **QA**$/k$, morfismul canonic

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(k\{X_1, \dots, X_n\}, A) \to \underbrace{\mathcal{R}(A) \times \dots \times \mathcal{R}(A)}_{n \text{ ori}} \quad \varphi \leadsto (\varphi(X_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$$

este bijectiv. O consecință imediată a acestui rezultat este existența limitelor inductive finite în categoriile **A**$/k$, **QA**$/k$ și comutarea acestora cu trecerea la completat (în topologia radicală).

Se știe că studiul algebrelor analitice este intensiv utilizat în geometria analitică locală. Dăm cîteva argumente care justifică studiul algebrelor cvasianalitice.

1.1. În cazul cînd k este corp nearchimedian, în definirea noțiunii de spațiu analitic rigid (după Tate [31]) o construcție fundamentală este considerarea spectrului maximal al unei algebre afinoide (un inel cît al unui inel de serii restrînse, convergente în polidiscul unitate). Fibrele spațiilor analitice rigide se dovedesc a fi, conf. [5], algebre cvasianalitice locale. În cele ce urmează nu ne vom limita la studiul algebrelor cvasianalitice locale fie și pentru faptul că în categoria acestora nu există sume fibrate.

1.2. Fie $(X, \mathcal{O}_X)$ un spațiu analitic peste un corp valuat complet. Fixînd $x \in X$, în mulțimea perechilor $(U, \mathcal{F})$ formate dintr-o vecinătate deschisă U a lui x și un $\mathcal{O}_U$-Modul $\mathcal{F}$ se introduce următoarea relație de echivalență : $(U, \mathcal{F}) \sim (V, \mathcal{G}) \rightleftarrows$ există o vecinătate W a lui x cu $W \subset U \cap V$ și $\mathcal{F}|_W = \mathcal{G}|_W$. Clasele de echivalență respective le numim germeni de module în x pe X și ele se organizează în mod natural ca o categorie.

Analog se definește categoria germenilor de algebre în x pe X.

Evident, functorul $(U, \mathcal{F}) \rightsquigarrow \mathcal{F}_x$ stabilește echivalența dualei categoriei germenilor de Module coerente în x pe X cu categoria $\mathcal{O}_x$-modulelor analitice. Functorul $(U, \mathcal{A}) \to A_x (x \in X)$ stabilește o *echivalență între duala categoriei germenilor de algebre finite pe X și categoria* **QA**/k. Pentru a stabili acest fapt este suficient să arătăm că dacă A este o $\mathcal{O}_x$-algebră cvasianalitică (morfismul $\mathcal{O}_x \to A$ fiind finit), atunci există o vecinătate U a lui x și o $\mathcal{O}_U$-algebră finită (coerentă ca $\mathcal{O}_U$-Modul) $\mathcal{A}$ astfel încît $\mathcal{A}_x \simeq A$. Or, considerînd o prezentare finită a lui $A : \mathcal{O}_x^p \to \mathcal{O}_x^q \to A \to 0$, u se ridică pe o vecinătate V a lui $x : \mathcal{O}_X^p|_V \xrightarrow{u} \mathcal{O}_X^q|_V$ și luăm $\mathcal{F} = \operatorname{Coker} u$. Evident, $\mathcal{F}$ este un $\mathcal{O}_V$-modul cu $\mathcal{F}_x \simeq A$. Cum $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathcal{F}$ este coerent, există o vecinătate a lui x $W \subset V$ și un homomorfism $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathcal{F}|_W \to \mathcal{F}|_W$ al cărui germen în x se identifică cu înmulțirea $A \otimes_{\mathcal{O}_x} A \to A$ a $\mathcal{O}_x$-algebrei A ; există atunci o vecinătate $U \subset W$ a lui x în care homomorfismul de sus înzestrează $\mathcal{A} = \mathcal{F}|_U$ cu o structură de $\mathcal{O}_U$-algebră.

1.3. În legătură cu schimbarea corpului de bază apar în mod natural algebre cvasianalitice. Astfel, dacă $k \to K$ este o extindere finită de corpuri valuate complete, valuarea lui K prelungind pe cea a lui k, atunci $K\{X_1, \ldots, X_n\} \in$ **QA**/k. În particular, $\mathbf{C}\{X_1, \ldots, X_n\}$ este o algebră cvasianalitică reală.

Exemplul 1.4. Așadar, $K\{X\}$ este o algebră cvasianalitică peste k. Există însă algebre cvasianalitice peste k care nu sînt de această formă : fie k un corp valuat complet neperfect de caracteristică p și $\alpha \in k$ astfel încît $\alpha^{1/p} \notin k$. Inelul $A = k\{X\} [(X + \alpha)^{1/p}]$ este subinel în închiderea algebrică a corpului de fracții al lui $k\{X\}$ și este și o k-algebră finită peste $k\{X\}$. Cum $k\{X\}$ este inel henselian și A este integru, A rezultă o k-algebră cvasianalitică locală, de corp rezidual $K = k[\alpha^{1/p}]$ (căci există o surjecție canonică de k-algebre $A \to K$, $X \rightsquigarrow 0$). Se vede imediat că nu există nici un morfism $K \xrightarrow{\theta} A$ compatibil cu morfismul structural $k \to A$ al lui A și cu augmentația canonică $A \to K$, deci A este exemplul dorit. (Dacă ar exista un astfel de k-morfism θ, notăm $t = \theta(\alpha^{1/p})$, $t = S_0(X) + S_1(X)(\alpha + X)^{1/p} + \ldots + S_{p-1}(X)(\alpha + X)^{p-1/p}$, atunci din compatibilitatea cu augmentaţia $A \to K$ ar rezulta $S_0(0) = S_2(0) = = \cdots = Sp-1\ (0)=0$ şi $S_1(0) = 1$ şi egalitatea $t^p = \alpha$ conduce atunci la o contradicţie).

§ 2. Amintim că un morfism local de inele locale noetheriene $\varphi : A \to B$ se zice cvasifinit dacă există $r \geqslant 1$ astfel încît $\mathfrak{m}_B^r \subset \mathfrak{m}_A B$ ($\mathfrak{m}_A$, $\mathfrak{m}_B$ idealele maximale respective) sau echivalent, $\mathfrak{m}_A B$ este ideal $\mathfrak{m}_B$ — primar, or $\dim_k B/\mathfrak{m}_A B < \infty$. Observăm că incluziunea canonică $k\{X\} \to k[[X]]$ este cvasifinită, deşi $k[[X]]$ nu este $k\{X\}$-modul de tip finit. Pentru algebre analitice însă, orice morfism cvasifinit este finit [10]; acest rezultat este esenţial echivalent cu teorema de pregătire a lui Weierstrass.

În adevăr, dacă $A \xrightarrow{\varphi} B$ este un morfism în categoria $\mathbf{A}/k$, atunci elementele $z_1, \ldots, z_r \in B$ generează B ca A-modul $\rightleftarrows$ clasele lor generează $B/\mathfrak{m}_A B$ peste k, căci în acest caz φ rezultă cvasifinit, deci finit şi punînd $\mathfrak{b} = \sum_{i=1}^{r} z_i B$, rezultă $B = \mathfrak{b} + \mathfrak{m}_A B$ adică $\mathfrak{m}_A B/\mathfrak{b} = B/\mathfrak{b}$ şi lema lui Nakayama dă $\mathfrak{b} = B$.

Iată cum rezultă atunci teorema lui Weierstrass de pregătire : fie $f \in k_n\{X\}$ o serie regulată în raport cu X_n şi s ordinul lui $f(0, \ldots, 0, X_n)$. Considerăm morfismul $A = k_{n-1}\{X\} \to k_n\{X\} \to k_n\{X\}/f \cdot k_n\{X\} = B$ şi evident $B/\mathfrak{m}_A B \simeq k[X_n]/X_n^s k[X_n]$ iar clasele lui $1, X_n, \ldots, X_n^{s-1}$ generează $B/\mathfrak{m}_A B$ peste k, deci clasele lui $1, X_n, \ldots, X_n^{s-1}$ generează B ca A-modul, regăsind forma clasică a teoremei de pregătire din inelul $k_n\{X\} = k\{X_1, \ldots, X_n\}$. Amintim că o demonstraţie a teoremei de pregătire a lui Weierstrass a fost dată de G. Vrănceanu [32].

În § 6 vom extinde teorema de pregătire sub forma de mai sus şi la cazul algebrelor cvasianalitice. Dăm acum cîteva consecinţe ale teoremei de pregătire.

PROPOZIŢIA 2.1. *Fie* $(A, \mathfrak{m}_A)$ *o k-algebră locală. Sînt echivalente afirmaţiile :*

(a) *A este k-algebră analitică artiniană ;*

(b) *A este k-algebră analitică şi* $\dim_k A < \infty$;

(c) *A este inel artinian şi corpul său rezidual este k-izomorf cu k.*

Demonstraţie. (a) ⇒ (b). Morfismul $k \to A$ este evident cvasifinit (căci A fiind inel artinian, avem $\mathfrak{m}_A^r = 0$ cu $r \geqslant 1$ convenabil) şi teorema de pregătire arată că $\dim_k A < \infty$.

(b) ⇒ (c). Fie $\mathfrak{p}$ un ideal prim în A. Extinderea de inele integre $k \to A/\mathfrak{p}$ este finită, deci întreagă, deci $A/\mathfrak{p}$ este corp, adică $\mathfrak{p}$ este ideal maximal.

(c) ⇒ (a). Fie $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{m}_A$ elemente ale căror clase în $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$ formează o bază a acestui k-spaţiu vectorial. Morfismul de k-algebre $k[X_1, \ldots, X_n\} \to A$ care transformă X_i în x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ se prelungeşte la un morfism $k\{X_1, \ldots, X_n\} \to A$ (căci A fiind inel artinian, este complet în topologia $\mathfrak{m}_A$-adică), care este surjectiv căci aşa este graduatul său relativ la filtrările asociate idealelor maximale. Echivalenţa afirmaţiilor (a), (b) are loc şi pentru algebre cvasianalitice.

COROLARUL 2.2. *Orice morfism întreg* $\varphi : A \to B$ din $\mathbf{QA}/k$ *este finit.*

Demonstraţie. Extinderea de inele $k \to A/\mathcal{R}(A) \to B/\mathcal{R}(A)\,B$ este întreagă, deci inelul $B/\mathcal{R}(A)\,B$ este artinian şi $\dim_k B/\mathcal{R}(A)\,B < \infty$, adică morfismul $A/\mathcal{R}(A) \to B/\mathcal{R}(A)\,B$ este finit, deci φ este cvasifinit şi conform teoremei de pregătire, φ este finit.

COROLARUL 2.3. *Fie* $\varphi : A \to B$ *un morfism finit şi injectiv în categoria* $\mathbf{A}/k$. *Topologia* $\mathfrak{m}_A$*-adică pe* A *coincide cu restricţia la* A *a topologiei* m_B*-adică a lui* B. *În particular, morfismul* $\hat{\varphi} : \hat{A} \to \hat{B}$ *este injectiv.*

Demonstraţie. Înzestrăm B cu topologia $\mathfrak{m}_A$-adică. Datorită lemei Artin-Rees este suficient să arătăm că cele două topologii definite pe B coincid, adică să arătăm că există $r \geqslant 1$ astfel ca $\mathfrak{m}_B^r \subset \mathfrak{m}_A B \subset \mathfrak{m}_B$. Dar morfismul φ este local, iar morfismul $k \to B/\mathfrak{m}_A B$ este finit, deci conf. prop. 2.1 inelul $B/\mathfrak{m}_A B$ este artinian şi $\mathfrak{m}_A B$ rezultă un ideal $\mathfrak{m}_B$-primar.

PROPOZIŢIA 2.4. *Orice inel de serii convergente este obiect proiectiv în categoria* $\mathbf{A}/k$.

Demonstraţie. Fie $A \xrightarrow{\varphi} B$ un epimorfism oarecare în $\mathbf{A}/k$ şi $u : k\{X_1, \ldots, X_n\} = k\{X\} \to B$ un morfism oarecare. Din diagrama comutativă în $\mathbf{A}/k$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & B \arrow[d] \\
k \arrow[r, shift left, "\psi"] & B/\mathfrak{m}_A B \arrow[l, shift left, "\varepsilon"]
\end{tikzcd}$$

rezultă ψ epimorfism şi cum $\varepsilon \circ \psi = \mathrm{id}$, ψ este izomorfism, deci $\mathfrak{m}_A B = \mathfrak{m}_B$, deci $\mathfrak{m}_A \cdot B/\mathrm{Im}\ \varphi = B/\mathrm{Im}\ \varphi$ şi cum φ este cvasifinit, el este finit şi lema lui Nakayama arată că φ este surjectiv. Fie atunci $x_1, \ldots, x_n \in A$ astfel încît $\varphi(x_i) = u(X_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, şi fie v unicul morfism de k-algebre $k\{X\} \to A$ pentru care $v(X_i) = x_i$. Morfismele $\varphi \circ v$ şi u coincid pe $k[X_1, \ldots, X_n]$ care este mulţime densă în $k\{X\}$, deci B fiind separat, rezultă $\varphi \circ v = u$. Reţinem totodată că în categoria $\mathbf{A}/k$, epimorfismele coincid cu surjecţiile de k-algebre.

TEOREMA 2.5. *Fie* A *o algebră analitică peste* k. *Avem următoarele egalităţi* :

(1) $\min\{n \mid$ *există o surjecţie* $k\{X_1 \ldots X_n\} \to A\} = \dim_k \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$

(ii) $\min\{n \mid$ *există un morfism finit* $k\{X_1 \ldots X_n\} \to A\} = \dim A$.

Egalitatea (ii) are loc şi pentru A *cvasianalitică.*

Demonstraţie. (i) Fie $p = \dim_k \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$ şi $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p$ o bază a k-spaţiului vectorial $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$. Lema lui Nakayama arată că $x_1, \ldots, x_p$ este un sistem minimal de generatori pentru $\mathfrak{m}_A$. Cum $\mathfrak{m}_A = \sum_{i=1}^{p} X_i A$, morfismul $k\{X_1, \ldots, X_p\} \to A$ $(X_i \rightsquigarrow x_i)$ este surjectiv (din demonstraţia prop. 2.4). Apoi, dacă avem o surjecţie $k\{X_1, \ldots, X_n\} \to A$, atunci m_A este generat de imaginile lui X_i, deci $n \geqslant \dim_k \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$.

(ii) Fie $A \in \mathbf{QA}/k$ şi $q = \dim A$. Conform lemei de normalizare, există un morfism finit şi injectiv $k\{X_1, \ldots, X_q\} \to A$ şi pe de altă parte, dacă $k\{X_1, \ldots, X_n\} \to A$ este un morfism finit de k-algebre, atunci dim $k\{X_1, \ldots, X_n\} = n \geqslant \dim A$.

Fie A o k-algebră analitică şi $\mathfrak{m}$ idealul ei maximal, $p = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Dacă $(x_1, \ldots, x_p)$ este un sistem minimal de generatori pentru $\mathfrak{m}$, am văzut că există o surjecţie $k\{X_1, \ldots, X_p\} \xrightarrow{\varphi} A$ care transformă X_i în x_i. Fie $\mathfrak{a} = \operatorname{Ker} \varphi$. Luînd un alt sistem minimal de generatori pentru $\mathfrak{m}$ se obţine o altă surjecţie $k\{X_1, \ldots, X_p\} \xrightarrow{\psi} A$ de k-algebre şi fie $\mathfrak{b} = \operatorname{Ker} \psi$. Atunci A-modulele $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ şi $\mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2$ sînt izomorfe, adică A-modulul $T(A) = \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ depinde numai de A. În adevăr, folosind propoziţia 2.4 se construiesc morfisme de k-algebre $k\{X_1, \ldots, X_p\} \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} k\{X_1, \ldots, X_p\}$ astfel încît $\psi \circ u = \varphi$, $\varphi \circ v = \psi$, $u(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{b}$, $v(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a}$ şi în plus, pentru orice $z \in \mathfrak{a}$, $vu(z) - z \in \mathfrak{a}$, iar dacă $t \in \mathfrak{b}$, $uv(t) - t \in \mathfrak{b}$. Deci u, v, induc izomorfisme reciproce între $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ şi $\mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2$.

COROLAR 2.6. *Fie* $A \in \mathbf{A}/k$; *A este inel local regulat* $\rightleftarrows T(A) = 0 \rightleftarrows$ *A este inel de serii convergente.*

Demonstraţie. Alegem un sistem minimal de generatori $x_1, \ldots, x_p$ $(p = \dim_k \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2)$, deci avem o surjecţie $k\{X_1, \ldots, X_p\} \xrightarrow{\varphi} A$ care transformă X_i în x_i, $1 \leqslant i \leqslant p$. Dacă A este regulat, atunci $p = \dim A$ şi dacă cumva $\mathfrak{a} = \operatorname{Ker} \varphi$ ar fi nenul, atunci $\dim A < p$ (căci $k\{X_1, \ldots, X_p\}$ este integru), absurd. Aşadar $T(A) = 0$. Reciproc, dacă $T(A) = 0$, atunci $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$ şi conf. lemei lui Krull $\mathfrak{a} = 0$, deci φ este izomorfism şi A rezultă regulat.

Observaţie. Fie A un inel de serii convergente şi $x \in \mathfrak{m}_A^2$. Atunci algebra analitică $B = A/xA$ nu este regulată. Altfel, am avea din $B = n - 1$ (căci inelul A este integru şi elementul x face parte dintr-un sistem de parametri).

Cum $\mathfrak{m}_B^2 = \mathfrak{m}_A^2 + xA/xA$, avem şirul exact de k-spaţii vectoriale

$$0 \to \mathfrak{m}_A^2 + xA/\mathfrak{m}_A^2 \to \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 \to \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2 \to 0,$$

deci $\dim_k \mathfrak{m}_A^2 + xA/\mathfrak{m}_A^2 = \dim_k \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 - \dim_k \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2 = n - (n - 1) = 1$,

folosind ipoteza că A, B sînt inele regulate. Dar $x \in \mathfrak{m}_A^2$, absurd. Astfel, inelul local în origină al curbei analitice $Y^2 - X^3 = 0$ în $\mathbf{C}^2$ este $\mathbf{C}\{X, Y\}/(Y^2 - X^3)$ şi nu este regulat, deci origina este punct singular pe curba $Y^2 - X^3 = 0$.

COROLARUL 2.7. *Fie* $A = k\{X\}/\mathfrak{a}$ *o algebră analitică cu idealul* $\mathfrak{a}$ *generat de elemente* $f_1, \ldots, f_p \in \mathfrak{m}$ *(m-idealul maximal din* $k\{X\} = k\{X_1, \ldots, X_n\}$*). Dacă rangul matricei* $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial X_j}(0)\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ *este p, atunci A este izomorf cu un inel de serii convergente în $n - p$ nedeterminate.*

Demonstrație. Cum $(X_j \bmod \mathfrak{m}^2)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ formează bază pentru $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ peste k și cum pentru orice $f \in \mathfrak{m}$, avem $f \bmod \mathfrak{m}^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_j}(0) . X_j \bmod \mathfrak{m}^2$, rezultă că: $\operatorname{rang} \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(0) \right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} = \dim_k a + \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^2 = n - \dim \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 \leqslant n - \dim A = h(\mathfrak{a})$ (căci A este catenar). Dar din ipoteză, $p \leqslant h(\mathfrak{a})$ și cum $\mathfrak{a}$ este generat de p elemente, o teoremă a lui Krull arată că $h(\mathfrak{a}) = p$, deci $\dim_k \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 = \dim A$, deci A este regulat, de dimensiune $n - p$, deci conf. corolarului 2.6, $A \simeq k\{X_1, \ldots, X_{n-p}\}$.

§ 3. Dăm cîteva proprietăți privind platitudinea și netezimea morfismelor de algebre analitice și cvasianalitice.

Cum orice morfism din $\mathbf{QA}/k$ este semilocal, el este plat $\rightleftarrows$ este fidel plat. Este bine cunoscut că dacă

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d] \\
A' \arrow[r, "\varphi'"'] & B'
\end{tikzcd}$$

este o diagramă cocarteziană în categoria $\mathbf{QA}/k$ și φ este plat, atunci φ' este plat și reciproc, de îndată ce i este plat. De asemenea, dacă $\varphi : A \to B$ este un morfism finit în $\mathbf{QA}/k$ și $\mathfrak{a}$ este un ideal din A generat de un șir B-regulat $x_1, \ldots, x_p \in \mathcal{R}(A)$ (adică x_i este nondivizor al lui zero în A-modulul $B \Big| \sum_{j=1}^{i=1} x_j B$ pentru $i = 1, \ldots, p$), atunci în diagrama canonică:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
A/\mathfrak{a} \arrow[r, "\varphi'"'] & B/\mathfrak{a}B ,
\end{tikzcd}$$

φ este plat $\rightleftarrows$ φ' este plat.

Importanța noțiunii de platitudine este reliefată printre altele de următoarele fapte:

Observații 3.1. 1) Incluziunea canonică $k[X] = k[X_1, \ldots, X_n] \to k\{X\} = k\{X_1, \ldots, X_n\}$ este morfism plat, deoarece este compunerea $k[X] \to k[X]_{(X)} \xrightarrow{i} k\{X\}$ de morfisme plate (i este fidel plat). Apoi, incluziunile canonice $k\{X\} \to k[[X]]$, $k\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}[X_n] \to k\{X\}$, $k\{X_1 \ldots, X_{n-1}\} \to k\{X\}$ sînt de asemenea plate.

2) Fie (X, O_X) un spațiu inelat și A fasciculul flasc de inele pe X $U \rightsquigarrow \prod_{x \in U} O_{X,x}$ (U deschis în X). Evident, avem un morfism injectiv de fascicule $\theta : O_X \to \mathcal{A}$, iar asocierea $(X, O_X) \rightsquigarrow \mathcal{A}$ este functorială.

În [23], Malgrange a arătat că teorema lui Oka de coerență a fascicului $\mathcal{O}_{\mathbf{E}^n}$ ($\mathbf{E}^n = k^n$ cu structura uzuală de varietate analitică) este esențial echivalentă cu platitudinea morfismului injectiv de k-algebre $\theta_n : k\{X_1, \ldots, X_n\} \rightarrow \mathcal{A}_n$, unde $\mathcal{A}_n = \underset{\underset{U}{\longrightarrow}}{\lim} \prod_{x\in U} \mathcal{O}_{\mathbf{E}^n, x}$ (U parcurgînd vecinătățile lui o în $\mathbf{E}^n$), iar θ_n asociază oricărui germen de funcție analitică f_U, clasa familiei dezvoltărilor Taylor ale lui f în punctele lui U.

3) În Geometria analitică, o serie de proprietăți ale unui morfism plat de spații analitice se reduc la proprietăți ale fibrelor lui.

PROPOZIŢIA 3.2. *Fie* $\varphi : k\{X\} = k\{X_1, \ldots, X_n\} \rightarrow A$ *un morfism finit de k-algebre și* A *o algebră cvasianalitică locală;* φ *este plat* $\rightleftarrows$ $(X_1, \ldots, X_n)$ *este un șir A-regulat.*

Demonstrație. Această propoziție este cunoscută în condiții mai generale, dar dăm o demonstrație în care ținem cont de natura concretă a inelelor din enunț. Dacă $(X_1, \ldots, X_n)$ este un șir A-regulat de elemente, atunci idealul generat de $X_1, \ldots, X_n$ este chiar idealul maximal m din $k\{X\}$ și avem diagrama cocarteziană în $\mathbf{QA}/k$:

$$\begin{tikzcd}
k\{X\} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & A \arrow[d] \\
k \arrow[r, "\varphi'"'] & A/_{mA}
\end{tikzcd}$$

și cum φ' este plat, φ rezultă plat. Reciproc, fie φ plat; considerăm morfismele canonice $k\{X_1, \ldots, X_n\} \underset{j}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} k\{X_2, \ldots, X_n\}$, cu $\Pi \circ j = \mathrm{id}$.

Diagrama :

$$\begin{tikzcd}
k\{X_1, \ldots, X_n\} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & A \arrow[d, "p"] \\
k\{X_2, \ldots, X_n\} \arrow[r, "\varphi^* = p \supset \varphi \circ j"'] & A/_{\varphi(x_1)A}
\end{tikzcd}$$

cu π, p surjecții canonice este cocarteziană în $\mathbf{AQ}/_k$ căci așa sînt diagramele

$$\begin{tikzcd}
k\{X_1\} \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
k \arrow[r] & A/_{x_1A},
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
k\{X_1\} \arrow[r] \arrow[d] & k\{X_1, \ldots, X_n\} \arrow[d] \\
k \arrow[r] & k\{X_2, \ldots, X_n\}
\end{tikzcd}$$

Cum morfismul φ este finit și plat și cum proprietățile de finitudine și platitudine se păstrează prin schimbarea bazei în categoria $\mathbf{QA}/_k$, rezultă că φ^* este finit şi plat. Apoi pentru orice $i = 1, \ldots, n$ avem diagrama comutativă :

$$\begin{tikzcd}
k\{X_1, \ldots, X_n\} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
k\{X_i, \ldots, X_n\} \arrow[r, swap, "\underbrace{\varphi^{*\cdots*}}_{i-1 \text{ ori}}"] & A \Big/ \sum\limits_{j=1}^{i-1} \varphi(X_j) A
\end{tikzcd}$$

şi cum $\underbrace{\varphi^{*\cdots*}}_{i-1 \text{ ori}}$ este plat, atunci $A/\sum\limits_{j=1}^{i-1} (X_j)A$ este $k\{X_1, \ldots, X_n\}$ – modul liber, deci $\varphi(X_i)$ este nondivizor al lui zero în $A/\sum\limits_{j=1}^{i-1} \varphi(X_j)A$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$.

3.3. Fie $\varphi : A \to B$ un morfism de algebre cvasianalitice locale. Amintim că el se zice neted („lisse”) dacă pentru orice A-algebră C şi orice ideal nilpotent $\mathfrak{c}$ din C, aplicaţia canonică $\mathrm{Hom}_A(B, C) \to \mathrm{Hom}_A(B, C/\mathfrak{c})$ este surjectivă.

Transcriind caracterizarea dată în [10] pentru morfisme netede de spaţii analitice, se deduce echivalenţa următoarelor afirmaţii :

(a) φ este neted;

(b) φ este plat, şi $B/\mathfrak{m}_A B$ este inel local regulat;

(c) $\hat{B}$ este izomorf ca $\hat{A}$ -algebră cu un inel de forma $\hat{A}[[X_1, \ldots, X_n]]$ (Completări în topologii radicale);

(d) Pentru orice diagramă comutativă :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
C \arrow[r] & C/\mathfrak{c}
\end{tikzcd}$$

cu C algebră cvasianalitică locală artiniană şi $\mathfrak{c}^2 = 0$, există un morfism de inele $B \to C$ care o menţine comutativă.

Am văzut că în categoria $\mathbf{A}/k$ există obiect nul, k, iniţial şi final în acelaşi timp. Are deci sens să vorbim de morfismul nul între orice două algebre analitice. Notînd $A\{X_1, \ldots, X_n\} = A_n\{X\} = A \amalg_k k\{X_1, \ldots, X_n\}$, morfismele $A \to A\{X_1, \ldots, X_n\}$ şi $k\{X_1, \ldots, X_n\} \to A\{X_1, \ldots, X_n\}$ au inverse la stînga, deci sînt injective.

PROPOZIŢIA 3.4. *Fie $A \in \mathbf{A}/k$; k-algebra analitică $A\{X_1 \ldots X_n\}$ este izomorfă cu o A-subalgebră a lui $A[[X_1, \ldots, X_n]]$.*

Demonstraţie. Fie $A = k\{Y\}/\mathfrak{a}$, deci $A\{X\} = k\{X, Y\}/\mathfrak{a}k\{X, Y\}$. Avem diagrama canonică :

$$\begin{tikzcd}
k\{X, Y\} \arrow[r] \arrow[d] & k\{X, Y\}/\mathfrak{a}k\{X, Y\} = A\{X\} \arrow[d, dashed, "\theta"] \\
k\{Y\}[[X]] \arrow[r] & k\{Y\}/\mathfrak{a}[[X]] = A[[X]]
\end{tikzcd}$$

care se închide printr-un morfism local de A-algebre θ, al cărui completat în topologiile radicale coincide cu izomorfismul canonic

$$k[[X, Y]]/_{\mathfrak{a}k[[X, Y]]} \to (k[[Y]]/_{\mathfrak{a}k[[Y]]})\ [[X]],$$

care asociază unei serii $S(X, Y)$ mod $\mathfrak{a}k[[X, Y]]$, $S(X, Y) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} S_\alpha(Y) X^\alpha$, seria $\sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} (S_\alpha(Y) \bmod \mathfrak{a}k[[Y]]) X^\alpha$. Aşadar, θ este injectiv. Se poate verifica, în plus, că inelul de polinoame $A[[X]]$ este dens în $A\{X\}$. Evident, dacă $A = k\{Y_1, \ldots, Y_m\}$, atunci $A\{X_1, \ldots, X_n\} \simeq k\{X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m\}$.

Dacă A, B sînt algebre analitice, atunci afirmaţiile (a)—(d) date mai sus sînt echivalente şi cu faptul următor :

(e) B este izomorf ca A-algebră cu $A\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Intregul n care apare în afirmaţiile (c), (e) este acelaşi şi egal cu dim $B/\mathfrak{m}_A B$.

COROLARUL 3.5. (i) *Orice morfism neted de algebre analitice este injectiv.*

(ii) *O k-algebră analitică A este regulată* $\rightleftarrows$ *morfismul ei structural este neted.*

(iii) *Dacă $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ sînt morfisme de algebre cvasianalitice locale cu ψ plat şi $\psi\varphi$ neted, atunci φ este neted.*

(iv) *Dacă $A \xrightarrow{\varphi} B$ este un morfism neted în* $\mathbf{A}/k$, *A este regulată* $\rightleftarrows$ *B este regulată.*

Demonstraţie. (i) şi (ii) rezultă din echivalenţa condiţiilor (a) şi (e) de mai sus.

(iii) Cum $\psi\varphi$ este plat şi ψ este fidel plat, rezultă φ plat. Din diagrama cocarteziană în $\mathbf{Q}A/k$:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & C \arrow[d] \\
B/\mathfrak{m}_A B \arrow[r, "\psi'"'] & C/\mathfrak{m}_A C
\end{tikzcd}$$

rezultă ψ' plat şi cum $C/\mathfrak{m}_A C$ este inel regulat (conf. echivalenţei (a) $\Leftrightarrow$ (b)), avem dim coh $B/\mathfrak{m}_A B \leqslant$ dim coh $C/\mathfrak{m}_A C$, deci conf. teoremei Hilbert-Serre, inelul $B/\mathfrak{m}_A B$ este regulat.

(IV) rezultă imediat aplicînd (ii) şi (iii).

Observaţie. Dacă A, B sînt algebre analitice în care una din ele este regulată, atunci se deduce imediat că dim $A \sqcup B$ = dim A + dim B. În adevăr, fie $B \simeq k_n\{X\}$, deci n = dim B. Considerăm morfismul canonic neted $A \xrightarrow{\varphi} A_n\{X\} = A \sqcup B$. Dacă dim $A = p$, există un morfism finit şi injectiv $k_p\{Y\} \xrightarrow{u} A$ şi avem diagrama cocarteziană în $\mathbf{A}/k$

$$\begin{tikzcd}
k\{Y\} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\
k\{X, Y\} \arrow[r, "v"'] & A \sqcup B
\end{tikzcd}$$

și v rezultă finit, deci $B \simeq A \otimes_{k\{X\}} k\{X, Y\}$. Cum i este plat și u este injectiv, v rezultă injectiv, deci $\dim A \sqcup B = p + n = \dim A + \dim B$. Avem însă mai general:

PROPOZIȚIA 3.6. *Pentru orice* $A, B \in \mathbf{QA}/k$, *avem* $\dim A \sqcup B = \dim A + \dim B$.

Demonstrație. Alegem morfisme finite și injective $k\{X\} \to A$, $k\{Y\} \to B$ deci și morfismul finit $k\{X, Y\} \to A \sqcup B$. Vom arăta că acest morfism trecut la completat este injectiv, deci el însuși este injectiv. Or, $k\widehat{\{X, Y\}} = k[[X, Y]]$ și $\widehat{A \sqcup B} = \hat{A} \hat{\otimes}_k \hat{B}$ și cum morfismele $k[[X]] \to \hat{A}$, $k[[Y]] \to \hat{B}$ deduse din cele de mai sus sînt încă finite și injective, ne reducem la cazul formal. Fie deci $\varphi : k[[X]] \to A$, $\psi : k[[Y]] \to B$ morfisme finite și injective. Obținem atunci morfismele injective $k[[X]]/\varphi^{-1}(\mathfrak{m}^p) \to A/\mathfrak{m}^p$, $k[[Y]]/\psi^{-1}(\mathfrak{n}^q) \to B/\mathfrak{n}^q$, $\mathfrak{m} = R(A)$, $\mathfrak{n} = R(B)$. Astfel, pentru orice $p, q \geqslant 0$, avem morfismele injective $k[[X]]/\varphi^{-1}(\mathfrak{m}^p) \otimes_k k[[Y]]/\psi^{-1}(\mathfrak{n}^q) \to A/\mathfrak{m}^p \otimes_k B/\mathfrak{n}^q$. Cum topologiile radicale pe $k[[X]]$ și $k[[Y]]$ sînt echivalente cu topologiile induse de pe A, B respectiv, prin trecere la $\varinjlim\limits_{p,q}$ obținem o aplicație injectivă $k[[X, Y]] \to A \hat{\otimes}_k B$ care coincide cu cea dedusă din φ și ψ.

§ 4. Dacă $A \to B$ este un morfism surjectiv în $\mathbf{QA}/k$ și $\mathfrak{a}$ nucleul său, atunci notăm pentru orice $p \geqslant 0$ $B_\varphi(\mathrm{p}) = A/\mathfrak{a}^{p+1}$, $N_\varphi = \mathrm{Ker}\,(B(1) \to B(0))$. $N = N_\varphi$ este un $B = A/\mathfrak{a}$ – modul de tip finit izomorf cu a/a^2, care relativizează într-un anumit sens noțiunea de spațiu tangent Zariski. (Dacă A este o algebră analitică și $\varepsilon : A \to k$ morfismul canonic, atunci $N_\varepsilon \simeq \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$.) Tot astfel, avem sistemul proiectiv $(B(p))_{p \geqslant 0}$ a cărui limită proiectivă generalizează completatul $\mathfrak{m}_A$-adic al unei algebre analitice. Dacă

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \arrow[d, "i"] \\
A' \arrow[r, "\varphi'"'] & B'
\end{tikzcd}$$

este o diagramă cocartiziană în $\mathbf{QA}/k$ cu φ, φ' surjective, există morfisme de k-algebre $B(p) \to B'(p)$ și dimorfismul $(B, N) \to (B', N')$ și asocierile $\varphi \rightsquigarrow B_\varphi(p)$, $\varphi \rightsquigarrow N_\varphi$ sînt evident functoriale. În plus avem diagramele cocarteziene alăturate:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "D_1"] & B(p) \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
A' \arrow[r] & B'(p) \arrow[r] & B'
\end{tikzcd}$$

În adevăr, este suficient să arătăm că pătratul D_1 este cocartezian. Or, fie $\mathfrak{a} = \mathrm{Ker}\,\varphi$, $\mathfrak{a}' = \mathrm{Ker}\,\varphi'$. Avem $B' = A' \sqcup_A B = A' \sqcup_A A/\mathfrak{a} = A'/\mathfrak{a}A'$, deci $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}A'$. Atunci $B'(p) = A'/\mathfrak{a}'^{p+1} = A'/\mathfrak{a}^{p+1} A' = B(p) \sqcup_A A'$.

Dacă morfismul $i : B \to B'$ este plat, atunci B-morfismul canonic $B'\otimes_B N \to N'$ este izomorfism. În adevăr, cum $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}A'$, avem $N\otimes_B B' = \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2\otimes_B B' = \mathfrak{a}\otimes_B B'/\mathfrak{a}^2\otimes_B B'/\simeq \mathfrak{a}B'/\mathfrak{a}^2 B' \simeq \mathfrak{a}'A'/\mathfrak{a}^2A' \simeq \mathfrak{a}'/\mathfrak{a}'^2 = N'$.

PROPOZIŢIA 4.1. *Fie* $A \overset{\varphi}{\to} B \overset{\psi}{\to} C$ *morfisme surjective în categoria* $\mathbf{QA}/k$; *avem şirul exact de C-module* :

$$N_\varphi \otimes_B C \overset{u}{\to} N_{\psi\varphi} \to N_\psi \to 0.$$

Demonstraţie. Fie $\mathfrak{a} = \operatorname{Ker}\psi$, $\mathfrak{b} = \operatorname{Ker}\psi\varphi$ (deci $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$). Avem de arătat exactitatea şirului de morfisme :

$$\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2\otimes_B C \to \mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2 \to \mathfrak{b}/\mathfrak{a}/(\mathfrak{b}/\mathfrak{a})^2 \simeq \mathfrak{b}/\mathfrak{a} + \mathfrak{b}^2 \to 0$$

or,

$$\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2\otimes_B C \simeq \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2\otimes_{A/\mathfrak{a}} A/\mathfrak{b} \simeq \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \otimes_A A/\mathfrak{b} \simeq \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2/\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \simeq \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}\mathfrak{b}/\mathfrak{a}^2 \simeq \mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{b},$$

iar imaginea $\operatorname{Im}(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ în $\mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2$ este tocmai $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}^2/\mathfrak{b}^2$.

În general, morfismul u nu este injectiv. De exemplu, în situaţia $k\{X\} \overset{\varphi}{\to} k\{X\}/x^2) \overset{\psi}{\to} k$, avem $\mathfrak{a} = X^2k\{X\}$, $\mathfrak{b} = Xk\{X\}$ şi $ab' \neq \mathfrak{a}$, în timp ce $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}^2 = \mathfrak{b}^2$. Dacă $\operatorname{Ker}\psi$ este ideal generat de un şir B-regulat de elemente din B, atunci u este injectiv şi şirul exact din propoziţia 4.1 este spart (căci atunci N_ψ este C-modul liber). În adevăr, este suficient să arătăm că $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{b} \simeq \mathfrak{a} + \mathfrak{b}^2/\mathfrak{b}^2$Or, $\operatorname{Ker}\psi$ este generat de imagini ale unui şir regulat de elemente din A şi fie $\mathfrak{c}$ idealul generat de şirul din urmă, deci $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \mathfrak{c}$. Conf. [17], IV, 6.9.13, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{a}\mathfrak{c}^2$, deci $\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{c}^2 = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}^2$, de unde $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}^2$, deci $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + (\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c}^2) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}.\mathfrak{c}^2$, adică $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{b} \simeq \mathfrak{a}/\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}^2 \simeq \mathfrak{a} + \mathfrak{b}^2/\mathfrak{b}^2$. Ca un caz particular, obţinem :

COROLARUL 4.2. *Dacă A este o algebră, analitică* $\mathfrak{m}$ *idealul ei maximal şi* $\mathfrak{a}$ *un ideal în A astfel încît* $A/\mathfrak{a}$ *este inel regulat, atunci avem şirul exact* :

$$0 \to \mathfrak{a}/\mathfrak{m}\mathfrak{a} \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathfrak{m}/\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^2 \to 0.$$

4.3. Fie $A \overset{\varphi}{\to} B$ un morfism în $\mathbf{QA}/k$, inversabil la dreapta, adică există un morfism $\psi : B \to A$ de k-algebre astfel ca $\varphi\circ\psi = \mathrm{id}$). φ este atunci surjectiv şi din şirul exact de B-module $0 \to \mathfrak{a}^p/\mathfrak{a}^{p+1} \to B(p) \to B(p-1) \to 0$ ($\mathfrak{a} = \operatorname{Ker}\varphi$), rezultă imediat că morfismul compus $B \to A \to B(p)$ este finit.

Structura de B-modul existentă pe $N = N_\varphi$ coincide cu cea indusă de morfismul $B \to B(1)$ şi cum compunerea $B \to B(1) \to B$ este 1_B, şirul exact de B-module

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow B(1) \longrightarrow B \longrightarrow 0 \tag{*}$$

este spart. Dacă avem o diagramă comutativă în $\mathbf{QA}/k$:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
B' \arrow[r, "\psi'"] & A' \arrow[r, "\varphi'"] & B'
\end{tikzcd}$$

cu $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$, $\varphi' \circ \psi' = \mathrm{id}$, atunci morfismul $B(1) \to B'(1)$ din diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & B(1) \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & B'(1) \arrow[r] & B' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

cu linii exacte şi sparte se obţine însumînd morfismele $B \to B'$, $N \to N'$. Dacă ambele pătrate precedente sînt cocarteziene, atunci morfismele canonice $B(p) \otimes_B B' \to B'(p)$ şi $N \otimes_B B' \to N'$ sînt izomorfisme. (Pătratul

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r] \arrow[d] & B(p) \arrow[d] \\
B' \arrow[r] & B'(p)
\end{tikzcd}$$

rezultă cocartezian şi cum $B \to B(p)$ este morfism finit, prima afirmaţie este evidentă ; în particular, avem izomorfismul $B(1) \otimes_B B' \simeq \simeq B'(1)$, care se descompune din cauza diagramei cu linii exacte sparte, în morfismul canonic $N \otimes_B B' \to N$ şi 1_B, deci morfismul $N \otimes_B B' \to N'$ este izomorfism).

Dacă $A \to B$ este un morfism *oarecare* de algebre cvasianalitice, atunci surjecţia canonică codiagonală $\Delta : B \amalg_A B \to B$ are invers la dreapta şi putem aplica consideraţiile din 4.3.

Mai tîrziu (cap. III) vom studia obiectele diferenţiale asociate morfismului $\varphi(I = \mathrm{Ker}\ \Delta)$:

$N_\Delta = I/I_2$ (care va fi notat $\Omega'_{B/A}$) şi $B_\Delta(n) = B \amalg B/I^{n+1}$ (care va fi notat $P^n B/A$) şi proprietăţi ale algebrelor analitice şi cvasianalitice legate de aceste obiecte.

§ 5. Fie A o algebră analitică peste un corp valuat complet nediscret k ; orice A-modul de tip finit este numit modul analitic [18]. Pe A se poate introduce o topologie local convexă zisă canonică şi dacă M este un A-modul analitic (adică există o surjecţie A-module $A^r \to M \to 0$), atunci M se poate înzestra cu topologia- cît a topologiei canonice Tihonov pe A^r. Astfel, modulele analitice sînt spaţii local convexe, limite inductive de spaţii Fréchet [18]. Dacă corpul de bază este $k = \mathbf{R}$ sau $\mathbf{C}$, atunci pe spaţiile vectoriale $M/\mathfrak{m}_A^n M$ se poate introduce topologia euclidiană [6] şi obţinem pe completatul $\mathfrak{m}_A$-adic $\hat{M} = \varprojlim_n M/\mathfrak{m}^n M$ (conţinînd M) o topologie distinctă în general de topologiile $\mathfrak{m}_A$-adică şi canonică. În toate cele trei topologii pe M, orice submodul al lui M este închis. Pe algebre analitice, topologia euclidiană coincide cu topologia slabă.

Este binecunoscut procedeul de „idealizare" a modulelor datorat lui Nagata. Vom studia în detaliu acest procedeu în cazul modulelor analitice, arătînd că adesea studiul acestora este reductibil la studiul idealelor din algebre analitice.

5.1. Pentru orice inel comutativ A cu 1 şi orice A-modul unitar M, pe produsul cartezian $A \times M$ se introduce o structură de inel prin $(a, m) + (a', m') = (a + a', m + m')$, $(a, m).(a', m') = (aa', am' + a'm)$, notat $D(A, M)$. Aplicaţia $A \to D(A, M)$ $a \rightsquigarrow (a, 0)$ este un morfism injectiv de inele şi permite identificarea lui A cu subinelul $A \oplus O$ al lui

$D(A, M)$. $0 \oplus M$ este un ideal de pătrat nul în inelul $D(A, M)$ şi privit ca $A \oplus 0 \simeq A$ – modul, este izomorf cu M şi submodulele lui M devin ideale în $D(A, M)$. Dacă $k \xrightarrow{i} A$ este o k-algebră, atunci $D(A, M)$ este de asemenea o k-algebră prin morfismul $k \to D(A, M)$ $x \rightsquigarrow (\mathrm{i}(x), 0)$, adică $z(a, m) = (za, zm)$ pentru orice $z \in k$.

Dacă $\mathfrak{a}$ este un ideal în A astfel încît avem diagrama comutativă exactă de $A/\mathfrak{a}$-module :

$$\begin{tikzcd}
 & & A/\mathfrak{a} \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, "id"] & & \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \arrow[r, "i"] & A/\mathfrak{a}^2 \arrow[r, "p"] & A/\mathfrak{a} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

atunci şirul exact orizontal este spart şi avem izomorfismul

$$A/\mathfrak{a}^2 \xrightarrow{\sim} D(A/\mathfrak{a}, \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) \quad x \rightsquigarrow (p(x), x - jp(x)).$$

Dacă există un alt $A/\mathfrak{a}$ – morfism de inele $j' : A/\mathfrak{a} \to A/\mathfrak{a}^2$ astfel ca $p \circ j = p \circ j'$, atunci $j - j'$ se factorizează printr-un morfism $d : A/\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ şi cu identificarea de mai sus, morfismele j, j' asociază oricărui $x \in A/\mathfrak{a}$ respectiv $j(x) = (x, 0)$, $j'(x)' = (x, \mathrm{d}x)$.

PROPOZIŢIA 5.2. [13]. *Fie A o algebră analitică (resp. cvasianalitică) peste k şi M un A-modul de tip finit; atunci k-algebra $D(A, M)$ este analitică (resp. cvasianalitică).*

Demonstraţie. Observăm mai întîi că dacă $B \xrightarrow{\varphi} A$ este un morfism finit de k-algebre cu B algebră analitică, atunci morfismul de inele $D(B, M_{[\varphi]}) \to D(A, M)$ $(b, m) \rightsquigarrow (\varphi(b), m)$ este de asemenea finit şi deci putem presupune de la început că A este o algebră analitică şi M un A-modul analitic. Fie $x_1, \ldots, x_n$ un sistem de generatori al lui M şi $A \to D(A, M)$ morfismul finit care transformă $a \in A$ în $(a, 0)$. Elementele $z_i = (0, x_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sînt evident nilpotente $(z_i^2 = 0)$ şi împreună cu $(1,0)$ generează pe $D(A, M)$ ca A-modul, căci dacă $m = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i$, cu $a, a_i \in A$, $m_i \in M$, atunci $(a, m) = a(1, 0) + \sum_{i=1}^{n} az_i$. Morfismul surjectiv de k-algebre $A[X_1, \ldots, X_n] \to D(A, M)$ care transformă x_i în $z_i (1 \leqslant i \leqslant n)$, se factorizează printr-o surjecţie de k-algebre $A[X_1, \ldots, X_n]/(X_1^2, \ldots, X_n^2) \to D(A, M)$ şi observăm că : $A[X_1 \ldots, X_n]/(X_1^2, \ldots, X_n^2) \simeq A\{X_1, \ldots, X_n\}/X_1^2, \ldots, X_n^2)$, deci $D(A, M)$ este o algebră analitică.

Observaţie 5.3. Dacă $A = k_n\{X\}/\mathfrak{a}$ şi p întreg $\geqslant 0$, se poate verifica şi direct că $D(A, A^p)$ este o k-algebră analitică şi deci prop. 5.2. stabilind următorul izomorfism de k-algebre :

$$\theta : k\{X_1, \ldots, X_n, Y_1 \ldots, Y_p\}/\mathfrak{b} \longrightarrow D(A, A^p),$$

unde $\mathfrak{b}$ este idealul lui $k\{X, Y\}$ generat de $\mathfrak{a}$ şi de toate produsele $Y_i Y_j$ cu $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant p$. Fie un element oarecare $\alpha \in B$, $\alpha =$ clasa mod $\mathfrak{b}$ a unei serii de forma $\sum\limits_{m \in \mathbf{N}^n} a_{m_1 \ldots m_n} X_1^{m_1} \ldots X_n^{m_n} + \sum\limits_{k=1}^{p} \sum\limits_{m \in \mathbf{N}^n} a^{(k)}_{m_1 \ldots m_n} X_1^{m_1} \ldots X_n^{m_n} Y_k$ (scriere unică cum $\mathfrak{b}$ este generat de $\mathfrak{a}$ şi de polinoamele omogene de grad II în $Y_1, \ldots, Y_p$); notăm cu β clasa mod $\mathfrak{a}$ a lui $\sum\limits_{m \in \mathbf{N}^n} a_{m_1 \ldots m_n} X_1^{m_1} \ldots X_n^{m_n}$ şi pentru $k = 1, \ldots, p$, cu β_k clasa lui $\sum\limits_{m \in \mathbf{N}^n} a^{(k)}_{m_1 \ldots m_n} X_1^{m_1} \ldots X_n^{m_n}$ în A. Punem atunci $\theta(\alpha) = (\beta; \beta_1, \ldots, \beta_p) \in D(A, A^p)$ şi este uşor de verificat că θ este izomorfism de k-algebre analitice. Dacă privim B şi $A \oplus A^p$ cu topologia radicală sau canonică, θ este izomorfism topologic, ceea ce arată că studiul modulelor analitice se reduce la cel al idealelor în algebre analitice.

În cele ce urmează notăm D k-algebra $k[X]/(X^2)$ a numerelor duale. Evident, $D \simeq k\{X\}/(X^2)$ şi conform observaţiei precedente, $D \simeq D(k, k)$; D este inel artinian şi cum $\dim_k D < \infty$, atunci pentru orice $A \in \mathbf{A}/k$, $A = k\{X_1, \ldots, X_n\}/\mathfrak{a}$ avem (conf. 5.3) $A \oplus A = k\{X_1, \ldots, X_n, Y\}/\mathfrak{a} + Y^2 \simeq k\{X_1, \ldots, X_n\}/\mathfrak{a} \otimes_k k\{Y\}/(Y^2) \simeq A \otimes_k D \simeq A \amalg D$. Cum $A \otimes_k D = A[X]/(X^2)$, rezultă că elementele sale se scriu sub forma $\alpha + \beta d$ cu $\alpha, \beta \in A$, $d^2 = 0$ ($d =$ clasa lui X), ceea ce justifică notaţia $A + \mathrm{d}A$ dată încă lui $A \amalg D$. Aşadar, orice algebră analitică A apare ca ideal în algebra analitică $A + \mathrm{d}A$.

Spaţiul inelat $\mathcal{D} = (., D)$ redus la un punct este cel mai simplu exemplu de spaţiu analitic care nu este varietate. Pentru orice alt spaţiu analitic $(X, \mathcal{O}_X)$, spaţiile X şi $X \times \mathcal{D}$ sînt homeomorfe dar au fasciculele structurale diferite: pentru orice $x \in X$, $\mathcal{O}_{X \times D, x} = \mathcal{O}_{X, x} \amalg D = \mathcal{O}_{X, x} + \mathrm{d}\mathcal{O}_{X, x}$. Astfel X apare ca subspaţiu închis în $X \times \mathcal{D}$ dat de idealul $\mathrm{d}\mathcal{O}_X$ (de fibre $\mathrm{d}\mathcal{O}_{X, x}$). În [10] orice automorfism al lui $X x \mathcal{D}$ care induce pe X morfismul identic id_X se zice infinitezimal pe X şi se arată că grupul automorfismelor infinitezimale se identifică cu $\Gamma(X, \check{\Omega}^1_X)$.

PROPOZIŢIA 5.4. *Fie* $\varphi : A \to B$ *un morfism de algebre analitice. Dacă* φ *este neted, atunci orice morfism de k-algebre* $A \to D$ *se prelungeşte la* B *şi reciproc, dacă* A *şi* B *sînt regulate.*

Demonstraţie. Dacă φ este neted, observăm că în algebra artiniană D idealul ei maximal $\mathfrak{m}_D$ este de pătrat nul şi aplicăm 3.4 (a) $\Rightarrow$ (d) diagramei

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \arrow[d, "\varepsilon"] \\
D \arrow[r, "\varepsilon"'] & D/\mathfrak{m}_D \simeq k
\end{tikzcd}$$

Reciproc, este suficient să arătăm că pentru orice algebră analitică $(A, \mathfrak{m})$ avem bijecţia canonică:

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A, D) \simeq \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k),$$

(căci un morfism $\varphi : A \to B$ între inele de serii convergente este neted dacă şi numai dacă aplicaţia tangentă $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 \to \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$ este injectivă) care oricărui morfism de k-algebre $\varphi : A \to D$ asociază morfismul compus $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to D \xrightarrow{\varepsilon} k\,(\varphi(\mathfrak{m}^2) = 0)$, această asociere avînd ca invers bilateral pe cea prin care oricărui homomorfism de k-spaţii vectoriale $u : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to k$ corespunde morfismul de k-algebre $A \to D$ care transformă orice $a \in A$ în $\varepsilon(a) + u\,(a - \varepsilon(a) \bmod \mathfrak{m}^2)\,d$. De altfel se poate observa că $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A, D) \simeq \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A/\mathfrak{m}^2, D)$ şi $A/\mathfrak{m}^2 \simeq D(k, \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$. Bijecţia stabilită mai sus se poate interpreta prin faptul că functorul care asociază oricărei algebre analitice dualul spaţiului ei tangent este reprezentabil prin D).

5.5. Ca o aplicaţie a propoziţiei 5.2 putem da condiţii suficiente ca pentru o diagramă

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[d] \\
B \arrow[r] & A
\end{tikzcd}$$

în categoria $\mathbf{A}/k$, produsul fibrat $B \times_A C$ să fie încă o algebră analitică. Observăm mai întîi că dacă avem morfisme în $\mathbf{A}/k$ $B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} A$, atunci B-modulul $B \times \operatorname{Ker} g$ are o structură de B-algebră definită astfel : $(b, c) \cdot (b', c') = (bb', f(b)\,c' + f(b)\,c + cc')$, izomorfă cu $B \times_A C$ prin aplicaţiile

$$B \times \operatorname{Ker} g \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} B \times_A C \qquad (b, c) \rightsquigarrow (b, f(b) + c)$$

$$(b, c - f(b)) \leftsquigarrow (b, c),$$

care sînt izomorfisme reciproce de k-algebre.

Totodată, $B \times_A C$ este B-modul prin α şi prin morfismul canonic $B \to B \times \operatorname{Ker} g$, iar proiecţiile pe B, C sînt aplicaţii B-liniare (C privit ca B-modul prin f).

PROPOZIŢIA 5.6 [27]. *Fie diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[d, "\varphi"] \\
B \arrow[r, "g"'] & A
\end{tikzcd}$$

de algebre analitice cu g surjecţie de nucleu nilpotent şi φ finit; *atunci k-algebra $C \times_A B$ este analitică.*

Demonstraţie. Fie $O_n = k\,\{X_1, \ldots, X_n\} \xrightarrow{p} C \to 0$ o surjecţie de nucleu $\mathfrak{b}$. Conform propoziţiei 2.4, morfismul $\varphi \cdot p$ se factorizează printr-un morfism $f : O_n \to B$. Cum $\mathfrak{a} = \operatorname{Ker} g$ este nilpotent, el rezultă un O_n-modul de tip finit. În adevăr, este suficient să vedem că oricare ar fi p, $\mathfrak{a}^p$ sînt O_n-module de tip finit prin f. Aplicăm inducţia descrescătoare după p; pentru un r convenabil, avem $\mathfrak{a}^r = 0$, apoi presupunem că $\mathfrak{a}^p$ este O_n-modul de tip finit prin f şi considerăm şirul exact $0 \to \mathfrak{a}^p \to \mathfrak{a}^{p-1} \to \mathfrak{a}^{p-1}/\mathfrak{a}^p \to 0$, unde $\mathfrak{a}^{p-1}/\mathfrak{a}^p$ este $A = B/\mathfrak{a}$-modul de tip finit, deci cum φ este finit, $\mathfrak{a}^{p-1}/\mathfrak{a}^p$ este O_n-modul de tip finit, deci $\mathfrak{a}^{p-1}$ este O_n-modul de tip finit. Conform 5.5 aplicat morfismelor $O_n \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A$, avem apoi izomorfismele $O_n \times_A B \simeq O_n \times \operatorname{Ker} g \simeq D(O_n, \mathfrak{a})$ şi conform propoziţiei 5.2,

$O_n \times_A B$ rezultă algebră analitică. În fine, avem o surjecţie de k-algebre $O_n \times_A B \to C \times_A B$ de nucleu $\mathfrak{b} \times 0$, deci $C \times_A B$ este algebră analitică

COROLARUL 5.7. *Pentru orice $A \in \mathbf{A}/k$, k-algebra $A \times D$ este analitică.*

Demonstraţie. Aplicăm propoziţia 5.6 diagramei

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "\varepsilon"] \\ D \arrow[r, "\varepsilon"'] & k, \end{tikzcd}$$

unde $\varepsilon : D \to k$ este o surjecţie de nucleu nilpotent.

§ 6. Vom stabili acum cîteva proprietăţi ale algebrelor cvasianalitice, care vor permite extinderea teoremei de pregătire şi stabilirea existenţei limitelor inductive în categoria $\mathbf{QA}/k$.

TEOREMA 6.1. *Fie $A \to B$ un morfism de tip finit de k-algebre cu $A \in \mathbf{QA}/k$. Fie $\mathfrak{n}$ un ideal maximal în B astfel încît $R(A)\, B \subset \mathfrak{n}$ şi corpul $B/\mathfrak{n}$ k-izomorf cu k. Există atunci o algebră analitică C şi un morfism de k-algebre locale $B_\mathfrak{n} \to C$, al cărui completat în topologiile radicale este izomorfism.*

Demonstraţie. Este imediat că putem presupune $A = k\{X_1,\dots X_n\}$. Conf. ipotezei există un şir exact de forma $0 \to \mathfrak{a} \to A[T_1, \dots, T_r] \to B \to 0$ (cu $\mathfrak{a}$ ideal în $A[T_1,\dots,T_r]$) şi fie $t_1 \dots, t_r \in k$ imaginile lui $T_1, \dots, T_r$ prin compunerea $A[T_1,\dots,T_r] \to B \to B/\mathfrak{n} \simeq k$. Considerăm morfismul de A-algebre $A[T_1,\dots,T_r] \xrightarrow{\theta} A\{Y_1,\dots,Y_r\} = k\{X_1,\dots,X_n, Y_1,\dots,Y_r\}$ care transformă T_i în $t_i + Y_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Notăm cu C algebra analitică $C = A\{Y_1,\dots,Y_r\}/\mathfrak{a}'$, unde $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}A\{Y_1,\dots,Y_r\}$. Avem diagrama comutativă şi exactă :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[r] \arrow[d] & A[T_1,\dots,T_r] \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{a}' \arrow[r] & A\{Y_1,\dots,Y_r\} \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Fie $\mathfrak{p}'$ idealul lui $A[T_1,\dots,T_r]$ generat de $X_1,\dots,X_n$ şi de diferenţele $T_i - t_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Din modul cum au fost alese elementele t_i şi cum $\mathfrak{n} \supset (X_1,\dots,X_n)\, B$, iar $B/\mathfrak{n} \simeq k$, rezultă că $\mathfrak{p}$ este imaginea inversă a lui $\mathfrak{n}$ prin surjecţia $A[T_1,\dots,T_r] \to B$. Rezultă de asemenea că $\mathfrak{p}$ este imaginea inversă prin θ a idealului maximal din $A\{Y_1,\dots,Y_r\} = k\{X_1,\dots,X_n, Y_1,\dots,Y_r\}$. Morfismele θ şi u se factorizează prin morfisme locale $\theta_\mathfrak{p} : A[T_1,\dots,T_r]_\mathfrak{p} \to A\{Y_1,\dots,Y_r\}$ şi $u_\mathfrak{n} : B_\mathfrak{n} \to C$ astfel încît avem diagrama comutativă exactă :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{a}_\mathfrak{p} \arrow[r] \arrow[d] & A[T_1,\dots,T_r]_\mathfrak{p} \arrow[r] \arrow[d, "\theta_\mathfrak{p}"] & B_\mathfrak{n} \arrow[r] \arrow[d, "u_\mathfrak{n}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{a}' \arrow[r] & A\{Y_1,\dots,Y_r\} \arrow[r] & C \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Folosind această diagramă rezultă imediat că completatul lui $u_\mathfrak{n}$ este izomorfism (căci primele două săgeţi verticale devin izomorfisme la completare)

COROLARUL 6.2. *Fie* $B \in \mathbf{QA}/k$ *şi* $\mathfrak{n}$ *un ideal maximal în* B *astfel încît corpul* $B/\mathfrak{n}$ *este* k*-izomorf cu* k *; atunci* $B_{\mathfrak{n}} \in \mathbf{A}/k$.

Demonstraţie. Fie $A = k\{X\} \to B$ un morfism finit de inele. Conf. propoziţiei 6.1, cum $\mathcal{R}(A)\, B \subset \mathfrak{n}$, există o algebră analitică C şi un k-morfism de inele locale $B_{\mathfrak{n}} \xrightarrow{\varphi} C$ pentru care completatul $\hat{\varphi}$ este izomorfism.

Pe de altă parte, morfismul $A \to B_{\mathfrak{n}}$ este cvasifinit [în adevăr, cum $\dim_k B/\mathfrak{m}_A B < \infty$, $B/\mathfrak{m}_A B$ este inel artinian şi şirul de ideale $\mathfrak{n}/\mathfrak{m}_A B \supset \supset (\mathfrak{n}/\mathfrak{m}_A B)^2 \supset \ldots$ staţionează în $B/\mathfrak{m}_A B$ deci pentru r suficient de mare, $\mathfrak{n}^r + \mathfrak{m}_A B = \mathfrak{n}^{r+1} + \mathfrak{m}_A B = \ldots$ şi atunci $(\mathfrak{n}B_n)^r + \mathfrak{m}_A B_n = (\mathfrak{n}B_n)^{r+1} + + \mathfrak{m}_A B_n = \ldots$ şi cum $\mathfrak{m}_A B_n$ este ideal închis în topologia radicală a lui $B_{\mathfrak{n}}$, rezultă că $\mathfrak{m}B_{\mathfrak{n}} = (\mathfrak{n}B_{\mathfrak{n}})^r + \mathfrak{m}B_{\mathfrak{n}}$, deci morfismul $A \to B_{\mathfrak{n}}$ este cvasifinit]. Cum $\hat{\varphi}$ este izomorfism, φ rezultă cvasifinit, deci compunerea $A \to B_{\mathfrak{n}} \xrightarrow{\varphi} C$ este morfism cvasifinit în $\mathbf{A}/k$ şi conf. teoremei de pregătire, finit, deci φ este finit. Dar atunci el rezultă izomorfism (căci $\hat{\varphi}$ este izomorfism). Dăm acum un criteriu util ca o algebră cvasianalitică să fie analitică.

COROLARUL 6.3. *Dacă* $A \in \mathbf{QA}/k$ *este inel local cu corpul rezidual* k*-izomorf cu* k, *atunci* $A \in \mathbf{A}/k$.

Demonstraţie. Fie $\mathfrak{m}$ idealul maximal al lui A. Conf. ipotezei, $k \simeq A/\mathfrak{m}$. Dar corolarul 6.2 arată că $A_{\mathfrak{m}}$ este o k-algebră analitică. Or, $A \simeq A_{\mathfrak{m}}$, căci elementele lui $A - \mathfrak{m}$ sînt exact unităţile lui A.

COROLARUL 6.4. *Dacă corpul* k *este algebric închis, atunci orice algebră cvasianalitică locală este analitică.*

Demonstraţie. Fie A o astfel de algebră şi $\mathfrak{m}$ idealul ei maximal. Conf. § 1.1., $\dim_k A/\mathfrak{m} < \infty$ şi cum k algebric închis, $A/\mathfrak{m}$ este k-izomorf cu k şi aplicăm corolarul 6.3.

Observaţia 6.5. Dacă $A \in \mathbf{QA}/k$ şi $\mathfrak{m}$ este un ideal maximal al lui A, atunci morfismul canonic $A \to A_{\mathfrak{m}}$ este surjectiv şi $A \simeq \Pi A_{\mathfrak{m}}$ ($\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec\,max} A$). În adevăr, este suficient să amintim că orice algebră analitică este inel henselian, fapt care poate fi dedus şi direct, folosind teorema 6.1. Rezultă atunci că *orice algebră cvasianalitică este izomorfă cu un produs finit de algebre cvasianalitice locale*, în particular orice algebră cvasianalitică integră rezultă locală. Dacă corpul k este algebric închis, orice algebră cvasianalitică este produs finit de algebre analitice.

Indicăm acum cîteva consecinţe ale henselianităţii algebrelor cvasianalitice locale.

PROPOZIŢIA 66. *Orice algebră cvasianalitică este inel catenar.*

Demonstraţie. Fie $A \in \mathbf{QA}/k$. Cum un produs de inele catenare este catenar, conf. observaţiei 6.5 putem presupune A local, de ideal maximal $\mathfrak{m}$. Fie $k_n\{X\} \to A$ un morfism finit de inele. Avem atunci o surjecţie $k_n\{X\}\,[T_p, \ldots T_p] \xrightarrow{\varphi} A$ şi $k_n\{X\}$ fiind inel local regulat, $k_n\{X\}$ $[T_1, \ldots, T_p]$ este regulat (în sensul că orice localizat prim al său este regulat). Din diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
k_n\{X\}[T_1 \ldots, T_p] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr] & A \simeq A_{\mathfrak{m}} \\
& k_n\{X\}[T_1 \ldots, T_p]_{\varphi^{-1}} \arrow[u, "\psi"]
\end{tikzcd}$$

morfismul ψ rezultă surjectiv, deci A este cîtul unui inel local regulat.

PROPOZIŢIA 6.7. *Fie* $A \in \mathbf{QA}/k$ *locală și* B *o* k*-algebră de valuare directă avînd corpul de fracții* L. *Dacă* $A \subset L$, *atunci* $A \subset B$.

Demonstrație. Fie $v : L \to \mathbf{Z}$ valuarea discretă care definește B : $B = \{x \in L \mid v(x) \geqslant 0\}$. Arătăm mai întîi că $\mathfrak{m} \subset B$. Fie $(\forall)$ $\alpha \in \mathfrak{m}$ și $P = X^n - (1+\alpha) \in A[X]$. Reducînd P modulo $\mathfrak{m}$ obținem polinomul $X^n - 1 = (X-1)(X^{n-1} + \ldots + 1)$ și cum A este inel henselian, există $P_1, P_2 \in A[X]$ unitare și prime între ele astfel încît $P = P_1 . P_2$ și unul din ele de gradul întîi. Există deci o rădăcină a a lui P în A, adică $a^n = 1 + \alpha$. Fixăm un număr natural $n_0 \geqslant 2$ nedivizibil cu caracteristica lui k și fie $b \in A$ cu $b^{n_0} = 1 + \alpha$. Cum pentru orice n nedivizibil cu caracteristica lui k există $a_n \in A$ cu $(a_n)^n = 1 + \alpha$, rezultă că pentru o infinitate de numere naturale n avem $n - v(x_n) = n_0 . v(x_0) = v(1+\alpha)$, deci neapărat $v(1+\alpha) = 0$, adică $1 + \alpha \in B$; așa dar $\mathfrak{m} \subset B$. Dacă nu am avea $A \subset B$, ar exista $a \in A$, $a \notin B$ și fixăm $c \in \mathfrak{m}$. Cum $A \subset L$, avem $v(a) < 0$ și $v(c) \geqslant 0$, deci pentru s suficient de mare, $v(a^s c) = s v(a) + v(c) < 0$, absurd căci $a^s . c \in m \subset B$.

Observație. Dacă V este o varietate algebrică peste k și V^h este spațiul analitic asociat conf. [28] , pentru orice $x \in V$ avem un morfism local canonic $\mathcal{O}_{V,x} \to \mathcal{O}_{V^h,x}$ injectiv plat, care la completat este izomorfism [28]. În timp ce $\mathcal{O}_{V^h,x}$ este inel henselian, inelul $\mathcal{O}_{V,x}$ nu este. De altfel în cazul algebric nu există o teoremă de pregătire convenabilă : Dacă f, $g \in k[X_1, \ldots, X_n]_{\mathfrak{m}}$ ($\mathfrak{m}$-idealul generat de $X_1, \ldots, X_n$), cu g regulat în raport cu X_n de ordin s, există q, $r \in k[[X_1, \ldots, X_n]]$ unice astfel încît $g = qf + r$ cu r polinom în X_n peste $k[[X_1, \ldots, X_n]]$, de grad $\leqslant s-1$, dar în general q, r nu aparțin inelului $k[X_1, \ldots, X_n]_{\mathfrak{m}}$. Inelele $k[X_1, \ldots, X_n]_{\mathfrak{m}}$ sînt inelele de germeni de funcții raționale pe varietăți algebrice peste k. Un exemplu este dat de $f = X_2^2 + 2X_2 - X_1$, $g = X_2$ în $\mathbf{C}[[X_1, X_2]]$. Cum $s = 1$, avem $X_2 = q(X_2^2 + 2X_2 - X_1) + r$, cu $q \in \mathbf{C}[[X_1, X_2]]$, $r \in \mathbf{C}[[X_1]]$. Considerînd elementul $h = -1 + (1 + X_1)^{1/2} = 1/2\, X_1 + 1/8\, X_1^2 + \ldots$ care aparține lui $\mathbf{C}[[X_1]]$ și nu lui $\mathbf{C}[X_1]_{(X_1)}$, înlocuind X_2 cu h avem $r = h$.

Apare naturală întrebarea : care este cel mai mic subinel al lui $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ care conține $k[X_1, \ldots, X_n]_{\mathfrak{m}}$ și pentru care avem o teoremă de pregătire? Răspunsul găsit de Lafon este că acesta este henselizatul lui $k[X_1, \ldots, X_n]_{\mathfrak{m}}$, ceea ce arată că rațiunea existenței unei teoreme de pregătire într-un subinel al lui $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ constă în henselitatea subinelului.

TEOREMA 6.8. *Fie* $A \in \mathbf{QA}/k$ *locală,* K *o extindere finită a corpului rezidual al lui* A *și* $\mathfrak{p}$ *nucleul surjecției canonice* $A' = A \otimes_k K \to K$

(i) *Morfismul canonic* $A \to A' \to A'_{\mathfrak{p}}$ *este finit și injectiv*;

(ii) *Algebra* $A'_{\mathfrak{p}}$ *este analitică peste* K.

(iii) *Dacă* K *este corpul rezidual al lui* A *și extinderea* $k \to K$ *este separabilă, atunci morfismul* $A \to A'_{\mathfrak{p}}$ *este izomorfism.*

Demonstrație. (i) Cum extinderea $k \to K$ este finită, aplicația $A \to A' = A \otimes_k K$ este finită și cum A este inel henselian, aplicația $A' \to A'_{\mathfrak{p}}$ este surjectivă. Așadar morfismul compus $A \to A' \to A'_{\mathfrak{p}}$ este finit. Observăm apoi că morfismul $A \to A'_{\mathfrak{p}}$ este morfism plat de inele locale, deci fidelplat, deci injectiv.

(ii) Observăm că $A'_{\mathfrak{p}}$ este K-algebră cvasianalitică locală, de corp rezidual $A'_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A'_{\mathfrak{p}} \simeq (A'/\mathfrak{p})_0 \simeq K$ şi conform corolarului 6.3, $A'_{\mathfrak{p}}$ este o K-algebră analitică.

(iii) Este suficient să arătăm că $\mathfrak{m}A'_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}A'_{\mathfrak{p}}$, unde $\mathfrak{m}$ este idealul maximal al lui A, deoarece A' şi $A'_{\mathfrak{p}}$ au aceleaşi corpuri reziduale şi aplicăm lema lui Nakayama. Or, considerăm şirul exact $0 \to \mathfrak{m} \to A \to K \to 0$ din care se obţine şirul exact:

$$0 \longrightarrow (\mathfrak{m} \otimes_k K)_{\mathfrak{p}} \longrightarrow A'_{\mathfrak{p}} \longrightarrow (K \otimes_k K)_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0.$$

Cum extinderea $k \to K$ este separabilă, inelul $K \otimes_k K$ este redus, deci $(K \otimes_k K)_{\mathfrak{p}}$ este redus. Cum el este inel artinian, el rezultă corp, deci aplicaţia canonică $(K \otimes_k K)_{\mathfrak{p}} \to K$ este izomorfism, deci $(\mathfrak{m} \otimes_k K)_{\mathfrak{p}}$ este nucleul surjecţiei canonice $A'_{\mathfrak{p}} \to K$, adică $\mathfrak{m}$ generează în $A'_{\mathfrak{p}}$ idealul maximal al acestuia.

Observaţia 6.9. Dacă A este o k-algebră cvasianalitică locală de corp rezidual K şi k este perfect (deci orice extindere a sa este separabilă), atunci conf. teoremei 6.8 (ii), (iii) rezultă că A este o K-algebră analitică. Aşadar, conf. 6.5. *algebrele cvasianalitice peste corpuri perfecte* (în particular peste corpuri de caracteristica 0 sau peste corpuri algebric închise) *sînt produse finite de algebre analitice*, deci într-un anumit sens studiul lor nu aduce nimic în plus faţă de studiul algebrelor analitice. Cum orice corp valuat archimedian este de caracteristică 0, algebrele cvasianalitice prezintă un interes în sine mai ales în cazul corpurilor nearchimediene.

Stabilim în încheierea acestui paragraf teorema de pregătire în cazul algebrelor cvasianalitice.

În analogie cu cazul inelelor locale noetheriene, zicem că un morfism semilocal $A \xrightarrow{\varphi} B$ de inele semilocale noetheriene este cvasifinit dacă $B/\mathcal{R}(A)B$ este $A/\mathcal{R}(A)$-modul de tip finit. Dacă morfismul $A/\mathcal{R}(A) \to B/\mathcal{R}(B)$ este finit, atunci φ este cvasifinit $\rightleftarrows$ $\hat{\varphi} : \hat{A} \to \hat{B}$ (completare în topologiile radicale respective) este finit $\rightleftarrows$ topologia $R(A)$- adică pe B şi topologia $R(B)$-adică pe B sînt echivalente.

TEOREMA 6.10 (Teorema de pregătire). *Fie* $\varphi : A \to B$ *un morfism în* $\mathbf{QA}/k$; *sînt echivalente afirmaţiile* :

(a) φ *este cvasifinit*;

(b) φ *este finit.*

Demonstraţie. Implicaţia (b) $\Rightarrow$ (a) este trivială.

Pentru a demonstra că (a) $\Rightarrow$ (b) observăm mai întîi că putem presupune B şi A locale(În adevăr, cum B este produs de inele locale $B_1 \ldots B_r$, în diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & B \arrow[r] & \prod_{i=1}^{r} B_i \arrow[dl] \\ & B_i & \end{tikzcd}$$

B_i este A-modul cvasifinit, deci finit şi

B se poate deci presupune local. Apoi, notînd $\mathfrak{n}$ idealul maximal al lui B, cum $\varphi(A \setminus \varphi^{-1}(\mathfrak{n})) \subset B \setminus \mathfrak{n}$, avem diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dr] & B \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{E}_{\mathfrak{n}} \\
& A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{n})} \arrow[ur, dashed, "u"'] &
\end{tikzcd}$$

şi cum φ este cvasifinit, u este cvasifinit iar morfismul $A \to A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{n})}$ este surjectiv. Ar fi deci suficient să arătăm că u este finit). Fie K corpul rezidual al lui B ; K este extindere finită a lui k şi deci şi extindere finită a corpului rezidual al lui A. Fie $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ nucleele surjecţiilor canonice $A' = A \otimes_k K$, $B' = B \otimes_k K \to K$. Cum idealul $\mathfrak{q}$ stă peste $\mathfrak{p}$, morfismul $\varphi \otimes 1$ se factorizează printr-un morfism θ şi avem diagrama de aplicaţii canonice :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] \arrow[dd, bend right, "u"'] & B \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "v"] \\
A' \arrow[r, "\varphi \otimes 1"] \arrow[d] & B' \arrow[d] \\
A'_{\mathfrak{p}} \arrow[r, dashed] & B'_{\mathfrak{q}}
\end{tikzcd}$$

Este imediat că θ este cvasifinit (căci φ este cvasifinit şi v este finit). Conf. teoremei 6.8, $A'_{\mathfrak{p}}$, $B'_{\mathfrak{q}}$ sînt K-algebre analitice, deci θ este finit. Cum u este finit, rezultă că morfismul compus $A \overset{\varphi}{\to} B \to B'_{\mathfrak{q}}$ este finit şi aplicînd din nou lema, rezultă că aplicaţia $B \to B'_{\mathfrak{q}}$ este injecţie, deci φ este morfism finit.

§7. În acest paragraf demonstrăm existenţa limitelor inductive în categoria $\mathbf{QA}/k$ şi dăm consecinţe ale acestui rezultat.

TEOREMA 7.1. *Fie* $A \in \mathbf{QA}/k$. *Aplicaţia canonică* $\theta : \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(k\{X_1, \ldots, X_n\}, A) \to \underbrace{\mathcal{R}(A) \times \ldots \times \mathcal{R}(A)}_{n \text{ ori}}$ $\varphi \leadsto (\varphi(X_1), \ldots, \varphi(X_n))$ *este bijectivă.*

Demonstraţie. Observăm că aplicaţia θ este bine definită (conf. §1). Cum A este produs de algebre cvasianalitice locale (observaţia 5), putem presupune A local în care caz $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ se reduce la unicul ideal maximal $\mathfrak{m}$ din A. θ este injectiv deoarece dacă $\theta(\varphi_1) = \theta(\varphi_2)$ cu $\varphi_1, \varphi_2 : k\{X_1, \ldots, X_n\} \to A$, atunci completatele lor $\hat{\varphi}_1$, $\hat{\varphi}_2$ sînt egale şi deci $\varphi_1 = \varphi_2$, conform teoremei lui Krull de separare. Rămîne să probăm surjectivitatea lui θ. Fie $x_1, \ldots x_n \in \mathfrak{m}$ şi K corpul rezidual al lui A. Cu notaţiile din teorema 6.8 avem diagrama comutativă :

$$\begin{tikzcd}
k[X_1, \ldots, X_n] \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & k\{X_1, \ldots, X_n\} \arrow[r, "i"] & K\{X_1, \ldots, X_n\} \arrow[d, "\beta"] \\
A \arrow[rr] & & A'_{\mathfrak{p}}
\end{tikzcd}$$

unde săgeţile verticale sînt definite în felul următor : α este morfismul de k-algebre care transformă X_i în x_i, iar β este morfismul de K-algebre analitice care transformă X_i în $\frac{x_i \otimes 1}{1}$ $\left(\text{avem } \frac{x_i \otimes 1}{1} \in \mathfrak{p} A'_{\mathfrak{p}} \text{ pentru orice } i = 1, \ldots, n\right)$. Cum aplicaţia $\beta \circ i : k\{X_1, \ldots, X_n\} \to A$ este continuă, cum $k[X_1, \ldots, X_n]$ este dens în $k\{X_1, \ldots, X_n\}$ şi cum A este submodul de tip finit al lui $A'_{\mathfrak{p}}$ şi deci închis (topologiile considerate sînt cele uzuale), rezultă uşor că $\operatorname{Im}(\beta \circ i) \subset A$ şi teorema este demonstrată.

COROLARUL 7.2. *În categoria* **QA**/k *există limite inductive finite şi functorul de trecere la completare comută cu acestea.*

Demonstraţie. Este suficient să arătăm că există suma fibrată pentru o diagramă $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & B \\ C \end{tikzcd}$. Dar $B \sqcup_A C = B \sqcup C / \mathfrak{a}$, unde $\mathfrak{a}$ este idealul generat de $iu(a) - jv(a)$ cu $a \in A$ (i, j—aplicaţiile canonice $B \to B \sqcup C, C \to B \sqcup C$). Rămîne să dovedim existenţa sumei directe $B \sqcup C$. Or, există morfismele finite $k\{X\} = k\{X_1, \ldots, X_n\} \to B$, $k\{Y\} = k\{Y_1, \ldots, Y_m\} \to C$. Fie $B' = B \otimes_{k\{X\}} k\{X, Y\}$, $C' = C \otimes_{k\{Y\}} k\{X, Y\}$. Rezultă imediat că morfismele canonice $k\{X, Y\} \to B'$ şi $k\{X, Y\} \to C'$ sînt finite, deci B', C' sînt k-algebre cvasianalitice. Notăm $B \sqcup C = B' \otimes_{k\{X, Y\}} C'$ şi se verifică, imediat că $B \sqcup C$ este o k-algebră cvasianalitică. Proprietatea de universalitate necesară se verifică imediat folosind teorema 7.1. Pentru afirmaţia secundă este suficient să arătăm că trecerea la completat comută cu suma directă. Avem $\hat{B}' = \widehat{B \otimes_{k\{X\}} k\{X, Y\}} \simeq \hat{B} \hat{\otimes}_{k[[X]]} k[[X, Y]]$, $\hat{C}' = \hat{C} \hat{\otimes}_{k[[Y]]} k[[X, Y]]$ şi atunci rezultă $\widehat{B \sqcup C} \simeq \widehat{B' \otimes_{k\{X, Y\}} C'} \simeq \hat{B}' \hat{\otimes}_{k[[X, Y]]} \hat{C}' = \hat{B} \hat{\otimes}_k \hat{C}$, deoarece $k[[X]] \hat{\otimes}_k k[[Y]] \simeq k[[X, Y]]$.

Observaţie. Teorema 7.1 şi corolarul 7.2 sînt demonstrate şi în [5] utilizînd raţionamente geometrice de spaţii analitice rigide, pentru k nearchimedian.

2) Dacă k-algebrele A, B, C din demonstraţia corolarului 7,2 sînt analitice, atunci k-algebra $B \sqcup_A C$ este analitică şi coincide cu suma fibratei din categoria **A**/k. Dacă unul din morfismele $A \to B$ sau $A \to C$ este finit, atunci avem izomorfismul canonic $B \otimes_A C \simeq B \sqcup_A C$.

COROLARUL 7.3. *Fie* $A \in$ **QA**/k *şi* $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{R}(A)$ *generînd un ideal de definiţie în* A. *Există atunci un morfism finit de* k*-algebre* $k\{X_1, \ldots, X_n\} \to A$ *care transformă* X_i *în* x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Demonstrație. Existența morfismului rezultă din teorema 7.1, apoi el este cvasifinit, deci finit conf. teoremei 6.10.

PROPOZIȚIA 7.4. *Fie $A \in \mathrm{QA}/k$ locală de corp rezidual K. Sînt echivalente afirmațiile* :

(a) *A este inel local regulat*;

(*b*) *Există un morfism finit și plat de k-algebre $k\{X_1,\ldots X_n\} \to A$ astfel încît $\sum_{i=1}^{n} X_i A = \mathfrak{m}_A$*;

În cazul cînd extinderea $k \to K$ este separabilă, aceste afirmații sînt echivalente și cu :

(c) *A este k-izomorf cu un inel de serii convergente peste K.*

Demonstrație (a) $\Rightarrow$ (b). Fie $x_1,\ldots,x_n$ un sistem regulat de parametri. Conform corolarului 7.3, morfismul $\varphi : k\{X_1,\ldots,X_n\} \to A$ determinat de x_i este finit. Imaginile $X_1,\ldots. X_n$ generează prin construcție idealul maximal al lui A. Rămîne să dovedim că φ este plat. Or, cum $x_1,\ldots x_n$ este în particular și șir A-regulat, φ este plat conf. propoziției 3.2.

(b) $\Rightarrow$ (a). Fie $k\{X_1,\ldots,X_n\} \to A$ un morfism verificînd condițiile din ipoteză. Cum el este plat și local, rezultă injectiv, deci $\dim A = \dim k\{X_1,\ldots,X_n\} = n$ și este imediat că imaginile lui $X_1,\ldots,X_n$ sînt un sistem regulat de parametri. Presupunem acum că extinderea $k \to K$ este separabilă. Atunci teorema 6.8 arată că algebra A este k-izomorfă cu un inel de serii convergente peste K și aplicăm corolarul 2.6.

PROPOZIȚIA 7.5. *Fie A o k-algebră cvasianalitică locală. Sînt echivalente următoarele afirmații* :

(a) *A este inel Cohen-Macauley*;

(b) *Orice morfism finit și injectiv $k\{X_1,\ldots. X_n\} \to A$ este plat*;

(c) *Există un morfism finit și plat $k\{X_1,\ldots,X_n\} \to A$. În aceste condiții dacă $x_1,\ldots,x_r \in \mathfrak{m}_A$ este un șir A-regulat de elemente morfismul de k-algebre $k[X_1,\ldots,X_r] \to A$ $X_i \rightsquigarrow x_i$ este injectiv și plat.*

Demonstrație. (a) $\Rightarrow$ (b). Fie $\varphi : k\{X_1,\ldots,X_n\} \to A$ un morfism finit și injectiv. Rezultă atunci că $\dim A = n$ și că imaginile lui $X_1,\ldots. X_n$ în A formează un sistem de parametri, deci un șir A-regulat și conf. propoziției 3.2, φ rezultă plat.

(b) $\Rightarrow$ (c). Conf. teoremei 2.5 există un morfism finit și injectiv $k\{X_1,\ldots,X_n\} \to A$ cu $n = \dim A$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Fie $k\{X_1,\ldots,X_n\} \to A$ un morfism finit și plat. El rezultă fidel-plat, deci injectiv și deci imaginile lui $X_1,\ldots,X_n$ în A formează un șir A-regulat, deci A este inel Cohen-Macauley.

COROLARUL 7.6. *Fie A o algebră cuasianalitică locală Cohen-Macauley. Pentru orice morfism finit $v : k\{X_1,\ldots,X_n\} \to A$, elementele $u(X_i)$ $1 \leqslant i \leqslant n$ sînt nondivizori zero în A.*

Demonstrație. Conf. propoziției 7. 5 avem un morfism finit și plat în $\mathbf{QA}/k$ $k\{X_1,\ldots,X_n\}\to A$. Considerăm diagrama cu pătrate cocarteziene în categoria inelelor și verticalele surjecții :

$$\begin{tikzcd}
k\{X_1\} \arrow[r] \arrow[d] & k\{X_1,\ldots,X_n\} \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
k \arrow[r] & k\{X_1,\ldots,X_{n-1}\} \arrow[r, shift left, "u^*"] \arrow[r, shift right, "v^*"'] & A/\mathfrak{m}A
\end{tikzcd}$$

($u^*(f)=\mathrm{cl}\,u(f)$ mod $\mathfrak{m}A$ etc.). Vom arăta de exemplu că $v(X_n)$ este nondivizor zero în A. Or, în caz contrar elementele idealului principal $v(X_n)A$ ar fi divizori ai lui zero și apar două posibilități : sau $v(X_n)A\cap \mathrm{Im}(u)\neq 0$ în care caz $\mathrm{Im}(u)$ ar conține divizori zero nenuli, absurd căci u fiind plat, A este $k\{X_1,\ldots,X_n\}$ - modul liber, deci fără torsiune; sau $v(X_n)\cap\mathrm{Im}(u)=0$ în care caz avem morfismul finit și injectiv $k\{X_1,\ldots,X_n\}\xrightarrow{u} A\to A/v(X_n)A$, deci $\dim A/v(X_n)A=n$. Dar avem morfismul finit $v^*:k\{X_1,\ldots,X_{n-1}\}\to A/v(X_n)A$ deci $\dim A/v(X_r)A\leqslant n-1$, din nou absurd.

COROLARUL 7.7. *Fie $A\in\mathbf{QA}/k$ locală, Cohen-Macauley și $\varphi: k\{X\}\to A$ un morfism finit și plat. Pentru orice două ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ din $k\{X\}$ avem*

$$(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})A=\mathfrak{a}A\cap\mathfrak{b}A,\ (\mathfrak{a}:\mathfrak{b})A=\mathfrak{a}A:\mathfrak{b}A.$$

Demonstrație. Prima relație rezultă din platitudinea lui φ. Pentru cealaltă este suficient să considerăm $\mathfrak{b}$ principal, $\mathfrak{b}=sk\{X\}$ în care caz avem șirul exact $o\to\mathfrak{a}:\mathfrak{b}\to k\{X\}\to k\{X\}/\mathfrak{a}$ ultimul morfism desemnînd înmulțirea cu s. Tensorînd cu $\otimes_{k\{X\}}A$, avem șirul exact $o\to(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})A\xrightarrow{s} A/\mathfrak{a}A$, deci $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})A=\mathfrak{a}A:\mathfrak{b}A$.

7.8. Fie $k\to K$ o extindere finită de corpuri valuate complete, valuarea pe K prelungind pe cea a lui k. Pentru orice k-algebră cvasianalitică A considerăm functorul covariant $F_A:\ \mathbf{QA}/K\to\mathbf{Ens}$ definit astfel : pentru orice $C\in\mathbf{QA}/K$, $F_A(C)=\mathrm{Hom}'_{k.\mathrm{alg}}(A,C)$ (morfismele semilocale $A\to C$) și pentru orice morfism $u:C\to D$ în $\mathbf{QA}/K$, $F_A(u)=\mathrm{Hom}'_{k\text{-alg}}(A,u)$. Pentru orice $A\in\mathbf{QA}/k$, functorul F_A este reprezentabil și cum se verifică imediat că aplicația canonică $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A\otimes_k K, C)\to\mathrm{Hom}'_{k\text{-alg}}(A,C)$ este izomorfism pentru orice $C\in\mathbf{QA}/k$, rezultă că obiectul de reprezentare este $A'=A\otimes_k K$. Asocierea $A\rightsquigarrow A'$ este un functor $\mathbf{QA}/k\to\mathbf{QA}/K$ (cum se verifică imediat) zis *functorul de schimbare a corpului de bază.* Este evident că algebrele analitice sînt duse tot în algebre analitice prin schimbarea finită a bazei, apoi $(k)'=K$, $(k\{X_1,\ldots,X_n\})'K=\{X_1,\ldots,X_n\}$, $(A/\mathfrak{a})'=A'/\mathfrak{a}A'$, iar dacă $A\to B$ este un morfism în $\mathbf{QA}/k$, atunci avem diagrama cocarteziană de inele :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
A' \arrow[r] & B'
\end{tikzcd}$$

PROPOZIŢIA 7.9. *Fie $k \to K$ o extindere finită de corpuri valuate şi $A \in \mathbf{QA}/k$:*

(i) *Morfismul $A \xrightarrow{i} A'$ este finit şi fidel-plat, în particular $\dim A = \dim A'$.*

(ii) *Dacă $A \in \mathbf{A}/k$, atunci prof $A =$ prof A', deci A este inel Cohen-culey dacă şi numai dacă A' este la fel.*

iii) *A verifică condiţia S_k dacă şi numai dacă A' o verifică (k întreg arbitrar).*

(iv) *Dacă $A \in \mathbf{A}/k$ şi A' este regulat (respectiv verifică R_k, normal, redus), atunci la fel este A. Reciproca are loc, extinderea $k \to K$ este separabilă.*

Demonstraţie. (i) Este suficient să observăm că avem diagrama cocarteziană de inele:

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[d] \\ A \arrow[r] & A' \end{tikzcd}$$

şi că morfismele finite (respectiv, fidel-plate) se păstrează la extinderea bazei. Cum i este fidel plat, el este injectiv şi fiind finit, rezultă $\dim A = \dim A'$. Notăm totodată şi pentru orice $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} A'$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A$ morfismul $A_{\mathfrak{p}} \to A'_{\mathfrak{p}'}$ este fidel plat, în particular din $A_{\mathfrak{p}} \leqslant \dim A'_{\mathfrak{p}'}$.

(ii), (iii) rezultă din [17], ch. IV, partea 2, 6.7.1, iar (iv) din [17], conf. IV, partea 2, 6.7.4.

COROLARUL 7.10. *Fie $k \to K$ o extindere finită de corpuri valuate şi $A \in \mathbf{A}/k$. A este de intersecţie completă dacă şi numai dacă A' este de intersecţie completă.*

Demonstraţie. Amintim că algebra analitică A se zice de intersecţie completă dacă există o surjecţie $\varphi : k\{X_1, \ldots, X_n\} \to A$ al cărui nucleu este un ideal regulat (adică generat de un şir $k\{X\}$-regulat de elemente). Corolarul va rezulta atunci aplicînd diagrama

$$\begin{tikzcd} k\{X_1, \ldots, X_n\} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ K\{X_1, \ldots, X_n\} \arrow[r] & A' \end{tikzcd}$$

următorul rezultat din [17], ch. IV: Dacă

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d] \\ A' \arrow[r, "\varphi'"'] & B' \end{tikzcd}$$

este o diagramă cocarteziană de inele locale noetheriene cu φ, φ' surjecţii şi i fidel plat, atunci idealul Ker φ este regulat $\rightleftarrows$ Ker φ' este regulat.

§ 8. În acest ultim paragraf al capitolului I dăm lema de normalizare pentru algebre cvasianalitice, relativ la un şir de ideale. Fie k un corp valuat complet, discret sau nu. În cazul cînd k este discret, vom obţine teorema 32 — Cap. VII ([33]). Demonstraţia de mai jos este apropiată de cea dată de Serre pentru algebre afine ([29]), cu deosebirea că noi utilizăm lema de pregătire (cvasifinit $\Leftrightarrow$ finit), inexistentă în cazul afin.

TEOREMA 8.1. *Fie* $A \in \mathbf{QA}/k$ *şi* $\mathfrak{a}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{a}_p$ *un şir de ideale proprii din* A. *Există un morfism finit şi injectiv* $k\{X\} = k\{X_1, \ldots, X_n\} \to A$ *şi o funcţie nedescrescătoare* $h : [1, p] \to [\mathrm{o}, n]$ *astfel încît pentru orice* $i = 1, \ldots p$, *avem* $\mathfrak{a}_i \cap k\,\{X\} = (X_1, \ldots X_{h(i)})\; k\,\{X\}$.

Demonstraţie. I. Reducere la cazul inelelor de serii convergente. Fie $k\,\{z_1, \ldots, z_n\} \overset{\varphi}{\to} A$ un morfism finit şi injectiv. Conform ipotezei de reducere aplicată şirului de ideale $\mathrm{o} = \mathrm{Ker}\ \varphi \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{a}_1) \subset \ldots \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{a}_p)$ şi inelului $k\,\{z_1, \ldots, z_n\}$, există un morfism finit şi injectiv de inele $k\,\{Y_1, \ldots Y_n\} \to k\,\{z_1, \ldots, z_n\}$ şi o funcţie nedescrescătoare $h' : [\mathrm{o}, p] \to [\mathrm{o}, n]$ astfel ca $\mathfrak{a}' \cap k\{Y_1, \ldots Y_n\} = (Y_1, \ldots Y_{h'(i)})\; k\{Y_1, \ldots Y_n\}$ ($\mathfrak{a}'_0 = 0$, $\mathfrak{a}'_i = \varphi^{-1}(\mathfrak{a}_i)$). Considerăm morfismul bijectiv de k-algebre $k\,\{Y_1 \ldots \ldots Y_n\} \overset{\psi}{\to} k\,\{X\}$, care transformă $Y_1, \ldots, Y_{h'(0)}$ în 0 şi $Y_{h'(0)} + \mathrm{j}$ în $X_j (1 \leqslant j \leqslant n - h'(\mathrm{o}))$ şi obţinem un morfism finit şi injectiv $k\,\{X\} \to A$ cu proprietatea dorită.

II. Presupunem $A = k\,\{Z_1, \ldots, Z_n\}$. Probăm la început propoziţia pentru $p = 1$ şi $\mathfrak{a}_1$ un ideal principal nenul: $a_1 = x_1 A$. A fiind integru, avem $\dim A/x_1 A = \dim A - 1$, deci x_1 poate fi completat la un sistem de parametri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ în A. Morfismul $k\,\{X\} = k\,\{X_1, \ldots, X_n\} \to A (x_i \rightsquigarrow x_i)$ este cvasifinit deci finit (propoziţia 2.9) şi injectiv (din cauza dimensiunilor); în plus avem $\mathfrak{a}_1 \cap k\,\{X\} = X_1 k\,\{X\}$ (în adevăr, fie $(\forall)\ \alpha \in \mathfrak{a}_1 \cap k\,\{X\}$, $\alpha = x_1 S$ cu $S \in A$; cum S este întreg peste $k\,\{X\}$ şi aparţine corpului de fracţii al inelului normal $k\{X\}$, rezultă că $S \in k\{X\}$ În acest caz punem $h(1) = 1$.

III. Demonstrăm acum teorema prin recurenţă după p. Pentru $p = 1$, fie $\mathfrak{a}_1$ un ideal nenul din A, şi folosim o inducţie după n. Pentru $n = 1$, $\mathfrak{a}_1$ este un ideal principal şi aserţiunea este deja probată (II). Dacă $x_1 \in \mathfrak{a}_1$, $x_1 \neq 0$, atunci conf. etapei II există un morfism finit şi injectiv $\varphi : k\,\{X_1, Y_2, \ldots, Y_n\} \to A$ astfel ca $x_1 A \cap k\{X_1, Y_2, \ldots, Y_n\} = X_1 k\,\{X_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$. Ipoteza de inducţie aplicată idealului $\mathfrak{a}_1 \cap k\,\{Y_2, \ldots, Y_n\}$ dă un morfism finit şi injectiv $u : k\,\{X_2, \ldots, X_n\} \to k\{Y_2, \ldots, Y_n\}$ şi un număr $h' (2 \leqslant h' \leqslant n)$ cu: (*) $\mathfrak{a}_1 \cap k\{X_2, \ldots X_n\} = (X_2, \ldots, X_{h'}) \cdot k\,\{X_2, \ldots, X_n\}$. Este utilă următoarea observaţie: Dacă $k\,\{X_1, \ldots, X_n\} \overset{\psi}{\to} k\{Y_1, \ldots Y_n\}$ este un morfism finit, atunci morfismul $k\{X_1, \ldots, X_n, Z\} \to k\{Y_1, \ldots, Y_m, Z\}$, $X_i \rightsquigarrow \varphi(X_i)$, $Z \rightsquigarrow Z$ este de asemenea finit. Morfismul $k\{X\} \to k\{X_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ obţinut din u prin adjuncţia lui X_1 este atunci finit şi prin compunere cu φ se obţine un morfism finit $k\{X\} \to A$ (injectiv din cauza dimensiunilor) şi punem $h(1) = h'$. Rămîne de probat că $\mathfrak{a}_1 \cap k\{X\} = (X_1, \ldots, X_{h(1)})\; k\{X\}$. Or, fie $(\forall) S \in \mathfrak{a}_1 \cap k\{X\}$, $S = S_1(X_2, \ldots X_n) + X_1 S_2(X_1, \ldots, X_n)$ cu $S_1(X_2, \ldots, \ldots, X_n) \in \mathfrak{a}_1$; din (*) rezultă atunci $S_1(X_2, \ldots, X_n) \in (X_1, \ldots X_{h'})\; k\{X_2, \ldots, X_n\}$, adică $S \in (X_1, \ldots, X_{h(1)})\; k\{X\}$. Efectuăm acum trecerea de la $p-1$ la p. Există un morfism finit şi injectiv $v : k\{Y_1, \ldots Y_n\} \to A$ şi o aplicaţie crescătoare $h : [1, p-1] \to [1, n]$ verificînd propoziţia pentru şirul de ideale $\mathfrak{a}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{a}_{p-1}$. Punînd $d = h(p-1)$, pentru idealul $\mathfrak{a}_p \cap k\{Y_{d+1}, \ldots, Y_n\}$ există un morfism finit şi injectiv. $w : k\{X_{d+1}, \ldots, \ldots, X_n\} \to k\{Y_{d+1}, \ldots Y_n\}$ şi un număr $r (d + 1 \leqslant r \leqslant n)$ cu $a_p \cap k\{X_{d+1}, \ldots, X_n\} = (X_{d+1}, \ldots, X_n)\; k\{X_{d+1}, \ldots, X_n\}$. Morfismul $k\{X_1, \ldots, X_d, X_{d+1}, \ldots, X_n\} \to k\{Y_1, \ldots, Y_d, Y_{d+1}, \ldots, Y_n\} X_i \rightsquigarrow Y_i$ pentru $1 \leqslant i \leqslant d$ şi $X_i \rightsquigarrow W(X_i)$ pentru $d + 1 \leqslant i \leqslant n$) este finit şi compunîndu-l cu v dă un morfism finit și injectiv $k\{X_1, \ldots, X_n\} \to A$. Aplicația h din enunț se obține prelungind h de la $[1, p]$ punînd $h(p) = r$ și se verifică imediat condiția pentru idealele $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_p$.

COROLARUL 8.2. *Fie A o algebră cvasianalitică integră și $\mathfrak{a}$ un ideal oarecare în A. Avem* $\dim A = \dim A + \mathrm{h}(\mathfrak{a})$.

Demonstrație. A rezultă inel local (conf. 8.5) și dacă $\dim A = n$, atunci conf. propoziției 4.1 există un morfism finit și injectiv $k\{X\} \to A$ și un număr h, $0 \leqslant h \leqslant n$ cu $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} \cap k\{X\} = (X_1, \ldots, X_n)\, k\{X\}$. Conf. teoremelor lui Cohen, cum $k\{X\}$ este inel normal, avem : $\dim A = \dim k\{X\} = n$, $\dim k\{X\}/\mathfrak{a}' = \dim A/\mathfrak{a} = \dim k\{X_{h+1}, \ldots, X_n\} = n-h$ (căci $\mathfrak{a}'$ este generat de h elemente), apoi $h(\mathfrak{a}) = h(\mathfrak{a}') = h$ și corolarul rezultă.

COROLARUL 8.3. *Fie A o algebră cvasianalitică; orice lanț de ideale prime din A care nu se poate rafina, dă dimensiunea lui A.*

Demonstrație. Fie $0 = \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \mathfrak{p}_r = \mathfrak{m}$ un lanț ca în enunț. Conf. corolarului 8.2 aplicat algebrei $A/\mathfrak{p}_i$ și idealului $P_{i+1}/\mathfrak{p}_i$, rezultă $\dim A/\mathfrak{p}_i - \dim A/\mathfrak{p}_{i+1} = 1$ pentru orice $i = 0, 1, \ldots, r-1$. Adunînd aceste relații, obținem $r = \dim A$.

COROLARUL 8.4. *Fie A o algebră cvasianalitică și $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ două ideale prime în A; atunci toate lanțurile maximale de ideale prime din A care unesc $\mathfrak{p}$ și $\mathfrak{q}$ au aceeași lungime.*

Demonstrație. Este suficient să observăm conf. corolarului 8.2. (aplicat inelului $A/\mathfrak{p}$ și idealului $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$) că $\dim A/\mathfrak{p} = \dim A/\mathfrak{q} + h(\mathfrak{q}/\mathfrak{p})$. În plus, este imediat că $\dim A_{\mathfrak{q}} - \dim A_{\mathfrak{p}} = \dim A_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}}$.

Observație. Dacă $A \in \mathbf{QA}/k$ este locală, am văzut că ea este cîtul unui inel local regulat și corolarele 8.2. — 8.4 sînt consecințe ale unor fapte mai generale ([29]), dar primesc aici demonstrații specifice utilizînd teorema 8.1.

Dăm acum teorema dimensiunii intersecției a doi germeni analitici, inspirată din cazul afin [29].

PROPOZIȚIA 8.5. *Fie k un corp de caracteristică 0 sau p dar atunci $[k : k^p] < \infty$. Fie $\mathfrak{p}', \mathfrak{p}''$ două ideale prime în $A = k\{X_1, \ldots, X_n\}$. Atunci avem* $\dim A/\mathfrak{p}' + \mathfrak{p}'' \geqslant \dim A/\mathfrak{p}' + \dim A/\mathfrak{p}'' - n$, *sau echivalent, pentru orice ideal prim $\mathfrak{p}$ minimal printre idealele prime din A care conțin $\mathfrak{p}'$ și $\mathfrak{p}''$ avem $h(\mathfrak{p}) \leqslant h(\mathfrak{p}') + h(\mathfrak{p}'')$.*

Demonstrație. Fie I nucleul surjecției codiagonale canonice $\Delta : A \amalg A \to A$ și $\mathfrak{r}$ idealul generat de $\mathfrak{p}'$ *și* $\mathfrak{p}''$ în $A \amalg A$. Evident, I este generat de n elemente, căci dacă identificăm $A \amalg A = k\{X, Y\}$, atunci este generat de cele n diferențe $Y_i - X_i$ și în plus $\Delta^{-1}(\mathfrak{p})$ conține $I + \mathfrak{r}$ și I este minimal printre idealele prime cu această proprietate. Fie $\pi : A \amalg A \to B = A/\mathfrak{p}' \amalg A/\mathfrak{p}''$ morfismul canonic, de nucleu $\mathfrak{r}$. Idealul $\pi(\Delta^{-1}(\mathfrak{p}))$ conține $\pi(I)$ și este minimal printre idealele prime din B cu această proprietate, deci $h\pi(\Delta^{-1}(\mathfrak{p})) \leqslant n$. Cum B este integru (aici intervine ipoteza făcută asupra lui k), avem conf. corolorului 8.2, $\dim B = \dim B/\pi(\Delta^{-1}(\mathfrak{p})) + h(\pi\Delta^{-1}(f))$. Dar $B/\pi(\Delta^{-1}(\mathfrak{p}) \simeq A \amalg A/\Delta^{-1}(\mathfrak{p}) \simeq A/\mathfrak{p}$ și aplicînd propoziția 3.6, rezultă inegalitatea din enunț.

Observație. De fapt se poate arăta mai general că pentru orice două ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ din $A = k\{X\}$, avem $\dim A/\mathfrak{a}+\mathfrak{b} \geqslant \dim A/\mathfrak{a} + \dim A/\mathfrak{b} - n$.

În adevăr, este suficient să considerăm ideale prime $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ asociate lui $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ astfel ca $\dim A/\mathfrak{a} = \dim A/\mathfrak{p}$, $\dim A/\mathfrak{b} = \dim A/\mathfrak{q}$ și să observăm că $\dim A/\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \geqslant \dim A/\mathfrak{p} + \mathfrak{q}$.

Propoziția 8.5 exprimă algebric faptul că dacă X, Y sînt două mulțimi analitice din $\mathbf{C}^n$ și Z o componentă ireductibilă a lui $X \cap Y$, atunci $\dim Z \geqslant \dim X + \dim Y - n$.

CAPITOLUL II

PROPRIETĂȚI DIFERENȚIALE ALE ALGEBRELOR CVASIANALITICE

§ 1. *1.1.* Fie $A \overset{\varphi}{\to} B$ un morfism oarecare în categoria $\mathbf{QA}/k$ și $\Delta : B \sqcup_A B \to B$ surjecția codiagonală închizînd diagrama :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dd, "\varphi"'] & & B \arrow[dl, "id"'] \arrow[dd, "i_2"] \\
& B & \\
B \arrow[ur, "id"] \arrow[rr, "i_1"'] & & B \sqcup_A B \arrow[ul, dashed, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

Convenim să privim $B \sqcup_A B$ ca B-modul prin i_1 și cum $\Delta \circ i_1 = \text{id}$, surjecția Δ satisface cerințele din Cap. I, 4.3 și notînd $I = \operatorname{Ker} \Delta$, putem considera obiectele $\Omega'_{B/A} = N_\Delta = I/I^2$, $P^n_{B/A} = B_\Delta(n) = B \sqcup_A B/I^{n+1} \cdot \Omega'_{B/A}$ are o structură de B-modul ($B \simeq B \sqcup_A B/I$) de tip finit, care coincide cu structura dată prin i_1, iar $P^n_{B/A}$ este o B-algebră finită prin i_1. În cazul morfismului de structură $k \to A$, $A \in \mathbf{QA}/k$ notăm simplu Ω'_A în loc de $\Omega'_{A/k} \cdot \Omega'_{B/A}$ se numește *modulul* 1-*diferențialelor cvasianalitice asociat lui* φ. Morfismele i_1, i_2 au rol diferit în cele ce urmează : simetria $s : B \sqcup_A B \to B \sqcup_A B$ pentru care $s \circ i_1 = i_2$, $s \circ i_2 = i_1$, $\Delta \circ s = \Delta$, $s^2 = \text{id}$ permite transpunerea rezultatelor obținute prin fixarea lui i_1 ca morfism de structură în rezultate analoage pentru i_2. Am văzut în Cap. I, 4.3 că șirul exact de B-module

$$(\ast) \quad 0 \to \Omega'_{B/A} \to P^1_{B/A} \to B \to 0$$

este spart și notînd tot cu i_1, i_2 morfismele canonice $B \rightrightarrows B \sqcup_A B \to P^n_{B/A}$ a căror compunere cu $P^n_{B/A} \to B$ devine id, rezultă că morfismul $i_2 - i_1 : B \to P^1_{B/A}$ se factorizează în $(\ast)$ printr-un A-morfism $d : B \to \Omega'_{B/A}$ zis *derivarea canonică asociată lui* φ. Evident, $d \circ \varphi = 0$. Amintim că în general, pentru un morfism de inele $A \to B$ și un B-modul L, o A-derivare $D : B \to L$ este o aplicație A-liniară astfel încît $(\forall)$ $x, y \in B$, $D(xy) = xDy + yDx$. Mulțimea tuturor acestor derivări este un B-modul $((b \cdot D) \cdot x = b \cdot D(x))$ notat $\operatorname{Der}_A(B, L)$. Cu aceste notații se arată imediat că $d \in \operatorname{Der}_A(B, \Omega'_{B/A})$. În adevăr, conf. Cap. I, 5.1, morfismele $i_1, i_2 : B \to P^1_{B/A}$ asociază oricărui $b \in B$, $i_1(b) = (b, 0)$, $i_2(b) = (b, db)$. Scriind că i_2 este homomorfism de inele, rezultă imediat că $d(x + y) = dx + dy$ şi că $(xy, d(xy)) = (x, dx) \cdot (y, dy) = (xy, xdy + ydx)$, deci $d(xy) = xdy + ydx$, în fine $i_2(1) = (1, 0)$, deci $d(1) = 0$. Asocierea $\varphi \rightsquigarrow (\Omega'_{B/A}, d)$ este functorială, căci dacă

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
A' \arrow[r] & B'
\end{tikzcd}$$

este o diagramă comutativă în $\mathbf{QA}/k$, atunci există un morfism canonic $B \amalg_A B \to B' \amalg_{A'} B'$ care închide diagrama

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, shift left, "i_1"] \arrow[r, shift right, "i_2"'] \arrow[d] & B \amalg_A B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
B' \arrow[r, shift left, "i_1"] \arrow[r, shift right, "i_2"'] & B' \amalg_{A'} B' \arrow[r] & B'
\end{tikzcd}$$

şi conf. Cap. I, § 4, dimorfismul $(B, \Omega'_{B/A}) \to (B', \Omega'_{B'/A'})$ şi morfisme $P^n_{B/A} \to P^n_{B'/A'}$ făcînd comutative diagramele

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, shift left, "i_1"] \arrow[r, shift right, "i_2"'] \arrow[d] & P^n_{B/A} \arrow[d] \\
B' \arrow[r, shift left, "i_1"] \arrow[r, shift right, "i_2"'] & P^n_{B'/A'}
\end{tikzcd}$$

Pentru $n=1$, folosind şirul exact spart (∗) rezultă diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r] \arrow[d] & \Omega'_{B/A} \arrow[d] \\
B' \arrow[r] & \Omega'_{B'/A'}
\end{tikzcd}$$

1.2. Explicităm pentru exemplificare cele de mai sus pentru cazul $A = k$, $B = k\{X_1, \ldots, X_r\}$. În acest caz $B \amalg_A B = k\{X_1 \ldots, X_r, Y_1 \ldots Y_r\}$ şi Δ transformă X_i, Y_i în X_i, iar i_1, i_2 transformă X_i respectiv în X_i şi Y_i, $1 \leqslant i \leqslant r$. Nucleul I al lui Δ coincide cu idealul generat de $Y_i - X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ în $B \amalg_A B$, adică $I = \{S(X, Y) \in k\{X, Y\} \mid S(X, X) = 0\}$. În acest caz, $\Omega'_{k\{X_1, \ldots, X_r\}} = I/I^2$ şi derivarea canonică $d : B \to \Omega'_B$ transformă X_i în $dX_i = \mathrm{cl}(Y_i - X_i) \bmod I^2$, adică $(\forall) f \in B$, $df = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial X_i} dX_i$. Cum orice $S(X, Y) \in k\{X, Y\}$ se scrie $S(X, X) + \sum_{i=1}^{r} (Y_i - X_i) T_i + U$, cu $T_i \in B$ şi $U \in I^2$ (am notat X, Y grupurile de nedeterminate $X_1, \ldots X_r$ şi respectiv $Y_1, \ldots, Y_r$), rezultă că B-modulul $\Omega'_B = I/I^2$ este generat de $\operatorname{Im} d$. În fine, $P^n_{B/A} = k\{X_1, \ldots, X_r, Y_1, \ldots, Y_r\}/I^{n+1}$ şi privită ca B-modul prin i_1, această algebră este generată de $\operatorname{Im} i_2$, mai precis de toate elementele de forma $d^{(n)}(X_1^{m_1} \ldots X_r^{m_r})$, cu $m_1 + \ldots + m_r \leqslant n$, unde $d^{(n)}$ este compunerea $B \xrightarrow{i_2} B \amalg_A B \to P^n_{B/A}$. Propoziţia care urmează generalizează aceste ultime afirmaţii.

PROPOZIȚIA 1.3. *Fie* $\varphi : A \to B$ *un morfism în* $\mathbf{QA}/k$.

(i) $\Omega'_{B/A}$ *este generat ca* B*-modul de* Im d;

(ii), $P^n_{B/A}$ *este generat ca* B*-modul (prin* i_1*) de* Im $d^{(n)}$, *unde* $d^{(n)}$ *este morfismul compus* $B \xrightarrow{i_2} B \amalg_A B \to P^n_{B/A}$.

Demonstrație. (i) Diagrama canonică $B \overset{i_1}{\underset{i_2}{\rightrightarrows}} B \amalg_A B \xrightarrow{\Delta} B$ este exactă în $\mathbf{QA}/k$, adică $B = \operatorname{Coker}(i_1 - i_2)$. Fie $I = \operatorname{Ker} \Delta$ și J idealul lui $B \amalg_A B$ generat de toate elementele de forma $i_2(b) - i_1(b)$ cu $b \in B$. Evident, $J \subset I$ căci $\Delta \circ i_1 = \Delta \circ i_2$, iar surjecția canonică $p : B \amalg_A B \to B \amalg_A B/J$ se factorizează unic printr-un morfism $B \to B \amalg_A B/J$, deci $I \subset \operatorname{Ker} p = J$. Așadar $I = J$ și atunci B-modulul $\Omega'_{B/A} = J/J^2$ este generat de $cl\,(i_2(b) - i_1(b))$ mod J^2, adică de elementele $d(b)$ cu $b \in B$.

(ii) Folosim inducția după n. Pentru $n = 1$, avem $P^1_{B/A} = B \oplus \Omega'_{B/A}$ deci $(\forall)$ $\alpha \in P^1_{B/A}$, $\alpha = b + \omega$ cu $b \in B$, $\omega \in \Omega'_{B/A}$. Aplicînd (i) avem $\omega = \sum_i b_i d(b'_i) = \sum_i b_i(i_2(b'_i) - i_1(b'_i))$ și este suficient să observăm că $d^{(1)} = d + i_1$. Pasul inducției se face utilizînd șirul exact $0 \to I^n/I^{n+1} \to P^n_{B/A} \to P^{(n-1)}_{B/A} \to 0$.

Observația 1.4. Considerăm o diagramă cocarteziană în $\mathbf{QA}/k$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
A' \arrow[r] & B'
\end{tikzcd}$$

Se verifică ușor că diagrama:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "i_1"] \arrow[d] & B \amalg_A B \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d] & B \\
B' \arrow[r, "i_1"'] & B' \amalg_{A'} B' \arrow[r, "\Delta'"'] & B'
\end{tikzcd}$$

este de asemenea cocarteziană cu $\Delta \circ i_1 = \mathrm{id}$ și că Δ' coincide cu morfismul obținut din Δ prin ridicarea bazei $B \amalg_A B \to B' \amalg_{A'} B'$ și conf. Cap. I, 4.3, morfismele canonice

$$P^n_{B/A} \otimes_B B' \to P^n_{B'/A'}, \quad \Omega'_{B/A} \otimes_{A'} B' \to \Omega'_{B'/A'}$$

sînt izomorfisme.

Dacă $A \to B$ este un morfism de k-algebre *analitice*, aplicînd această observație diagramei cocarteziene

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
k \arrow[r] & B/\mathfrak{m}_A B
\end{tikzcd}$$

obținem izomorfismele canonice

$$P^n_{B/A}/\mathfrak{m}_A P^n_{B/A} \xrightarrow{\sim} P^n_{B/\mathfrak{m}_A B}; \quad \Omega'_{A/B}/\mathfrak{m}_A \Omega'_{B/A} \xrightarrow{\sim} \Omega'_{B/\mathfrak{m}_A B}.$$

TEOREMA 1.5. (i). *Fie* $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} A$ *morfisme în* $\mathbf{QA}/k$ *astfel încît* $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$ şi $\mathfrak{b} = \mathrm{Ker}\ \psi$. *Avem izomorfismele canonice*

$$P^n_{B/A} \otimes_B A \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{a}^{n+1}, \quad \Omega'_{B/A} \otimes_B A \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$$

care transformă respectiv $d^{(n)}(b) \otimes 1$ *în* $\psi(b)$ mod a^{n+1} *şi* $d(b) \otimes 1$ *în* cl $(b - \varphi\,\psi(b))$ mod $\mathfrak{a}^2$.

(ii) *Dacă* A *este o algebră analitică peste* k *şi* $\mathfrak{m}$ *idealul ei maximal, atunci*

$$P^n_A/\mathfrak{m}\, P^n_A \simeq A/\mathfrak{m}^{n+1} \quad \text{şi} \quad \Omega'_A/\mathfrak{m}\,\Omega'_A \simeq \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$$

ultimul morfism transformînd cl $d(a)$ *în* cl $(a - \varepsilon(a))$ mod $\mathfrak{m}^2$.

Demonstraţie. (i) Avem diagrama cocarteziană în $\mathbf{AQ}/k$:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & B \amalg_A B \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "(\varphi\psi,\, d)"] & B \\
A \arrow[r, "\varphi"'] & B \arrow[r, "\psi"'] & A
\end{tikzcd}$$

cu $\Delta \circ i_1 = \mathrm{id}$ şi morfismul $B \xrightarrow{\psi} A$ coincide cu ridicatul lui Δ prin schimbarea bazei $B \amalg_A B \to B$. Este suficient să aplicăm atunci Cap. I, 4.3. Explicitarea modului cum ,,lucrează'' aceste izomorfisme rezultă din propoziţia 1.3 folosind diagramele comutative ($p : B \to B/\mathfrak{a}^2$ surjecţia canonică)

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "d^{(n)}"] \arrow[dr] & & P^n_{B/A} \arrow[dl] \\
& B/\mathfrak{a}^{n+1} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, shift left, "i_1"] \arrow[rr, shift right, "i_2"'] \arrow[dr, shift right, "p\circ\varphi\circ\psi"'] \arrow[dr, shift left, "p"] & & P^1_{B/A} \arrow[dl] \\
& B/\mathfrak{a}^2 &
\end{tikzcd}$$

(ii) Aplicăm (i) morfismelor $k \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\varepsilon} k \simeq A/\mathfrak{m}$, observînd că $M \otimes A/\mathfrak{m} \simeq M/\mathfrak{m}M$. Primul izomorfism justifică denumirea de algebră de părţi principale care se dă uneori algebrei jeturilor de ordin $\leqslant n$, P^n_A.

COROLARUL 1.6. (i). *Un morfism* φ: $A \to B$ *de* k*-algebre analitice este surjectiv* $\rightleftarrows \Omega'_{B/A} = 0$.

(ii) *Fie* $A \in \mathbf{A}/k$ *şi* $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{m}_A$. *Morfismul* $k\{X_1, \ldots, X_n\} \to A$ $(X_i \rightsquigarrow x_i)$ *este surjectiv* $\rightleftarrows \Omega'_A$ *este generat ca* A*-modul de* $dx_1, \ldots, dx_n$.

Demonstraţie. (i) Conform teoremei 1.5 (ii) şi observaţiei 1.4 avem izomorfismul canonic $\Omega'_{B/A}/\mathfrak{m}_A\Omega'_{B/A} \simeq (\mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_A B)/(\mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_A B)^2$. Dacă $\Omega'_{B/A} = 0$, atunci inelul $B/\mathfrak{m}_A B$ fiind noetherian, avem $\mathfrak{m}_A B = \mathfrak{m}_B$ deci din demonstraţia propoziţiei 2.4 din Cap. I rezultă φ surjectiv. Invers, dacă φ este surjectiv, atunci $\mathfrak{m}_A B = \mathfrak{m}_B$, deci $\Omega'_{B\,A} = \mathfrak{m}_A\,\Omega'_{B/A}$ şi lema lui Nakayama dă $\Omega'_{B/A} = 0$.

(ii) $dx_1, \ldots, dx_n$ generează $\Omega'_A \rightleftarrows$ clasele lor generează k-spațiul vectorial $\Omega'_A/\mathfrak{m}_A\Omega'_A$, iar acesta se identifică cu $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$ (conf. 1.5. (ii)), imaginile claselor lui dx_i identificîndu-se cu $\mathrm{cl}\,x_i$, mod m_A^2.

COROLARUL 1.7. *Fie* $\varphi : A \to B$ *un morfism de algebre analitice și* $I = \operatorname{Ker}(B \amalg_A B \to B)$. *$I$ este ideal regulat în* $B \amalg_A B$ *dacă* φ *este surjectiv sau* φ *este neted.*

Demonstrație. Amintim că într-un inel A (comutativ și cu element unitate, ca de obicei) un ideal $\mathfrak{a}$ se zice regulat dacă este generat de un șir A-regulat de elemente. În [17], 0_{IV}, este arătat că $\mathfrak{a}$ este ideal regulat în $A \rightleftarrows \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ este $A/\mathfrak{a}$-modul liber și algebra simetrică $S_{A/\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) \simeq Gr_{\mathfrak{a}}(A)$. Folosind acest criteriu, I este ideal regulat $\rightleftarrows \Omega'_{B/A}$ este B-modul liber și surjecția canonică $S_B(\Omega'_{B/A}) \to \bigoplus_{n \geqslant 0} P^n_{B/A}$ este izomorfism. Dacă φ este surjectiv, atunci $\Omega'_{B/A} = 0$ conf. corolarului 1.6 și deci I este regulat. Presupunem acum că φ este neted, deci $B \xrightarrow{i_1} B \amalg_A B$ este neted și $B \xrightarrow{i_1} B \amalg_A B \xrightarrow{\Delta} B$ este 1_B. Conf. [17], IV, 17.2.1, Ker $\Delta = I$ rezultă atunci regulat.

COROLARUL 1.8 *Fie* $A = k\{X_1, \ldots, X_m\}$, $B = k\{X_1, \ldots, X_n\}$ *și* $\varphi : A \to B$ *un morfism de k-algebre,* $D : \Omega'_A \to \Omega'_B$ *morfismul asociat lui* φ conf. 1.1. *Dacă aplicația* $D \otimes 1_k$ *este injectivă* (*respectiv surjectivă, bijectivă*), *la fel este* φ.

Demonstrație. Avem diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "d"'] & B \arrow[d, "d"] \\
\Omega'_A/\mathfrak{m}_A\Omega'_A \arrow[r, "D\otimes 1_k"] & \Omega'_B/\mathfrak{m}_B\Omega'_B
\end{tikzcd}$$

unde morfismul $D \otimes 1_k$ se identifică conf. teoremei 1.5 (ii) cu aplicația. tangentă a lui φ $T_\varphi : \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 \to \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$. Dacă T_φ este surjectivă, atunci $\mathfrak{m}_B = \mathfrak{m}_A B + \mathfrak{m}_B^2$ și lema lui Nakayama arată că $\mathfrak{m}_A B = \mathfrak{m}_B$ deci conf. 1, 2, 4, φ este surjectiv. Dacă aplicația T_φ este bijectivă, atunci φ este surjectivă și $m = n$ (căci A, B sînt inele locale regulate, deci $\dim \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 = \dim A = n$, etc.). Construind un morfism $\psi : B \to A$ astfel încît $\varphi \cdot \psi = \mathrm{id}$, rezultă T_ψ bijectiv (căci asocierea $\varphi \leadsto T_\varphi$ este functorială), deci ψ este surjectiv și cum ψ este injectiv, rezultă ψ bijectiv și la fel φ. În fine, dacă T_φ este injectivă, atunci neapărat $m \leqslant n$ și renumerotînd nedeterminatele, avem $T_{\pi\circ\varphi}$ bijectivă $(A \to B \xrightarrow{\pi} B/(X_{m+1}, \ldots, X_n) \simeq k\{X_1, \ldots, X_m\})$ deci $\pi \circ \varphi$ este bijectivă, adică aplicația este injectivă,.

Corolarul 1.8 se poate demonstra și folosind teorema funcțiilor implicite.

TEOREMA 1.9. *Fie A o algebră analitică peste k de dimensiune n și* $\mathfrak{m}$ *idealul ei maximal. Sînt echivalente afirmațiile :*

(a) *A este inel regulat ;*

(b) Ω'_A *este A-modul liber de rang n ;*

(c) Ω'_A *este generat ca A-modul de n elemente.*

Demonstraţie. (a) $\Rightarrow$ (b) Conf. I, corolarului 2.6, $A \simeq k\{X_1,\ldots,X_n\}$ şi fie $\mathfrak{a} = \operatorname{Ker}(A \amalg A \to A)$, deci $\Omega'_A = \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$. Conf. propoziţiei 1.3 (i) Ω'_A este generat ca A-modul de $dX_1, \ldots, dX_n$ şi avem de arătat că aceste elemente sînt libere peste A. Or, fie $\sum\limits_{i=1}^{n} S_i \cdot dX_i = 0$ cu $S_i \in A$, deci $\sum\limits_{i=1}^{n} S_i\,(Y_i - X_i) \in \mathfrak{a}^2$, $\sum\limits_{i=1}^{n} S_i\,(Y_i - X_i) = \sum\limits_{k} T_k U_k$ cu $T_k, U_k \in \mathfrak{a}$, unde am identificat $A \amalg A$ cu $k\ \{X_1,\ldots,X_n, Y_1,\ldots, Y_n\}$. Fie acum $V \times V$ o vecinătate simetrică a originii în $\mathbf{E}^{2n}$ în care toate seriile S_i sînt convergente; pentru orice $x = (x_1,\ldots, x_n) \in V$, avem $\sum\limits_{i=1}^{n} S_i\,(x_1,\ldots,x_n)\,(Y_i - x_i) \in \mathfrak{m}_x^2$ (căci pentru $T \in a$, $T(x_1,\ldots,x_n, Y_1,\ldots Y_n) \in \mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}_x =$ idealul maximal din $k\{Y_1 - x_1,\ldots Y_n - X_n\}$), deci $S_i\,(x) = 0$, deoarece $\dim_k \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = n$ şi o bază a lui $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$este dată de $\operatorname{cl}(Y_i - X_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Astfel $S_i(x) = 0$ pentru orice $x \in V$, deci $S_i = 0$.

COROLARUL 1.10. *Fie* $\varphi : A \to B$ *un morfism plat în* $\mathbf{A}/k$; φ *este neted* $\rightleftarrows$ $\Omega'_{B/A}$ *este B-modul liber de rang* $\dim B - \dim A$.

Demonstraţie. Fie φ neted; conf. cap. I, 3.3. (e) există o diagramă cocarteziană de forma

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[r] \arrow[d] & k\{X_1,\ldots,X_n\} \arrow[d] \\
A \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

cu $n = \dim B/\mathfrak{m}_A B$. Cum φ este plat, rezultă $n = \dim B - \dim A$. Aplicînd teorema 1.9, prin ridicarea bazei rezultă că $\Omega'_{B/A}$ este B-modul liber de rang n. Pentru afirmaţia inversă este suficient să arătăm că $B/\mathfrak{m}_A B$ este inel local regulat. Or, avem izomorfismul $\Omega'_{B/A}/\mathfrak{m}_A\, \Omega'_{B/A} \simeq \Omega'_B/\mathfrak{m}_A B$ (observaţia 1.4) şi aplicăm teorema 1.9.

COROLARUL 1.11. *Fie* $\varphi : A \to B$ *un morfism neted în* $\mathbf{A}/k$ *şi* $b_1, \ldots, b_n \in m_B$. *Considerăm morfismul* $k\{X_1, \ldots, X_n\} \to B$ *care transformă* X_i *în* b_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ *şi fie* $g : A\ \{X_1, \ldots, X_n\} \to B$ *morfismul indus de acesta şi de* φ; *g este neted (respectiv etal)* $\rightleftarrows$ $d\,(b_i)$ *fac parte dintr-o bază (respectiv sînt o bază) a B-modulului, liber* conf. corolarului 1.10, $\Omega'_{B/A}$.

Demonstraţie. În [17], $\mathrm{O_{IV}}$, se arată următorul fapt : Dacă $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ sînt morfisme de algebre analitice peste k de ideale maximale $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ cu f şi $g \circ f$ netede, atunci g este neted (respectiv etal) $\rightleftarrows$ morfismul $\mathfrak{n}/_{\mathfrak{n}^2 + \mathfrak{m}B} \simeq$ $\simeq \Omega'_{B/A}/\mathfrak{m}\ \Omega'_{B/A} \overset{\theta}{\underset{\sim}{\Rightarrow}} \Omega'_{C/A}/\mathfrak{m}\ \Omega'_{C/A} \cong \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2{+}\mathfrak{m}C$ este monomorfism (respectiv izomorfism). Aplicăm aceasta morfismelor $A \xrightarrow{f} A\ \{X_1, \ldots, X_n\} \xrightarrow{g} B$ cu $g \circ f = \varphi$ şi f neted conf. Cap. I, 3.3. (e), observînd totodată că în acest caz morfismul θ transformă baza $\mathrm{d}X_i \otimes 1$ în db_i.

Observaţia 1.12. Teorema 1.9 exprimă faptul geometric cunoscut că dacă $z_1, \ldots, z_n$ sînt funcţiile de coordonate în $\mathbf{E}^n$, atunci $\Omega^1_{\mathbf{E}^n}$ este $\mathcal{O}_{\mathbf{E}^n}$ — Modul liber de bază $\mathrm{d}z_1, \ldots, dz_n$. Notînd $\mathcal{J}$ idealul imersiei închise $\mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^{2n}$,

$\mathcal{J}^s/\mathcal{J}^{s+1}$ este generat de $dz_{\lambda(1)}, \ldots, dz_{\lambda(n)}$ cu $\lambda : [1, s] \to [1, n]$ aplicaţie oarecare (s întreg) şi cum fasciculul $\Omega^1_{E^n} = \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ este liber, atunci $\overset{s}{\wedge}\, \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ este generat de $dz_{\lambda(1)} \wedge \ldots \wedge dz_{\lambda(s)}$ cu $\lambda : [1, s] \to [1, n]$ crescătoare; în fine, algebra $P^p_{E^n}$ a părţilor principale este generată ca $\mathcal{O}_{\mathbf{E}^n}$ — Modul de $d^{(p)}(z_1^{m_1} \ldots z_n^{m_n}$ (cu $m_1 + \ldots + m_n \leqslant p$. Nu este indicat să fie definit un modul de diferenţiale de ordin $s \geqslant 2$, $\Omega^s_{E^n}$, ca fiind $\mathcal{J}^s/\mathcal{J}^{s+1}$ ca în cazul $s = 1$, deoarece pentru $s > n = \dim \mathbf{E}^n$, aceasta nu se anulează. Am putea însă defini

$$\Omega^s_{\mathbf{E}^n} = \overset{s}{\wedge}\, \mathcal{J}/\mathcal{J}^2.$$

Fie $A \xrightarrow{\varphi} B$ un morfism în QA/k astfel încît morfismul canonic $B \otimes_A \Omega^1_{B/A} \to B \otimes_A \Omega'_{B/A}$, unde $\Omega'_{B/A}$ este modulul de diferenţiale din categoria inelelor, studiat în [17], 0_{IV} să fie injectiv. Această condiţie este realizată de exemplu dacă φ este finit căci atunci $\Omega^1_{B/A} \xrightarrow{\sim} \Omega'_{B/A}$, deoarece $B \otimes_A B \xrightarrow{\sim} B \amalg_A B$. Punînd $\Omega'^p_{B/A} = \overset{p}{\wedge}\, \Omega'_{B/A}$ este remarcabil că putem atunci construi un morfism $\delta : \Omega'^1_{B/A} \to \Omega'^2_{B/A}$ cu $\delta \circ d = 0$, în felul următor: Aplicaţia triliniară $B \times B \times B \to \Omega'^2_{B/A} = \overset{2}{\wedge}\, \Omega'_{B/A}\ (b_1, b_2, b_3) \rightsquigarrow db_1 \wedge (b_2 . db_3)$ dă naştere unui A-morfism $\alpha : B \otimes_A (B \otimes_A B) \to \Omega'^2_{B/A}$, nul pe imaginea compunerii $B \otimes_A I \to \to B \otimes_A I \to B \otimes_A (B \otimes_A B)$, $I = \mathrm{Ker}\,(B \otimes_A B \to B)$. În adevăr, cum I este generat de elemente de forma $1 \otimes b - b \otimes 1$, $(\forall)\ b \in B$, este suficient să arătăm că $(\forall)\ b \in B$ şi $(\forall)\ z = (1 \otimes p - p \otimes 1)(1 \otimes q - q \otimes 1)$, avem $\alpha(b \otimes z) = 0$. Or, cum $z = 1 \otimes pq + pq \otimes 1 - p \otimes q - q \otimes p$, avem $\alpha(\mathrm{b} \otimes \mathrm{z}) = db \wedge d(pq) + db \wedge (pq\,.\,dl) - db \wedge (pdq) - db \wedge (qdp) = db \wedge \wedge [d(pq) - pdq - qdp] = 0$, căci d este o derivare. În diagrama

$$\begin{tikzcd}
B \otimes_A I^2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & B \otimes_A I \arrow[rr] \arrow[dd, dashed, "\beta"] & & B \otimes_A \Omega'_{B/A} \arrow[r] \arrow[ddll, dashed, "\gamma"] & 0 \\
& B \otimes_A (B \otimes_A B) \arrow[dr, "\alpha"'] & & & & \\
& & \Omega'^2_{B/A} & & &
\end{tikzcd}$$

se construiesc succesiv β, nul pe imaginea lui $B \otimes_A I^2$ în $B \otimes_A I$ şi γ. Definim atunci compunerea $\delta : \Omega'_{B/A} \to B \otimes \Omega'_{B/A} \xrightarrow{\gamma} \Omega'^2_{B/A}$ şi explicitînd α, β, γ, rezultă că δ transformă $b \cdot dc$ în $db \wedge dc$, în particular $\delta \circ d = 0$.

Dacă $\Omega'_{B/A}$ este B-modul liber de rang n (de exemplu, în condiţiile teoremei 1.9 sau corolarului 1.10) şi bază $s_1, \ldots, s_n$, atunci oricare ar fi $p \geqslant 1$, o bază a lui $\Omega'^p_{B/A}$ peste B este formată din cele $\binom{n}{p}$ elemente $ds_{i_1} \wedge \ldots \wedge ds_{i_p}$ cu $i_1 < \ldots < i_p$ luate din $[1, n]$.

§ 2. În acest paragraf stabilim cîteva proprietăţi mai speciale ale modulelor de diferenţiale, folosind proprietatea sa de universalitate (propoziţia 2) şi o serie de rezultate din [12].

PROPOZIŢIA 2.1. *Fie* $A \to B$ *un morfism în* $\mathbf{Q}\mathcal{A}/_k$, $\mathfrak{b}$ *un ideal propriu în* B. *Avem atunci şirul exact de* $B/\mathfrak{b}$ *— module:*

$$\mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega'_{B/A} \otimes_B B/\mathfrak{b} \to \Omega'_{B/\mathfrak{t}/A} \to 0$$

unde morfismul δ *este obţinut din* $d : \mathfrak{b} \to B \to \Omega'_{B/A}$ *ţinînd cont că* $d\,(b^2) \subset \mathfrak{b}\,\Omega'_{B/A}$.

Demonstraţie. Avem diagramele cocarteziene

$$\begin{tikzcd}
B \amalg_A B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
B/\mathfrak{b} \amalg_A B/\mathfrak{b} \arrow[r] & B/\mathfrak{b}
\end{tikzcd} , \qquad
\begin{tikzcd}
B \amalg_A B \arrow[r] \arrow[d] & P^1_{B/A} \arrow[d] \\
B/\mathfrak{b} \amalg_A B/\mathfrak{b} \arrow[r] & P^1_{B/\mathfrak{b}/A}
\end{tikzcd}$$

Cum morfismul $B \amalg_A B \to B/\mathfrak{b} \amalg_A B/\mathfrak{b}$ este surjectiv de nucleu generat de $i_1(\mathfrak{b}) + i_2(\mathfrak{b})$, rezultă şirul exact de B-module $0 \to (i_1(\mathfrak{b}) + i_2(\mathfrak{b}))\, P^1_{B/A} \to$ $\to P^1_{B/A} \to P^1_{B/\mathfrak{b}/A} \to 0$. Cum idealul generat de $i_1(\mathfrak{b}) + i_2(\mathfrak{b})$ în $P^1_{B/A}/\mathfrak{b}P^1_{B/A}$ coincide cu cel generat de $d^{(n)}(\mathfrak{b})$, deoarece $d^{(n)} = i_2$ şi structura de B-modul al lui $P^1_{B/A}$ este dată de i_1, rezultă şirul exact de $B/\mathfrak{t}$-module $0 \to d^{(n)}(\mathfrak{b})$ $P^1_{B/A}/\mathfrak{b}P^1_{B/A} \to P^1_{B/A}/\mathfrak{b}P^1_{B/A} \to P^1_{B/\mathfrak{t}/A} \to 0$. Cum $P^1_{B/A} \simeq = D(B, \Omega'_{B/A})$ şi $P^1_{B/\mathfrak{b}/A} \simeq$ $\simeq D(B/\mathfrak{b}, \Omega^1_{B/\mathfrak{t}/A})$, avem şirul exact

$$0 \to d^{(1)}\,(\mathfrak{b})\, P^1_{B/A} / \mathfrak{b}\, P^1_{B/A} \to \Omega'_{B/A} \otimes_B B/\mathfrak{b} \to \Omega'_{B/\mathfrak{b}}/A \to 0$$

în care primul termen coincide cu submodulul Im δ, generat de clasele elementelor de forma db cu $b \in \mathfrak{b}$, căci $d = d\,(^1) - i_1$ şi înmulţirea cu elemente din $\mathfrak{b}$ este trivială în $\Omega'_{B/A} \otimes_B B/\mathfrak{b}$.

Se pot indica condiţii în care δ este injectivă. Astfel, fie $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{q}$ $\xrightarrow{q} B/\mathfrak{p}$ morfisme în $\mathbf{QA}/_k$ cu i finit şi injectiv şi $\mathfrak{p}$ un ideal prim regulat astfel încît $\mathfrak{p} \cap A = 0$. Presupunem în plus că există $x_1, \ldots, x_n \in B$ astfel ca $dx_1 \ldots, dx_n$ formează o bază pentru B-modulul $\Omega'_{B/A} \simeq \Omega^1_{B/A}$. Avem atunci şirul exact

$$0 \to \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{B/A} \otimes_B B/\mathfrak{p} \to \Omega^1_{B/\mathfrak{p}/A} \to 0.$$

În adevăr, fie K, L corpurile de fracţii ale lui A şi $B/\mathfrak{p}$; avem atunci diagrama canonică exactă :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \Omega^1_{B/A}/\mathfrak{p}\,\Omega^1_{B/A} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega'_{B/\mathfrak{p}}/A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{p}^B\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^{2B}\mathfrak{p} \arrow[r] & \Omega^1_{B_\mathfrak{p}/A}/\mathfrak{p}\,\Omega^1_{B\mathfrak{p}/A} \arrow[r] & {}^1_{L/k} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

exactitatea liniei secunde rezultînd din [5], iar u se construieşte observînd că $\Omega^1_{L/K} = \Omega^1_{B_\mathfrak{p}/A}/B_\mathfrak{p}\, d(\mathfrak{p})$ şi $\mathfrak{p}\Omega^1_{B_\mathfrak{p}/A} \subset B_\mathfrak{p}\, d(\mathfrak{p})$. Cum $\mathfrak{p}$ este ideal generat de un şir B-regulat $F_1, \ldots, F_m$, atunci $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2$ este $B/\mathfrak{p}$ — modul liber de bază cl F_i (mod $\mathfrak{p}$), deci prima săgeată verticală din diagramă este injectivă

($\mathfrak{p} B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^2 B_{\mathfrak{p}} \simeq \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 \otimes_{B/\mathfrak{p}} L$), deci δ este injectivă. Se poate arăta de asemenea că δ este inversibil la stînga dacă compunerea $A \to B \to B/b$ este morfism neted (cu notațiile din propoziția 2.1).

COROLAR 2.2. *Fie* $A \in \mathbf{QA}/_k$ *și* $\mathfrak{a}$ *un ideal propiu în* A. *Avem atunci șirul exact de* $A/\mathfrak{a}$ — *module :*

$$\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega'_A/\mathfrak{a}\Omega'_A \to \Omega'_A \to 0.$$

Demonstrație. Aplicăm propoziția 2.1 morfismului $k \to A$. Acest rezultat este util în reducerea demonstrării unor afirmații privind algebrele analitice la cazul inelelor de serii convergente. Dacă A și A/a sînt algebre analitice regulate, se poate arăta că aplicația δ rezultă injectivă.

2.3. În [12] este demonstrată următoarea teoremă de caracterizare a modulelor de diferențiale analitice :

Fie $A \to B$ un morfism de algebre analitice și L un B-modul. Morfismul canonic de B-module ξ : Hom_B $(\Omega'_{B/A}, L) \to \mathrm{Der}_A$ (B, L), care asociază unei aplicații u compunerea $u \circ d$, este injectiv. Dacă în plus L este separat în topologia m_B - adică (de exemplu, dacă L este B-modul de tip finit), atunci ξ este bijectiv.

Dăm o altă demonstrație acestei teoreme în cazul particular al morfismului $k \to A$: Considerăm morfismele canonice $A \xrightarrow{i} D(A, L) \xrightarrow{p} A \xrightarrow{j} D(A, \Omega'_A) \to A$ și mulțimile $U = \{u : A \to D(A, L) \mid u$ morfism de inele cu $p \circ u = \mathrm{id}\}$, $V = \{v : D(A, \Omega'_{A_1}) \to D(A, L) \mid v$ morfism de inele cu $p \circ v = q$ și $v \circ j = i\}$. Avem bijecțiile functoriale $\mathrm{Der}_k(A, L) \xrightarrow{\sim} U D \rightsquigarrow \{a \rightsquigarrow a, Da)\}$, $\mathrm{Hom}_A(\Omega'_A, L) \xrightarrow{\sim} Vu \rightsquigarrow 1_A \oplus u$ și construim și bijecțiile reciproce $U \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightleftarrows}} V$ în felul următor : punem $\beta(v) = v \circ j$; apoi fie $(\forall)\, u \in U$, deci există un morfism unic θ cu $\theta i_1 = u$, $\theta i_2 = i$

$$\begin{tikzcd}
 & D(A,L) \arrow[ld, "p"'] & & A \arrow[dd, "i_2"] \\
A & & & \\
A \arrow[rrr, "i_1"'] & & & A \amalg A \arrow[llu, "\theta"'] \arrow[llluu, phantom] \arrow[lllu, "\Delta"]
\end{tikzcd}$$

deci $p \circ \theta \circ i_1 = p \circ \theta \circ i_2 = \mathrm{id}$, de unde $p \circ \theta = \Delta$. Cum θ este nul pe I^2, unde $I = \mathrm{Ker}\,\Delta$, el se factorizează în compunerea $A \amalg A \xrightarrow{\pi} D(A, \Omega'_A) \to D(A, L)$ (π surjecția canonică). Arătăm că $v \in V$, și atunci punem $\alpha(u) = v$. Or, $p \circ v \circ \pi = p \circ \theta = \Delta = q \circ \pi$, deci $p \circ v = q$, $v \circ j = v \circ \pi \circ i_1 = \theta \circ i_1 = u$. Am stabilit așadar în mod natural o bijecție $\mathrm{Der}_k(A, L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(\Omega'_A, L)$ care coincide cu cea din teorema amintită.

PROPOZIȚIA 2.4. *Fie* $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ *morfisme în* $\mathbf{A}/k$. *Avem șirul exact de C-module și aplicații canonice :*

$$\Omega'_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{\eta} \Omega'_{C/A} \to \Omega'_{C/B} \to 0.$$

Demonstraţie. Pentru orice diagramă comutativă în $\mathbf{QA}/k$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
A' \arrow[r] & B'
\end{tikzcd}$$

avem dimorfismul $(B, \Omega'_{B/A}) \to (B', \Omega''_{B'/A'})$, deci un morfism canonic $\Omega'_{B/A} \otimes_B B' \to \Omega'_{B'/A'}$. Aplicînd acest fapt diagramelor

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & B \arrow[d, "\psi"] \\
A \arrow[r, "\psi \circ \varphi"'] & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\psi \circ \varphi"] \arrow[d, "\varphi"'] & C \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
B \arrow[r, "\psi"'] & C
\end{tikzcd}$$

găsim morfismele canonice

$$\Omega'_{B/A} \otimes_B C \to \Omega'_{C/A}, \quad \Omega'_{C'A} \otimes_C C \simeq \Omega'_{C/A} \to \Omega'_{C/B}$$

Dacă L este un C-modul oarecare de tip finit, folosind izomorfismul afirmat în teorema 2.3 şi o proprietate binecunoscută a ,,Hom'', demonstrarea propoziţiei revine la o verificare imediată a exactităţii unui şir de module de derivări.

Observaţii 2.5. 1) Fie $A \xrightarrow{\varphi} B$ un morfism în $\mathbf{A}/k$; aplicînd propoziţia 2.4 morfismelor $A \to \mathrm{Im}\,\varphi \to B$ şi ţinînd cont că $\Omega'_{\mathrm{Im}\varphi/A} = 0$ (conf. corolarului 1.6), rezultă $\Omega'_{B/A} = \Omega'_{B/\mathrm{Im}\varphi}$, adică în studiul lui $\Omega'_{B/A}$ se poate presupune de la început φ injectiv.

2) Propoziţia 2.4 se poate verifica şi pentru morfisme din $\mathbf{QA}/k$. Şirul exact din această propoziţie este întîlnit adesea, ceea ce explică utilitatea modulului de imperfecţie introdus în [17], O_{IV}, anume C-modulul $\gamma_{\varphi,\psi} = \mathrm{Ker}\,(\Omega'_{B/A} \otimes_B C \to \Omega'_{C/A})$. Astfel, o extindere finită de corpuri valuate complete $k \to K$ este separabilă $\rightleftarrows$ $\gamma_{K/k}$ (pentru morfismele $k \to k' \to K$) este nul $\rightleftarrows$ orice derivare $k \to K$ se prelungeşte la o derivare $K \to K$ (folosind 2.3).

COROLARUL 2.6. *Fie* $A \to B$ *un morfism în* $\mathbf{A}/k$ *: avem atunci şirul exact de B-module* $\Omega'_A \otimes_A B \to \Omega'_B \to \Omega'_{B/A} \to 0$.

Demonstraţie. Aplicăm propoziţia 2.5 morfismelor $k \to A \to B$.

COROLARUL 2.7. *Fie* $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ *morfisme netede în* $\mathbf{A}/k$. *Atunci morfismul* η *este injectiv şi* $\dim \psi \circ \varphi = \dim \varphi + \dim \psi$. (*Amintim că notăm* $\dim \varphi = \dim B/\mathfrak{m}_A B$ etc.).

Demonstraţie. Prima afirmaţie rezultă din [17], 0_{IV}, 20.5.7, mai mult conf. corolarului 1.10, $\Omega'_{C/B}$ rezultă C-modul liber, deci şirul exact din propoziţia 2.4 este spart. La fel, $\Omega'_{C/A}$ şi $\Omega'_{B/A} \otimes_B C$ sînt C-module libere şi rangul lui $\Omega'_{B/A} \otimes_B C$ este egal cu rangul lui $\Omega'_{B/A}$.

Observaţii 2.8. 1) Pentru o algebră analitică A (omitem cazul cvasianalitic) avem izomorfismele canonice remarcabile

$$\Omega'_A/\mathfrak{m}_A \Omega'_A \simeq \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 \text{ (cf. 1.5) şi } \check{\Omega}'_A = \mathrm{Hom}_A(\Omega'_A, A) \simeq \mathrm{Der}_k(A, A) \text{ (cf. 2.3).}$$

Presupunem că $A \to B$ este un morfism neted în $\mathbf{A}/k$ şi fie $s_1, \dots, s_n \in B$ elemente astfel încît $ds_1, \dots, ds_n$ formează bază pentru B-modulul liber (conf. corolarului 1.10) $\Omega'_{B/A}$. Cum $\check{\Omega}'_{B/A} \simeq \mathrm{Der}_A(B, B)$, notăm $\left(\frac{\partial}{\partial s_i}\right)$ baza duală în $\mathrm{Der}_A(B, B)$ a lui ds_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Se arată imediat că $(\forall) f \in B$, $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial s_i} ds_i$ şi că pentru orice $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}_A(B, B)$ se poate defini derivarea croşet $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$, deci $\mathrm{Der}_A(B, B)$ are o structură de A-algebră Lie.

2) Teorema 2.3 arată că $\Omega'_{B/A}$ apare ca reprezentantul unui functor **mod** $B \to$ **Ens**, anume functorul $L \rightsquigarrow \mathrm{Der}_A(B, L)$ (L B-modul $R(B)$-adic separat). Aceeaşi proprietate o are şi $P^n_{B/A}$. În adevăr, numind operator diferenţial de ordin $\leqslant n$ cu valori într-un B-modul N orice k-morfism $B \to N$ care se factorizează (unic, căci Im $d^{(n)}$ generează $P^n_{B/A}$ ca B-modul prin i_1, conf. propoziţiei 1.3) printr-un B-morfism $P^n_{B/A} \to N$:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "d^{(n)}"] \arrow[dr] & & P^n \arrow[dl, dashed] \\ & N & \end{tikzcd}$$

Functorul **mod** $B \to$ **Ens** care asociază oricărui N mulţimea generatorilor diferenţiali $B \to N$ de ordin $\leqslant n$, este reprezentabil, reprezentat prin $P^n_{B/A}$.

Fie A o algebră analitică peste k şi $I = \mathrm{Ker}(A \sqcup A \to A)$. Am notat $P^n_A = A \sqcup A/I^{n+1}$ şi am văzut în 1.1 că avem şirul exact spart

$$0 \to I/I^{n+1} \to P^n_A \to A \to 0.$$

Un omomorfism de k-spaţii vectoriale $D: A \to A$ se zice *operator diferenţial pe A de ordin $\leqslant n$* dacă el se factorizează (a posteriori unic) printr-un A-morfism $P^n_A \to A$. Să explicităm cazul $A = k\{X_1, \dots, X_m\}$. A da un operator diferenţial de ordin $\leqslant n$ revine la a da un A-morfism $D: k\{X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_m\} \to k\{X_1, \dots, X_m\}$ nul pe I^{n+1}, unde I este idealul generat de $Y_1 - X_1, \dots, Y_m - X_m$. Fie $f(X, Y) = \Sigma a_{r_1, \dots, r_m;\, s_1, \dots, s_m} X_1^{r_1} \dots X_m^{r_m} Y_1^{s_1} \dots Y_m^{s_m}$ o serie oarecare în $A \sqcup A$; avem atunci

$$f = \Sigma a_{r_1, \dots, r_m;\, s_1, \dots, s_m} X_1^{r_1} \dots X_m^{r_m} ((Y_1 - X_1) + X_1)^{s_1} \dots ((Y_m - X_m) + X_m)^{s_m} =$$

$$= \sum_{s_1 + \dots + s_m \leqslant n} b_{r_1, \dots, r_m;\, s_1, \dots, s_m} X_1^{r_1} \dots X_m^{r_m} Y_1^{s_1} \dots Y_m^{s_m} + \gamma, \quad \text{cu} \quad \gamma \in I^{n+1}$$

şi este uşor de văzut că pentru D există $b_{s_1 \dots s_m} \in A$ astfel încît $D = \sum_{s_1 + \dots + s_m \leqslant n} b_{s_1 \dots s_m} \frac{\partial^{s_1 + \dots + s_m}}{\partial X_1^{s_1} \dots \partial X_m^{s_m}}$, adică obţinem tocmai definiţia uzuală a operator diferenţial cu coeficienţi analitici.

§3. Fie $A \xrightarrow{\varphi} B$ un morfism oarecare în $\mathbf{QA}/k$. În [17] se studiază modulul de diferenţiale Kähler-Cartier pentru structurile de inele ale lui A, B, notat $\Omega^1_{B/A}$, anume reprezentantul functorului **mod** B — **Ens** $L \rightsquigarrow \mathrm{Der}_A(B, L)$. Rezultă imediat un morfism canonic $\Omega^1_{B/A} \to \Omega'_{B/A}$. Fie $K = \bigcap\limits_{\varphi} \mathrm{Ker}\,\varphi$, unde φ parcurge toate B-morfismele de tipul $\Omega^1_{B/A} \to L$ cu L B-modul de tip finit. Notînd B-modulul $\bar{\Omega}^1_{B/A} = \Omega^1_{B/A}/K$ şi $\bar{d} : B \to \bar{\Omega}^1_{B/A}$ compunerea $B \xrightarrow{d} \Omega^1_{B/A} \to \bar{\Omega}^1_{B/A}$, se verifică uşor că aplicaţia canonică $\mathrm{Hom}_B(\bar{\Omega}^1_{B/A}, L) \to \mathrm{Der}_A(B, L)$ $u \rightsquigarrow u \circ \bar{d}$ este izomorfism pentru orice B-modul de tip finit L. În [12] se dau diverse proprietăţi pentru $\bar{\Omega}^1_{B/A}$, mai ales şiruri exacte de tipul celor din corolarul 2.2, propoziţia 2.4 etc. Observăm în plus că $\bar{\Omega}^1_{B/A}$ este B-modul separat în topologia $\mathcal{R}(B)$-adică (în adevăr, fie $(\forall)$ $\bar{\alpha} \in \bigcap\limits_{n \geqslant 0} \mathcal{R}(B)^n \bar{\Omega}^1_{B/A}$ cu $\alpha \in \Omega^1_{B/A}$, deci pentru orice n, $\bar{\alpha} = \sum\limits_{i=1}^{N(n)} \xi_{i,n} \bar{\omega}_i$, $\xi_{i,n} \in \mathcal{R}(B)^n$ şi $\bar{\omega}_i \in \bar{\Omega}^1_{B/A}$, deci $\alpha - \sum\limits_{i=1}^{N(n)} \xi_{i,n}\, \omega_i \in K$, adică pentru orice morfism $\Omega^1_{B/A} \xrightarrow{\varphi} L$ cu L B-modul de tip finit, avem $\varphi(\alpha) = \sum \xi_{i,n}\, \varphi(\omega_i) \in \mathcal{R}(B)^n L$ pentru orice n şi L este separat în topologia $R(B)$-adică, rezultă $\varphi(\alpha) = 0$, deci $\alpha \in K$ adică $\bar{\alpha} = 0$).

Fie acum $Q = \bigcap\limits_{\psi} \mathrm{Ker}\,\psi$, unde ψ parcurge toate homomorfismele de B-module $\Omega^1_{B/A} \to L$ cu L B-modul separat; considerăm B-modulul $\bar{\bar{\Omega}}^1_{B/A} = \Omega^1_{B/A}/Q$ şi aplicaţia compusă $\bar{\bar{d}} : B \xrightarrow{d} \Omega^1_{B/A} \to \bar{\bar{\Omega}}^1_{B/A}$. Este imediat de văzut că aplicaţia canonică $\mathrm{Hom}_B(\bar{\bar{\Omega}}^1_{B/A}, L) \to \mathrm{Der}_A(B, L)$ $u \rightsquigarrow u \circ \bar{\bar{d}}$ este izomorfism pentru orice B-modul $\mathcal{R}(B)$-adic separat L. Ca mai sus se arată că $\bar{\bar{\Omega}}^1_{B/A}$ este B-modul separat.

Dacă $A \xrightarrow{\varphi} B$ este morfism finit de inele, este clar că B-modulele $\Omega^1_{B/A}$, $\bar{\Omega}'_{B/A}$, $\bar{\bar{\Omega}}^1_{B/A}$ coincid cu $\Omega^1_{B/A}$, căci $B \amalg_A B \simeq B \otimes_A B$ şi $K = Q = 0$, în particular $\Omega^1_{B/A}$ este B-modul de tip finit. Dar mai general:

TEOREMA 3.1. *Fie $A \to B$ un morfism oarecare în* $\mathbf{QA}/k$. *Atunci B-modulele $\Omega'_{B/A}$, $\Omega^1_{B/A}$, $\bar{\bar{\Omega}}^1_{B/A}$ sînt canonic izomorfe.*

Demonstraţie I. Arătăm mai întîi că morfismul canonic $\bar{\bar{\Omega}}^1_{B/A} \to \bar{\Omega}^1_{B/A}$ este izomorfism. Este deajuns să arătăm că $K = Q$. O incluziune este trivială; fie atunci $(\forall)$ $z \in K$ şi $\varphi : \Omega^1_{B/A} \to L$ un B-omomorfism de module cu L separat. Arătăm că $\varphi(z) = 0$ şi pentru asta, arătăm că $z \in \mathcal{R}(B)^n\, \Omega^1_{B/A}$ pentru orice n (căci atunci $\varphi(z) \in \mathcal{R}(B) \cdot L$). Or, conf. [17], 0_{IV}, avem şirul exact:

$$\mathcal{R}(B)^{n+1}/\mathcal{R}(B)^{2n+2} \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{B/A}/\mathcal{R}(B)\,\Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{B/\mathcal{R}(B)^{n+1}/A} \to 0.$$

Cum morfismul compus $A \to B \to B/\mathcal{R}(B)^{n+1}$ este cvasifinit (căci $B/\mathcal{R}(B)^{n+1}$ este inel artinian şi aplicăm Cap. I, propoziţia 2.1), deci finit, rezultă că $\Omega_{B/\mathcal{R}(B)^{n+1}/A}$ este $B/_{\mathcal{R}(B)^{n+1}}$ -modul notherian, deci şi B-modul de tip finit. Cum $z \in K$, rezultă că imaginea lui z în $\Omega^1_{B/A}/R(B)^{n+1}\,\Omega^1_{B/A}$ aparţine lui $\mathrm{Im}\,\delta$, deci $z \in \mathcal{R}(B)^{n+1}\,\Omega^1_{B/A} + \mathcal{R}(B)^n\,\Omega^1_{B/A} \subset \mathcal{R}(B)^n \Omega^1_{B/A}$.

II. Arătăm acum că $\overline{\Omega}^1_{B/A}$ este un B-modul de tip finit. Considerăm mai întîi cazul $A = k$, $B = k\{X_1, \ldots, X_n\}$. În acest caz conf. 2.3 aplicația canonică $\mathrm{Hom}_B(\Omega'_{B/A}, L) \to \mathrm{Der}_A(B, L)$ este izomorfism pentru orive B-modul separat. Cum $\overline{\Omega}^1_{B/A}$ este B-modul separat iar $\Omega'_{B/A}$ este B-modul de tip finit, din proprietățile de universalitate respective relativ la derivări rezultă imediat că în acest caz particular $\overline{\Omega}^1_{B/A}$ și $\Omega'_{B/A}$ coincid, deci $\overline{\Omega}^1_{B/A}$ este de tip finit. Fie acum A o algebră cvasianalitică oarecare și $k\{X_1, \ldots, X_n\} \to A$ un morfism finit și aplicînd propoziția 2.3 (ii) din [12], morfismelor $k \to k\{X_1, \ldots, X_n\} \to A$ rezultă că $\overline{\Omega}^1_{A/k}$ este A-modul de tip finit. În fine, dacă $A \to B$ este un morfism oarecare în $\mathbf{QA}/k$, conf. celor de sus și propoziției 2.3 (i) din [12] aplicată morfismelor $k \to A \to B$, rezultă $\overline{\Omega}^1_{B/A}$ B-modul de tip finit.

III. Arătăm că morfismul canonic $\overline{\Omega}^1_{B/A} \to \Omega'_{B/A}$ este izomorfism, el este evident surjectiv, aplicînd propoziția 1.3 și analogul acesteia pentru $\overline{\Omega}^1_{B/A}$. Fie $I = \mathrm{Ker}(\overline{\Omega}^1_{B/A} \to \Omega'_{B/A})$ și arătăm că $I \subset \mathcal{R}(B)^n\, \overline{\Omega}^1_{B/A}$ pentru orice n și din separarea lui $\overline{\Omega}^1_{B/A}$ va rezulta $I = 0$. Considerăm pentru aceasta diagrama comutativă și exactă:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{R}(B)^{n+1}/\mathfrak{R}(B)^{2n+2} \arrow[rr, "\delta"] \arrow[ddd] & & \overline{\Omega}^1_{B/A}/\mathfrak{R}(B)^{n+1}\overline{\Omega}^1_{B/A} \arrow[r] \arrow[ddd] & \overline{\Omega}^1_{B/\mathfrak{R}(B)^{n+1}/A} \arrow[r] \arrow[ddd] & 0 \\
& \Omega^1_{B/A} \arrow[ur] \arrow[d] & & & \\
& \Omega'_{B/A} \arrow[dr] & & & \\
\mathfrak{R}(B)^{n+1}/\mathfrak{R}(B)^{2n+2} \arrow[rr, "\delta"] & & \Omega'_{B/A}/\mathfrak{R}(B)^{n+1}\Omega_{B/A} \arrow[r] & \Omega'_{B/\mathfrak{R}(B)^{n+1}/A} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Exactitatea primei linii rezultă din [12], propoziția, 2.4, fiind esențial că $\overline{\Omega}^1_{B/A}$ este B-modul de tip finit. Apoi, săgeata verticală din dreapta este izomorfism deoarece $A \to B/(\mathcal{R})B^{n+1}$ este finit. Fie acum $(\forall) z \in I$; din diagrama de mai sus rezultă că $z \in \overline{d}\,(\mathcal{R}(B)^{n+1}) + \mathcal{R}(B)^{n+1}\,\overline{\Omega}^1_{B/A} \subset \mathcal{R}(B)^n\overline{\Omega}^1_{B/A}$ și propoziția este demonstrată.

Observația 3.2. 1) În [12] există o inexactitate, anume se arată pentru un morfism $A \to B$ în $\mathbf{A}/k$, aplicația canonică $\mathrm{Hom}_B(\Omega'_{B/A}, L) \to \mathrm{Der}_A(B, L)$ este izomorfism pentru L B-modul de tip finit și se deduce de aici că $\Omega'_{B/A} \xrightarrow{\sim} \overline{\Omega}^1_{B/A}$ pe motiv că verifică proprietate de universalitate. Dar $\overline{\Omega}^1_{B/A}$ nu este apriori B-modul de tip finit. Corect este să arătăm că θ este izomorfism pentru orice L separat și să folosim faptul că $\overline{\Omega}^1_{B/A}$ este separat. Atunci în diagrama $B \xrightarrow{d} \Omega^1_{B/A} \underset{\theta_2}{\overset{\theta_1}{\rightleftarrows}} \overline{\Omega}^1_{B/A}$ există B-morfismele de module θ_1, θ_2 astfel încît $\overline{d} = \theta_1 \circ d$ și $\theta_2 \circ \overline{d} = d$ și cum $\Omega'_{B/A}$, $\overline{\Omega}^1_{B/A}$ sînt generate ca B-module de $\mathrm{Im}\, d$ și $\mathrm{Im}\, \overline{d}$ conf. propoziției 1.3 și [17], $\mathrm{O_{IV}}$, 20.4.7, rezultă că θ_1, θ_2 sînt izomorfisme reciproce.

2) Fie $A \to B \overset{\varphi}{\to} C$ morfisme în $\mathbf{QA}/k$ şi P un C-modul de tip finit. Morfismul $\mathrm{Hom}_B(\Omega'_{B/A}, P_{[\varphi]}) \to \mathrm{Der}_A(B, P_{[\varphi]})$ este atunci bijectiv. În adevăr, P este un C- modul separat în topologia radicală şi cum $\mathcal{R}(B)P \subset \mathcal{R}(C)P$, rezultă că $P_{[\varphi]}$ este un B-modul de asemenea separat şi aplicăm teorema 3.1.

3) Dacă valoarea lui k este discretă, teorema 3.1 dă rezultate relativ la cazul formal. În plus se poate defini un nou B-modul de diferenţiale verificînd o proprietate de universalitate relativ la module complete. Cum clasa modulelor complete conţine în acest caz clasa modulelor de tip finit şi este închisă în clasa modulelor separate, este imediat că acest modul coincide de asemenea cu cele trei module din teorema 3.1. Generalizăm teorema 1.9 demonstrînd :

COROLARUL 3.3. *Fie* $k \to K$ *o extindere finită de corpuri valuate complete şi* $A = K\{X_1, \ldots, X_n\}$. $\Omega'_{A/K}$ *este un* A*-modul liber de rang* $n + \dim_K (\Omega^1_{K/k})$.

Demonstraţie. Notînd $A_0 = k\{X_1, \ldots, X_n\}$, avem morfismul finit şi injectiv $A_0 \overset{i}{\to} A$. Conf. propoziţiei 2.4 aplicată morfismelor $k \to A_0 \to A$, avem şirul exact de A-module :

$$(*) \qquad \Omega'_{A_0/k} \otimes_{A_0} A \xrightarrow{\xi} \Omega'_{A/k} \longrightarrow \Omega'_{A/A_0} \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{A/A_0} \longrightarrow 0.$$

În plus, ξ este injectiv. (Cum Ω' şi $\bar{\Omega}^1$ coincid pentru morfisme din $\mathbf{QA}/k$ conf. teoremei 3.1, este de ajuns să arătăm că pentru orice A-modul de tip finit L, aplicaţia $\mathrm{Hom}_A(\bar{\Omega}^1_{A/k}, L) \to \mathrm{Hom}_{A_0}(\bar{\Omega}^1_{A_0/k}, L)$ este surjectivă sau echivalent că aplicaţia $\mathrm{Der}_k(A, L) \to \mathrm{Der}_k(A_0, L)$ $D \rightsquigarrow D.i$ este surjectivă. Or, fie $\Delta \in \mathrm{Der}_k(A_0, L)$; construim $D : A \to L$ ţinînd cont că $A = A_0 \otimes_k K$, astfel : $f \otimes_z \rightsquigarrow z \cdot \Delta f$, $f \in A_0$, $z \in K$. Se verifică imediat că D este o derivare şi că $(\forall)$ $u \in A_0$, $D \circ i(u) = D(u \otimes 1) = 1 \circ \Delta u = \Delta u$. Conf. teoremei 1.9, $\Omega'_{A_0/k} \otimes_{A_0} A$ este A-modul liber de rang n şi conf. 1.4, $\Omega'_{A/A_0} = \Omega'_{K/k} \oplus_K A$ este un A-modul liber de rang egal cu $\dim_K (\Omega^1_{K/k})$ şi şirul (*) rezultă spart.

Dacă extinderea $k \to K$ este separabilă şi $A = K\{X_1, \ldots, X_n\}$, atunci $\Omega'_{A/k}$ şi $\Omega'_{A/K}$ sînt A — module libere de acelaşi rang n.

PROPOZIŢIA 3.4. *Fie* k *un corp de caracteristică nenulă* p *şi* $[k \cdot k^p] < \infty$ *şi* $A \to B$ *un morfism în* $\mathbf{QA}/k$. *Atunci* $\Omega^1_{B/A}$ *se identifică cu* $\Omega'_{B/A}$ (*deci şi cu* $\bar{\Omega}^1_{B/A}$, $\bar{\bar{\Omega}}^1_{B/A}$).

Demonstraţie. Considerăm mai întîi cazul $A = k$. Pentru compunerea $k \to B \overset{F}{\to} B'$, unde $B' = B$, iar F este morfismul lui Frobenius $(b \rightsquigarrow b^p)$ avem diagrama canonică şi exactă :

$$\begin{tikzcd}
\Omega^1_{B/k} \otimes_B B' \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \Omega^1_{B'/k} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^1_{B'/B} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\Omega'_{B/A} \otimes_B B' \arrow[r, "\delta'"] & \Omega'_{B'/k} \arrow[r] & \Omega'_{B'/B} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Cum $\Omega^1_{B/k}$ este generat ca B-modul de elementele db cu $b \in B$, atunci morfismul δ este nul (căci transformă $db \otimes 1$ în $d(F(b)) = d(b^p) = pb^{p-1} \cdot db =$

$= 0$) şi la fel, morfismul δ' este nul. Morfismul F este evident cvasifinit, deci finit conf. cap. I, teorema 6.10 şi săgeata verticală din dreapta este un izomorfism şi propoziţia este probată în acest caz. Pentru cazul unui morfism oarecare $A \to B$, propoziţia rezultă din diagrama comutativă şi exactă:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^1_{A/k} \otimes_A B \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^1_{B/k} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^1_{B/A} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\Omega'_{A/k} \otimes_A B \arrow[r] & \Omega'_{B/k} \arrow[r] & \Omega'_{B/A} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Observaţia 3.5. Fie k de caracteristică pozitivă p şi $A \in QA/k$. Conf. lemei de normalizare (Cap. I, teorema 8.1) există un morfism finit şi injectiv $B = k\{X_1, \ldots, X_n\} \to A$. Avem $\Omega'_A \simeq \Omega'_{A/B^p}$ (În adevăr, avem şirul exact de k-morfisme $0 \to \mathrm{Der}_{B^p}(A, L) \to \mathrm{Der}_k(A, L) \xrightarrow{r} \mathrm{Der}_k(B^p, L)$ (r-restricţia). Cum $(\forall)$ $D \in \mathrm{Der}_k(A, L)$, $r(D) = 0$ căci derivarea continuă $r(D)$ este nulă pe $k[X_1^p, \ldots, X_n^p]$ dens în $B^p = k\{X_1^p, \ldots, X_n^p\}$ în topologia radicală, rezultă că $\mathrm{Der}_{B^p}(A, L) \simeq \mathrm{Der}_k(A, L)$, deci $\mathrm{Hom}_A(\Omega'_{A/B^p}, L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(\Omega'_{A/k}, L)$, deci $\Omega'_{A/B^p} \simeq \Omega'_{A/k}$).

3.6. Amintim pe scurt comportarea modulelor de diferenţiale faţă de completare şi schimbare a corpului de bază, studiată în [5].

1) Fie $A \in \mathbf{QA}/k$; derivarea canonică $d : A \to \Omega'_A$ se prelungeşte la o derivare $\hat{d} : \hat{A} \to \hat{\Omega}^1_A \simeq \Omega'_A \otimes_A \hat{A}$ (completare în topologia $\mathcal{R}(A)$-adică). Cum $\hat{\Omega}'_A$ este A-modul de tip finit, atunci conf. proprietăţii de universalitate a lui $\Omega^1_{\hat{A}}$ există şi este unică o aplicaţie $\hat{A}$-liniară $\theta_A : \Omega^1_{\hat{A}} \to \hat{\Omega}'_A$ închizînd diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "d_A"'] & \hat{A} \arrow[d, "\hat{d}_A"'] \arrow[r, "d_{\hat{A}}"] & \Omega^1_{\hat{A}} \arrow[dl, dashed, "\theta_A"] \\
\Omega'_A \arrow[r] & \hat{\Omega}'_A &
\end{tikzcd}$$

În [5] se arată că θ_A este izomorfism; dăm aici o altă demonstraţie valabilă în cazul cînd $(A, \mathfrak{m})$ este o algebră analitică: $\Omega^1_{\hat{A}}$ este $\hat{A}$-modul de tip finit, deci complet, deci $\Omega^1_{\hat{A}} \xrightarrow{\sim} \varprojlim \Omega^1_{\hat{A}}/\mathfrak{n}^p\Omega^1_{\hat{A}}$, unde $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}\hat{A}$ este idealul maximal al lui $\hat{A}$. Fie $\hat{d} : \hat{A} \to \Omega^1_{\hat{A}}$ derivarea canonică; cum $\mathfrak{n}^{p+1}\Omega^1_{\hat{A}} \subset \hat{A} . \hat{d}(\mathfrak{n}^{p+1}) \subseteq \mathfrak{n}^p\Omega^1_{\hat{A}}$, rezultă aplicînd propoziţia 2.4. că $\Omega^1_{\hat{A}} \simeq \simeq \varprojlim \Omega^1_{\hat{A}}/\mathfrak{n}^p\Omega^1_{\hat{A}} \simeq \varprojlim \Omega^1_{\hat{A}}/\hat{A} . \hat{d}(\mathfrak{n}^p) \simeq \varprojlim \Omega^1_{\hat{A}}/\mathfrak{n}^p$. Dar $\hat{A}/\mathfrak{n}^p \simeq A/\mathfrak{m}^p$ şi lanţul de sus se continuă cu $\simeq \varprojlim \Omega'_A/Ad(\mathfrak{m}^p) \simeq \varprojlim \Omega'_A/\mathfrak{m}^p\Omega'_A = \hat{\Omega}'_A$.

2) Fie $k \to K$ o extindere finită de corpuri valuate complete. În Cap. I, 7.8, am definit functorul de schimbare a corpului de bază $QA/k \to Q\ /k (A \hookrightarrow A')$. În [5] se arată că pentru orice $A \in QA/k$ diagrama canonică:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dd, "d_A"'] & A' \arrow[dd] \arrow[dr, "d_{A'}"] & \\
 & & \Omega'_{A'/K} \arrow[dl, dashed, "\theta'_A"] \\
\Omega'_{A/k} \arrow[r] & \Omega'_{A/k} \otimes_A A' \simeq \Omega'_{A/k} \otimes_k K &
\end{tikzcd}$$

se închide printr-un izomorfism θ'_A. Mai mult, $(\forall)\ \mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} A'$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A$ avem $(\Omega'_{A'})_{\mathfrak{p}'} \simeq (\Omega'_A)_{\mathfrak{p}} \otimes_k K$. Iată un argument pentru faptul că θ'_A este izomorfism valabil pentru cazul cînd k are caracteristică $p \neq 0$; *Fie* $B = k\{X_1, \ldots, X_n\} \to A$ un morfism finit şi $B' = K\{X_1 \ldots X_n\} \to A'$ morfismul finit indus. Conf. observaţiei 3.5 avem $\Omega'_{A/k} \simeq \Omega'_{A/B^p}$ şi $\Omega'_{A'/K} \simeq \Omega'_{A'/B'^p}$. Dar cum $B' = B \otimes_{B^p} B'^p$, avem $A' = A \otimes_k K = A \otimes_B B' = A \otimes_B (B \otimes_{B^p} B'^p) = A \otimes_{B^p} B'^p$, deci avem diagrama cocarteziană:

$$\begin{tikzcd}
B^p \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[d] \\
A \arrow[r] & A'
\end{tikzcd}$$

şi morfismele $B^p \to A$, $B'^p \to A'$ fiind finite rezultă $\Omega'_{A/B^p} \otimes_A A' = \Omega'_{A'/B'^p}$. Astfel, $\Omega'_{A'/K} \simeq \Omega'_{A/k} \otimes_A A' \simeq \Omega'_{A/k} \otimes_k K$.

§ 4. În tot acest paragraf presupunem k de caracteristică 0 sau de caracteristică p dar atunci $[k : k^p] < \infty$.

4.1. Fie $\varphi : A \to B$ un morfism în QA/k şi L un B-modul. Numim derivare bună orice derivare $d \in \operatorname{Der}_A (B, L)$, astfel încît L este generat ca B-modul de $\operatorname{Im} d$. Astfel, derivările canonice $d : B \to \Omega'_{B/A}$ şi $d : B \to \Omega^1_{B/A}$ sînt bune. Vom nota $\operatorname{Der}^*_A (B, L)$ mulţimea A-derivărilor bune $B \to L$. Fie M un A-modul şi N un B-modul. Pentru $d \in \operatorname{Der}^*_A (A, M)$, *prelungire universală* a lui d, conf. [5], este orice derivare $D \in \operatorname{Der}^*_A (B, N)$ astfel încît dacă în diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "d"'] & B \arrow[d, "D"] \arrow[ddr, "D'"] & \\
M \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[drr, dashed, "h'"'] & N & \\
 & & N'
\end{tikzcd}$$

există A-morfismul h cu $h \circ d = D \circ \varphi$ şi în plus de îndată ce pentru un alt B-modul N' şi orice $D' \in \operatorname{Der}^*_A (B, N)$ există h' cu $h' \circ d = D' \circ \varphi$, atunci există şi este unic un B-morfism $N \to N'$ închizînd diagrama. Dacă există o prelungire universală D a lui d, ea rezultă unică. Astfel, dacă $A \in \mathbf{QA}/k$, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, M este un A-modul şi $d \in \operatorname{Der}_A^* (A, M)$, atunci aplicaţia $D : A_{\mathfrak{p}} \to M_{\mathfrak{p}}$ $a/s \rightsquigarrow \frac{1}{s^2} [s(1 \otimes da) - a(1 \otimes ds)]$ este o prelungire universală a lui d.

Dacă B este o k-algebră astfel încît există un morfism de tip finit de k-algebre cu $A \in \mathbf{QA}/k$ şi M este un A-modul de tip finit, atunci pentru orice $d \in \operatorname{Der}_A^* (A, M)$ există o prelungire universală $D \in \operatorname{Der}_A^* (B, N)$ cu N cu B-modul de tip finit convenabil, în particular pentru $M = \Omega'_A$ şi $d : A \to \Omega'_A$ derivarea canonică, există o prelungire universală Ω'_B care depinde în general de morfismul $A \to B$.

Fie $\Omega_A^* = \begin{cases} \Omega'_{A/k} & \text{dacă } k \text{ are caracteristica } 0. \\ \Omega'_{A/k^p} & \text{dacă } k \text{ are caracteristica } p \neq 0. \end{cases}$

Pentru orice $p \in \operatorname{Spec} B$, notăm cu L, corpul de fracţii al lui $B/\mathfrak{p}$ şi fie Ω_B^*, $\Omega_{B_{\mathfrak{p}}}^{*1}$, $\Omega_L^{*1} \simeq \Omega_{B_{\mathfrak{p}}}^{*1} \otimes_{B_{\mathfrak{p}}} L$, prelungirile universale (care există) ale lui Ω_A^*.

4.2. În [5], lema 3.1.3 se arată că *dacă* $A \xrightarrow{\varphi} B$ *este un morfism de tip finit şi injectiv* cu $A \in \mathbf{QA}/k$ *şi* B *inele integre de* corpuri de fracţii K, L, atunci $g_L(\Omega_L^{*1}) = \dim A + \operatorname{gr} \operatorname{tr}_K L + e$.

Am notat e întregul $e = \begin{cases} 0 \text{ dacă } k \text{ are caracteristică } 0. \\ \log [k : k^p]/\log p \text{ dacă } k \text{ are caracteristica} \\ p \neq 0 \text{ şi } [k : k^p] < \infty. \end{cases}$

Dacă k este perfect, în particular algebric închis, atunci $e = 0$. Apoi pentru A-modul de tip finit M convenim să notăm $g_A (M)$ numărul minim de generatori ai lui M. Dacă A este integru şi K corpul său de fracţii, atunci $g_A (M) = \dim_K (M \otimes_A K)$. Iată o consecinţă directă a acestui rezultat :

PROPOZIŢIA 4.3. *Fie* $A \in \mathbf{QA}/k$ *integră* (*deci locală*) *şi* K *corpul ei de fracţii. Presupunem îndeplinită una din condiţiile* :

1) k *perfect* (*deci* $e = 0$).

2) *Există un morfism finit şi injectiv* $B = k \{X\} \to A$ *care dă extindere finită separabilă între corpurile de fracţii. Atunci* $\dim_K (\Omega'_A \otimes_A K) = \dim A$.

Demonstraţie. Fie k perfect. Facem $B = A$ şi $\varphi = \mathrm{id}$; în rezultatul mai sus amintim (5.2). Avem atunci $g_K(\Omega_K^*) = \dim A$, iar Ω_K^* este prelungirea universală a lui Ω'_A la corpul K al fracţiilor lui A, deci $\Omega_K^* = (\Omega'_A)_0 = \Omega'_A \otimes_A K$. Astfel, $\dim_K (\Omega'_A \otimes_A K) = \dim A$.

Propoziţia 4.3 are loc în condiţii mai generale asupra lui k, anume pentru k de caracteristică 0 sau $[k : k^p] < \infty$, dar demonstraţia este mai dificilă.

Ne situăm în ipoteza 2. Avem şirul exact

$$\Omega_B^1 \otimes_B A \to \Omega'_A \to \Omega'_{A/B} \to 0$$

în care $\Omega'_{A/B} = \Omega^1_{A/B}$ este A-modul de torsiune, deoarece $(\forall)$ $x \in A$, polinomul minimal f al lui x în raport cu corpul fracţiilor lui B este din $B[X]$ şi cum x

este separabil peste B_0 avem $f'(x) \neq 0$. Dar $f(x) = 0$, deci $f'(x)\,dx = 0$. Or, dacă x parcurge un sistem de generatori ai B-algebrei A, atunci $\Omega'_{A/B}$ este generat de $d(x)$ ca A-modul. Tensorînd cu $\otimes_A K$ obţinem şirul exact $\Omega'_B \otimes_B K \to \Omega'_A \otimes_A K \to 0$ şi cum Ω'_B este B-modul liber de rang, n, $\dim_K(\Omega'_A \otimes_A K) \leqslant n$. Notăm $\dfrac{\partial}{\partial X_i}$ cele n derivări canonice ale lui B în B, care cu o teoremă binecunoscută se prelungesc unic la derivări $K \to K$ (căci extinderea $B_0 \to K$ este separabilă) ; prin restricţie la A obţinem n k-derivări $D_i : A \to K$ care îşi iau valorile într-un acelaşi A-submodul de tip finit al lui K şi sînt liniar independente peste A, căci $D_i(X_j) = \delta_{ij}$, deci există în $\Omega'_A \otimes_A K$ cel puţin n elemente liniar independente peste K.

Fie $A \xrightarrow{\varphi} B$ un morfism de tip finit de k-algebre cu $A \in \mathbf{QA}/k$ şi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$. Aplicînd 4.2 morfismului $A/\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \to B/\mathfrak{p}$ şi notînd K, L corpurile de fracţii ale capetelor iar $N(\mathfrak{p}) = g_L(\Omega^{*1}_L)$

$$N(\mathfrak{p}) = \operatorname{grtr}_K L + \dim A/\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) + e. \tag{1}$$

Pe de altă parte, corolarul 2.2 aplicat morfismelor $k \to B_\mathfrak{p} \to L$ dă şirul exact de L-spaţii vectoriale $0 \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{d^*} \Omega^{*1}_{B_\mathfrak{p}}/\mathfrak{m}\Omega^{*1}_{B_\mathfrak{p}} \to \Omega^{*1}_L \to 0$, unde $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$, şi d^* este indus de diferenţiala $d : B_\mathfrak{p} \to \Omega^{*1}_{B_\mathfrak{p}}$. Rezultă atunci, aplicînd lema lui Nakayama, egalităţile :

$$N(\mathfrak{p}) = g_L(\Omega^{*1}_{B_\mathfrak{p}}/\mathfrak{m}\Omega^{*1}_{B_\mathfrak{p}}) - g_L(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = g_{B_\mathfrak{p}}(\Omega^{*1}_{B_\mathfrak{p}}) - g_{B_\mathfrak{p}}(\mathfrak{m}) \tag{2}$$

Presupunem acum că $B = A$, $\varphi = \mathrm{id}$; va rezulta atunci că pentru orice $A \in \mathbf{QA}/k$ şi orice $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, avem $g_{A_\mathfrak{p}}(\Omega^{*1}_{A_\mathfrak{p}}) \geqslant \dim A_\mathfrak{p} + \dim A/\mathfrak{p} + e$. Dacă A este integru, atunci conf. Cap. I, corolarului 8.2, rezultă $g_{A_\mathfrak{p}}(\Omega^{*1}_{A_\mathfrak{p}}) \geqslant \dim A + e$. În acest caz, din (1), (2) rezultă că $A_\mathfrak{p}$ este inel regulat $\rightleftarrows g_{A_\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}) = \dim A \rightleftarrows g_{A_\mathfrak{p}}(\Omega^{*1}_{A_\mathfrak{p}}) = \dim A + e$.

PROPOZIŢIA 4.4. *Fie* $A \xrightarrow{\varphi} B$ *un morfism de tip finit de k-algebre,* $A \in \mathbf{QA}/k$ *şi* $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ *ideale prime în* B ; *atunci* $N(\mathfrak{p}) - N(\mathfrak{p}') = \dim B_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}'}$.

Demonstraţie. Fie K, L corpurile de fracţii ale lui $A/\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ şi $B/\mathfrak{p}$ şi analog K', L'. Avem $N(\mathfrak{p}) = \operatorname{gr\,tr}_K L + \dim A/\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) + e$ şi $N(\mathfrak{p}') = \operatorname{gr\,tr}_{K'} L' + \dim A/\varphi^{-1}(\mathfrak{p}') + e$, deci $N(\mathfrak{p}) - N(\mathfrak{p}') = (\dim A/\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) + \operatorname{gr\,tr}_K L) - (\dim A/\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) + \operatorname{gr\,tr}_{K'} L')$. Să observăm însă că $g_{B_\mathfrak{p}}(\Omega^{*1}_{B_\mathfrak{p}}) = g_{B_\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}) + \dim A/\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) + \operatorname{gr\,tr}_K L + e$ şi că pentru $A = B$ şi $\varphi = \mathrm{id}$ avem $g_{B_\mathfrak{p}}(\Omega^{*1}_{B_\mathfrak{p}}) = g_{B_\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}) + \dim B/\mathfrak{p} + e$, de unde obţinem $\dim A/\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) + \operatorname{gr\,tr}_K L = \dim B/\mathfrak{p}$ şi analog $\dim A/\varphi^{-1}(\mathfrak{p}') + \operatorname{gr\,tr}_{K'} L' = \dim B/\mathfrak{p}'$, de unde rezultă atunci că $N(\mathfrak{p}) - N(\mathfrak{p}') = \dim B/\mathfrak{p} - \dim B/\mathfrak{p}' = \dim B_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}'}$.

COROLARUL 4.5. *Fie $A \to B$ un morfism de tip finit de k-algebre cu $A \in \mathbf{QA}/k$ şi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$ astfel ca inelul $B_{\mathfrak{p}}$ este integru. Afirmaţiile următoare sînt echivalente :*

(a) *$B_{\mathfrak{p}}$ este regulat ;*

(*b*) *$\Omega^{*1}_{B_{\mathfrak{p}}}$ este $B_{\mathfrak{p}}$-modul liber.*

Demonstraţie. Fie $\mathfrak{p}' = \operatorname{Ker}(B \to B_{\mathfrak{p}})$. Cum $B_{\mathfrak{p}}$ este integru, $\mathfrak{p}'$ este prim şi $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$. În diagrama canonică

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr] \arrow[dr] & & B_{\mathfrak{p}} \arrow[dl] \\
& B_{\mathfrak{p}'} &
\end{tikzcd}$$

cum $\mathfrak{p}' \cdot B_{\mathfrak{p}} = 0$ rezultă $\mathfrak{p}' B_{\mathfrak{p}'} = 0$, deci $B_{\mathfrak{p}'}$ este corp şi cum $B_{\mathfrak{p}'} = (B_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}' B_{\mathfrak{p}}}$, $B_{\mathfrak{p}'}$ este chiar corpul fracţiilor lui $B_{\mathfrak{p}}$. Conf. propoziţiei 4.4 avem însă $N(\mathfrak{p}') - N(\mathfrak{p}) = \dim B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}' B_{\mathfrak{p}} = \dim B_{\mathfrak{p}}$ şi cum $N(\mathfrak{p}) = g_{B_{\mathfrak{p}}}(\Omega^{*1}_{B_{\mathfrak{p}}}) - g_{B_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p} B_{\mathfrak{p}})$, etc., rezultă :

$$g_{B_{\mathfrak{p}'}}(\Omega^{*1}_{B_{\mathfrak{p}'}}) - g_{B_{\mathfrak{p}'}}(\mathfrak{p}' B_{\mathfrak{p}'}) - g_{B_{\mathfrak{p}}}(\Omega^{*1}_{B_{\mathfrak{p}}}) + g_{B_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p} B_{\mathfrak{p}}) = \dim B_{\mathfrak{p}}. \tag{3}$$

(a) $\Rightarrow$ (*b*). Fie $B_{\mathfrak{p}}$ regulat, adică $g_{B_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p} B_{\mathfrak{p}}) = \dim B_{\mathfrak{p}}$; din relaţia (3) rezultă $g_{B_{\mathfrak{p}'}}(\Omega^{*1}_{B_{\mathfrak{p}'}}) = g_{B_{\mathfrak{p}}}(\Omega^{*1}_{B_{\mathfrak{p}}})$. Facem acum remarca : Dacă A este inel integru, K corpul său de fracţii, M un A-modul de tip finit şi în plus $\dim_K(M \otimes_A K) = g_A(M)$, atunci M este A-modul liber. (În adevăr, avem surjecţia $A^n \overset{u}{\to} M \to 0$ cu $n = g_A(M)$ şi tensorînd cu $\otimes_A K$ rezultă surjecţia $K^n \to K^n \to 0$ care este izomorfism şi cum K este A-modul fidel plat, u rezultă izomorfism. Aplicînd această remarcă inelului $B_{\mathfrak{p}}$ şi corpului său de fracţii, observînd totodată că :

$$\Omega^{*1}_{B_{\mathfrak{p}'}} = \Omega^{*1}_{B_{\mathfrak{p}}} \otimes_{B_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{p}'} \tag{4}$$

rezultă că $\Omega^{*1}_{B_{\mathfrak{p}}}$ este $B_{\mathfrak{p}}$ — modul liber.

(b) $\Rightarrow$ (a). Fie $\Omega^{*1}_{B_{\mathfrak{p}}}$ un $B_{\mathfrak{p}}$-modul liber ; atunci conf. (4), $\Omega^{*1}_{B_{\mathfrak{p}}}$ este $B_{\mathfrak{p}'}$-modul liber şi $g_{B_{\mathfrak{p}}}(\Omega^{*1}_{B_{\mathfrak{p}}}) = g_{B_{\mathfrak{p}'}}(\Omega^{*1}_{B_{\mathfrak{p}'}})$, deci din (3) rezultă $g_{B_{\mathfrak{p}'}}(\mathfrak{p} B_{\mathfrak{p}}) = \dim B_{\mathfrak{p}}$, adică inelul $B_{\mathfrak{p}}$ este regulat.

Amintim acum un important criteriu diferenţial de regularitate (4.7), dat în [12] în analogie cu cazul Geometriei algebrice şi stabilim apoi o serie de consecinţe ale sale, unele deja cunoscute dar cu alte demonstraţii.

Dacă A este un inel oarecare şi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, notăm $\dim_{\mathfrak{p}} A = \sup_{\mathfrak{q}} \dim A/\mathfrak{q} \leqslant \dim A$, unde $\mathfrak{q}$ parcurge toate idealele prime minimale din A conţinute în $\mathfrak{p}$.

PROPOZIŢIA 4.6. *Fie* $A \in \mathbf{QA}/k$ *şi* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$; *atunci* $g_{A_{\mathfrak{p}}}((\Omega'_A)_{\mathfrak{p}}) \geqslant \geqslant \dim_{\mathfrak{p}} A$.

Demonstraţie. Fie $\mathfrak{q}$ un ideal prin minimal conţinut în $\mathfrak{p}$ ce realizează $\sup_{\mathfrak{q}} \dim A/\mathfrak{q}$, $n = \dim_{\mathfrak{p}} A = \dim A/\mathfrak{q}$ şi fie $B = k\{X_1, \ldots, X_n\} \to A/\mathfrak{q} = A_1$ un morfism finit şi injectiv de inele. Notînd $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ şi $\mathfrak{r} = \mathfrak{q}_1 \cap B$, avem că $(\Omega'_B)_{\mathfrak{r}} = \Omega'_B \otimes_B B_{\mathfrak{r}}$ este un $B_{\mathfrak{r}}$-modul liber de rang n, deci $n = = g_{B_{\mathfrak{r}}}((\Omega'_B)_{\mathfrak{r}}) \leqslant g((\Omega'_{A_1})_{\mathfrak{p}_1}) \leqslant g((\Omega'_A)_{\mathfrak{p}})$, deoarece dacă $L \to K$ este extinderea corpurilor de fracţii ale lui B şi A_1, atunci rezultă $g((\Omega'_{A_1})_{\mathfrak{p}_1}) \geqslant g(\Omega^{*1}_K) \geqslant \geqslant g(\Omega^{*1}_L) = g((\Omega'_B)_{\mathfrak{r}})$, căci $B_{\mathfrak{r}}$ este regulat şi $\Omega^{*1}_K = (\Omega'_A)_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} K$, $\Omega^{*1}_L = = (\Omega'_B)_{\mathfrak{r}} \otimes_{B_{\mathfrak{r}}} L$.

4.7. Teorema următoare, numită *criteriul iacobian* de regularitate a localizatelor de algebre analitice indică, printre altele, condiţii în care $(\Omega'_A)_{\mathfrak{p}}$ este $A_{\mathfrak{p}}$-modul liber, precizînd astfel propoziţia 4.6. Această teoremă este demonstrată în [5], [12].

Fie A o k-algebră analitică, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ şi $n = \dim_{\mathfrak{p}} A$. Sînt atunci echivalente grupurile de afirmaţii :

I. (a) *inelul local* $A_{\mathfrak{p}}$ *este regulat*;

(b) $(\Omega'_A)_{\mathfrak{p}}$ *este* $A_{\mathfrak{p}}$*-modul liber de rang* n;

Dacă $n = \dim A$, *atunci aceste afirmaţii sînt echivalente şi cu*

(c) *Există un morfism finit şi injectiv* $k\{X_1, \ldots, X_n\} \to A$, *etal în* $\mathfrak{p}$.

II. (a′) $(\Omega'_A)_{\mathfrak{p}}$ *are* m *generatori ca* $A_{\mathfrak{p}}$*-modul*;

(b′) *Există un morfism finit* $k\{X_1, \ldots, X_n\} \to A$, *neramificat în* $\mathfrak{p}$. *Implicaţiile* (c) $\Rightarrow$ (a) $\Rightarrow$ (b), (b′) $\Rightarrow$ (a′) *au loc şi pentru algebre cvasianalitice locale.*

Observaţie. Dacă $k \to K$ este o extindere finită de corpuri valuate complete, $A \in \mathbf{QA}/k$ şi $A' = A \otimes_k K$, $\mathfrak{q}' \in \operatorname{Spec} A'$ şi $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A$, atunci se arată uşor că $\dim_{\mathfrak{p}} A \leqslant \dim A'$, deoarece morfismul $A \to A'$ este finit şi injectiv. Aşadar, dacă $\dim_{\mathfrak{p}} A = \dim A$, atunci $\dim_{\mathfrak{p}'} A' = \dim A'$.

COROLARUL 4.8. *Fie* A, B, *algebre analitice integre peste* k *şi* $\mathfrak{r}$ *un ideal prim în* $A \amalg B$. *Notăm* $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ *imaginile inverse ale lui* $\mathfrak{r}$ *prin morfismele canonice* $A \to A \amalg B$, $B \to A \amalg B$. *Inelul* $(A \amalg B)_{\mathfrak{r}}$ *este regulat dacă şi numai dacă* $A_{\mathfrak{p}}$ *şi* $B_{\mathfrak{q}}$ *sînt regulate.*

Demonstraţie. Dacă $(A \amalg B)_{\mathfrak{r}}$ este regulat, atunci evident $A_{\mathfrak{p}}$, $B_{\mathfrak{q}}$ sînt regulate. Invers, fie $\mathrm{k}_n\{X\} \to A$ un morfism finit şi etal în $\mathfrak{p}$ şi $k_m\{Y\} \to B$ un morfism finit şi etal în $\mathfrak{q}$; atunci morfismul $\mathrm{k}\{X, Y\} \to A \amalg B$ este finit şi etal în $\mathfrak{r}$ şi cum $\mathrm{k}\{X, Y\}$ este regulat, $(A \amalg B)_{\mathfrak{r}}$ rezultă regulat.

În aplicarea teoremei 4.7 am folosit faptul că dacă A este integru şi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, atunci $\dim_{\mathfrak{p}} A = \dim A$.

COROLARUL 4.9. *Fie* $A \in \mathbf{A}/k$ şi $\mathfrak{q}$ *un ideal prim în completatul radical* $\hat{A}$; *inelul* $\hat{A}_{\mathfrak{q}}$ *este regulat* $\rightleftarrows A_{\mathfrak{q} \cap A}$ *este regulat.*

Demonstraţie. Cum morfismul canonic $A \to \hat{A}$ este fidel-plat, atunci morfismul $A_{\mathfrak{p}} \to \hat{A}_{\mathfrak{q}} (\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A)$ este fidel-plat şi cum $\hat{A}_{\mathfrak{q}}$ este regulat, $A_{\mathfrak{p}}$ rezultă regulat. Invers, presupunem $A_{\mathfrak{p}}$ regulat. Ne reducem mai întîi la cazul A integru; cum $A_{\mathfrak{p}}$ este inel integru, există un ideal prim minimal $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{p}$ cu $\mathfrak{r} A_{\mathfrak{p}} = 0$, adică $A_{\mathfrak{p}} = (A/\mathfrak{r})_{\mathfrak{p}}$, deci $\hat{A}_{\mathfrak{q}} = (\hat{A}/\mathfrak{r})_{\mathfrak{q}}$ şi dacă $A_{\mathfrak{p}}$ este regulat, atunci $(A/\mathfrak{r})_{\mathfrak{p}}$ este regulat şi după ipoteza de reducere, $(\hat{A}/\mathfrak{r})_{\mathfrak{q}}$ este regulat, deci $\hat{A}_{\mathfrak{q}}$ este regulat. Putem deci considera A integru şi atunci teorema 4.7 afirmă existenţa unui morfism finit, injectiv şi etal în $\mathfrak{q}$, $B = k\{X\} \to A$, deci morfismul $\hat{B} \to \hat{A}$ este finit şi etal în $\mathfrak{q}$ şi cum $\hat{B}$ este regulat, atunci $\hat{B}_{\mathfrak{q} \cap \hat{B}}$ este regulat, adică $\hat{A}_{\mathfrak{q}}$ este regulat.

COROLARUL 4.10. *Fie* $A \in \mathbf{QA}/k$; *mulţimea* $S(A) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid$ *inelul local* $A_{\mathfrak{p}}$ *nu este regulat*$\}$ *este închisă în topologia Zariski pe* Spec A.

Demonstraţie. Ne reducem mai întîi la cazul A integru. Fie $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ idealele prime minimale din A, aflate printre idealele prime asociate lui 0. Avem relaţia $S(A) = \bigcup_{i=1}^{r} T_i$, unde $T_i = S(A/\mathfrak{p}_i) \cup \operatorname{supp}(\mathfrak{p}_i)\ 1 \leqslant i \leqslant r$.

[În adevăr, $(\forall)\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ există i cu $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}_i$ şi atunci $\mathfrak{p} \in T_i$ căci altfel $(A/p_i)_{\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_i}$ ar fi regulat şi $(\mathfrak{p}_i)_{\mathfrak{p}} = 0$, adică $A_{\mathfrak{p}}$ ar fi regulat, absurd. Apoi, dacă $\mathfrak{p} \in T_i$ şi am avea $\mathfrak{p} \notin S(A)$, ar rezulta $A_{\mathfrak{p}}$ regulat şi cum $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}$ este prim minimal în A, $\mathfrak{p}_i A_{\mathfrak{p}}$ este prim minimal în inelul integru $A_{\mathfrak{p}}$, deci $\mathfrak{p}_i A_{\mathfrak{p}} = 0$, adică $\mathfrak{p} \notin \operatorname{supp} \mathfrak{p}_i$. Cum $\mathfrak{p} \in T_i$, rezultă atunci $\mathfrak{p} \notin S(A/\mathfrak{p}_i)$ adică inelul $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_i A_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$ nu este regulat, absurd]. Cum $\operatorname{Supp} \mathfrak{p}_i = V(\operatorname{Ann} \mathfrak{p}_i)$ este închis Zariski în Spec A, relaţia de mai sus arată că putem presupune inelul A integru (deci local). Aplicînd corolarul 4.5. pentru $B = A$ sau teorema 4.7 (dar numai pentru algebre analitice, observînd că $\dim_{\mathfrak{p}} A = \dim A$), cum Ω'_A este A-modul de tip finit, totul revine la următorul rezultat cunoscut: Dacă A este un inel local noetherian, M un A-modul de tip finit, atunci pentru orice întreg i, mulţimea $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid M_{\mathfrak{p}}$ nu este $A_{\mathfrak{p}}$-modul liber de rang $i\}$ este un închis Zariski.

Observaţia 4.11. Teorema 4.7 este în spiritul criteriilor iacobiene de tip Zariski din Geometria algebrică; în [12] este extins la cazul algebrelor analitice şi criteriul iacobian al lui Nagata: Dacă $A = k\{X_1, \ldots, X_n\}$, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ ideale în A cu $\mathfrak{p}$ prim, atunci inelul local $(A/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{a}} \simeq A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{a} A_{\mathfrak{p}}$ este regulat dacă şi numai dacă există $D_1, \ldots, D_m \in \operatorname{Der}_k(A, A)$, şi elemente $f_1, \ldots, f_m \in \mathfrak{a}$ cu $f_i/1$ generînd idealul $\mathfrak{a} A_{\mathfrak{p}}$ din $A_{\mathfrak{p}}$ astfel încît $\operatorname{Det} \| D_i(f_j) \| \notin \mathfrak{p}$. Din acest rezultat se poate deduce din nou corolarul 5.10, dar numai pentru algebre analitice : Fie $B = k\{X_1, \ldots, X_n\}/\mathfrak{a}$ o algebră analitică ; avem de arătat că dacă inelul $B_{\mathfrak{p}}$ cu $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$ este regulat, la fel este $B_{\mathfrak{p}'}$ pentru orice $\mathfrak{p}'$ suficient de vecin de $\mathfrak{p}$ în Spec B. Or, fie derivările $D_1, \ldots, D_m$ şi elementele $f_1, \ldots, f_m$ ca mai sus şi $f = \operatorname{Det} \| D_i(f_j) \|$, deci $\mathfrak{p} \in D(f)$. Conf. [17], 0_1 există g cu $g \notin \mathfrak{p}$ încît $f_i/1$ generează $\mathfrak{a}A\mathfrak{p}$, pentru orice $\mathfrak{p}' \in D(g)$, deci $B_{\mathfrak{p}'}$ este regulat.

Este de remarcat că dacă $[k : k^p] = \infty$, atunci criteriul lui Nagata nu are loc, căci fie corpul valuat $k = \mathbf{Z}/pZ\,((T))$ şi $A = k\{X, Y\}, f = Y^p - T \cdot X^p$. Cum f este ireductibil în $k\{X\}[Y]$, deci şi în inelul factorial A, idealul $\mathfrak{p} = fA$ este prim şi luăm $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$. Atunci $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}}$ este corp, deci regulat. Pe de altă parte, k-derivările $A \to A$ sînt combinaţii liniare $\dfrac{\partial}{\partial X}, \dfrac{\partial}{\partial Y}$ şi dacă ar exista $D_1, \ldots, D_m, f_1, \ldots, f_m$ etc. cu $\operatorname{Det} \| D_i(f_j) \| \notin \mathfrak{p}$, atunci am avea $f_j = f \cdot \alpha_j$, deci $D_i(f_j) = D_i(f) \cdot \alpha_j + f \cdot D_i(\alpha_j) \in \mathfrak{p}$, căci $D_i(f) = 0$ deoarece $\dfrac{\partial f}{\partial X} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial Y} = 0$, absurd.

Teorema 4.7 arată că este util de găsit condiţii în care pentru o pereche $(A, \mathfrak{p})$, ca în enunţul ei, avem $\dim_{\mathfrak{p}} A = \dim A$. Evident, dacă inelul A este integru sau, mai general, echidimensional, are loc această relaţie.

PROPOZIŢIA 4.12. *Orice algebră analitică redusă* $A = k_n\{X\}/\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}})$, *astfel încît* $\mathfrak{a}$ *este generat de* $h(\mathfrak{a})$ *elemente este inel echidimensional.*

Demonstraţie. Prin definiţie $h(\mathfrak{a}) = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} h(\mathfrak{p}_i)$, unde $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ sînt idealele prime asociate lui $\mathfrak{a}$. Se ştie că $h(\mathfrak{a}) = n - \dim A$ şi cum $\mathfrak{a}$ este generat de $r = h(\mathfrak{a})$ elemente, atunci $h(\mathfrak{p}_i) = r$ pentru orice $i = 1, \ldots, s$, deci $\dim k_n\{X\}/\mathfrak{p}_i = \dim A$ (conf. Cap. I, 8.2) ; $\mathfrak{p}'_i = \mathfrak{p}_i/\mathfrak{a}$ sînt exact idealele prime minimale din A şi $0 = \bigcap\limits_{i=1}^{s} \mathfrak{p}'_i$ este unica descompunere a lui 0 în A, presupus redus ; evident, $\dim A/\mathfrak{p}'_i = \dim k_n\{X\}/\mathfrak{p}_i = \dim A$, deci pentru orice ideal prim minimal $\mathfrak{p}$ din A avem $\dim A/\mathfrak{p} = \dim A$, adică A este echidimensional.

Observaţia 4.13. Pentru orice algebră analitică redusă A, ea este întreg închisă în inelul ei total de fracţii $A_T \rightleftarrows$ este normală. În adevăr, fie A întreg închisă în A_T şi $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ primele asociate lui 0, $0 = \bigcap\limits_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i$. Totul revine la a arăta că $r = 1$, adică A este integru. Or, dacă $r \geqslant 2$, alegem $x \in \mathfrak{p}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r \setminus \mathfrak{p}_1$ şi $y \in \mathfrak{p}_1 \setminus (\mathfrak{p}_2 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_r)$, adică $xy = 0$. Evident, $x + y \notin \mathfrak{p}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_r$ deci $x + y$ nu este divizor zero în A şi luînd $z = \dfrac{y}{x + y}$, rezultă $z \in A_T$. Cum $z^2 = z$, rezultă $z \in A$ şi cum $z = z^2 = z^3 = \ldots$, rezultă $z = 0$, adică $ys = 0$ cu $s \in T$. Cum $y \notin \mathfrak{p}_2$, rezultă $s \in \mathfrak{p}_2$, absurd. Aşadar, pentru spaţii analitice reduse (în sens Serre), cele două noţiuni de normalitate coincid (fibrele sînt întreg închise în inelul lor total de fracţii $\rightleftarrows$ sînt integre şi normale).

PROPOZIŢIA 4.14. *Fie* A *o algebră analitică redusă şi* A' *închiderea sa întreagă în* A. *Incluziunea* $A \hookrightarrow A'$ *este finită.*

Demonstraţie. Fie $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ primele minimale din A şi K_i corpul de fracţii al lui $A_i = A/\mathfrak{p}_i (1 \leqslant i \leqslant s)$. Observăm mai întîi că $(\forall)\, i$, $\varphi_i : A \to A_i$ canonic, avem $\varphi_i(T) = A_i \setminus \{0\}$. [În adevăr, cum mulţimea nondivizorilor zero din A este $T = A \setminus \bigcup_{j=1}^{s} \mathfrak{p}_j$, rezultă $0 \notin \varphi_i(T)$. Fie apoi x cu $\varphi_i(x) \neq 0$, deci $x_s \in \mathfrak{p}_i$. Fie $[1, s] = \sqcup J$, unde $i \in I \rightleftarrows x \notin \mathfrak{p}_i$. Alegem $y_i \in \in \bigcap_{j=1}^{s} \mathfrak{p}_j \mathfrak{p}_i$ şi fie $y = \sum_{j \in J} y_j$; evident, $x + y \notin \bigcup_{j=1}^{s} \mathfrak{p}_j$, deci este nondivizor zero şi $\varphi_i(x + y) = \varphi_i(x)$, adică $\varphi_i(x) \in \varphi_i(T)$]. Aşadar, surjecţia $\varphi_i : A \to A_i$ induce o surjecţie canonică $A_T \to K_i$, de nucleu $\mathfrak{p}_i A_T$ (maximal în A_T) şi astfel ca $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{p} A_T$. În fine, arătăm că morfismul canonic $\theta : A \to \prod_{i=1}^{s} K_i$ este izomorfism. Or, Ker $\theta = \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{p}_i A_T = 0$ căci A fiind redus, $0 = \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{p}_i$; pe de altă parte, θ este surjectiv căci idealele $\mathfrak{p}_i A_T$ sînt comaximale două cîte două. Închiderea întreagă comutînd cu produsul de inele, rezultă că A' este izomorfă cu produsul închiderilor întregi ale lui A_i în K_i şi am redus demonstrarea propoziţiei la cazul A integru. Conf. teoremei 4.7 (implicaţia (a) $\Rightarrow$ ((c)) aplicată idealului prim $\mathfrak{p} = (0)$, există un morfism finit şi injectiv $k\{X_1, \dots, X_n\} \hookrightarrow A$ astfel încît între corpurile de fracţii corespunzătoare avem o extindere separabilă. Cum $k\{X_1, \dots X_n\}$ este normal, atunci conf. [29], ch. III, prop. 11 rezultă că incluziunea $A \hookrightarrow A'$ este finită.

Pentru un inel A punem $c(A) = \{x \in A \mid xA' \subset A\}$, unde A' este închiderea întreagă a lui A în A. Conform unui rezultat bine cunoscut ([33], vol. I, pag. 269), pentru un inel integru A pentru care incluziunea $A \hookrightarrow A'$ este finită, avem că locul nenormal $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid A_\mathfrak{p}$ nu este normal$\} = V(c(A))$ şi este deci un închis Zariski în Spec A. Acest fapt are loc, conf. propoziţiei precedente, în particular pentru algebre analitice integre. Demonstrăm mai general:

COROLARUL 4.15. *Fie A o algebră analitică redusă şi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ pentru care $A_\mathfrak{p}$ este întreg închis. Atunci $c(A) \not\subset \mathfrak{p}$.*

Demonstraţie. Fie $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ idealele prime minimale din A. Conform observaţiei 4.13, $A_\mathfrak{p}$ este integru şi Ker $(A \to A)$ este singurul prim minimal din A conţinut în $\mathfrak{p}$. Fie $\mathfrak{p}_i = \operatorname{Ker}(A \to A_{\mathfrak{p}_i})$, deci $\mathfrak{p}_j \not\subset \mathfrak{p}$ (pentru $j \neq i$). Cum $(A/\mathfrak{p}_i)_{\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_i} = A_\mathfrak{p}$ este normal, rezultă că $c(A_i) \not\subset \mathfrak{p}/\mathfrak{p}_i$ (A_i fiind algebră analitică integră şi aplicînd rezultatul amintit) şi fie $x \in A \setminus \mathfrak{p}$ cu $\varphi_i(x) \in c(A_i)$ şi $y \in \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{p}_j \setminus \mathfrak{p}$. Punem $z = xy$; evident, $z \in A \setminus \mathfrak{p}$ şi arătăm că $z \in c(A)$. Pentru aceasta, fie $(\forall)$ $u \in A'$. Cu notaţiile din demonstraţia propoziţiei 4.14 avem diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d] & A_i \arrow[d] \\
A_T \arrow[r, "\psi_i"] & K_i
\end{tikzcd}$$

şi evident, $\psi_i(A') \subset A'_i$, deci $\psi_i(u) \in A'_i$, adică $\psi_i(xu) \in A_i$ (căci $\psi_i(x) =$

$= \varphi_i(x) \in c(A_i))$. Există deci $x' \in A$ cu $\psi_i(xu - u') = 0$ şi punem $z' = x'y$. Avem $\psi_i(zu - z') = \psi_i(xyu - x'y) = 0$ şi $\psi_j(zu - z') = 0$ pentru $j \neq i$ (căci atunci $\psi_j(u) = 0$). Aşadar, $zu - z' \in \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{p}_i = 0$, deci $zu \in A$.

COROLARUL 4.16. *Pentru o algebră analitică integră A peste un corp perfect, închiderea ei întreagă A' este o algebră cvasianalitică; dacă k este algebric închis, atunci A' este algebră analitică.*

Demonstraţie. Prima parte a corolarului este evidentă; dacă k este algebric închis, atunci conf. Cap. I 6.5, A' este produs de algebre analitice şi A' fiind integru, acest produs se reduce la un singur factor.

Fie $(A, \mathfrak{m})$ o algebră analitică integră peste un corp valuat oarecare k, $K \to L$ o extindere finită a corpului său de fracţii şi fie B un inel astfel ca $A \subset B \subset A'_L$. Ne interesează condiţii suficiente în care incluziunea $\varphi: A \to B$ este un morfism finit. Fixăm diagrama cocarteziană de inele

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "i'"] \\
\hat{A} \arrow[r, "\varphi'"] & \hat{A} \otimes_A B = C
\end{tikzcd}$$

şi observăm că i fiind fidel plat, atunci φ şi φ' sînt concomitent finite, apoi că C noetherian implică B noetherian.

PROPOZIŢIA 4.17. *Presupunem $B \subset K$ şi îndeplinită condiţia următoare: $(\ast)$ topologia $\mathfrak{m}$-adică pe B ca A-modul induce pe A topologia $\mathfrak{m}$—adică (superfluă dacă B este noetherian, conf. lemei Artin-Rees). Dacă φ este cvasifinit, atunci el este finit.*

Demonstraţie. Cum φ este cvasifinit, φ' este la fel. (În adevăr,

$$C/\mathfrak{m}C \simeq \hat{A}/\mathfrak{m}\hat{A} \otimes_{\hat{A}} C \simeq A/\mathfrak{m} \otimes_{\hat{A}} (\hat{A} \otimes_A B) \simeq k \otimes_A B \simeq B/\mathfrak{m}B,$$

adică $\varphi' \cdot i$ este cvasifinit, deci φ este cvasifinit).

Fie acum $j: C \to \hat{C}$ canonic (completare $\mathfrak{m}\hat{A}$-adică). Cum $\hat{C}/\mathfrak{m}\hat{C} \simeq C/\mathfrak{m}C$ rezultă că $j \cdot \varphi'$ este cvasifinit şi fie $x_1, \ldots, x_r \in \hat{C}$ astfel că x_i mod $\mathfrak{m}\hat{C}$ generează $\hat{C}/\mathfrak{m}\hat{C}$ peste k; atunci ele generează şi $Gr\hat{A}$-modulul $Gr\,\hat{C}$ şi cum $\hat{A}$ este complet, conf. [29], ch. II, cor. prop. 6, morfismul $j \cdot \varphi'$ este finit. Propoziţia este imediată de îndată ce arătăm că topologia $\mathfrak{m}\hat{A}$-adică pe C este separată, căci atunci j este injectiv şi cum $j \cdot \varphi'$ este finit iar $\hat{A}$ noehterian, φ' va fi finit. Avem deci de arătat $\bigcap_{p \geqslant 1} \mathfrak{m}^p C = 0$; or, fie $(\forall) z \in \bigcap_{p \geqslant 1} \mathfrak{m}^p C$, $z = \sum b_i \otimes \alpha_i$ cu $b_i \in B$, $\alpha_i \in \hat{A}$. Cum $B \subset K$, $b_i = a_i/a$ cu a_i, $a \in A$ şi $a_i \neq 0$, deci $az \in \hat{A} \cap \varphi'^{-1}(\mathfrak{m}^p C)$ pentru orice $p \geqslant 1$. Dar i fiind plat, din injecţia $A/\mathfrak{m}^v B \cap A \to B/\mathfrak{m}^p B$ deducem injecţia $\hat{A}/(\mathfrak{m}^p B \cap A)\hat{A} \to C/\mathfrak{m}^p C$ (indusă de φ'), deci $\varphi'^{-1}(\mathfrak{m}^p C) \subset (\mathfrak{m}^p B \cap A)\hat{A}$.

În fine, condiţia (∗) din enunţ arată că pentru orice n există $p = p(n)$ cu $\mathfrak{m}^p B \cap \hat{A} \subset \mathfrak{m}^n$. Aşadar, $az \in \hat{A} \cap (\mathfrak{m}^p B \cap \hat{A}) A \subset m^n \hat{A}$ pentru orice $n \geqslant 1$, deci $az = 0$. Morfismul $B \to B$, $x \rightsquigarrow ax$ fiind injectiv şi i' fiind plat, rezultă că morfismul $C \to C$, $x \rightsquigarrow ax$ este injectiv, deci cum $az = 0$, rezultă $z = 0$.

Observaţie. Ipoteza φ cvasifinit este realizată dacă B este noetherian, în particular dacă C este noetherian. În adevăr, φ fiind întreg, B are un număr finit de ideale maximale $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_s$ şi fie $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \ldots \mathfrak{n}_s = \mathfrak{n}_1 \cap \ldots \ldots \cap \mathfrak{n}_s \cdot \mathfrak{n}_i/\mathfrak{m} B$ sînt B-module de tip finit, deci $\dim_k \mathfrak{n}/\mathfrak{m} B < \infty$, deci există $p \geqslant 1$ cu $\mathfrak{n}^p \subset \mathfrak{m} B$. Din şirul exact $0 \to \mathfrak{m} B/\mathfrak{n}^p \to B/\mathfrak{n}^p \to B/\mathfrak{m} B \to 0$ va rezulta φ cvasifinit căci $\dim_k B/\mathfrak{n}^p < \infty$.

CAPITOLUL III

APLICAŢII

§ 1. În acest paragraf dăm cîteva aplicaţii cu caracter geometric ale unor fapte demonstrate în capitolele precedente. Unele din proprietăţile pe care le dăm sînt cunoscute dar primesc aici demonstraţii noi.

1.1. Fie $(X, \mathcal{O}_X)$ un spaţiu analitic peste k. Se ştie că multe proprietăţi locale ale lui X sînt descrise cu ajutorul fibrelor lui $\mathcal{O}_X$, şi se ştie importanţa studiului mulţimilor analitice închise de tipul $S(X) = \{x \in X \mid \mathcal{O}_{X,x}$ nu este regulat$\}$, $N(X) = \{x \in X \mid \mathcal{O}_{X,x}$ nu este normal$\}$, $X_n = \{x \in X \mid \dim \mathcal{O}_{X,x} > n\}$, $\operatorname{Supp} \mathcal{F}$ cu $\mathcal{F} \in \mathfrak{Coh}\, X$ etc. Dacă $x \in X$ şi $\mathfrak{m}_x$ este idealul maximal al fibrei $\mathcal{O}_{X,x}$, pentru spaţiul X există mai multe concepte de dimensiune care redau diferite aspecte ale comportării lui X. Punem $d_1(x) = \dim \mathcal{O}_{X,x}$, $d_2(x) = \dim_k \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, $d_3(x) = \operatorname{Prof}(\mathcal{O}_{X,x})$. Astfel, $S(X) = \{x \in X \mid d_1(x) < d_2(x)\}$ şi se ştie că în general avem inegalităţile $d_3(x) \leqslant d_1(x) \leqslant d_2(x)$, care devin egalităţi dacă $x \notin S(X)$.

PROPOZIŢIA 1.2. *Funcţiile $d_1, d_2 : X \to \mathbf{Z}$ sînt superior semicontinue, iar d_3 inferior semicontinuă.*

Demonstraţie. Se ştie că mulţimea $\{x \in X \mid d_1(x) < n\}$ este deschisă în X pentru orice n, conf. [10] aşa că afirmaţia relativ la d_1 este bine cunoscută. Fie $x \in X$ şi $p = \dim \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$; conf. teoremei 2.5 din Cap. I, există un morfism surjectiv $k\{X_1, \ldots, X_p\} \to \mathcal{O}_{X,x}$, deci o imersie închisă $X \to \mathbf{E}^p$ care transformă x în 0, adică există o vecinătate U a lui x în X astfel încît $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ este o submulţime analitică în $\mathbf{E}^{d_2(x)}$. Astfel, dacă $d_2(x) < n$, această inegalitate are loc pe o vecinătate a lui x.

Pentru demonstrarea afirmaţiei relativ la d_3, X se poate privi în vecinătatea lui x ca o submulţime analitică dintr-un spaţiu afin $\mathbf{E}^p$. Fie $\mathcal{O}_{\mathbf{E}^p,x} = k\{X_1 - x_1, \ldots, X_p - x_p\}$ şi rezoluţia canonică minimală a lui $\mathcal{O}_{X,x}$ ca $\mathcal{O}_{\mathbf{E}^p,x}$-modul:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{E}^p,x}^{q_s} \to \cdots \to \mathcal{O}_{\mathbf{E}^p,x}^{q_0} \to \mathcal{O}_{X,x} \to 0$$

Acest şir exact se ridică la un şir exact de fascicule coerente pe o vecinătate V a lui x:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{E}^p}^{q_s} \to \cdots \to \mathcal{O}_{\mathbf{E}^p}^{q_0} \to \mathcal{O}_X \to 0$$

Pentru orice $y \in V$, notînd $s(y)$ lungimea rezoluţiei canonice minimale a lui $O_{X,Y}$, avem $s(y) \leqslant s(x)$, adică $n - s(y) \geqslant n - s(x)$, adică $d_3(y) \geqslant d_3(x)$, deci mulţimea $\{x \in X \mid d_3(x) \geqslant n\}$ este deschisă în X pentru orice n.

1.3. Dacă X este un spaţiu analitic peste k, $x \in X$ şi $A = O_{X,x}$ atunci conf. Cap. II. 1.9, x este punct simplu pe X dacă şi numai dacă $\Omega'_{A/B}$ este A-modul liber de rang $\dim A$. Pentru cazul cînd k are caracteristica 0, Grothendieck a adus o întărire a acestui rezultat arătînd că x este simplu $\rightleftarrows \Omega'_A$ este A-modul liber (fără a preciza rangul).

În cazul cînd k este de caracteristică $p \neq 0$, această întărire nu funcţionează căci fie $A = D = k\{X\}/(X^2)$, $p = 2$. Cum $\dim A = 0$ şi $\mathfrak{m}_D \neq \mathfrak{m}_D^2$, A nu este inel regulat. Conf. Cap. II, 2.2, pentru idealul $\mathfrak{a} = X^2 k\{X\}$ şi algebra analitică $k\ \{X\}$, avem şirul exact de A-module:

$$\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega'_{:\{X\}}/\mathfrak{a}\Omega'_{:\{X\}} \to \Omega'_D \to 0$$

şi cum $\operatorname{Im} \delta = 0$ (căci $d(x^2) = 0$) iar $\Omega'_{k\{X\}}$ este $k\{X\}$-modul liber de rang 1, rezultă Ω'_A A-modul liber de rang $1 \neq \dim A$.

PROPOZIŢIA 1.4. *Fie k de caracteristică 0 şi X un spaţiu analitic redus peste k, $x \in X$; sînt echivalente afirmaţiile*

(a) x este un punct simplu pe X;

(b) există o vecinătate deschisă U a lui x astfel încît $(\forall)\ y \in U$, $d_2(y) = d_2(x)$.

Demonstraţie (a) $\Rightarrow$ (b) evident, deoarece în vecinătatea unui punct simplu, spaţiul X este o varietate analitică şi funcţia d_2 este local constantă pe o varietate analitică.

(b) $\Rightarrow$ (a) Conf. Cap. II, 1.5, avem izomorfismul $\Omega'_{X,x}/\mathfrak{m}_x\Omega'_{X,x} \simeq \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ care transformă $\widehat{df}$ în $f - \varepsilon(f)$ mod $\mathfrak{m}_x^2$, unde $\varepsilon : O_x \to O_x/\mathfrak{m}_x = k$ canonic. Considerăm o bază $\hat{g}_1, \ldots, \hat{g}_n$, $n = d_2(x)$ a lui $m_x/m_{m_x^2}$ peste k şi ridicăm $g_1, \ldots, g_n$ la nişte secţiuni $g_i \in \Gamma(V, O_x)$ $1 \leqslant i \leqslant n$, V vecinătate a lui x. Restrîngînd-o putem să presupunem $V = U$. Aşadar $\widehat{dg}_1, \ldots, \widehat{dg}_n$ generează $\Omega'_{X,x}/m_x\,\Omega'_{X,x}$ deci conf. lemei lui Nakayama, $dg_1, \ldots, dg_n$ generează Ω'_X pe o vecinătate (O'_X-Modulul Ω^1_X fiind coerent). Arătăm că $dg_1, \ldots, dg_n$ sînt libere peste O_X. Dacă avem $\varphi_1 \cdot dg_1 + \ldots + \varphi_n \cdot dg_n = 0$, atunci valoarea într-un punct oarecare $y \in U$, avem $\varphi_1(y)\, dg_1(y) + \ldots + \varphi_n(y) \cdot dg_n(y) = 0$, dacă $\varphi_i(y) = 0$ pentru orice $y \in U$ (căci $dg_i(y) = g_i - \varepsilon(g_i)$ mod $\mathfrak{m}_y^2$ şi folosim ipoteza $d_2(y) = n$. Secţiunile $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sînt deci local nilpotente şi X fiind redus, rezultă nule. Am arătat deci că $\Omega^1_{X,x}$ este un $O_{X,x}$-modul liber şi k fiind de caracteristică 0, x rezultă simplu pe X.

Observaţie. Prop. 1.4 nu are loc cf. 1.3 pentru k de caracteristică $\neq 0$. Apoi implicaţia (b) $\Rightarrow$ (a) nu are loc dacă X este neredus căci luăm punctul $(0,0)$ în $x = C^1 \times \mathfrak{D}$, unde $\mathfrak{D} = (0, D)$. Pentru un spaţiu analitic X, notăm $T(X) = \{x \in X$ în vecinătatea lui x spaţiul tangent are dimensiunea constantă$\}$.

PROPOZIŢIA 1.5. Pentru orice spaţiu analitic X deschisul $T(X)$ este peste tot dens în X.

Demonstraţie. Fie $x \in X$ fix arbitrar şi U o vecinătate oarecare a lui x. Arătăm că U taie $T(X)$. Restrîngînd U putem presupune că $U = \{y \in X \mid d_2(y) \leqslant d_2(x)\}$. Funcţia $d_2|_U : U \to \mathbf{Z}$ ia atunci numai un număr finit de valori. Există o vecinătate a lui x $W \subset U$ astfel încît $\min\limits_{z \in W} d_2(z) = \liminf\limits_{z \to x} d_2(z)$ şi această egalitate persistă pe o vecinătate V a lui x, $V \subset W$. Fie $t \in V$ un punct în care $d_2(t) = \min\limits_{z \in v} d_2(z)$; atunci $t \in T(X)$ căci d_2 nu creşte în vecinătatea lui t (d_2 este superior semicontinuă conf. propoziţiei 1.2) şi nici nu descreşte din cauza minimului, deci $T(X)$ taie U.

COROLARUL 1.6. *Dacă X este redus şi k de caracteristică 0, atunci mulţimea punctelor simple pe X este un deschis peste tot dens în X.*

Demonstraţie. Este suficient să observăm că $T(X) = X \, S(X)$ conf. propoziţiei 1.4 şi să aplicăm propoziţia 1.5.

Acest corolar este bine cunoscut pentru cazul $k = \mathbf{C}$.

Observaţia 1.7. Dacă X este un spaţiu analitic, $x \in X$ şi inelul $O_{X,x}$ este Cohen-Macauley de dimensiune n, atunci există o vecinătate V a lui x astfel încît $(\forall)\, y \in V$, $\dim O_{X,y} = n$. În plus, mulţimea $CM(X) = \{x \in X \mid O_{X,x}$ nu este inel Cohen-Macauley$\}$ este analitică închisă. (În adevăr, conf. Cap. I, 7.5, inelul $O_{X,x}$ este Cohen-Macauley $\rightleftarrows$ există un morfism finit şi plat $k\{X_1, \ldots, X_n\} \to O_{X,x}$ $(n = \dim O_{X,x})$ căruia îi corespunde un morfism $U \to \mathbf{E}^n$ ducînd x în 0 (cu U vecinătate convenabilă a lui x) şi rezultatul amintit rezultă dintr-un rezultat cunoscut al lui Frisch relativ la platitudinea [14]. Pentru varietăţi analitice avem $CM(X) = \emptyset$, fapt care poate avea loc şi în prezenţa singularităţilor, deoarece există algebre analitice Cohen-Macauley, neregulate.

1.8. Numim pentru moment *ordinară* orice k-algebră analitică pentru care există o algebră analitică artiniană B astfel încît $A \simeq B \{X_1, \ldots, X_n\}$. Aceste inele sînt exact inelele locale ale spaţiilor analitice local izomorfe cu produsul direct dintr-o varietate analitică şi un spaţiu analitic redus la un punct. Pentru orice $A \in \mathbf{A}/k$ considerăm numărul $n(A) = \sup\{p \mid$ există un morfism neted în $\mathbf{A}/k$ de cosursă A şi dimensiune $p\}$. Conf. Cap. I, 3.3, avem $n(\mathrm{A}) = \sup\{n \mid$ există $B \in \mathbf{A}/k$ astfel ca $A \simeq B\{X_1, \ldots, X_n\}\}$.

PROPOZIŢIA 1.9. *Fie $A \in \mathbf{A}/k$; A este ordinară* $\rightleftarrows n(A) \geqslant \dim A$.

Demonstraţie. Dacă $A = B\{X_1, \ldots, X_n\}$ cu B inel artinian, atunci $n(A) \geqslant n$ şi evident $n = \dim A - \dim B = \dim A$. Fie apoi $m = n(A)$, deci $A = B\{X_1, \ldots, X_n\}$ cu $B \in \mathbf{A}/k$, deci $\dim A = \dim B + m$ şi conf. ipotezei rezultă $\dim A - \dim B \geqslant \dim A$, deci $\dim B \leqslant 0$, adică $\dim B = 0$, deci B este artinian şi A rezultă ordinară.

1.10. În [27] se arată că pentru orice $A \in \mathbf{A}/k$, un morfism neted de cosursă A şi dimensiune p există atunci şi numai atunci cînd există o surjecţie de A-module $\Omega'_A \to A^p$. Fie X un spaţiu analitic şi $\mathbf{F} \in \mathbf{Coh}\, X$. Pentru orice $x \in X$ considerăm numărul $s_x = \sup\{p \mid$ există o surjecţie $\mathbf{F}_x \to O^p_{X,x}\}$ şi este uşor de văzut că pentru orice r, mulţimea $\{x \in X \mid s_x < r\}$ este analitică. În încheierea acestui paragraf, probăm că pentru orice spaţiu analitic X, mulţimea $\{x \in X \mid O_{X,x}$ nu este ordinară$\}$ este analitică închisă. (Or, conf. propoziţiei 1.2, această mulţime coincide cu $\{x \in X \mid n(O_{X,x}) < \dim O_{X,x}\}$. Dacă $x \in X$, şi $\mathbf{F} = \Omega^1_X$, atunci avem $s_x = n(O_{X,x})$ şi deci mulţimea $\{x \in X \mid n(O_{X,x}) < r\}$ este analitică închisă şi este de ajuns să amintim că pentru orice $x \in X$, mulţimea $\{x \in X \mid \dim O_{X,x} > r\}$ este de asemenea analitică închisă).

§ 2. Este un fapt binecunoscut ([1], V, 33.1) că dacă X este o varietate analitică complexă de dimensiune n, atunci orice mulţime analitică 1-echicodimensională este reprezentată local de o singură ecuaţie. Ne-a interesat generalizarea acestui rezultat la spaţii analitice (teorema 2.2). Remarcăm în treacăt că dacă (X, O_x) este un spaţiu analitic şi I un ideal coerent al lui O_x, atunci mulţimea $\{x \in X \mid I_x$ nu este ideal principal în inelul $O_{X,x}\}$ este analitică închisă, căci coincide cu Supp $(O_x/I \otimes_{O_X} \check{I})$. În adevăr, în [10] se arată că un ideal I din O_x este inversabil $\rightleftarrows I \otimes_{O_X} \check{I} \simeq O_x$.

2.1. Pentru un inel normal A considerăm următoarea condiţie: $(\ast)$: $(\forall)\ \mathfrak{p} \in$ *Spec* A *cu* $h(\mathfrak{p}) = 1$, *există un ideal* $\mathfrak{p}$-*primar principal.*

În [29] se arată că această condiţie este echivalentă cu faptul că pentru $(\forall)\ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ cu $h(\mathfrak{p}) = 1$, există $n \geqslant 1$ astfel că idealul $\mathfrak{p}^n = A_{\mathfrak{p}} \cap A$ este principal, sau echivalent, pentru orice $x, y \in A$ există $n \geqslant 1$ astfel ca idealul $x^n A \cap y^n A$ este principal. Dacă A este un inel factorial (adică cu descompunere unică în factori primi), atunci A este normal şi satisface condiţia $(\ast)$ deoarece orice ideal prim de mulţime 1 este atunci principal.

TEOREMA 2.2. *Fie* (X, O_x) *un spaţiu normal peste un corp* k *valuat complet, algebric închis şi* $x \in X$. *Sînt echivalente afirmaţiile:*

(a) *Inelul normal* $A = O_{X,x}$ *verifică condiţia* $(\ast)$;

(b) *Pentru orice vecinătate deschisă* U *a lui* x *şi orice mulţime analitică închisă 1-echicodimensională* $M \subset U$ (*pentru orice* $z \in X$, dim $O_{M,z} =$ $=$ dim $O_{X,x-1}$), *există o vecinătate* $V \subset U$ *a lui* x *şi o secţiune* $s \in \Gamma(V, O_x)$ *astfel că* $M \cap V = \{y \in V \mid s(y) = 0\}$.

Demonstraţie. (a) $\Rightarrow$ (b). Fie I idealul Cartan al lui M şi $a = I_x$. Considerăm o descompunere primară $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r$, deci $w(\mathfrak{a}) = w(\mathfrak{q}_1) \cup \ldots \cup w(\mathfrak{q}_r)$ pentru germeni de mulţimi analitice Evident, dacă $w(\mathfrak{q}_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sînt definite local de o singură ecuaţie, atunci $w(\mathfrak{a})$ are aceeaşi proprietate. Ne-am redus la cazul $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ (ideal prim nenul). Cum M este 1-echicodimensională, $\dim_x M = \dim A/\mathfrak{p} = \dim A - 1$ şi cum $\dim A/\mathfrak{p} + \dim A_{\mathfrak{p}} = \dim A$ (A fiind integru şi aplicînd Cap. I, cor. 8.2.), rezultă $h(\mathfrak{p}) = 1$. Dar atunci conf. ipotezei (a) există un ideal $\mathfrak{p}$-primar principal al lui A, deci $w(\mathfrak{p}) = w(fA)$, cu $f \in A$ convenabil.

(b) $\Rightarrow$ (a). Fie $\mathfrak{p}$ un ideal prim în A cu $h(\mathfrak{p}) = 1$. Il ridicăm pe o vecinătate a lui x la un ideal $\mathcal{J}$ $(\mathcal{J}_x = \mathfrak{p})$ şi fie $M = \operatorname{Supp} O_X/\mathcal{J}$ în acea vecinătate. Avem $\dim A/\mathfrak{p} = \dim A - 1$, adică $\dim O_{M,x} = \dim A - 1$, ceea ce se menţine pe o vecinătate a lui x conf. [10] (echidimensionalitatea într-un punct a unui spaţiu analitic se menţine pe o vecinătate). Conf. ipotezei (b) şi teoremei Hilbert a zerourilor avem $\sqrt{\mathcal{J}_x} = \mathfrak{p} = \sqrt{fA}$ cu $f \in A$ convenabil. Fie $fA = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r$ o descompunere primară în A şi $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ idealele prime asociate. A fiind normal, avem $h(\mathfrak{p}_i) = 1$ pentru orice $i = 1, \ldots, r$. Aşadar, cum $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r$, rezultă că $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ pentru orice i. Dar atunci fA rezultă un ideal $\mathfrak{p}$-primar.

COROLAR 2.3. *Dacă* (X, O_X) *este spaţiu normal Stein şi fibrele* $O_{X,x}$ *verifică condiţia* $(\ast)$, *atunci pentru orice mulţime analitică închisă 1-echicodimensională* M, $X \setminus M$ *este deschis Stein.*

Demonstraţie. În [16] se arată că dacă X este spaţiu Stein normal şi dacă orice punct $x \in X$ verifică condiţia (b) din teorema 2.2, atunci complementara oricărei mulţimi M ca în enunţ este un deschis Stein.

În particular, complementarea oricărei curbe analitice dintr-un spaţiu Stein normal de dimensiune 2 (de exemplu din $\mathbf{C}^2$) este un deschis Stein.

PROPOZIŢIA 2.4. *Fie* $f: (X, O_X) \to (Y, O_Y)$ *un morfism finit de spaţii analitice normale peste un corp algebric închis. Dacă fibrele lui* O_X *satisfac condiţia* $(*)$, *la fel şi fibrele fasciculului* O_Y.

Demonstraţie. Aplicăm teorema 2.2 Fie $(\forall)\ y \in Y$ şi $M \subset V$ o mulţime analitică într-o vecinătate V a lui y în Y. Cum morfismul $f|_{f^{-1}(V)}: f^{-1}(V) \to V$ este de asemenea finit şi problema este locală, putem presupune $V = Y$ şi fie $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, f fiind morfism separat, fiecare punct $x_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ are o vecinătate U_i astfel ca $U_i \cap U_j = \emptyset$ pentru $i \neq j$ şi există $\varphi_i \in \Gamma(U_i, O_X)$ cu $f^{-1}(M) \cap U_i = \{z \in U_i \mid \varphi_i(z) = 0\}$. f fiind aplicaţie închisă, mulţimea $W = Y \setminus f\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_i\right)$ este un deschis conţinînd y şi $f^{-1}(W) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ ([4]). Funcţiile φ_i se lipesc pe $U_i \cap U_j = \emptyset$ şi definesc o secţiune $\varphi \in \Gamma(f^{-1}(W), O_X)$. Evident, $f^{-1}(W \cap M) = \{z \in f^{-1}(W) \mid \varphi(z) = 0\}$. Morfismul $f: f^{-1}(W) \to W$ este încă finit şi φ este un element întreg al extinderii de inele $\Gamma(W, O_Y) \to$ $\to \Gamma(f^{-1}(W), O_X)$ ([19], lema 6.3) adică există $a_1, \ldots, a_p \in \Gamma(W, O_Y)$ astfel ca $\varphi^p + a_1 \varphi^{p-1} + \ldots + a_{p-1} \varphi + a_p = 0$. Restrîngînd eventual W, rezultă atunci că avem $W \cap M = \{z \in W \mid a_p(z) = 0\}$ adică inelul normal $O_{Y,y}$ satisface condiţia $(*)$, conf. teoremei 2.2.

Observaţia 2.5. Există spaţii analitice (X, O_X) astfel încît inelele locale $O_{X,x}$ verifică condiţia $(*)$ pentru $x \in X$, dar care nu sînt varietăţi. Astfel, fie $M \subset \mathbf{C}^3$ mulţimea analitică de ecuaţie $z_3^2 = z_1 z_2 \cdot M$ este un spaţiu analitic normal, iar origina din $\mathbf{C}^3$ este evident un punct singular. Considerăm aplicaţia $f: \mathbf{C}^2 \to M$, $(u, v) \rightsquigarrow (u^2, v^2, uv)$ care este un morfism de spaţii analitice (compunînd cu cele trei proiecţii $\mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}$); mai mult, f este un morfism finit şi cum $\mathbf{C}^2$ satisface condiţia $(*)$ în fiecare punct, fibrele lui M satisfac conf. propoziţiei 2.4 de asemenea condiţia $(*)$.

§ 3. În acest paragraf dăm un argument pentru excelenţa algebrelor cvasianalitice, un rezultat cu multiple consecinţe, demonstrat pentru prima oară în [12], în cazul cînd corpul de bază k are caracteristica 0 sau caracteristica p cu $[k : k^p] < \infty$. Kiehl a anunţat valabilitatea generală a rezultatului, fără ipoteză pe corpul valuat complet k. Demonstraţia pe care o dăm mai jos nu este directă, ci foloseşte unele proprietăţi ale inelelor excelente date în [17], Ch. IV, partea II, 7.8.3.

3.1. O k-algebră semilocală noetheriană A se zice *inel excelent* dacă :

1) A este inel catenar şi pentru orice morfism de tip finit de inele $A \to B$, B este catenar.

2) Pentru orice ideal maximal $\mathfrak{m}$ din A, orice ideal prim $\mathfrak{p}$ din $A_{\mathfrak{m}}$ şi orice morfism finit de inele $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{p} \to B$, notînd $i: B \to \hat{B}$, avem $\operatorname{Reg} \hat{B} = (\operatorname{Spec} i)^{-1} (\operatorname{Reg} B)$.

3) Pentru orice ideal prim $\mathfrak{p}$ din A şi orice morfism finit $A/\mathfrak{p} \to B$, Reg B este deschis Zariski în Spec B.

(Pentru un inel B am notat Reg $B = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \mid$ inelul local $B_{\mathfrak{q}}$ este regulat$\}$.)

3.2. Amintim cîteva fapte asupra inelelor excelente demonstrate în *loc. cit.*

Dacă A este inel semilocal excelent, localizatele sale şi A-algebrele finite sînt de asemenea inele excelente, iar mulţimile Reg A, $N(A) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid A_{\mathfrak{p}}$ este normal$\}$, $R_k(A) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid A_{\mathfrak{p}}$ verifică condiţia $R_k\}$ sînt deschişi Zariski în Spec. A. Un inel excelent A este regulat (resp. normal; redus, verifică R_k, verifică S_k, inel Cohen-Macauley) $\rightleftarrows$ completatul radical $\hat{A}$ este la fel. În fine, dacă A este un inel excelent integru, atunci închiderea întreagă a lui A într-o extindere finită a corpului ei de fracţii este A-modul de tip finit.

TEOREMA 3.3. [12]. *Fie k un corp valuat complet de caracteristică 0 sau $[k : k^p] < \infty$. Orice algebră cvasianalitică A peste k este un inel excelent.*

Demonstraţie. Este suficient să considerăm cazul $A = k\{X_1, \ldots X_n\}$ şi verificăm condiţiile 1, 2, 3 de mai sus. Condiţiile 2, 3 din 3.1 se unifică în acest caz astfel : pentru orice $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ şi orice morfism finit de inele $A/\mathfrak{p} \to B$, avem de arătat că Reg B este deschis Zariski în B şi Reg $\hat{B} = (\operatorname{Spec} i)^{-1}$ (Reg B), unde $i : B \to \hat{B}$ este morfismul canonic.

Observăm mai întîi că inelul $A = k\{X_1, \ldots, X_n\}$ este catenar (Cap. II, prop. 6.6) şi că dacă $A \to B$ este un morfism de tip finit, atunci $B = A[Y_1, \ldots, Y_r]/\mathfrak{a}$ şi cum $A[Y_1, \ldots, Y_r]$ este inel regulat (toate localizatele sale în ideale prime sînt regulate), B rezultă inel catenar. Fie apoi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ şi $A/\mathfrak{p} \to B$ un morfism finit de inele. Avem de arătat că dacă $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} \hat{B}$, $\hat{B}_{\mathfrak{q}}$ este regulat $\rightleftarrows B_{\mathfrak{q} \cap A}$ este regulat şi că mulţimea $\{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \mid B_{\mathfrak{q}}$ este regulat$\}$ este un deschis Zariski în Spec B, ceea ce rezultă din Cap. II, 4.9 şi 4.10.

COROLARUL 3.4. *Fie k ca în teorema* 3.3. *şi* $A \in \mathbf{QA}/k$.

(i) *A este inel redus (normal, verifică R_k, verifică S_k, este inel Cohen-Macauley) dacă şi numai dacă $\hat{A}$ este la fel.*

(ii) *Dacă A este algebră analitică, ea este integră dacă şi numai dacă completatul ei $\hat{A}$ este integru.*

Demonstraţie. (i) rezultă din teorema 3.3 şi proprietăţile amintite în 3.2.

(ii) O implicaţie este evidentă (căci morfismul $A \to \hat{A}$ este injectiv). Fie apoi A inel integru, deci închiderea sa întreagă A' este o algebră cvasianalitică normală (conf. Cap. II, 4.14), dacă conf. (i) $\hat{A}'$ este inel normal, deci integru şi cum $\hat{A}$ este subinel al lui $\hat{A}'$, $\hat{A}$ rezultă integru.

Observaţie. Dacă $A \in \mathbf{A}/k$ şi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, atunci $\mathfrak{p}\hat{A} \in \operatorname{Spec} \hat{A}$, conf. corolarului 3.4 (ii). Se verifică uşor [23] că dacă $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ sînt idealele prime asociate ale unui ideal $\mathfrak{a}$ din A, atunci $\mathfrak{p}_1\hat{A}, \ldots, \mathfrak{p}_s\hat{A}$ sînt idealele prime asociate lui $\mathfrak{a}\hat{A}$.

PROPOZIŢIA 3.5. *Fie* $A \in \mathbf{A}/k$ *şi* $B = A\{X_1, \ldots, X_n\}/\mathfrak{r}$ *cu* $\mathfrak{r}$ *ideal prim regulat şi astfel încît* $\mathfrak{r} \cap A = 0$. *Dacă morfismul injectiv* $A \to B$ *este finit iar* B *verifică condiţia* R_k *(resp.* S_k*, regulat, Cohen-Macauley, normal), atunci* A *are aceeaşi proprietate.*

Demonstraţie. Se ştie că $(\forall)\ \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$, $\dim B_{\mathfrak{q}} \leqslant \dim A_{\mathfrak{q} \cap A}$ şi $(\forall)$ $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, există $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ cu $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$. Fie $(\forall)$ $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ şi $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'/\mathfrak{r} \in \operatorname{Spec} B$ cu $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$, atunci $\dim B_{\mathfrak{q}} \leqslant \dim A_{\mathfrak{p}}$. Avem $B_{\mathfrak{q}} = (A\{X_1, \ldots, X_n\}/\mathfrak{r})_{\mathfrak{q}} = A\{X_1, \ldots, X_n\}_{\mathfrak{q}'}/\mathfrak{r}A\{X_1, \ldots, X_n\}_{\mathfrak{q}'}$. Notînd $C = A\{X_1, \ldots, X_n\}_{\mathfrak{q}'}$, idealul prim $\mathfrak{r}C$ este generat de un şir C-regulat iar C este $A_{\mathfrak{p}}$-modul plat. Avem diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & A\{X_1, \ldots, X_n\} \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
A\mathfrak{p} \arrow[r] & C \arrow[r] & B_{\mathfrak{q}} = C/\mathfrak{r}C
\end{tikzcd}$$

(avem $\mathfrak{q}' \cap A = \mathfrak{p}$).

Arătăm că dacă B satisface R_k, atunci A satisface R_k.

În adevăr, fie $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ cu $\dim A_{\mathfrak{p}} \leqslant k$; atunci $\dim B_{\mathfrak{q}} \leqslant k$ şi dacă B verifică R_k, $B_{\mathfrak{q}}$ este regulat, deci $\dim C = \dim B_{\mathfrak{q}} + m$, cu m convenabil deci C este regulat şi cum este $A_{\mathfrak{p}}$-modul plat $A_{\mathfrak{p}}$ este regulat. [În general dacă $A/\mathfrak{a}$ este regulat şi $\mathfrak{a}$ este ideal generat de un şir A-regulat cu $\dim A - \dim A/\mathfrak{a}$ elemente, atunci A este regulat.] Propoziţia va rezulta imediat dacă arătăm că ipoteza că B satisface S_k implică A satisface S_k. Or, fie $(\forall)$ $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Conform [17], ch. IV, partea II, 6.1.2 şi 6.3.1, cum $A_{\mathfrak{p}} \to C$ este plat, rezultă $\dim C = \dim A_{\mathfrak{p}} + \dim C/\mathfrak{p}C$ şi $\operatorname{prof} C = \operatorname{prof} A_{\mathfrak{p}} + \operatorname{prof} C/\mathfrak{p}c$. Cum $C/\mathfrak{p}c$ este local regulat, avem $\dim C - \dim A_{\mathfrak{p}} = \operatorname{prof} C - \operatorname{prof} A_{\mathfrak{p}}$ deci $\dim C - \operatorname{prof} C = \dim A_{\mathfrak{p}} - \operatorname{prof} A_{\mathfrak{p}}$ şi afirmaţia este imediată.

Observaţia 3.6. În [5], 3.4, se demonstrează cîteva fapte remarcabile în legătură cu condiţiile R_k şi S_k. Astfel, dacă $A \in \mathbf{QA}/k$ integră (deci locală) şi Ω'_A verifică S_k (ca A-modul) atunci inelul A verifică S_{k+1} şi R_k, în particular dacă Ω'_A verifică S_1, atunci A este normal.

§ 4. În acest paragraf indicăm unele construcţii cu algebre analitice în legătură cu noţiunea de deformare a spaţiilor.

4.1. Fie $A \in \mathbf{A}/k$; notăm $d(C, A)$ mulţimea tuturor k-algebrelor analitice B pentru care există un k-morfism plat $A \to B$ cu fibra izomorfă cu C. (Prin fibră a unui morfism $A \xrightarrow{\varphi} B$ din $\mathbf{A}/k$ înţelegem obiectul $B/\mathfrak{m}_A B \in \mathbf{A}/k$, cu justificare geometrică evidentă. În [17], 0_{IV}, se arată că dacă φ este plat şi A regulat, atunci B şi fibra $B/\mathfrak{m}_A B$ sînt concomitent reduse, integre, normale, regulate, intersecţii complete etc.). Convenim să identificăm două obiecte B, B' izomorfe printr-un izomorfism compatibil cu A, C. Mulţimea $d(C, A)$ se zice mulţimea *deformărilor* lui C prin A şi nu este vidă căci conţine clasa lui $A \amalg_k C$ (deformarea trivială). Fixînd $C \in \mathbf{A}/k$ se verifică uşor că avem un functor $d(C, .) : \mathbf{A}/k \to \mathbf{Ens}$. Acesta nu este în general reprezentabil căci se verifică imediat că o deformare $B \in d(A, C)$ este trivială $\rightleftarrows$ morfismul de k-algebre $B \to B/\mathfrak{m}_A B \simeq C$ are invers la dreapta şi de aici rezultă că dacă C este un inel de serii convergente (deci obiect proiectiv în $\mathbf{A}/k$ conf. Cap. I, 2.4), atunci pentru orice $A \in \mathbf{A}/k$ singura deformare din $d(C, A)$ este cea trivială.

4.2. O algebră analitică se zice *rigidă* dacă pentru orice inel de serii convergente $A \simeq k_n\{X\}$, mulţimea $d(A, C)$ se reduce la deformarea trivială, adică pentru orice morfism plat $A \to B$ cu $B/\mathfrak{m}_A B = C$ avem $B \simeq A \amalg_k (B/\mathfrak{m}_A B) \simeq B/\mathfrak{m}_A B\,\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Cu remarca de mai sus, orice inel de serii convergente este rigid, nu şi reciproc. Totuşi, intersecţiile complete care sînt rigide sînt regulate. (În adevăr, dacă $C = k_n\{X\}/\mathfrak{a}$ cu $\mathfrak{a}$ ideal regulat generat de $(x_1, \ldots x_p)$, considerăm morfismul $k\{T_1, \ldots, T_p\} \to k_n\{X\}$ care transformă T_i în x_i, $1 \leqslant i \leqslant p$. Conform [17], IV, 6.15, acest morfism este plat şi fibra sa este izomorfă cu C. Dacă C este rigidă, atunci surjecţia $k_n\{X\} \to C$ are invers la dreapta, deci C este regulat).

Geometric, faptul că $C \in \mathbf{A}/k$ este o algebră rigidă înseamnă că dacă $X \xrightarrow{f} S$ este un morfism de spaţii analitice plat într-un punct $x \in X$, cu S varietate şi astfel întîi C este fibra în x a fibrei $X_{f(x)}$, atunci f este local trivial în x.

4.3. Fixăm $A \in \mathbf{A}/k$ şi M un A-modul analitic. Notăm $\mathrm{Ex}(A, M)$ mulţimea claselor (modulo o relaţie de echivalenţă uşor de descris) de perechi (i, p) de morfisme cu $0 \to M \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} A \to 0$ şir exact de k-spaţii vectoriale, $B \in \mathbf{A}/k$, p morfism în $\mathbf{A}/k$ şi în plus, $(\forall)$ $m \in M$ şi $b \in B$, $i(m)b = i(p(b), m)$. Este uşor de văzut că inelul Nagata (care este din $\mathbf{A}/k$ conf. Cap. I, 5.2) $D(A, M)$ aparţine mulţimii $\mathrm{Ex}(A, M)$. În plus, se verifică uşor că mulţimea $\mathrm{Ex}(A, M)$ are o structură de grup abelian şi ca în [17], $\mathrm{O_{IV}}$, 18.3, chiar de A-module, în care $D(A, M)$ este elementul neutru: pentru cl B', cl. $B'' \in \mathrm{Ex}(A, M)$, $0 \to M \xrightarrow{i'} B' \xrightarrow{p'} A \to 0$, $0 \to M \xrightarrow{i''} B'' \xrightarrow{p''} A \to 0$, punem cl. $B' +$ cl $B'' =$ cl B, unde $B = B' \amalg B''$ şi avem şirul exact $0 \to M \xrightarrow{i'-i''} B \xrightarrow{p} A \to 0$, cu p dat de p', p''.

În [27] este dovedit următorul fapt: Dacă k este caracteristică 0 şi $C \in \mathbf{A}/k$, atunci $\mathrm{Ex}(C, C) = 0 \rightleftarrows d(C, D) = 0$, unde $D = k\{X\}/(x^2) \rightleftarrows$ pentru orice $A \in \mathbf{A}/k$, $d(C, A) = 0$.

Consideraţiile de mai sus amintesc de construcţia dată de Yoneda lui Ext^1 în categoria modulelor. De altfel există o legătură strînsă între aceste concepte.

Fie $A \in \mathbf{A}/k$ şi morfismul finit de inele $A \to D(A, \Omega'_A)$ $a \mapsto (a, da)$. Dacă $0 \to M \to N \xrightarrow{u} \Omega'_A \to 0$ este un şir exact de A-module analitice, conf. Cap. I, 5.6, produsul cartezian dat de diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d] \\ D(A, N) \arrow[r, "1 \oplus u"] & D(A, \Omega'_A) \end{tikzcd}$$

este o algebră analitică, notată $A \times_{\Omega'_A} N$. Cu aceste pregătiri se poate construi un morfism de functori:

$$\theta : \mathrm{Ext}(\Omega'_A, .) \to \mathrm{Ex}(A, .)$$

(Pentru orice A-modul de tip finit M, luăm clasa unei extinderi p a lui M prin Ω'_A, $0 \to M \to P \to \Omega'_A \to 0$ şi definim θ_M (cl P) ca fiind clasa algebrei analitice $A \times_{\Omega'_A} P$ în Ex (A, M).

În [27] se arată că toate componentele θ_M sînt injective iar dacă A este algebră analitică redusă peste k algebric închis de caracteristică 0, atunci θ_A este bijectiv. Aşadar, dacă A este C-algebră analitică redusă şi Ext $(\Omega'_A\, A) = 0$, atunci conf. 4.3, A rezultă rigidă.

§ 5. În încheierea lucrării dăm o serie de exemple remarcabile de algebre analitice. Pentru inele locale noetheriene sînt, după cum se ştie, adevărate următoarele implicaţii :

inel regulat $\Rightarrow$ inel Cohen-Macauley $\Rightarrow$ inel Gröebner [22]
$\Downarrow$
inel factorial $\Rightarrow$ inel verificînd $(*)$ $\Rightarrow$ inel normal.

Este interesant de dat exemple de algebre analitice care nu verifică implicaţiile contrare.

5.1. În [22] se dă un exemplu laborios de algebră analitică A normală care nu este inel Gröebner (adică multiplicitatea sa este $\geqslant 1 + \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 - \dim A$), deci nici inel Cohen-Macauley sau regulat. Conform Cap. II, 7.5, rezultă că se pot găsi algebre analitice normale pentru care nu există nici un morfism plat de la un inel de serii convergente în ele.

5.2. În observaţia 2.5 am dat un exemplu de algebră analitică care verifică condiţia $(*)$ din 2.1, fără a fi inel regulat.

5.3. Este imediat că algebra analitică $D = k\{X\}/(X^2)$ a numerelor duale este inel Cohen-Macauley, căci $\dim D = 0$, dar nu este inel regulat.

5.4. Teorema lui Buschbaum arată că orice inel local regulat este factorial. Dăm un exemplu de algebră analitică factorială care nu este regulată. Pentru aceasta amintim o teoremă a lui Grothendieck : Dacă A este un inel local noetherian şi intersecţie completă (adică există un şir exact $0 \to \mathfrak{b} \to B \to A \to 0$ cu B local regulat şi b generat de $\dim B - \dim A$ elemente) şi dacă $(\forall)$ $\mathfrak{p}$ prim cu $h(\mathfrak{p}) \leqslant 3$, $A_{\mathfrak{p}}$ este inel factorial, atunci A este inel factorial.

Fie X suprafaţa $z_1^2 + \ldots + z_5^2 = 0$ din $E = \mathbf{C}^5$; fie x origina din $\mathbf{C}^5$. Evident, $S(X) = \{x\}$. Punem $A = O_{X,x}$ (este o intersecţie completă, nu şi inel local regulat, căci $A = \mathbf{C}\{X_1 \ldots, X_5\}/(\mathbf{X}_1^2 + \ldots + \mathbf{X}_5^2)$). Fie $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ cu $h(\mathfrak{p}) \leqslant 3$ şi $\mathfrak{a}$ fibra în x a idealului Cartan al lui $S(X)$. Evident, $\dim A = 4$ şi $\dim A/\mathfrak{a} = 0$; conform Cap. II, 3.10, $A_{\mathfrak{p}}$ este inel regulat, deoarece $\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{a}$. [Dacă $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$, atunci $\dim A/\mathfrak{p} \leqslant \dim A/\mathfrak{a} = 0$ şi adăugînd $\dim A_{\mathfrak{p}}$ la ambii membri avem $\dim A \leqslant \dim A_{\mathfrak{p}}$, adică $\dim A_{\mathfrak{p}} = \dim A = 4$, deci $h(\mathfrak{p}) = 4$, absurd]. Cum $A_{\mathfrak{p}}$ este regulat, el rezultă factorial şi conform rezultatului amintit al lui Grothendieck, A rezultă factorial.

5.5. Omitem exemple de algebre analitice verificînd condiţia $(*)$, dar care nu sînt inele factoriale şi de algebre analitice normale care nu verifică condiţia $(*)$. Remarcăm totuşi că dacă $A \to B$ este un morfism fidel plat de algebre analitice normale şi B verifică $(*)$, la fel A. (În adevăr, orice ideal $\mathfrak{a}$ din A şi idealul $\mathfrak{a}B$ au acelaşi număr minim de generatori, deoarece dacă elementele $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{a}$ generează $\mathfrak{a}B$, dintre ele se poate extrage un subsistem $x_1, \dots x_p$ minimal care încă generează $\mathfrak{a}B$ şi notînd $\mathfrak{b} = \sum_{i=1}^{p} x_i A$, avem $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}B \cap A = \mathfrak{a}B \cap A = \mathfrak{a}$. Atunci pentru orice $x, y \in A$ cum B satisface $(*)$, din 2.1 rezultă că idealul $x^n B \cap y^n B = (x^n A \cap y^n A) B$ este principal pentru n convenabil deci cu observaţia de sus, idealul $\mathfrak{a} = x^n A \cap y^n A$ rezultă principal.) De aici şi din corolarul 3.4 rezultă că orice algebră analitică normală A satisface $(*)$ de îndată ce $\hat{A}$ satisface aceasta.

În fine, arătăm că dacă A este o algebră analitică normală de dimensiune 2, atunci ea este inel Cohen-Macauley. Este suficient să arătăm că dacă am avea $\dim A \geqslant 2$, atunci $\operatorname{prof} A \geqslant 2$. Or, $(\forall)\, x \in \mathfrak{m}_A$, $x \neq 0$, idealele prime asociate lui xA au înălţimea 1 căci A este inel normal şi cum $\dim A \geqslant 2$, ele sînt distincte de $\mathfrak{m}$, deci reuniunea lor este distinctă de $\mathfrak{m}$, deci există un şir (x, y) A-regulat de elemente din $\mathfrak{m}$.

Primită la redacţie la 20 decembrie 1968

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Calea Griviţei nr. 21, Bucureşti 12

PROPERTIES OF ANALYTIC ALGEBRAS AND OF QUASIANALYTIC ALGEBRAS

ABSTRACT

Let $(X, \mathcal{O}_X)$ be an analytic space over a nondiscrete complete valued field k and $x \in X$. The ring $\mathcal{O}_{X,x}$ is a factor-ring of a convergent power series ring $k\{X_1, \dots, X_n\}$ that is an analytic k-algebra. In this paper we study in detail a more general class of k-algebras so called quasianalytic algebras (which are k-algebras A for which a finite k-morphism $k\{X_1, \dots, X_n\} \to A$ exists). These rings appear naturally in different problems, particularly in that concerned with the change in the ground field.

The main results of the first chapter are 2.4, 2.5, 5.2 and the whole paragraphs 6,7. Theorem 8.1 is a normalization lemma for quasianalytic algebras (related to a sequence of ideals), in analogy with the case of formal algebras ([33]) and affine algebras ([29]).

Chapter two gives the construction and different properties of the differential objects of a morphism between two quasianalytic algebras. We followed the case of rings treated in [17] and the case of analytic spaces sketched in [10]. Some properties given in this chapter are known and we enclosed them for the completion of the exposition. Theorems 3.1, 3.4 are remarkable properties related to the connection between different differential modules. In § 4 are proved some consequences (well known in algebraic geometry) of Jacobi's differential criterion of regularity, established in [12] for analytic algebras.

In the last chapter some geometric applications of the preceeding results are presented. Thus, proposition 1.4 gives a criterion of regularity and theorem 2.2 characterizes the principal analytic sets of a normal analytic space. Finally, some remarkable examples of analytic algebras are given.

BIBLIOGRAFIE

1. S. Abhyankar, *Local analytic geometry*. Acad. Press, 1964.
2. C. Andreian, A. Deleanu, M. Jurchescu, *Topologie, Categorii, Suprafețe riemanniene*. Ed. Academiei, București, 1967.
3. C. Bănică, A. Duma, O. Stănășilă, *Quasianalytic algebras* (va apărea).
4. C. Bănică, O. Stănășilă, *Some remarks on finite morphisms* — Revue Roum. de Math. Pures et Appl., *10* (1967).
5. R.! Berger, R. Kiehl, E. Kunz, H. Nastold, *Differentialrechnung in der Anal. Geom.* Springer, Berlin, 1967.
6. T. Bloom, *Opérateurs différentiels sur un espace analytique*. Sem. P. Lelong, 1967.
7. N. Bourbaki, *Algèbre*. ch. III, Hermann, Paris, 1958.
8. N. Bourbaki, *Algèbre commutative*. ch. I—IV, Hermann, Paris.
9. I. Bucur, *Algebra omologică*. Ed. Didactică, Bucureşti, 1966.
10. H. Cartan, *Séminaire* E. N.S., 1961.
11. H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological algebra*. Princeton Univ. Press, 1956.
12. J. Dieudonné, A. Grothendieck, *Critères différentiels de régularité pour les localisés des algèbres analytiques*. J. of Algebra, 5 (1967).
13. O. Forster, *Zur Theorie der Steinschen Algebren und Moduln*. Math. Z., **97** (1967).
14. J. Frisch, *Points de platitude d'un morphisme analytique*. Inv. Math., *4* (1967).
15. Gh. Galbură, *Corpuri de funcții algebrice și varietăți algebrice*. Ed. Academiei, Bucureşti, 1961.
16. H. Grauert, R. Remmert, *Singularitaten komplexere Mannifaltigkeiter* Math. Z., **67** (1957).
17. A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Éléments de Géométrie Algébrique* O_IO_{IV}, Publ. I.H.E.S.
18. M. Jurchescu, *On the canonical topology of an analytic algebra and of an analytic module*. Bull. Soc. Math. de France, **93** (1965).
19. M. Jurchescu, *Probleme moderne de teoria funcțiilor*. Ed. Academiei, București, 1965.
20. A. Koestner, *Lokale Darstellbarkeit analyt. Mengen* — Münster, 1967.
21. A. Lascu, *Algebră locală*. Ed. Didactică şi Pedagogică, București, 1965.
22. H. Lindel, *Normale, nichtperfekte Räume* — Münster, 1967.
23. B. Malgrange, *Ideals of differentiable functions*. Oxford, 1966.
24. M. Nagata, *Local rings*. Intersc. publishers, 1962.
25. R. Narasimhan, *An introduction to the theory of analytic spaces*. Springer, (Lecture notes), 1966.
26. N. Radu, *Inele locale* vol. I şi II Ed. Academiei, Bucureşti, 1968.
27. W. Schuster, *Deformationen analitischer Algebren*. Inv. math., *6*, (1968).
28. J. P. Serre, *Géometrie algébrique et géométrie analytique*. Ann. Inst. Fourier, 1956.
29. J. P. Serre, *Algèbre locale et multiplicités*. Springer, 1965.
30. O. Stănășilă, *Cîteva observații asupra topologizării modulelor*. St. cerc. mat., *5* (1966).
31. J. Tate, *Rigid analytic spaces*. Publ. IHES, 1965.
32. G. Vrănceanu, *Le lemme de preparation*. Rend. di Palermo, *50* (1926).
33. O. Zariski, P. Samuel, *Commutative Algebra* I, II, Wan Nostrand, 1960.

F 762

TOM. 21, NR. 10
1969

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

INDEX ALFABETIC

	Nr.	Pag.
BALÁSZ, M. și BÎRSAN, F. : Asupra unor metode iterative cu diferențe divizate de ordinul doi și rapiditatea de convergență de ordinul trei pentru rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare	7	975
BALÁZS, M. și GOLDNER, G. : Diferențe divizate în spații Banach și unele aplicații ale lor	7	985
BALTUSCH, FELICIA : Mașini matematice și gramatici generative	6	831
BARSONY-NAGY, ANDREI : Asupra teoremei lui Kutta-Jukovski la profile cu jet	2	205
BARSON-NAGY, ANDREI : Asupra problemei mixte din teoria aripii circulare cu jet	4	527
BARSONY-NAGY, ANDREI : Asupra problemei lui Volterra cu singularități date pentru exteriorul cercului	8	1145
BĂDESCU, L. și MOROIANU, M. : Caracterizarea morfismelor unei scheme în Proj S și aplicații la fascicule ample	10	1449
BĂNICĂ, C., DUMA, A. și STĂNĂȘILĂ, O. : Proprietăți ale spațiilor Stein (Consecințe ale teoremelor A și B)	6	877
BEJU, IULIAN : Asupra dinamicii mediilor continui, cu momente cinetice de ordin superior	10	1465
BERECHET, O. : Asupra ecuației bicalorice	7	997
BERȚI, ȘTEFAN, N. : Aplicații ale teoriei relațiilor în logica matematică	1	3
BÎRSAN, F., vezi BALÁZS, M. : Asupra unor metode iterative cu diferențe divizate de ordinul doi și rapiditatea de convergență de ordinul trei pentru rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare	7	975
BOJA, N. : Despre curbele Bertrand din N_2	4	537
BOTH, NICOLAE : Asupra completitudinii unui sistem de axiome	1	13
BOTH, NICOLAE : O caracterizare sintactică a independenței unui sistem de axiome	3	371
BOTH, NICOLAE : Monotonia în calculul propozițional	4	543
BUTCULESCU, DAN : Generalizarea unei probleme de mișcare plană cu linii libere	4	553
CÎȘLARU, CORNEL : Configurații de ordin infinit	4	561
COCÂRLAN, PAUL vezi ROȘCULEȚ, MARCEL, N. : Transformări de tip lord Kelvin	4	637
COZMA, CIPRIAN vezi IONESCU, VASILE : Problema lui Riemann generalizată în clasa funcțiilor analitice generalizate	10	1485

Nr. Pag.

CREANGĂ-SÂMBOAN, ANCA : Asupra invarianței unui model statistic . . . 7 1005

CRISTEA, VICTORIA : Asupra unei mişcări fluide vîscoase 9 1265

CRISTESCU, ROMULUS : Spații liniare ordonate topologice 5 685

CRUCEANU, ŞTEFAN : Asupra unei metode de stabilire a existenței soluțiilor ecuațiilor funcționale neliniare 6 909

CRUCEANU, ŞTEFAN : Construcția soluțiilor unei ecuații integrale de tip Hammerstein 7 1009

CRUCEANU, V. : Asupra modulelor afine 9 1271

DARIE, CARMEN : Generarea prin metoda lui J. von Neuman a şirurilor de numere pseudoaleatoare 9 1279

DOBRESCU, ANDREI : Asupra grupurilor de mişcări ale unor ecuații ale fizicii matematice (II) 6 915

DOBRESCU-PURICE, LUCIA : Propagarea undelor în spațiul timp conexat în cazul unei ecuații cu derivate parțiale de ordinul II de tip hiperbolic . 2 213

DUMA, ANDREI : Observații asupra conexiunii spectrului prim 1 17

DUMA, ANDREI : Elemente de geometrie analitică peste un corp valuat nearhimedian (I). 4 571

DUMA, ANDREI : Elemente de geometrie analitică peste un corp nearhimedian. (II) Elemente de algebre afinoide 5 711

DUMA, A. vezi BĂNICĂ, C. şi STĂNĂŞILĂ, O. : Proprietățile spațiilor Stein. (Consecințe ale teoremelor A şi B) 6 877

ELIANU, I. P. : Asupra formulei mediei a lui Cauchy 4 591

FABIAN, CSABA : Generarea coeficienților Simpson pentru cazul integralelor multiple 7 1015

FILIPESCU, AVRAM, ŞT. : Asupra unui sistem de ecuații funcționale. 5 739

FORNWALD, F. vezi JANKÓ, B. şi GAIDICI, A. : Asupra rezolvării ecuațiilor funcționale neliniare 4 611

FORNWALD, F. şi GAIDICI, A. : Asupra metodelor convergente de ordinul 3 aplicate la rezolvarea ecuațiilor funcționale neliniare 7 1019

GAIDICI, A. vezi JANKÓ, B. şi FORNWALD, F. : Asupra rezolvării ecuațiilor funcționale neliniare 4 611

GAIDICI, A. şi FORNWALD, F. : Asupra metodelor convergente de ordinul 3 aplicate la rezolvarea ecuațiilor funcționale neliniare 7 1019

GEANĂU, MIRCEA : Asupra unor proprietăți ale spațiilor afine 10 1473

GEORGESCU, ADELINA : Asupra soluțiilor asimptotice ale lui Heisenberg. . . 5 747

GEORGESCU, ADELINA : Criterii de stabilitate liniară a mişcării plan paralele a unui fluid nenewtonian 7 1027

GHEORGHIU, GH. TH. : O clasă particulară de spații cu conexiune afină . . 8 1157

GODINI, G. : Despre cea mai bună aproximare în spații vectoriale normate prin elemente din conuri convexe 6 931

GODINI, G. : Despre o extensiune a teoremei lui Milman 7 1037

GOGONEA, SORIN : Contribuții la studiul unor clase de mişcări în medii poroase 9 1387

GOLDNER, G. vezi BALÁZS, M. : Diferențe divizate în spații Banach şi unele aplicații ale lor 7 985

GRECU, EFTIMIE, I. : Cîmpuri de vectori paraleli în spații A_n cu conexiune afină liniară local euclidiene 3 377

GUIAŞU, SILVIU : Construirea probabilității pe baza informației 1 23

	Nr.	Pag.
HOMENTCOBSCHI, D. : Asupra relaţiilor de salt din electrodinamică	7	1041
IACOB, VIORICA : Asupra determinării potenţialului complex în cazul mişcării fluide în prezenţa unui cilindru mobil	5	751
IANUŞ, STERIU vezi TEODORESCU, ION, D. : Spaţii A_2 de prima speţă cu caracteristice drepte	4	665
IEŞAN, D. Asupra deformării plane generalizate	4	595
IONESCU, VASILE şi COZMA, CIPRIAN : Problema lui Riemann generalizată în clasa funcţiilor analitice	9	1369
IONESCU, VASILE şi COZMA, CIPRIAN : Problema lui Riemann generalizată în clasa funcţiilor analitice generalizate	10	1485
ISTRĂŢESCU, IOANA şi ISTRĂŢESCU, VASILE : Operatori normaloizi (II)	6	937
ISTRĂŢESCU, VASILE vezi ISTRĂŢESCU, IOANA : Opratori normaloizi (II)	6	937
IVAN, C. şi VĂDUVA, I. : Asupra repartiţiei coeficientului de variabilitate	7	1047
JANKÓ, B., FORNWALD, F. şi GAIDICI, A. : Asupra rezolvării ecuaţiilor funcţionale neliniare	4	611
LUSZTIG, GHEORGHE : Coomologia complexelor eliptice	1	33
KECS, WILHELM : Asupra derivării distribuţiilor compuse şi unele aplicaţii ale lor	2	223
KLINCSEK, CEZA : O problemă de index	5	755
KLINCSEK, CEZA vezi VRACIU, G. şi KLINCSEK, IULIA : Metode de rezolvare numerică a problemei de programare pătratică	8	1249
KLINCSEK, IULIA vezi VRACIU, G. şi KLINCSEK, CEZA : Metode de rezolvare numerică a problemei de programare pătratică	8	1249
MARCOV, N. : Teoreme de limită privind funcţiile K_0 şi K_1	3	405
MARCOV, N. : Mişcarea fluidelor vîscoase, electroconductoare, în jurul profilelor subţiri, în cazul special $\sigma_e \mu_e \nu = 1$	5	759
MARCOV, N. : Asupra mişcării fluidelor vîscoase, electroconductoare, în jurul unei plăci plane	7	1063
MARUŞCIAC, I. şi NADIU, GH. : O maşină Turing universală pentru algoritmii normali	1	85
MATEI, I. : Asupra grupului de stabilitate al unui spaţiu A_3 omogen	1	97
MATEI, I. : Asupra spaţiilor A_3 omogene cu grup G ($r \leqslant 7$)	1	101
MATEI, I. : Clasificarea grupurilor lui Lie reale neintegrabile cu şase parametri.	2	235
MĂRGĂRITESCU, EUGEN : Asupra comparării mediilor unor populaţii unidimensionale	8	1169
MIHALYI, MARGARETA : Despre noţiunea de proiectivitate sintactică	3	419
MIHOC, MARIA : Nomograme de genul doi cu scară rectilinie regulată sau proiectivă	1	111
MIHOC, MARIA : Asupra reprezentării ecuaţiilor cu patru variabile, prin nomograme compuse cu puncte aliniate (I)	9	1393
MITITELU, ŞTEFAN : Determinarea cantităţii maxime de materiale care trec printr-o reţea de transport şi distribuţia ei pe arce	3	433
MITITELU, ŞTEFAN : Extinderea unei probleme de maxim la reţelele oarecare de transport	7	1073
MOCANU, GH. : Observaţie asupra unui criteriu de comutativitate în algebre Banach	6	947
NADIU, GH. vezi MARUŞCIAC, I. : O maşină Turing universală pentru algoritmii normali	1	85

	Nr.	Pag.
NÉMETH, A. B. : Metoda iterativă de rezolvare a jocurilor normale difinite, de n persoane	3	439
NEUHAUS, N. : Ecuaţii diferenţiale liniare şi sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare în soluţia cărora apar funcţiile lui Paul Appell	5	773
OBREJA, GH. : Asupra caracteristicii operative şi numărului mediu de probe în cazul unor teste secvenţiale	3	451
PANTAZI, SIMONA : Asupra curbelor de grad minim neolonome	1	119
PASCAL, F. M. : Evaluarea erorii în rezolvarea aproximativă a unor probleme la limită pentru ecuaţia de tip parabolic	7	1083
POPA, VIOREL : Mişcarea plană, staţionară cu suprafaţa liberă printr-o fantă într-un mediu poros omogen	2	251
POPESCU, OCTAVIAN : Asupra unei inegalităţi de tip Kolmogorov	7	1099
POPOVICI, IULIAN : Proprietăţi globale ale conexiunii asociate algebrei numerelor complexe	3	463
RADU, ALEXANDRU, GH. : Toposul prefasciculelor aditive de grupuri abeliene peste o categorie preaditivă mică (I)	1	141
RADU, ALEXANDRU, GH. : Proprietăţi de finitutine în categorii abeliene (II).	1	151
RADU, ALEXANDRU, GH. : Ciururi şi topologii aditive (III)	2	261
RADU, ALEXANDRU, GH. : Toposul abelian al fasciculelor aditive de grupuri abeliene peste un sit preaditiv mic (IV)	2	279
RADU, ALEXANDRU, GH. : Morfisme acoperitoare şi biacoperitoare în topologia aditivă (V).	3	471
RADU, ALEXANDRU, GH. : Categoria fasciculelor în topologia multiplicativ aditivă (VI)	3	479
RADU, ALEXANDRU, GH. : Categoria fasciculelor în topologia epică (VII)	4	617
RADU, ALEXANDRU, GH. : Morfisme şi comorfisme de situri preaditive (VIII).	4	631
RADU, CONSTANTIN, F. : Grupurile de olonomie ale spaţiilor A_5	2	287
RADU, GHEORGHE, GH. : Functorul sursă generalizat	9	1403
RAISCHI, CONSTANTIN, T. : Contexte caracteristice în lingvistica algebrică.	1	123
RĂDULESCU, SILVIA : Asupra stării de tensiune a plăcilor elastice subţiri anizotrope	9	1411
ROŞCULEŢ, MARCEL, N. şi COCÂRLAN, PAUL : Transformări de tip lord Kelvin	4	637
RUS, IOAN, A. : Asupra unei probleme bilocale	10	
SĂCUIU, I. : Dispersia produsului unui număr oarecare de variabile aleatoare independente	6	953
SĂCUIU, I. : Asupra unei generalizări a inegalităţii lui Hölder.	9	1423
SĂVULESCU, C. şi ŞCHIOP, ALEXANDRU : Asupra minimizării pierderilor de energie din reţelele electrice	10	1523
SIMIONESCU, C. : Tensori armonici ai spaţiilor riemann cu grup de mişcări simplu tranzitiv	4	645
SOCOLESCU, DAN : Asupra jeturilor incompresibile mărginitede jeturi auxiliare infinit subţiri	1	161
SOLOMON, STEPHAN-YLAN : Lingvistica algebrică şi teoria modelelor.	7	1107
STAVRE, P. : Asupra curbelor B(ε) din V_n	5	793
STĂNĂŞILĂ, O. vezi BĂNICĂ, C. şi DUMA, A. : Proprietăţi ale spaţiilor Stein (Consecinţe ale teoremelor A şi B)	6	877

Nr. Pag.

STĂNĂȘILĂ, OCTAVIAN : Proprietăți ale algebrelor analitice și ale algebrelor cuasianalitice 10 1533
ȘABAC, ION, GH. : Asupra aproximării mișcării subsonice a unui fluid compresibil în jurul unui obstacol 1 177
ȘABAC, MIHAELA : Functorii derivați ai unor functor aditiv 6 965
ȘANDRU, PETRU : Asupra schemelor π cu contacte și elemente de execuție. . 1 195
ȘCHIOP, ALEXANDRU vezi SĂVULESCU, C. : Asupra minimizării pierderilor de energie din rețelele electrice 10 1485
ȘONERIU, NICOLAE : Însumarea a trei numere rotunjite 4 653
TEODORESCU, ION, D. și IANUȘ, STERIU : Spații A_2 de prima speță cu carracteristici drepte 4 665
TEODORESCU, N. N. : Asupra grupului de mișcări ale spațiilor conform euclidiene 3 483
TIȚĂ, NICOLAE, I. : Asupra bazelor p-apropiate de o bază ortonormală în spații Hilbert 2 357
TIȚĂ, NICOLAE, I. : ω-Baze în spații Hilbert 7 1135
TIȚĂ, NICOLAE, I. : Asupra operatorilor disipativi cu componentă imaginară complet continuă 9 1435
TOMA MARCU, ELEONORA : Asupra unui operator înrudit cu operatorul lui Sestier din analiza algebrică contextuală 3 499
TOMESCU, IOAN : Un algoritm pentru sinteza funcțiilor booleene simetrice. . 4 675
TRANDAFIR, RODICA : Diverse extensiuni ale ,,problemei acului'' a lui Buffon 5 799
ȚEPOSU, IOSIF : Asupra unor generalizări ale ecuațiilor lui Lagrange. . . . 5 805
ȚEVY, IONEL : Asupra punctelor singulare ale unei aplicații continue. . . . 2 361
ȚEVY, IONEL : Asupra unei teoreme a lui Florin Vasilescu 8 1173
UDRIȘTE, C. N. : Introducerea unor invarianți diferențiali intrinseci într-o varietate riemanniană 3 505
UDRIȘTE, C. N. : Grupuri de mișcări în spații Riemann de clasa unu 3 515
VASILESCU, F. H. : Operatori reziduali decompozibil în spații Fréchet. . . . 8 1181
VĂDUVA, I., vezi IVAN, C. : Asupra repartiției coeficientului de variabilitate 7 1047
VRACIU, G., KLINCSEK, GEZA și KLINCSEK, IULIA : Metode de rezolvare numerică a problemei de programare patratică 8 1249
VRĂNCEANU, G. G. : Vectori probabiliștici în spațiul de curbură constantă negativă 9 1441
SZWEELY, T. : Cîmpuri de vectori pe varietăți kähleriene compacte cu curbură olomorfă constantă nenulă 5 819

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date din text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale. Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa Comitetului de redacţie, Calea Griviţei nr. 21, Bucureşti 12.

14 NOV 1969

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

P. CARAMAN. **Homeomorfisme evasiconforme n-dimensionale**, 1967, 594 p., 31 lei.

I. COLOJOARĂ, **Elemente de teorie spectrală**, 1968, 311 p., 19,50 lei.

I. CUCULESCU, **Procese Markov şi funcţii excesive**, 1968, 356 p., 19 lei.

LAZĂR DRAGOŞ, **Magnetodinamica fluidelor**, 1969, 476 p., 27 lei.

ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, **Introducere în hidrodinamica corpurilor poroase**, 1969, 212 p., 8 lei.

ALEXANDRU GHIKA, **Opera matematică**, 1968, 955 p., 50 lei.

S. GUIAŞU, **Aplicaţii ale teoriei informaţiei**. Sisteme dinamice. Sisteme cibernetice 1968, 350 p., 17 lei.

A. HALANAY, D. WEXLER, **Teoria calitativă a sistemelor cu impulsuri**, 1968, 313 p., 13 lei.

M. IOSIFESCU şi P. TĂUTU, **Procese stohastice şi aplicaţii în biologie şi medicină**, 1968, 345 p., 22 lei.

BÉLA JANKÓ, **Rezolvarea ecuaţiilor operaţionale în spaţii Banach**, 1969, 298 p., 9 lei.

L. LIVOVSCHI, **Circuite cu contacte de relee**, 1969, 246 p., 9,50 lei.

MANEA MĂNESCU, ANATOL MĂCRIŞ şi VINCENŢIU DUMITRU, **Metode matematice moderne aplicate în planificarea lucrărilor de construcţie şi montaj**, 1969, 256 p., 14 lei.

T. MOROZAN, **Stabilitatea sistemelor cu parametri aleatori**, 1969, 224 p., 8,50 lei.

RADU ROŞCA, **Geometria diferenţială în spaţiul eliptic**, 1969, 208 p., 9,75 lei.

N. RADU, **Inele locale**, vol. I, 1968, 377 p., 19 lei.

SIMION SANIELEVICI, **Opera matematică**, 1968, 298 p., 15,50 lei.

L. SOLOMON, **Elasticitatea liniară**, 1969, 954 p., 46 lei.

I. SUCIU, **Algebre de funcţii**, 1969, 298 p., 7 lei.

G. VRĂNCEANU, **Lecţii de geometrie diferenţială**, vol. IV, 1968, 268 p., 11 lei.

* * * **Relaţiile dintre matematică şi ştiinţele naturii şi societăţii**, 1969, 190 p., 10,50 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 10, P. 1447–1606, BUCUREŞTI, 1969

I. P. Informaţia — c. 3725

43831

Lei 20.—